ARPALAZIO
AGENZIA REGIONALE PROTEZIONE AMBIENTALE DEL LAZIO

Sistema Nazionale per la Protezione dell'Ambiente

REGIONE LAZIO

TEORIA, MISURE E MODELLI DELLA TURBOLENZA E DELLA DISPERSIONE NELLO STRATO LIMITE ATMOSFERICO

Volume 1

Teoria e Modelli dello Strato Limite Atmosferico

Roberto Sozzi
Laura Bennati
Giampietro Casasanta
Marzio Invernizzi

TEORIA, MISURE E MODELLI DELLA TURBOLENZA E DELLA DISPERSIONE NELLO STRATO LIMITE ATMOSFERICO

Volume 1
Teoria e Modelli della Strato Limite Atmosferico

Roberto Sozzi
Laura Bennati
Giampietro Casasanta
Marzio Invernizzi

TEORIA, MISURE E MODELLI DELLA TURBOLENZA E DELLA DISPERSIONE NELLO STRATO LIMITE ATMOSFERICO
Volume n. 1 - Teoria e modelli dello strato limite atmosferico
Roberto Sozzi, Laura Bennati, Giampietro Casasanta, Marzio Invernizzi

ARPA Lazio – 2025
Riproduzione autorizzata citando la fonte
Coordinamento editoriale: ARPA Lazio – Area sistemi operativi e gestione della conoscenza

Foto di copertina
Intrappolamento nel PBL del fumo di un grosso incendio, di Gianmario Bignardi

Elaborazione della copertina e stampa: KREA L'Idea snc - Roma

PRESENTAZIONE

È con grande piacere che metto a disposizione delle istituzioni, della comunità scientifica e di tutti gli attori che operano nel settore ambientale, con particolare riguardo alla qualità dell'aria e alla meteorologia applicata, questa opera frutto di un intenso e prolungato impegno profuso negli anni dall'Agenzia con il contributo di prestigiose collaborazioni.

L'opera, articolata in tre volumi per un totale di oltre 2300 pagine, affronta in modo sistematico e approfondito le basi teoriche, le metodologie di misura e i modelli della turbolenza e della dispersione atmosferica nello strato limite, ambito di studio fondamentale per la comprensione e la gestione dei processi di trasporto e diffusione degli inquinanti in atmosfera.

Oltre al suo valore scientifico, il lavoro si configura come uno strumento tecnico-operativo utile per le attività istituzionali di controllo e monitoraggio ambientale, pianificazione territoriale e gestione delle emergenze, in linea con le funzioni attribuite dalla legge al Sistema Nazionale per la Protezione Ambientale (SNPA) e con gli obiettivi di tutela ambientale e protezione della salute pubblica.

Desidero ringraziare sentitamente tutti coloro che hanno contribuito alla realizzazione di questa pubblicazione: gli autori, i revisori scientifici, i tecnici e i funzionari dell'Agenzia che, con dedizione e competenza, hanno reso possibile la concretizzazione di un progetto editoriale così complesso e ambizioso.

Con l'auspicio che questa opera possa rappresentare un punto di riferimento duraturo, contribuendo alla crescita delle conoscenze, al rafforzamento delle competenze tecniche e scientifiche e al miglioramento delle attività di monitoraggio, valutazione e gestione della qualità dell'aria, auguro agli interessati una proficua lettura.

Tommaso Aureli
Direttore Generale ARPA Lazio

PREMESSA E INQUADRAMENTO METODOLOGICO

Questo libro, atipico in tutti i sensi, richiede alcune spiegazioni preliminari per comprendere da dove è nato e come si è evoluto nel tempo, fino a coinvolgere in questa avventura ben quattro Autori che coprono di fatto tre generazioni diverse. Come *vecchio* del gruppo degli Autori credo tocchi a me spiegare tutto ciò. Prima però, vorrei introdurvi ad alcuni concetti che mi sembrano importanti e successivamente spiegare come questo libro è stato organizzato in modo da consentire al lettore di non *perdersi* nei numerosissimi argomenti trattati.

ALCUNE RIFLESSIONI CHE MI SEMBRANO IMPORTANTI

L'atmosfera è quell'involucro gassoso che circonda tutta la Terra ed è, dunque, il luogo in cui l'uomo nasce, cresce, vive, si muove e lavora. Essa sovrintende alla vita animale e vegetale ed in essa sono *immersi* i manufatti e le opere d'arte che testimoniano in vario modo la storia umana passata ed il livello di civiltà raggiunto. Per essere più precisi, la maggior parte delle attività umane hanno luogo in uno strato d'aria (lo *Strato Limite Atmosferico*) di spessore relativamente limitato, a diretto contatto col suolo e caratterizzato da connotazioni chimico-fisiche che lo rendono facilmente distinguibile dal resto dell'atmosfera. La lenta evoluzione del pianeta, durata milioni di anni, ha progressivamente trasformato la struttura originaria dell'atmosfera fino a renderla l'ambiente ideale per la vita umana, animale e vegetale quale la conosciamo oggi. Tuttavia, la repentina rivoluzione industriale degli ultimi secoli, se da un lato ha prodotto un'accelerazione straordinaria nelle conoscenze scientifiche e tecnologiche e nelle attività industriali, dall'altro ha determinato profondi cambiamenti nello stato dell'atmosfera, cambiamenti tuttora in atto, che destano non poche preoccupazioni. Le attività umane, infatti, hanno fatto sì che venissero immesse in atmosfera (più precisamente proprio in quello strato in cui si sviluppa la vita dell'uomo) sostanze non presenti nella sua composizione originaria e che alcune sostanze, naturalmente presenti in essa, aumentassero pericolosamente la propria presenza. Tutto ciò sta determinando non solo un progressivo cambiamento dello stato chimico e fisico dell'atmosfera, ma sta mettendo in pericolo la stessa vita del pianeta. Questo fenomeno di *contaminazione* dell'ambiente atmosferico viene indicato generalmente come *inquinamento atmosferico* e costituisce ovviamente il paradosso del mondo attuale: la civiltà tecnologica, nata per migliorare l'esistenza dell'uomo, sta diventando essa stessa un pericolo per l'uomo e per l'intero pianeta. È evidente che l'*orologio* della civiltà non può tornare indietro e che il processo di industrializzazione non può essere arrestato. Ma si può cambiare! Ci si può rendere conto dei danni che si producono all'ambiente. Si possono risanare le situazioni compromesse e, soprattutto, si può capire come si dovrebbe operare per conciliare lo sviluppo sociale, tecnologico ed economico con la sostenibilità ambientale. Per raggiungere questo obiettivo è necessario capire:

- cos'è effettivamente l'inquinamento atmosferico,
- perché ha luogo e quali ne sono le cause,
- quali sono i meccanismi che lo producono,
- quali sono gli effetti che ne derivano.

Ricordando quanto affermato dalla Normativa Europea sullo Stato della Qualità dell'Aria, l'inquinamento atmosferico è quella situazione per cui, nella porzione di atmosfera prossima alla superficie terrestre, sono presenti sostanze (gas di vario genere, aerosol e particelle di varia granulometria) a concentrazioni tali da essere superiori a quelle *naturalmente* presenti in aria e tali da poter produrre effetti potenzialmente nocivi e misurabili sulla salute umana, sulla qualità della vita, sulla flora, sulla fauna, sul paesaggio, sui materiali, sui manufatti e sulle opere d'arte.

La causa dell'inquinamento atmosferico è ovvia. Se si escludono gli eventi naturali, come le eruzioni vulcaniche (un esempio è la rovinosa eruzione a carattere esplosivo del vulcano statunitense St. Helens del 18 maggio 1980, con le ben note ripercussioni climatiche), il trasporto a grande distanza delle polveri desertiche e le emissioni di origine biogenetica (rilevanti, ma naturalmente inserite nella vita del pianeta), la maggior parte delle sostanze emesse (gli *inquinanti* appunto) sono il risultato delle attività umane, in particolare delle emissioni dagli autoveicoli (sempre più numerosi e *simbolo distintivo* del benessere raggiunto) e dalle attività industriali in cui i processi di combustione rivestono un ruolo molto importante. Ovviamente, se si azzerassero queste emissioni prodotte *coscientemente* dall'uomo, si annullerebbe

completamente la causa antropica di questo processo degenerativo che affligge l'atmosfera, ma ciò è ben poco probabile, visto che l'uomo non è certo disposto a rinunciare ai benefici di cui attualmente gode (almeno nel mondo industrializzato)! Molto più realistico è pensare ad una *riduzione* delle emissioni derivanti dalle attività umane che consenta di raggiungere un compromesso tra lo sviluppo industriale ed un benessere ambientale (in sostanza raggiungere una *sostenibilità ambientale*).

Prima di procedere, è fondamentale definire un *punto di vista*, cioè un *sistema di riferimento logico e culturale*, con cui analizzare e studiare l'inquinamento atmosferico. Oggigiorno, il punto di vista più frequentemente adottato è quello *antropocentrico*, secondo il quale è l'uomo l'unico soggetto di primaria importanza nell'universo (spesso, l'*uomo* cui si fa riferimento è, in realtà, l'uomo del mondo industrializzato). Secondo questo punto di vista, si ha inquinamento atmosferico se l'atmosfera viene a trovarsi in uno stato chimico-fisico tale da interferire direttamente o indirettamente con la vita dell'uomo: direttamente, se questo stato di cose può danneggiare la salute umana, indirettamente se può disturbare le attività umane o danneggiare manufatti di interesse umano o modificare l'habitat in modo da peggiorare la qualità della vita dell'uomo. Dunque, più o meno esplicitamente, un danno alla flora, alla fauna ed al paesaggio generalmente lo si ritiene importante solo se è in grado di abbassare il grado di vivibilità del territorio in cui si vive e si opera. Ovviamente questo non è necessariamente il miglior punto di vista possibile (non ci vuol molto per rendersene conto), comunque costituisce pur sempre un importante punto di partenza. Seguendolo, si possono definire chiaramente le *cause* e gli *effetti* dell'inquinamento atmosferico.

Seguendo il punto di vista *antropocentrico*, gli *effetti* dell'inquinamento atmosferico risultano essere i danni reali o potenziali, immediati o differiti nel tempo, che affliggono gli organismi umani, la flora, la fauna e che danneggiano le superfici di interesse (manufatti, palazzi, opere d'arte, ecc.) a causa dell'esposizione più o meno prolungata alle sostanze inquinanti (o meglio alla loro concentrazione in aria). Il lavoro di chi si dedica allo studio degli effetti dell'inquinamento atmosferico (epidemiologi, tossicologi, ecofisiologi, ecc.) si può sintetizzare nel determinare il risultato (negativo) derivante, ai vari soggetti esaminati, dall'esposizione ad un dato inquinante. Il risultato *concettuale* del loro lavoro è costituito da una serie di *modelli* che richiedono in *input* l'evoluzione temporale della concentrazione dei vari inquinanti in un punto e che forniscono in *output* il danno previsto sugli organismi umani, la flora, la fauna, ecc. presenti nel punto considerato. Il loro lavoro potrebbe avere anche una valenza *pianificatrice* se tali modelli, invece di essere applicati a situazioni realmente in atto, venissero impiegati per valutare *scenari* ipotetici conseguenti a differenti tipi di progetti di risanamento ambientale, dato che il loro *output* potrebbe contribuire alla scelta di quale piano di risanamento adottare in un'ottica di sostenibilità ambientale. In sintesi, se si è in grado di fornire a tali modelli l'andamento nello spazio e nel tempo della concentrazione dei vari inquinanti, con essi è poi possibile stimarne le conseguenze, che saranno reali se l'*input* è reale oppure saranno prevedibili (*simulazioni*) se il loro *input* è il risultato di uno scenario di risanamento ambientale da valutare.

Le *cause* dell'inquinamento atmosferico (per lo meno quelle che si prendono in considerazione nella speranza di poter agire attivamente su di esse) sono le emissioni derivanti dalle attività umane in generale e da quelle di origine industriale in particolare. Chi si occupa di ciò è interessato a determinare le emissioni prodotte dalle varie sorgenti esistenti sul territorio, a quantificarle e a contabilizzarle, in modo da definire qualitativamente e quantitativamente il *nemico* con cui si sta combattendo. Ciò, tuttavia, non esaurisce l'attività di questi professionisti. Ad essi si affida anche un compito *progettuale* e *pianificatorio*; infatti, dal loro lavoro devono generarsi, almeno concettualmente, anche in questo caso *modelli* in grado di associare ad una situazione ben definita di sorgenti emittenti (*scenari emissivi*) le emissioni dei vari inquinanti da esse derivanti. Se lo scenario è quello attuale, il risultato dovrà coincidere con la contabilizzazione delle emissioni attuali, se lo scenario è, invece, una realtà ipotetica derivante dall'introduzione di variazioni nella distribuzione e nella consistenza attuale delle sorgenti di emissione (cambio di combustibile, cambio di tecnologia, eliminazione di sorgenti, ecc.), il risultato sarà una nuova contabilizzazione delle emissioni che porterà a dire se il piano di intervento esaminato è effettivamente un piano di risanamento o meno.

Per comprendere quanto un piano di risanamento sia veramente efficace è necessario stabilire quale sia la distribuzione nello spazio e nel tempo della concentrazione dei vari inquinanti emessi. Se si riuscisse ad ottenere ciò, i modelli che descrivono gli effetti sarebbero in grado di valutare il danno che in un tale scenario può essere atteso per l'uomo, la flora, la fauna e gli altri elementi di interesse umano. Se, rispetto alla situazione attuale, tali danni risultassero inferiori a quelli attuali, il piano di risanamento in esame sarebbe effettivamente tale e questi modelli riuscirebbero anche a determinarne il peso. Il passaggio logico tra emissioni e concentrazioni non è banale, come frequentemente si vorrebbe far credere. Lo sarebbe se l'atmosfera fosse un contenitore ideale in cui fosse possibile un rimescolamento istantaneo ed omogeneo delle differenti specie inquinanti. In effetti in una tale atmosfera irreale, detta E (g) l'emissione di un generico inquinante, C ($g \cdot m^{-3}$) la sua concentrazione in aria e V (m^3) il volume dell'atmosfera, tra E e C esisterebbe la semplicissima relazione di proporzionalità diretta $C=E/V$. Nulla di più lontano dalla realtà! Le emissioni vengono affidate alle masse d'aria in movimento rapido e turbolento e ne seguono le evoluzioni

nello spazio e nel tempo, venendo trasportate e disperse e subendo, nel loro cammino, complesse reazioni chimiche e fotochimiche, nonché passaggi di fase, capaci di alterare profondamente le caratteristiche chimiche dell'atmosfera. Tutto ciò, che è poi la realtà che quotidianamente si osserva, porta a distruggere la proporzionalità diretta e semplicistica tra emissioni e concentrazioni, evidenziando immediatamente la complessità del problema. Ed è proprio a questa problematica che vengono dedicati i tre volumi che costituiscono questo libro, con l'intenzione dichiarata di presentare ordinatamente, pazientemente (e non pedantemente) ed anche operativamente questa realtà complessa anche se, per tanti versi, affascinante.

L'OBIETTIVO E L'ORGANIZZAZIONE DEL LIBRO.

Risulta evidente come la capacità di stimare la concentrazione dei vari inquinanti in aria derivanti da un dato scenario emissivo sia un elemento chiave nella comprensione dell'inquinamento atmosferico e nella messa a punto di qualsiasi politica di monitoraggio e di risanamento. Questa capacità è quindi il collegamento essenziale tra il lavoro di chi si occupa di emissioni ed il lavoro di chi ne studia i danni (che, in ultima analisi, è l'unico elemento importante per quantificare l'inquinamento dell'aria, almeno seguendo il punto di vista *antropocentrico*). Col passare degli anni si è venuta ad accumulare una gran moltitudine di conoscenze teoriche e sperimentali che, progressivamente, si sono aggregate ed organizzate in una forma logica congruente, dando luogo ad una disciplina che può essere indicata col termine generico di *Modellizzazione della Dispersione degli Inquinanti in Aria* e che costituisce l'obiettivo principale di questo libro. A questa disciplina scientifica si dedicano coloro che focalizzano la propria attività professionale all'approfondimento delle conoscenze scientifiche, coltivando la ricerca nel settore. A costoro si affianca poi una schiera più o meno numerosa di professionisti il cui compito consiste nel controllare la qualità dell'aria e nel predisporre e valutare azioni di risanamento. L'esperienza maturata in questi ultimi anni ha evidenziato una realtà affascinante e complessa che ha resistito ad ogni forma di semplificazione e di banalizzazione. Il problema che ci si accinge ad affrontare è complesso e non semplificabile oltre un certo limite e dal saperlo affrontare in modo corretto dipende la possibilità di essere in grado di simulare realisticamente scenari differenti di risanamento ambientale e quindi di supportare attivamente gli interventi miranti alla sostenibilità ambientale.

Questo libro è dedicato a chi desidera operare professionalmente nella modellizzazione della dispersione degli inquinanti in aria, sia nell'ambito della Ricerca, che nell'ambito del controllo e del monitoraggio della qualità dell'aria, cercando di coprire in maniera esauriente le varie tematiche che si incontrano in questa professione. La numerosità degli argomenti trattati e la loro complessità hanno creato non poche difficoltà durante la sua redazione che è iniziata nel lontano 2004 mentre svolgevo (spero non troppo male) la mia attività professionale presso l'Agenzia Regionale della Protezione dell'Ambiente del Lazio (ARPA Lazio), attività focalizzata proprio allo studio della micrometeorologia, alla dispersione degli inquinanti in atmosfera e al controllo della Qualità dell'Aria regionale. Nell'affrontare i compiti istituzionali in ARPA Lazio è risultato subito chiaro come fosse necessario apprendere e mettere in campo conoscenze scientifiche e tecniche molto varie e complesse nel campo della Meteorologia della Bassa Troposfera (lo *Strato Limite Atmosferico*), nelle tecniche di misura della capacità disperdente dell'atmosfera, nelle tecniche di modellizzazione della dispersione degli inquinanti in aria e della chimica dell'atmosfera. Per far fronte a queste esigenze, necessarie per affrontare i problemi quotidiani di inquinamento atmosferico, poco o nulla era disponibile in maniera organizzata. In particolare, i giovani colleghi impegnati con me in questo lavoro raramente disponevano di conoscenze universitarie adeguate e i testi con cui realizzare la loro istruzione erano pressoché inesistenti, anche in lingua inglese. In questi anni, numerosissimi sono stati i corsi che ho dovuto tenere su questi argomenti per consentire ai giovani colleghi del mondo delle diverse ARPA italiane ed anche a vari giovani ricercatori (universitari e non) di entrare operativamente e professionalmente in questo mondo e proprio da questi corsi a poco a poco è nato questo libro. Era inevitabile che in qualche modo questa *creatura* nata dalla necessità contingente sfuggisse ad ogni forma di controllo e, dopo circa 20 anni, mi trovo ad aver scritto un numero di pagine tale da rendere impossibile la loro raccolta in un unico libro. Aiutato dalla sempre presente collega Laura Bennati di Arpa Lazio con cui abbiamo condiviso ufficio, preoccupazioni e anche qualche bella soddisfazione, da uno storico amico e collega del CNR-ISAC di Roma Tor Vergata, Giampietro Casasanta, con cui si è fatta ricerca nel settore nonostante un'infinità di complicazioni tecniche e burocratiche, e dal giovanissimo entusiasta e iperattivo Marzio Invernizzi ricercatore presso il Laboratorio Olfattometrico del Dipartimento di Chimica, Materiali e Ingegneria Chimica G. Natta del Politecnico di Milano, con cui ho condiviso la scoperta e la passione per il mondo delle fluttuazioni di concentrazione, finalmente ho preso il coraggio a due mani ed ho coinvolto tutti loro nella completa rilettura, riorganizzazione e riscrittura di questo *mostro*. Alla fine, per comodità, abbiamo unanimemente deciso di suddividere questo libro in tre volumi distinti, ciascuno con una propria individualità. Il libro (cioè l'insieme dei tre volumi) è concettualmente unico e rappresenta il cammino che un professionista ed un ricercatore dovrebbe fare (secondo noi) per conoscere ed operare nell'ambito dell'inquinamento atmosferico ed

i tre volumi rappresentano tre aspetti del problema e, probabilmente, anche tre specializzazioni distinte che dovrebbero coesistere in un gruppo che si vuole occupare dell'inquinamento atmosferico. Essi sono stati scritti ricordando che i probabili lettori non saranno necessariamente studenti universitari che possono dedicare serenamente il proprio tempo a seguire un corso e a studiarne i contenuti, ma saranno probabilmente dei professionisti che inevitabilmente dovranno dedicarsi allo studio dell'argomento sfruttando il proprio tempo libero dopo aver affrontato durante le ore lavorative i problemi più vari. Per questo non si è stati parchi di parole e si è cercato di mantenere uno stile discorsivo e comprensibile, senza omettere i dettagli matematici indispensabili per la comprensione. Il risultato non brilla per sinteticità, ma speriamo che sia comprensibile anche a chi, stanco dopo molte ore di lavoro passate a combattere in ufficio con la quotidianità, nella propria casa e senza alcun aiuto, si mette a studiare per aumentare le proprie capacità professionali.

Il libro, come ho detto, si compone di tre volumi, uno la logica prosecuzione dell'altro, e accompagnano il lettore nella lunga strada che parte dalla conoscenza di quella parte della Bassa Troposfera (nota come *Atmospheric Boundary Layer, PBL*) in cui si sviluppa ed è confinato l'inquinamento atmosferico e giunge alla fine allo studio della dispersione degli inquinanti ed alla loro modellizzazione.

Il Primo Volume dal titolo: "*Teoria e Modelli dello Strato Limite Atmosferico"* è totalmente dedicato alla descrizione fisica del *PBL*, cioè di quella porzione di Troposfera in cui sussistono i principali fenomeni di inquinamento atmosferico. Prendendo le mosse da una descrizione fenomenologica del *PBL*, dopo aver introdotto alcune nozioni di base come il concetto di temperatura potenziale, l'equazione idrostatica, la stabilità atmosferica, e dopo aver richiamato alcune conoscenze sulla teoria dei fluidi viscosi, viene sviluppato un modello fluidodinamico del *PBL* basato sulle variabili meteorologiche istantanee com'è naturale nella Fisica. Questo modello, rigoroso dal punto di vista fisico, risulta sostanzialmente inapplicabile nella pratica a causa delle sue intrinseche caratteristiche caotiche evidenziate nella realtà del *PBL* dalla turbolenza meccanica e convettiva che lo caratterizza e che è la causa prima della dispersione degli inquinanti in aria. Verificata, poi, l'impossibilità di utilizzo della Teoria del Caos come mezzo per modellizzare il *PBL*, si giustifica pragmaticamente l'impiego di una descrizione statistica dei campi meteorologici che porta ad un nuovo modello fluidodinamico questa volta operativo ed utilizzato nella maggior parte delle applicazioni pratiche. Oltre a ciò, vengono presentati i fondamenti degli scambi radiativi che si vengono ad instaurare nell'atmosfera e che costituiscono la sorgente energetica che tiene attiva la turbolenza. Per riassumere, il primo volume della serie vorrebbe mostrare al lettore che modellizzare il *PBL* non solo è possibile ma è necessario se si vogliono trattare in modo corretto i vari aspetti della dispersione degli inquinanti e che la modellistica meteorologica non è un'attività aliena di poco interesse per l'operatore del settore, ma al contrario è indispensabile per la comprensione dei fenomeni di inquinamento che quotidianamente ci troviamo ad osservare. Inoltre solo l'impiego di un modello matematico può consentire di prevedere lo stato e l'evoluzione futura del *PBL* e, in ultima analisi, la previsione dello stato di qualità di un territorio. In sostanza, è con queste nozioni che abbiamo realizzato in ARPA la parte meteorologica del sistema di previsione della Qualità dell'Aria nel Lazio.

Il Secondo Volume dal titolo: "*Misure e stima delle variabili caratteristiche"* si pone come obiettivo primario quello di fornire al lettore una conoscenza dettagliata della Teoria della Misura applicata alle misure meteorologiche, micrometeorologiche e chimiche che, si spera, dovrebbe sfatare alcuni luoghi comuni che, purtroppo, tuttora resistono anche nell'ambito degli operatori dell'inquinamento atmosferico. L'impiegabile sfiducia nei confronti della Fluidodinamica espressa implicitamente o esplicitamente da chi si occupa dell'inquinamento atmosferico dovrebbe essere stata minata alle fondamenta dal Primo Volume. Qui ci preme dimostrare come una misura, perché sia utile, deve essere realizzata con strumenti adeguati conoscendone le caratteristiche sia statiche che dinamiche, queste ultime spesso ben poco note. Nel primo volume la turbolenza del *PBL* è stata quantificata da una serie di parametri quali la *friction velocity*, la velocità convettiva di scala, il flusso turbolento di calore sensibile e latente, la lunghezza di Monin-Obukhov ed altri ancora, parametri che, all'apparenza, restavano un po' misteriosi visto che non era così ovvio come misurarli o stimarli. In questo volume, oltre ad una descrizione puntigliosa delle tecniche di misura che possono essere messe in atto per misurare le variabili che caratterizzano il *PBL* (comprese quelle chimiche), vengono illustrate nel dettaglio tutte quelle tecniche che consentono la stima di quelle variabili che non possono essere misurate direttamente. Nelle situazioni di tutti i giorni è quasi sempre impossibile disporre di tutte le misure e di tutti gli strumenti necessari per poter stimare direttamente la capacità disperdente dell'atmosfera e quindi … bisogna arrangiarsi, cioè bisogna abbinare teoria e fantasia per mettere a punto metodi di stima efficaci e spesso insoliti. Questo è stato fatto negli ultimi decenni in tutte le parti del mondo e i successi e gli insuccessi sono stati puntigliosamente documentati nelle riviste scientifiche di settore. Da questa marea di articoli sono state individuate e descritte in questo volume quelle tecniche che dovrebbero consentire, nella maggior parte delle situazioni di pratico interesse, di stimare realisticamente la capacità disperdente del *PBL*. A questo punto, dovrebbe essere chiaro come caratterizzare il *PBL* sia

nelle sue caratteristiche medie che per quanto riguarda le relative caratteristiche turbolente, quantificando in tal modo la sua capacità disperdente.

Il Terzo e ultimo Volume del libro, dal titolo: "*Modelli di Dispersione degli inquinanti in aria"*, facendo tesoro di quanto presentato nei primi due volumi, si dedica finalmente alla descrizione quantitativa della dispersione degli inquinanti nel *PBL*, alla loro deposizione al suolo (secca ed umida) e alla loro trasformazione chimica. Oramai le forzanti meteorologiche e micrometeorologiche che determinano la dispersione in aria degli inquinanti dovrebbero essere note, quantificabili e misurabili (ci abbiamo dedicato ben due volumi del libro!) e a questo punto ci focalizziamo alla presentazione dei modelli matematici che descrivono, a vari livelli di complessità, come i vari inquinanti emessi dalle diverse sorgenti vengono trasportati dai campi medi, vengono diffusi dalla turbolenza atmosferica, vengono depositati al suolo a causa dei fenomeni di deposizione e come reagiscono tra loro durante la dispersione in aria. Non è stato semplice sviluppare questa parte del lavoro e chi lo leggerà noterà due aspetti importanti che derivano dalla nostra attività e provenienza professionale. Il primo aspetto è costituito dal fatto che l'impronta della trattazione è decisamente modellistica. Più che studiare le varie sostanze inquinanti e le varie tipologie di inquinamento atmosferico, ci si dedica a descrivere nel dettaglio come le sostanze inquinanti, una volta emesse, si disperdono nel *PBL*, si depositano al suolo e reagiscono tra loro, costruendo modelli di varia complessità che effettivamente possono essere utilizzati (e lo sono) nella pratica corrente. Di tutti i modelli presentati, sicuramente è al Modello Lagrangiano a Particelle che si dedica un'attenzione particolare, vista la sua versatilità e la sua innata capacità di interiorizzare direttamente tutte le informazioni relative alla meteorologia media ed alla turbolenza del *PBL* anche quando l'area di indagine è complessa e fortemente non omogenea. Il secondo aspetto è che la chimica dell'atmosfera è stata trattata in maniera molto limitata. È un campo di ricerca affascinante la chimica dell'atmosfera, ma complesso ed in continua evoluzione ed intimidisce il povero modellista di provenienza non chimica. In questo caso abbiamo cercato di presentare l'essenziale e l'indispensabile, consci che esistono riferimenti bibliografici ben più autorevoli che affrontano questa tematica in modo approfondito. Basti ricordare a tal proposito il monumentale libro di Seinfeld e Pandis. Infine vorrei sottolineare come l'ultimo capitolo del libro sia stato dedicato completamente ad un argomento affascinante e di grandissimo interesse attuale, ma comunemente trascurato. Il *casus belli* che ha scatenato il mio interesse (e quello dei miei collaboratori) sull'argomento è costituito da una turbolenta riunione che anni orsono (doveva essere il 2014 se ricordo bene) ebbi con una bellicosa rappresentanza della popolazione di un sobborgo dell'area nord di Roma che aveva la sfortuna di stare nelle immediate vicinanze di un impianto di trattamento dei rifiuti e che era costantemente bersaglio di una pesante e persistente molestia olfattiva. Quando minacciosamente il rappresentante del comitato (costituito da oltre un centinaio di persone) mi chiese perché mai io, come Arpa Lazio, non facessi nulla per por fine una volta per tutte a quel supplizio, in quella atmosfera surreale che si era stabilita quella sera, senza volerlo mi trovai a rispondere: "*Ma perché non so cosa misurare e conosco ben poco il problema. Signori, devo rimettermi a studiare*!". E la risposta del comitato fu corale: "*Ma cosa aspetta, allora*! *E si sbrighi*.". E ci mettemmo effettivamente a studiare e scoprimmo una realtà molto complessa e oggettivamente affascinante (non certo per chi è soggetto alla molestia olfattiva) che è poi la stessa che riguarda le problematiche tossicologiche. L'argomento in questione è quello delle fluttuazioni di concentrazione delle diverse sostanze disperse in aria che sono inequivocabilmente la causa dei problemi tossicologici e di molestia olfattiva. Originariamente questo argomento era assente nelle bozze precedenti del libro, ma dopo quell'evento, grazie allo studio e alla stretta collaborazione con il Laboratorio Olfattometrico del Politecnico di Milano, ed in particolare con Marzio Invernizzi e con la vulcanica Professoressa Laura Capelli, qualcosa si è imparato e si è capito che il libro non poteva avere come unico scopo l'inquinamento atmosferico, ma doveva comprendere anche le problematiche relative alle fluttuazioni di concentrazione e ai loro effetti sull'organismo umano. Come misurarle, come modellizzarle correttamente, questo era il problema che abbiamo cercato di affrontare in quest'ultimo capitolo del libro, in cui Marzio e i colleghi (o meglio le colleghe) del Politecnico di Milano sono stati gli elementi trainanti. E a questo punto il percorso logico che ci si era prefissi risulta concluso.

È tradizione consolidata in tutti i libri di carattere scientifico concludere ogni capitolo con una serie più o meno lunga di esercizi proposti al lettore. Anche se questa consuetudine ha ovviamente solide fondamenta didattiche, tuttavia spesso ci si domanda se tali esercizi abbiano una reale utilità o siano solo un inutile sfoggio di erudizione dell'autore. In questo libro si è preferito adottare questa consuetudine con molta prudenza, limitando il numero di esercizi là dove effettivamente avevano senso ed inserendo direttamente nel testo alcuni esercizi dedicati al consolidamento delle nozioni presentate.

Per orientare il lettore nella consultazione (e sperabilmente nello studio) degli argomenti trattati nel libro, consigliamo vivamente di prendere attenta visione dell'indice dei tre volumi che lo compongono, in modo da individuare senza troppi dubbi a quale volume riferirsi e cosa effettivamente prendere in considerazione. Inoltre, nel Terzo Volume sono raccolti tutti i riferimenti bibliografici citati ed utilizzati nell'intero libro. E qui abbiamo fatto una scoperta sconvolgente! Nel cercare i vari articoli, rapporti di ricerca e

libri ci siamo resi conto con sorpresa che alcuni, spesso i più importanti, sono attualmente di difficile reperimento o addirittura non sono più reperibili. Come osservava Giampietro, la base di tutto quanto abbiamo raccolto nel libro sta in un numero rilevante di lavori di ricerca di vario tipo che si collocano temporalmente dal 1960 al 1990. Il tempo e la dispersione di questi lavori in numero rilevante di riviste scientifiche non gioca a favore della loro reperibilità, come non giova alla loro reperibilità il fatto che alcuni lavori fondamentali siano stati trattati in rapporti interni di organizzazioni attualmente non più esistenti. Siamo riusciti, spesso anche in modo fortunoso, a raccogliere tutti i lavori citati nei Riferimenti Bibliografici. Sarebbe bello poter condividere con voi lettori interessati tutto ciò, ma non sappiamo proprio come fare nella pratica, viste le intricate leggi del copyright attualmente in vigore in tutto il mondo. Ogni buon suggerimento in proposito è ben accetto!

E per concludere …..

La materia trattata è vasta, non sempre intuitiva, sicuramente complessa e, come già affermato, non c'è spazio per troppe scorciatoie. Come in tutte le cose, anche qui è necessario dotarsi di una buona dose di pazienza, determinazione e disciplina, il tutto permeato da un ingrediente fondamentale, l'amore per il proprio lavoro, cosa che uno splendido amico e professore di oceanografia con cui ho avuto la fortuna e l'onore di collaborare all'Università di Bogotà, ispiratore di tutta questa fatica, sintetizzava quotidianamente con questa frase:

Si tu quieres hacer bien a tu trabajo. ¡Ámalo siempre!

A nome di Tutti gli Autori

Roberto Sozzi

Rieti, Roma, Milano, 2024

RINGRAZIAMENTI

È doveroso ringraziare tutti coloro che direttamente o indirettamente hanno consentito che questa folle impresa giungesse alla conclusione. Ma chi ringraziare se la realizzazione di questo lavoro ha occupato circa un ventennio? In effetti non è cosa semplice ma ci proviamo lo stesso, scusandoci con chi inevitabilmente dimenticheremo.

Per prima cosa vogliamo ringraziare ARPA Lazio che è stato l'ambiente ideale in cui prevalentemente si è sviluppata la scrittura del libro ed in particolare i Direttori che si sono succeduti in tutti questi anni (Bruno Placidi, Rosaria Marino, Corrado Carrubba, Marco Lupo, Tommaso Aureli) e i colleghi (ed ex colleghi) Alessandro Domenico Di Giosa, Andrea Bolignano, Matteo Morelli, Silvia Barberini, Massimo Magliocchetti, Sesto Damizia, Francesco Troiano, Aldo Di Giulio, Stefano Listrani, Tina Fabozzi e ... il grande Attilio Lestini (lui sa perché).

A farci stare coi piedi per terra ci hanno pensato i meravigliosi colleghi (e colleghe) del DEP Lazio (Dipartimento di Epidemiologia del Servizio Sanitario Regionale) ed in particolare l'amico e maestro Francesco Forastiere, Francesca de' Donato, Carla Ancona, Massimo Stafoggia e Giulia Cesaroni a cui vanno i nostri più sentiti ringraziamenti. Con loro, con Eugenio Donato (Comune di Roma) e con Aldo Palombo (Regione Lazio) abbiamo cercato di mettere in pratica, giorno dopo giorno, tutto quello che abbiamo descritto nel libro.

Infine, ringraziamo per il loro costante sostegno tutti i ricercatori del CNR-ISAC ed in particolare Stefania Argentini e Igor Petenko, oltre a tutti i docenti e ricercatori del Laboratorio Olfattometrico del Dipartimento di Chimica, Materiali e Ingegneria Chimica "Giulio Natta" del Politecnico di Milano, ed in particolare le professoresse Selena Sironi e Laura Capelli, che con il loro costante entusiasmo hanno consentito che questa lunga avventura giungesse finalmente al suo traguardo finale.

PREMESSA
VOLUME 1

La conoscenza del *Planetary Boundary Layer* (*PBL*), cioè di quella parte della bassa Troposfera a diretto contatto col suolo, è indispensabile per poter comprendere il modo, spesso bizzarro, con cui si disperdono in aria gli inquinanti. Dato che lo scopo principale di questo lavoro è proprio lo studio della dispersione degli inquinanti in aria, era logico ed inevitabile iniziare questo lungo percorso partendo proprio dallo studio di questa parte di atmosfera, cioè dallo studio di come variano nello spazio e nel tempo le sue caratteristiche.

In questo Volume si partirà da una visione fenomenologica di questo strato di Troposfera per cercare di capire cosa lo differenzia dal resto della Troposfera. Una volta individuate le grandezze fisiche che ad ogni istante ne descrivono lo stato, si svilupperà un modello fisico che le descrive, impiegando allo scopo le leggi di conservazione della Fisica. Di fatto, ciò che si otterrà è un modello matematico capace, almeno in teoria, di descrivere lo stato di queste variabili e di prevederne l'evoluzione nel tempo. Tuttavia, ciò che si constata immediatamente è che il modello che ne deriva, logico e rigoroso, è altamente non lineare e con spiccate caratteristiche caotiche, rendendolo di fatto inapplicabile ai fini pratici. In realtà, ciò che emerge nella sua prepotente chiarezza è la turbolenza che impera incontrastata nel *PBL* e che determina come gli inquinanti in essa introdotti vengano trasportati e soprattutto dispersi. La presenza della turbolenza nel *PBL*, ben visibile sperimentalmente, ha stimolato decenni di studi che hanno portato, alla fine, ad assimilare le caratteristiche caotiche tipiche della turbolenza a realizzazioni di processi stocastici. E tutto ciò, che costituisce l'eredità lasciataci di grandi Fluidodinamici Taylor, Reynolds e Kolmogorov (tra gli altri), ha condotto finalmente ad un modello logico, matematico ed infine numerico con cui oggi siamo in grado di descrivere e prevedere con sufficiente realismo lo stato e l'evoluzione sia delle caratteristiche medie del *PBL* che lo stato e l'evoluzione della turbolenza in esso presente.

In questo primo Volume studiamo con un certo dettaglio tutto ciò, cercando di comprendere nel profondo i meccanismi che portano alla turbolenza e che la mantengono attiva durante il ciclo giornaliero di immissione di energia solare nel sistema atmosferico. Gli argomenti verranno trattati con un certo rigore, fornendo al lettore tutti i dettagli per la loro comprensione e per il loro utilizzo pratico. Come si noterà, l'obiettivo principale di questo volume è proprio il dimostrare che questo meraviglioso sistema caotico in qualche modo si può dominare, modellizzandolo efficacemente. E questo è un punto fondamentale, il vero obiettivo di questa prima parte del lavoro in cui ci siamo imbarcati. Dobbiamo essere consci quindi che la dispersione degli inquinanti in aria non è un evento in qualche modo miracoloso e imponderabile, ma è l'inevitabile conseguenza dei moti medi delle masse d'aria nei pressi del suolo (entro il *PBL*, insomma) e, soprattutto, del livello di turbolenza presente in essa, cioè della sua capacità disperdente. Modellizzare il *PBL* si può e si deve se si vuole poi ricostruire e prevedere correttamente la dispersione degli inquinanti in aria con l'obiettivo di combattere l'inquinamento atmosferico. Sarà compito del *Volume 2* capire come misurare e stimare le variabili meteorologiche e la turbolenza del *PBL* e sarà compito del *Volume 3* mostrare come descrivere l'evoluzione nello spazio e nel tempo della concentrazione delle specie inquinanti introdotte in aria. Ma per arrivare a tutto ciò non ci sono scorciatoie, bisogna passare attraverso quello che nelle prossime pagine vi presenteremo.

Gli Autori
Rieti, Roma, Milano - 2024

INDICE – VOLUME 1

1. FONDAMENTI FISICI E FENOMENOLOGICI 1

1.1 LE VARIABILI ED ALCUNI CONCETTI DI BASE 5

1.1.1 Le variabili cinematiche 5

1.1.2 La temperatura 8

1.1.3 La pressione 8

1.1.4 L'equazione di stato dei gas perfetti 9

1.1.5 Le caratteristiche dell'aria secca 10

1.1.6 Il concetto di concentrazione di una sostanza in aria 13

1.1.6.1 La concentrazione di massa 13

1.1.6.2 Il rapporto di mescolanza 14

1.1.6.3 La densità molecolare 15

1.1.6.4 La concentrazione di sostanze non gassose 16

1.1.7 Le caratteristiche dell'aria umida 16

1.1.8 L'equazione idrostatica 19

1.1.9 Considerazioni termodinamiche e stabilità 21

1.1.9.1 La temperatura potenziale 21

1.1.9.2 La stabilità statica 24

1.2 LE CARATTERISTICHE DI UN FLUIDO VISCOSO 28

1.2.1 Il moto dei fluidi non viscosi 28

1.2.2 Il moto dei fluidi viscosi 28

1.2.2.1 Il tensore degli sforzi viscosi 30

1.2.2.2 Gli effetti del tensore degli sforzi viscosi 32

1.2.3 Il moto turbolento 37

1.3 LA FENOMENOLOGIA TIPICA DEL PBL 42

1.3.1 Il *PBL* convettivo 44

1.3.2 Il *PB*L stabile 52

1.3.3 Il ciclo giornaliero del *PBL* 54

1.4 CONCLUSIONI 56

PROBLEMI 57

2. IL MODELLO FLUIDODINAMICO DEL PBL 61

2.1 ALCUNI STRUMENTI MATEMATICI DI BASE 63

2.1.1 Lo sviluppo in serie di Taylor e la predizione numerica 63

2.1.2 La derivata materiale o totale 64

2.1.3 La particella ed i campi Lagrangiani 67

2.1.4 Le peculiarità di un sistema di riferimento non inerziale 68

2.2 IL MODELLO PER LE VARIABILI ISTANTANEE 69

2.2.1 La conservazione della massa 69

2.2.1.1 La formulazione di base 70

2.2.1.2 Alcune semplificazioni 71

2.2.2 La conservazione della quantità di moto 73

2.2.2.1 Le equazioni di Navier-Stkes 73

2.2.2.2 Le equazioni di Navier-Stokes adimensionali 78

2.2.3 L'equazione di stato dei gas 79

2.2.4 La prima legge della termodinamica 80

2.2.5 La conservazione dell'umidità 82

2.2.6 La conservazione di una specie chimica 83

2.2.7 Riepilogo delle equazioni 84

2.3 IL MODELLO E LA TURBOLENZA 85

2.3.1 La non linearità delle equazioni prognostiche 87

2.3.2 Forte sensibilità alle condizioni iniziali 89

2.3.3 Caratteristiche caotiche del modello di atmosfera 90

2.3.4 L'interpretazione statistica del modello di atmosfera 94

PROBLEMI 97

3. DESCRIZIONE STATISTICA DELLA TURBOLENZA 99
3.1 ANALISI NEL DOMINIO DEL TEMPO 99
3.1.1 Le variabili meteorologiche e le variabili stocastiche 100
3.1.1.1 La probabilità 101
3.1.1.2 La funzione di distribuzione cumulata 101
3.1.1.3 La funzione di densità di probabilità 102
3.1.1.4 La media, la varianza ed i momenti 104
3.1.1.5 Alcune distribuzioni notevoli 107
3.1.1.6 Il cambio delle variabili 108
3.1.1.7 La stima campionaria della media e dei momenti centrali 109
3.1.1.8 La dipendenza tra variabili stocastiche 111
3.1.1.9 Il Teorema del Limite Centrale 114
3.1.1.10 Il La distribuzione gaussiana multivariata 115
3.1.2 I Processi stocastici 116
3.1.2.1 Processi stocastici: concetti base 117
3.1.2.2 Processi stocastici: le funzioni di covarianza e di correlazione 119
3.1.2.3 Processi stocastici stazionari ed ergodici 121
3.1.3 I campi stocastici 125
3.1.3.1 Le statistiche one-point 126
3.1.3.2 Le statistiche N-point 127
3.1.3.3 La stazionarietà statistica, l'omogeneità e l'isotropia 128
3.1.3.4 Alcune considerazioni sui campi isotropi 129
3.1.4 Il modello di Reynolds 133
3.1.4.1 L'ipotesi di Reynolds e la definizione di media 134
3.1.4.2 L'ipotesi di Taylor o del congelamento della turbolenza 137
3.1.4.3 L'Energia Cinetica Turbolenta 140
3.1.4.4 I flussi cinematici e i flussi turbolenti 141
3.1.4.5 I parametri caratteristici della turbolenza atmosferica 146
3.2 ANALISI NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE 148
3.2.1 L'analisi spettrale di processi stocastici 149
3.2.1.1 Concetti di base 149
3.2.1.2 Lo spettro streamline 155
3.2.1.3 I cross-spettri 155
3.2.1.4 Metodi alternativi per determinare le densità spettrali 157
3.2.2 L'analisi spettrale dei campi stocastici 158
3.2.2.1 Concetti di base 158
3.2.2.2 Considerazioni sulla misura dello spettro della velocità 160
3.2.2.3 Conseguenze dell'isotropia 161
3.2.3 Spettri scalari 161
3.3 BASI TEORICHE DELLA TURBOLENZA LAGRANGIANA 162
3.3.1 Le particelle Lagrangiane 162
3.3.2 Concetti generali di statistica Lagrangiana 163
3.3.2.1 Le densità di probabilità 163
3.3.2.2 I momenti 164
3.3.2.32 Il tempo integrale Lagrangiano di Scala 165
3.3.3 Autocorrelazione e spettri in condizioni stazionarie e omogenee 165
3.3.4 Teoria Lagrangiana di Taylor 168
3.3.4.1 Teoria statistica della diffusione turbolenta 168
3.3.4.2 Rappresentazione spettrale della Teoria di Taylor 172
PROBLEMI 174

4. LE SCALE DELLA TURBOLENZA 177
4.1 PREMESSA CONCETTUALE 178
4.2 LA TURBOLENZA LOCALMENTE ISOTROPA 181
4.3 LE IPOTESI DI KOLMOGOROV 183
4.3.1 La Prima Ipotesi di Kolmogorov 184
4.3.2 La Seconda Ipotesi di Kolmogorov 186
4.3.3 Evoluzioni delle Ipotesi di Kolmogorov 188
4.4 CONSEGUENZE DELLE IPOTESI DI KOLMOGOROV NEL DOMINIO DEL TEMPO 189

4.4.1 Statistiche Euleriane delle differenze di velocità 189
4.4.1.1 L'Universal Equilibrium Range 189
4.4.1.2 L'Inertial Subrange 190
4.4.2 Le correlazioni Euleriane della velocità 191
4.4.2.1 Statistiche two-point ed isotropia 192
4.4.2.2 La microscala di Taylor 192
4.4.2.3 Implicazioni delle Ipotesi di Kolmogorov 193
4.4.2.4 Equazioni dinamiche per correlazioni e funzioni di struttura 193
4.5 L'ANALISI SPETTRALE E LE IPOTESI DI KOLMOGOROV 196
4.5.1 Isotropia locale ed Ipotesi di Kolmogorov 197
4.5.2 Un modello spettrale 198
4.6 LA STRUTTURA LOCALE DEI CAMPI DI TEMPERATURA 200
4.6.1 Considerazioni di base 200
4.6.2 Il tasso di dissipazione delle disomogeneità termiche 201
4.6.3 Le ipotesi di Kolmogorov per il campo di temperatura 202
4.7 LE IPOTESI DI KOLMOGOROV E LA VISIONE LAGRANGIANA DELLA TURBOLENZA 204
4.7.1 Caratteristiche statistiche Lagrangiane delle differenze di velocità 204
4.7.2 Considerazioni spettrali Lagrangiane 205
4.7.3 Caratteristiche del campo di accelerazione 207
4.8 SINTESI OPERATIVA DELL'ANALISI SPETTRALE 208
4.8.1 Analisi Spettrale Euleriana 208
4.8.2 Analisi Spettrale Lagrangiana 211
4.8.3 Il fattore di rallentamento di Corrsin e la costante C_0 211
PROBLEMI 214

5. MODELLO OPERATIVO DEL PBL 215
5.1 LE PROPRIETÀ DELLA MEDIA 216
5.2 LE EQUAZIONI PER LE VARIABILI MEDIE 218
5.2.1 L'equazione di stato dei gas 218
5.2.2 L'equazione di continuità 219
5.2.3 Le equazioni di Navier-Stokes 220
5.2.3.1 Mediazione delle equazioni 220
5.2.3.2 L'approssimazione di Boussinesq 223
5.2.3.3 Il modello idrostatico e non idrostatico 224
5.2.3.4 Riepilogo delle equazioni di moto 225
5.2.4 L'equazione della temperatura potenziale virtuale 227
5.2.5 Le equazioni per l'umidità 228
5.2.6 Le equazioni per le specie chimiche 229
5.2.7 La divergenza dei flussi turbolenti 230
5.2.8 Le equazioni fluidodinamiche dell'atmosfera 231
5.2.9 Ancora l'Ipotesi di Taylor 234
5.3 LE EQUAZIONI PER I MOMENTI DI SECONDO ORDINE 235
5.3.1 Le equazioni per le varianze 236
5.3.1.1 La varianza delle componenti cartesiane della velocità 236
5.3.1.2 La varianza della temperatura potenziale virtuale 239
5.3.2 Gli stress di Reynolds e i flussi di calore 241
5.3.3 L'energia cinetica turbolenta 244
5.3.3.1 L'equazione prognostica 244
5.3.3.2 I termini dell'equazione prognostica 245
5.3.3.3 Interazione dell'energia cinetica media con la turbolenza 248
5.3.4 L'energia potenziale turbolenta 248
5.3.4.1 La definizione di Energia Potenziale Turbolenta 249
5.3.4.2 L'equazione prognostica per l'Energia Potenziale Turbolenta 249
5.3.5 L'energia Totale Turbolenta 250
5.3.6 I Numeri di Richardson 251
5.4 IL PROBLEMA DELLA CHIUSURA 255
5.5 I METODI DI CHIUSURA LOCALE 259
5.5.1 La chiusura di ordine zero 259
5.5.2 La chiusura di ordine un mezzo 259

5.5.3 La chiusura del primo ordine 250
5.5.3.1 I coefficienti di diffusività turbolenta 260
5.5.3.2 Alcune semplificazioni notevoli 272
5.5.4 La chiusura di ordine uno e un mezzo e due 276
5.5.4.1 La chiusura di Mellor e Yamada 276
5.5.4.2 La chiusura E-ε 291
5.5.4.3 Osservazioni 292
5.5.5 Le chiusure di ordine superiore 292
5.6 METODI DI CHIUSURA NON LOCALE 293
5.6.1 Le basi logiche della chiusura non locale 294
5.6.2 Lo schema di Blackadar 298
5.6.3 Lo schema di Pleim e Chang 301
5.6.3.1 La formulazione originale 301
5.6.3.2 La formulazione attuale 303
5.6.4 Lo schema di Stull 306
5.6.4.1 La Transilient Matrix 306
5.6.4.2 La determinazione dei coefficienti della Transilient Matrix 308
5.6.4.3 L'implementazione del metodo 310
5.6.4.4 Il rimescolamento orizzontale 312
5.7 VARIE FORME DELLA COORDINATA VERTICALE 313
5.7.1 Le coordinate terrain-following 313
5.7.2 Alcune relazioni preliminari 316
5.7.3 La nuova forma delle equazioni fluidodinamiche 317
5.7.3.1 L'equazione di continuità 317
5.7.3.2 Le equazioni di Navier-Stokes 318
5.7.3.3 Le equazioni prognostiche per gli scalari 320
5.8 OSSERVAZIONI CONCLUSIVE 321
PROBLEMI 322

6. ANALISI ENERGETICA DEL PBL 325
6.1 LA PROPAGAZIONE RADIATIVA DI ENERGIA 326
6.1.1 Elementi di base 326
6.1.2 Considerazioni geometriche e nomenclatura 329
6.1.3 Nozioni minime di ottica atmosferica 332
6.1.4 Il concetto di estinzione 335
6.2 LA RADIAZIONE DI CORPO NERO 337
6.2.1 La legge di Planck 338
6.2.2 La legge di Wien 341
6.2.3 La legge di Stefan-Boltzmann 342
6.2.4 La legge di Kirchhoff 343
6.3 SCATTERING E ASSORBIMENTO 345
6.3.1 Scattering della radiazione da parte dei gas atmosferici 347
6.3.1.1 Generalità 347
6.3.1.2 Lo scattering di Rayleigh 349
6.3.2 Assorbimento della radiazione da parte dei gas atmosferici 351
6.3.2.1 Il caso didattico dell'atomo di idrogeno 353
6.3.2.2 Elementi di base dell'assorbimento dei gas atmosferici 353
6.3.2.3 Gli spettri di assorbimento dei gas atmosferici 361
6.3.2.4 Coefficienti di estinzione per l'assorbimento dei gas atmosferici 363
6.3.3 Assorbimento e scattering di radiazione da parte degli aerosol 364
6.3.3.1 L'aerosol atmosferico 364
6.3.3.2 Le idrometeore 366
6.3.3.3 Teoria elettromagnetica dello scattering e dell'assorbimento 367
6.3.3.4 Considerazioni conclusive 376
6.3.4 Introduzione al trasferimento radiativo in atmosfera 377
6.3.4.1 Concetti di base 377
6.3.4.2 La Legge di Beer-Bouguer-Lambert 378
6.3.4.3 L'equazione di Schwartzchild e sua soluzione 379
6.3.4.4 L'equazione di trasferimento radiativo per piani paralleli 380

6.4 BILANCIO RADIATIVO DEL SISTEMA TERRA-ATMOSFERA 383
6.4.1 Il bilancio radiativo globale: i concetti 383
6.4.2 Il bilancio radiativo globale: i numeri 384
6.4.3 Le varie componenti del bilancio radiativo 385
6.4.3.1 Bilancio alla sommità dell'atmosfera (TOA) 385
6.4.3.2 Bilancio alla superficie terrestre 386
6.4.3.3 Bilancio dell'atmosfera 387
6.4.3.4 Variazione con la latitudine del bilancio radiativo globale 387
6.4.4 Cenni all'effetto serra 388
6.5 LA RADIAZIONE SOLARE 391
6.5.1 Lo spettro solare e la costante solare 391
6.5.1.1 Considerazioni astronomiche 392
6.5.1.2 La costante solare 399
6.5.1.3 Lo spettro solare alla superficie terrestre 402
6.5.2 La trasmissione della radiazione solare nell'atmosfera 405
6.5.2.1 Le leggi della trasmissione dell'energia solare 405
6.5.2.2 Il riscaldamento dell'aria in assenza di nubi e di inquinamento 409
6.5.2.3 Cenni alla presenza di nubi e inquinamento 413
6.5.3 La radiazione solare al suolo 414
6.5.3.1 Parametrizzazione della radiazione solare globale 416
6.5.3.2 Parametrizzazione dell'albedo 421
6.5.3.3 Parametrizzazione della radiazione solare diffusa 423
6.5.3.4 La radiazione solare su terreno inclinato 424
6.6 LA RADIAZIONE AD ONDA LUNGA 425
6.6.1 Lo spettro terrestre 426
6.6.2 La trasmissione della radiazione ad onda lunga nell'atmosfera 428
6.6.2.1 Trasmissione di radiazione ad onda lunga in assenza di nubi 429
6.6.2.2 Il riscaldamento dell'aria ad onda lunga 434
6.6.2.3 Cenni alla presenza di nubi e inquinamento 434
6.6.3 La radiazione ad onda lunga in arrivo al suolo 435
6.6.3.1 Parametrizzazione in assenza di nubi 436
6.6.3.2 Parametrizzazione in presenza di nubi 437
6.6.4 La radiazione ad onda lunga terrestre 438
6.7 IL BILANCIO RADIATIVO SUPERFICIALE 440
6.8 IL FLUSSO DI CALORE NEL SUOLO 444
6.8.1 La modellizzazione matematica 445
6.8.2 Le parametrizzazioni 452
6.9 IL BILANCIO ENERGETICO SUPERFICIALE 454
PROBLEMI 457

7. MODELLI NUMERICI DEL PBL 461
7.1 I MODELLI PROGNOSTICI DEL PBL 463
7.1.1 Generalità 463
7.1.2 Selezione delle equazioni del modello e scelta della chiusura 463
7.1.2.1 I modelli "Full Simulation" 464
7.1.2.2 I modelli LES 464
7.1.2.3 I modelli integrali 464
7.1.2.4 I modelli prognostici operazionali 465
7.1.3 Metodi numerici di integrazione del modello di PBL 470
7.1.3.1 Le basi del metodo alle Differenze Finite 472
7.1.3.2 Il metodo alle Differenze Finite per l'avvezione 477
7.1.3.3 Il metodo alle Differenze Finite per la diffusione 486
7.1.3.4 Il metodo alle Differenze Finite per il termine di sorgente 487
7.1.3.5 Il metodo alle Differenze Finite per il bilancio di massa 487
7.1.3.6 L'operazione di splitting 487
7.1.3.7 L'algoritmo risolutivo completo 489
7.1.3.8 Le condizioni al contorno 490
7.1.3.9 Le condizioni iniziali 492
7.1.4 Le parametrizzazioni 501

7.1.4.1 La parametrizzazione degli scambi radiativi 502
7.1.4.2 La parametrizzazione dell'acqua in atmosfera 503
7.1.4.3 La parametrizzazione del suolo e dello Strato Superficiale 503
7.1.5 Osservazioni storiche, metodologiche e conclusive 507
7.2 I MODELLI DIAGNOSTICI DEL PBL 510
7.2.1 Il Modello Diagnostico di Campo di Vento 511
7.2.1.1 Basi teoriche del metodo 512
7.2.1.2 Metodo numerico di risoluzione 517
7.2.1.3 Determinazione dei moduli di precisione di Gauss 521
7.2.1.4 Determinazione del campo iniziale interpolato 523
7.2.1.5 Applicazioni alla microscala 525
7.2.2 Il Modello Diagnostico dei parametri della turbolenza 528
7.2.3 Ricostruzione diagnostica dei campi scalari 529
7.2.4 Osservazioni conclusive 529
7.3 METEOROLOGIA PER I MODELLI DI DISPERSIONE IN ATMOSFERA 530
7.2.3.1 La turbolenza atmosferica per i modelli stazionari 530
7.2.3.2 Il profilo verticale del vento e della temperatura 534
PROBLEMI 535

8. IL PBL IN CONDIZIONI ORIZZONTALI OMOGENEE 537
8.1 VISIONE FENOMENOLOGICA DELLA SITUAZIONE PARADIGMATICA 540
8.1.1 Le situazioni convettive 540
8.6.1 Le situazioni stabili 542
8.2 L'ANALISI DI SIMILARITÀ 544
8.2.1 Il Teorema di Buckingham (o del Π) 545
8.2.2 Esempio didattico di analisi dimensionale nel *PBL* 549
8.2.3 I primi passi nell'applicazione della Similarità nel *PBL* 552
8.2.3.1 Considerazioni iniziali 553
8.2.3.2 La Similarità di Rossby in condizioni adiabatiche 554
8.2.3.3 Lo Strato Superficiale 555
8.2.3.4 Il processo di matching 556
8.3 LO STRATO SUPERFICIALE 558
8.3.1 La Similarità di Monin-Obukhov del *SL:* generalità 559
8.3.2 Il gradiente ed il profilo di velocità del vento e della temperatura media 562
8.3.2.1 Gradiente di velocità del vento e temperatura media 566
8.3.2.2 Profilo della verticale del vento e della temperatura media 579
8.3.2.3 La costante di von Karman 586
8.3.2.4 Diffusività turbolente, numeri di Richardson e coefficienti di drag 587
8.3.3 La deviazione standard delle componenti del vento 589
8.3.3.1 Alcune osservazioni preliminari 589
8.3.3.2 Analisi di Similarità: generalità 590
8.3.3.3 La deviazione standard della componente verticale del vento 592
8.3.3.4 La deviazione standard delle componenti orizzontali del vento 594
8.3.4 I momenti della temperatura potenziale e dell'umidità 598
8.3.4.1 La Similarità per la deviazione standard della temperatura potenziale virtuale 598
8.3.4.2 La Similarità per la Skewness della temperatura potenziale 602
8.3.4.3 La Similarità per la deviazione standard dell'umidità 603
8.3.5 Le Relazioni di Similarità per i Parametri di Struttura 603
8.3.5.1 Relazione di Similarità per il Parametro di Struttura C^2_V 604
8.3.5.2 Relazione di Similarità per il Parametro di Struttura C^2_T 605
8.3.5.3 Relazione di Similarità per il Parametro di Struttura C^2_Q 606
8.3.5.4 Confronto tra le diverse Relazioni di similarità per i Parametri di Struttura 607
8.3.6 I coefficienti di correlazione lineare 607
8.3.7 La Similarità per la dissipazione della TKE e della varianza della temperatura 609
8.3.7.1 Il tasso medio di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta 609

8.3.7.2 Il tasso medio di dissipazione della temperatura potenziale 615
8.3.7.3 Osservazioni conclusive 617
8.3.8 La Similarità come una fabbrica di profili verticali 618
8.3.9 Il Problema della Self-Correlation 619
8.3.10 La rugosità superficiale 623
8.4 LA TEORIA DELLA SIMILARITÀ PER L'INTERO PBL 628
8.4.1 La Similarità Locale 628
8.4.1.1 La Similarità Locale per un *PBL* stabile 629
8.4.1.2 La Similarità Locale per un *PBL* convettivo 636
8.4.2 Modelli operativi di profilo 639
8.4.2.1 Il profilo verticale del vento 639
8.4.2.2 Il profilo verticale della temperatura potenziale media 641
8.4.2.3 Il profilo verticale della varianza delle componenti del vento 642
8.4.2.4 Il profilo verticale della varianza della temperatura potenziale 644
8.4.2.5 Il profilo verticale della dissipazione di energia cinetica turbolenta 645
8.4.2.6 Il profilo verticale del momento terzo e quarto della componente verticale del vento 646
8.4.2.7 Il profilo verticale dello stress di Reynolds 646
8.4.3 Osservazioni conclusive 647
8.5 ANALISI SPETTRALE DELLA TURBOLENZA DEL PBL 647
8.5.1 Spettri e cospettri temporali 648
8.5.2 Spettri spaziali 651
8.5.3 Spettri nell'Inertial Subrange 653
8.5.4 Spettri nello Strato Superficiale 656
8.5.4.1 Relazioni di Similarità nell'Inertial Subrange 656
8.5.4.2 Modelli spettrali per lo Strato Superficiale 659
8.5.5 Modelli spettrali per l'intero PBL 665
8.5.5.1 Spettri delle componenti del vento 666
8.5.5.2 Spettri della temperatura potenziale 667
8.5.5.3 Cospettri 668
8.5.6 Cenni all'analisi spettrale Lagrangiana 668
8.6 MODELLO DI RIPARTIZIONE ALLA SUPERFICIE DELL'ENERGIA DISPONIBILE 669
8.6.1 Il Modello di Penman-Monteith 671
8.6.2 Il Modello di Priestley-Taylor 674
8.7 LA CONVETTIVITÀ 675
8.7.1 Le strutture coerenti 676
8.7.2 Il modello semplificato del PBL Convettivo 681
8.7.3 Modelli per l'estensione verticale del *PBL* convettivo 685
8.7.3.1 Il modello termodinamico 685
8.7.3.2 Il modello bulk 687
8.7.4 La diffusione top-down e bottom-up 692
8.8 LA STABILITÀ 695
8.8.1 I profili verticali delle variabili meteorologiche 697
8.8.2 Il Numero di Richardson critico 698
8.8.3 La natura duale del flusso turbolento di calore sensibile 703
8.8.4 Altezza del PBL Stabile 705
8.8.4.1 Lo strato di inversione termica 706
8.8.4.2 L'estensione verticale del PBL stabile 707
8.8.5 Nocturnal Low-Level Jet 712
8.8.6 Onde di gravità 715
8.8.7 Il Meandering 719
8.8.7.1 Generalità 719
8.8.7.2 Alcune considerazioni teoriche 721
8.8.7.3 Quantificazione sperimentale 723
8.8.8 Modello Prognostico di PBL Stabile e Chiusura EFB 725
8.8.8.1 Generalità 725
8.8.8.2 Modello Prognostico con chiusura EFB 726
8.8.8.3 La versione Steady-state del modello con chiusura EFB 728

8.8.8.4 Il Flux Richardson Number e la Funzione Universale di Gradiente del vento 729
8.8.8.5 *Ri*, la relazione di Gradiente della temperatura potenziale e il Numero di Prandtl turbolento 731
8.8.8.6 Gli interscambi direzionali di Energia Cinetica Turbolenta 732
8.8.8.7 I flussi verticali normalizzati 733
8.8.8.8 L'Energy Richardson Number e la Chiusura EFB 734
8.8.8.9 Osservazioni conclusive 735
PROBLEMI 736

9. CENNI AL PBL IN CONDIZIONI SUPERFICIALI NON PARADIGMATICHE 739
9.1 IL PBL MARINO 740
9.1.1 Il bilancio radiativo superficiale 741
9.1.2 Il bilancio di energia 742
9.1.3 Trasferimento di quantità di moto 745
9.1.4 Parametrizzazione degli scambi aria-mare 747
9.1.5 Profili delle variabili meteorologiche e turbolenza nel PBL marino 748
9.1.6 Brezza di mare e brezza di terra 750
9.2 LE DISCONTINUITÀ SUPERFICIALI 752
9.2.1 Discontinuità nella rugosità superficiale 752
9.2.1.1 Modelli per la stima dell'estensione verticale dell'IBL 755
9.2.1.2 Gli stress superficiali 758
9.2.2 Discontinuità nel flusso di calore sensibile 759
9.2.2.1 Modelli semplificati per la stima del TIBL 761
9.2.2.2 Modelli di media complessità per la stima del TIBL 763
9.3 SUPERFICI COPERTE DALLA VEGETAZIONE 765
9.3.1 Caratteristiche generali 765
9.3.2 La specificità delle foglie 768
9.3.3 Piante, coltivazioni, frutteti e foreste 770
9.3.4 Flussi sopra la vegetazione 775
9.3.5 La situazione entro la canopy vegetale 776
9.4 L'OROGRAFIA 779
9.4.1 Alcune definizioni utili 780
9.4.2 Il moto medio 781
9.4.3 La turbolenza 784
9.5 L'AMBIENTE URBANO 785
9.5.1 Proprietà aerodinamiche delle aree urbane 789
9.5.1.1 Il metodo Micrometeorologico 790
9.5.1.2 Il metodo Morfometrico 791
9.5.2 Il bilancio radiativo ed il bilancio energetico 792
9.5.3 L'Isola di Calore Urbana 796
9.5.4 La turbolenza nel Canopy Urbano 799
9.5.4.1 Il profilo della velocità media del vento e dello stress di Reynolds 800
9.5.4.2 Le varianze delle componenti del moto e degli scalari 802
9.5.4.3 L'estensione verticale dell'UBL 803
9.5.5 Alcune caratteristiche della Canopy urbana 803
PROBLEMI 809

INDICE ANALITICO – VOLUME 1 811

1. FONDAMENTI FISICI E FENOMENOLOGICI

L'***atmosfera*** è l'ambiente gassoso che circonda il globo terrestre, ambiente complesso e vario, in perenne movimento e trasformazione, che difende e separa il nostro pianeta dallo spazio, favorendo lo sviluppo delle varie forme di vita presenti sulla superficie terrestre. Esplorare le proprietà e lo stato dell'atmosfera è il compito primario della ***Meteorologia***, disciplina che studia le caratteristiche dell'atmosfera in movimento e che, di fatto, altro non è che una derivazione naturale della *Fluidodinamica*. Un'esposizione dei concetti base è data in Stull (2000), mentre in Matveev (1965), Brown (1991), Dutton (1995), Houghton (2002) e Holton (2004) la materia viene trattata con notevole rigore formale. Lasciando a questi libri il compito di affrontare lo studio dell'intera atmosfera, qui focalizzeremo l'attenzione quasi esclusivamente sullo studio dettagliato di una porzione di essa, quella a diretto contatto con la superficie terrestre, di spessore limitato e variabile nel tempo, in cui hanno luogo le attività umane di maggior rilievo. Detto così, tutto risulta estremamente vago e, per queste ragioni, è necessario premettere all'esposizione che seguirà nei prossimi Capitoli una serie di concetti di base necessari all'individuazione di questa porzione di atmosfera ed alla comprensione dei meccanismi fisici che la governano.

Per iniziare a prendere confidenza con l'oggetto del nostro studio conviene considerare una delle principali caratteristiche dell'atmosfera: la sua temperatura e la sua variazione con la quota. Se, in una data posizione geografica, si misura la temperatura dell'aria a quote crescenti (per esempio, dal suolo fino ad oltre 100 km), ciò che si ottiene è un *termosondaggio* che presenta il tipico profilo riportato nella **Fig.1.1**, da cui risulta evidente la presenza in atmosfera di alcuni *strati* caratteristici entro cui il gradiente di temperatura presenta caratteri distintivi ben precisi.

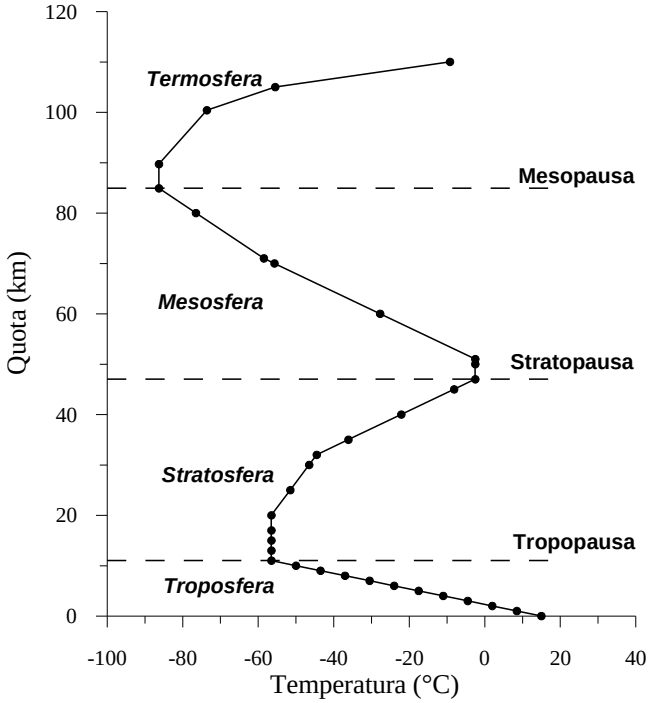


Fig. 1.1: tipico profilo verticale della temperatura dell'aria in atmosfera

Lo strato più elevato, la ***Termosfera***, è caratterizzato da una temperatura crescente con la quota, mentre quello immediatamente sottostante, che prende il nome di ***Mesosfera*** presenta un gradiente termico negativo quasi costante. Il confine tra i due strati, localizzabile alla quota di

circa 85 km, è detto ***Mesopausa***. Sotto la Mesosfera si colloca una nuova regione d'atmosfera, la ***Stratosfera***, che inizia ad una quota di circa 47 km (***Stratopausa***) e che termina a circa 11 km di altezza (***Tropopausa***) in cui il gradiente di temperatura è sostanzialmente positivo. È proprio in questa regione, ricca di molecole di ozono, che ha luogo l'assorbimento di una notevole quantità di radiazione solare ultravioletta (UV), causa primaria del gradiente termico positivo che la caratterizza. Va ricordato che la Stratosfera, assorbendo la maggior parte di radiazione UV di origine solare, costituisce un valido scudo protettivo per la vita animale e vegetale che si svolge sulla superficie terrestre. Sotto alla Tropopausa si estende fino al suolo la ***Troposfera*** che, a grosse linee, è caratterizzata da un gradiente termico negativo quasi costante e pari a circa -6.5 $K \cdot km^{-1}$.

Di tutti questi strati atmosferici, l'unico su cui concentreremo l'attenzione è proprio la Troposfera e, per questo, conviene verificare se essa presenti una struttura unitaria o se, viceversa, in essa sia individuabile una qualche forma di complessità. A tal fine è utile analizzare i profili verticali di temperatura realizzati a varie ore del giorno nella medesima località, come fatto nella **Fig.1.2** dove sono stati riportati i profili termici rilevati dai tipici sondaggi standard effettuati all'aeroporto di Milano-Linate (IT) nelle ore sinottiche 00, 06, 12 e 18 *UTC*. Da essi risulta subito evidente come la parte superiore dei profili (da circa 2 km in su) presenti gradienti termici sostanzialmente costanti nel tempo (a parte alcune oscillazioni dovute, in parte, al metodo di misura), mentre la porzione di Troposfera che va dal suolo a circa 2 km mostra gradienti termici variabili durante la giornata (ed anche da giornata a giornata). Come sarà più chiaro nel seguito, questa variazione è il risultato diretto dell'interazione tra la superficie terrestre e la radiazione solare incidente che, in un dato punto, presenta un caratteristico ciclo giornaliero e stagionale.

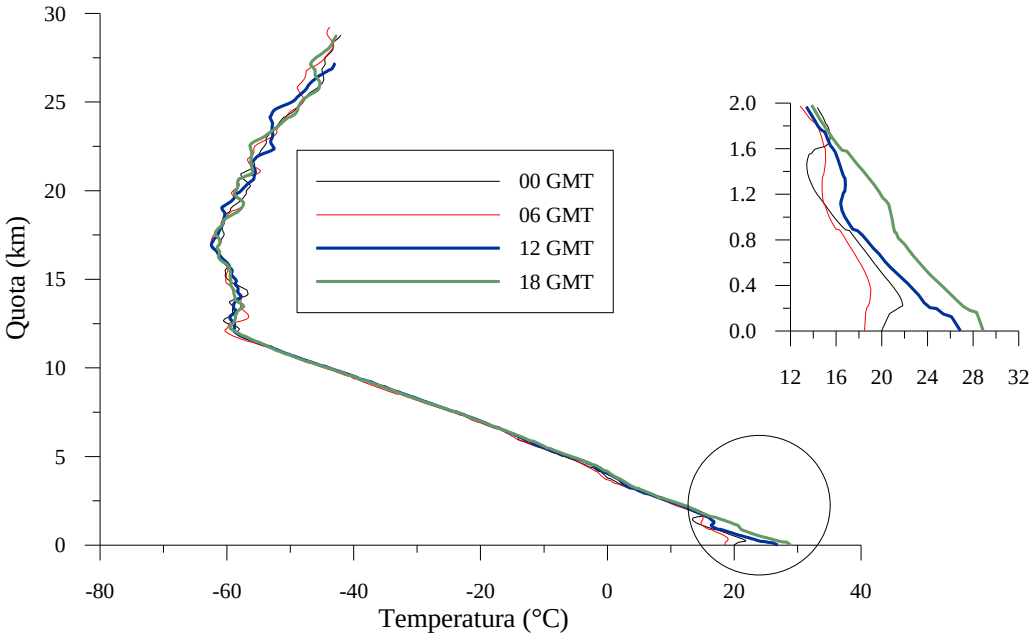


Fig. 1.2: profilo termico nelle ore sinottiche (Milano-Linate)

Lasciando alla Meteorologia Generale il compito di studiare l'intera Troposfera, qui concentreremo l'attenzione prevalentemente sullo studio di questo *piccolo strato* d'aria a diretto contatto con la superficie terrestre, fin qui ancora ben poco definito, cui viene attribuito il nome di ***Strato Limite Planetario*** o ***Planetary Boundary Layer*** (***PBL***) o ***Atmospheric Boundary Layer*** (***ABL***). La disciplina che ne studia le caratteristiche e l'evoluzione prende il nome di ***Micrometeorologia*** ed alcuni riferimenti bibliografici cui fare riferimento sono i libri di Panofsky e Dutton (1983), Stull (1988), Sorbjan (1989), Garratt (1992), Sozzi, Georgiadis e Valentini (2002), Foken (2008), Wyngaard (2010) e Tampieri (2017). Fin da subito è opportuno premettere alcune affermazioni che potranno costituire delle linee guida cui far riferimento nel seguito.

Innanzitutto, il *PBL* è quella *porzione di Troposfera, direttamente influenzata dalla superficie terrestre e che risponde all'immissione di energia da essa proveniente con scale temporali dell'ordine dell'ora* (Stull, 1988). Tale influenza deriva dall'attrito incontrato dalle masse d'aria in movimento sopra la superficie terrestre, dalla distorsione delle linee di flusso dell'aria indotta dalla presenza dell'orografia, dall'evapotraspirazione, dal trasferimento di calore dal suolo all'aria e dall'immissione, in prossimità del suolo, degli inquinanti prodotti dalle varie attività umane o dai fenomeni naturali (es. dalla vegetazione, dalle eruzioni vulcaniche, ecc.). Alle medie latitudini il suo spessore varia nel tempo e nello spazio da alcune centinaia di metri, nelle ore notturne, fino a uno o due chilometri nelle ore diurne di massimo soleggiamento. Se, per esempio, si considera il profilo verticale di temperatura dell'aria prodotto da un radiosondaggio in un'ora centrale di una giornata soleggiata, il limite superiore del *PBL* lo si può collocare alla base dell'inversione termica in quota (cioè nel punto del profilo di temperatura a gradiente fortemente positivo), come si può vedere in **Fig.1.3** dove l'inversione è indicata da una freccia. Il fatto che l'estensione verticale del *PBL* presenti normalmente una forte variabilità temporale ed un pronunciato ciclo diurno fa pensare al *PBL* come ad un'*enorme macchina termica* che trasforma in movimento delle masse d'aria l'energia solare disponibile, catturata dalla superficie terrestre (Sorbjan, 1989).

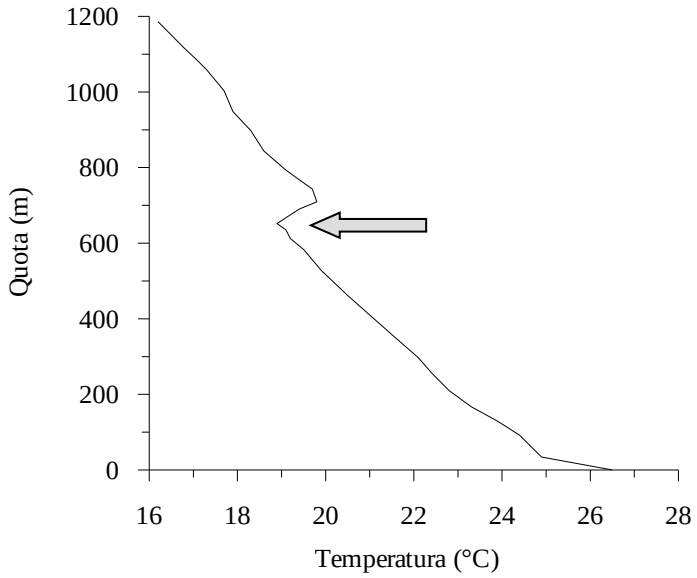


Fig. 1.3: profilo verticale di temperatura (12GMT, Milano Linate-Italia)

Un'altra caratteristica dell'atmosfera facilmente individuabile è proprio il tipo di movimento delle masse d'aria che la costituiscono. Infatti, nel movimento dell'aria sono individuabili numerosi moti con caratteristiche differenti che spesso si sovrappongono gli uni agli altri con una propria *scala spaziale caratteristica*, cioè una dimensione orizzontale tipica. Se pensiamo ad un uragano o ai fronti, tale scala è dell'ordine delle centinaia di chilometri; se pensiamo alle correnti a getto, essa è dell'ordine delle decine di chilometri; se invece, siamo interessati ai moti del *PBL*, la scala spaziale caratteristica è dell'ordine del chilometro. Ovviamente, accanto ad una scala spaziale caratteristica (che rappresenta, alla fine, la dimensione orizzontale tipica della porzione di atmosfera interessata dal fenomeno) è inevitabile individuare la corrispondente *scala temporale caratteristica*, cioè l'ordine di grandezza della durata del fenomeno. Tra la scala spaziale λ e la scala temporale τ si può stabilire una relazione di proporzionalità esprimibile approssimativamente come (Stull, 2000): $\tau = a \cdot \lambda$ dove il coefficiente a è dell'ordine di 1 $m^{-1} \cdot s$. È immediato verificare come un uragano con λ di circa 300 km presenti una durata caratteristica dell'ordine di 3.5 giorni, mentre i tipici moti convettivi verticali di origine termica che, come si vedrà, sono presenti nel *PBL* durante le ore diurne e soleggiate, hanno $\lambda \sim 1000$ m e quindi una scala temporale caratteristica $\tau \sim 15$ minuti.

Sicuramente la caratteristica più evidente e più importante del *PBL* è il fatto che il moto dell'aria presenta evidenti e significative *irregolarità* (*fluttuazioni turbolente*) sia nello spazio che nel tempo, come si vede nella **Fig.1.4** dove viene presentato l'andamento nel tempo della velocità orizzontale del vento misurata vicino al suolo. Come si vede, la velocità orizzontale del vento presenta un valore medio abbastanza basso (dell'ordine di 0.5 ms^{-1}) cui, però, si sovrappongono fluttuazioni piuttosto violente che fanno sì che il valore istantaneo di velocità del vento raggiunga valori piuttosto elevati (fino ad 1.6 ms^{-1}) e valori bassissimi, prossimi allo zero. Questo comportamento irregolare, mostrato dalla velocità del vento, è comune anche a tutte le altre grandezze che definiscono lo stato fisico (ed anche chimico) del *PBL* e ciò, dal punto di vista fluidodinamico, indica che una delle sue caratteristiche peculiari è la sua *turbolenza* intrinseca. Come si vedrà, è proprio la turbolenza l'elemento che caratterizza la capacità disperdente del *PBL* e spiega i meccanismi della dispersione degli inquinanti in aria. L'importanza della turbolenza non si limita a spiegare come e perché gli inquinanti si disperdano; è proprio la turbolenza che consente la vita sulla superficie terrestre e che ne regola l'evoluzione. Inoltre, il complesso ciclo delle acque vede proprio nella turbolenza del *PBL* un sapiente meccanismo che trasporta e ridistribuisce l'acqua e la rende disponibile alla vegetazione presente sulla superficie terrestre, regolandone la crescita.

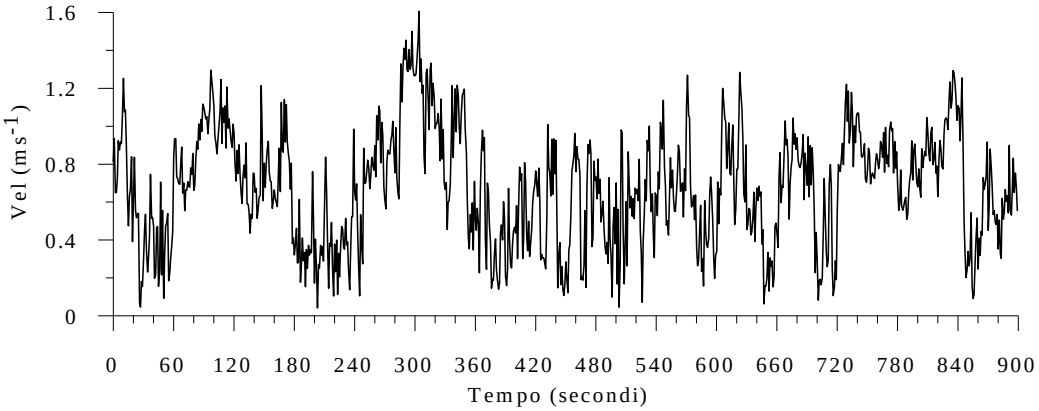


Fig.1.4: andamento della velocità del vento nei pressi del suolo

Infine, è da sottolineare come il *PBL* abbia limitati scambi di massa con la parte sovrastante della Troposfera. In pratica, esiste una netta separazione tra il *PBL* e l'aria ad esso sovrastante, specialmente durante le ore diurne. Il perché ciò sia vero lo si vedrà molto presto e si scoprirà anche che il fattore determinante che porta a questa separazione del *PBL* dal resto della Troposfera è proprio la struttura termica del *PBL*. Il fatto che il *PBL* sia sostanzialmente separato dal resto della Troposfera fa sì che tutto ciò che viene immesso nel suo interno abbia grosse difficoltà a raggiungere la parte superiore della Troposfera. Pertanto, non è azzardato definire il *PBL* come una *trappola* per gli inquinanti che lì vengono emessi.

Per il momento ci fermiamo a queste poche evidenze fenomenologiche della presenza del *PBL* che delineano, anche se in modo molto preliminare, l'ambiente dello studio che intendiamo sviluppare in maniera dettagliata nei prossimi Capitoli. In essi apprenderemo le leggi che governano tale sistema fisico, i modi con cui si può descriverlo dettagliatamente in termini matematici e statistici fino ad arrivare a descrivere come in esso si disperdono le sostanze emesse dalle diverse attività umane (sostanze inquinanti) o prodotte naturalmente. Nel seguito di questo Capitolo ci limiteremo a presentare le basi fisiche e quelle conoscenze fenomenologiche necessarie allo studio dello stato e dell'evoluzione del *PBL*, indispensabili per la comprensione di quanto verrà presentato nei Capitoli successivi.

1.1 LE VARIABILI ED ALCUNI CONCETTI DI BASE

Per come appare, il *PBL* (e l'atmosfera in generale) è un sistema fisico complesso, prevalentemente gassoso, da studiare con gli strumenti della Fluidodinamica. Lo tratteremo, quindi, come un mezzo continuo, ignorando che, in realtà, è un insieme di un numero vertiginosamente grande di molecole differenti in continua interazione reciproca, cosa che farebbe pensare all'uso della Teoria Cinetica dei gas. Per un'interessante discussione sulle implicazioni legate a questo modo di affrontare le cose si rimanda a Cancelli (2005). Detto ciò, per descrivere l'evoluzione quantitativa nello spazio e nel tempo del *PBL* bisogna specificare il *sistema fisico* che lo rappresenta e le *variabili* che ne definiscono lo *stato*. È quindi indispensabile introdurre alcune definizioni di base e richiamare quelle leggi fisiche necessarie per la comprensione del suo comportamento.

1.1.1 LE VARIABILI CINEMATICHE

L'aria del *PBL* può essere considerata un *fluido continuo*, cosa del tutto naturale anche se, in realtà, essa sia costituita da molecole. Il problema di base che va chiarito subito è che cosa si intende per *infinitesimo* o *particella di fluido*, concetti cui si farà ampio riferimento nel seguito. La lunghezza ed i tempi di scala del moto molecolare sono estremamente piccoli se paragonati alle scale macroscopiche. Nel caso dell'aria, per esempio, il libero cammino medio λ è pari a circa $6 \cdot 10^{-8}$ m mentre la più piccola lunghezza di scala l del moto di un fluido è dell'ordine di 10^{-4} m. Quindi la scala spaziale tipica di un fluido eccede di molti ordini di grandezza quella molecolare, affermazione che è quantificata dal *numero di Knudsen* λ/l che, per l'atmosfera, è inferiore a 10^{-3}. Quando i fenomeni che si considerano sono tali per cui $Kn \ll 1$, l'approccio continuo risulta una metodologia appropriata. Per questo l'aria dell'atmosfera (e quindi quella del *PBL*) verrà trattata come un mezzo continuo caratterizzato in ogni punto da ben precise proprietà e per cui il termine infinitesimo mantiene il consueto significato matematico. L'aria è quindi un fluido continuo il cui *stato* è completamente definito da un *insieme di variabili fisiche di tipo macroscopico*. Prima di introdurle, è necessario presentare tre concetti fondamentali: il *dominio di indagine*, il *volume di controllo* ed il *sistema di riferimento* e le sue visioni filosofiche, *Euleriana* e *Lagrangiana*.

Il Dominio di Indagine

Quando si decide di studiare le caratteristiche del *PBL*, è inevitabile restringere l'attenzione ad una sua porzione ben definita, la cui individuazione può dipendere dal problema che si sta considerando. Se, per esempio, si è interessati allo studio dello stato della qualità dell'aria di una certa zona (ad esempio il territorio occupato dalla città di Roma), è inevitabile prendere in considerazione una porzione di spazio che includa la zona d'interesse e che sia di forma geometrica semplice (per esempio un parallelepipedo con base al suolo ed un'estensione verticale tale da includere l'intero *PBL* e, eventualmente, una porzione limitata della Troposfera sovrastante). Questo è il *dominio d'indagine*. A differenza della *Meteorologia* che studia domini di notevole estensione (spesso l'intero globo terrestre), il tipico dominio d'interesse della *Micrometeorologia* è a *scala limitata* e presenta un'estensione orizzontale tipica dell'ordine delle centinaia di chilometri e, a questa scala, la curvatura terrestre può essere del tutto trascurata.

Il Volume di Controllo

La Fluidodinamica (e quindi la Micrometeorologia) si basa su una descrizione fisica di un corpo continuo e perciò si è costretti ad introdurre nelle discussioni teoriche il concetto di *Volume di Controllo* (o di *particella*), considerato come una porzione elementare di fluido, analoga al concetto di infinitesimo dell'Analisi Matematica, che deve soddisfare le proprietà seguenti:

- deve essere sufficientemente grande da contenere un numero di molecole tanto elevato

da possedere, complessivamente, le stesse caratteristiche macroscopiche del fluido cui appartiene;

- ma deve anche essere piccolo a sufficienza da consentire che le proprietà macroscopiche del fluido restino uniformi al suo interno in modo che al volume di controllo siano applicabili le proprietà macroscopiche del fluido come la pressione, la densità, la temperatura e la velocità che sono e restano spazialmente costanti al suo interno;
- inoltre, deve essere individuabile univocamente, almeno per brevi periodi.

Usando il concetto di volume di controllo, è possibile immaginare l'intero dominio d'indagine composto da un numero elevatissimo di tali *mattoni elementari*.

La Descrizione Euleriana del PBL

Nella *Descrizione Euleriana* del *PBL* si ipotizza di suddividere l'intero dominio in un'infinità di volumi di controllo di dimensioni infinitesime che mantengono nel tempo la propria localizzazione, ma che vedono variare nel tempo le proprie caratteristiche fisiche. Perciò ad ogni punto $P(x,y,z)$ del dominio è associato un ben preciso volume di controllo (**Fig. 1.5**) e ad ogni istante t è quindi possibile considerare ogni punto del dominio di calcolo ed analizzare le proprietà possedute dall'aria che occupa il volume di controllo centrato in quel punto, effettuando i vari bilanci (di massa, di quantità di moto, di energia, ecc.) che ivi hanno luogo. Per esempio, se il generico volume di controllo è centrato al tempo t nella posizione $P(x,y,z)$, è possibile definire la velocità dell'aria in quel punto, la sua temperatura, la sua pressione e le altre proprietà rilevanti. Se in quel punto viene posizionato un insieme di sensori (es. un anemometro, un termometro e un barometro) è concettualmente semplice misurare al tempo t la velocità dell'aria, la sua temperatura e la pressione relativa. Di fatto, la maggior parte delle misure che vengono realizzate nella pratica sono *misure di tipo Euleriano*. Il risultato atteso da una descrizione Euleriana del *PBL* è l'individuazione di campi tridimensionali che associano ad ogni punto del dominio di indagine un insieme di funzioni continue, ciascuna dedicata alla descrizione dell'andamento nel tempo di una ben specifica variabile fisica (velocità, temperatura, pressione, ecc.).

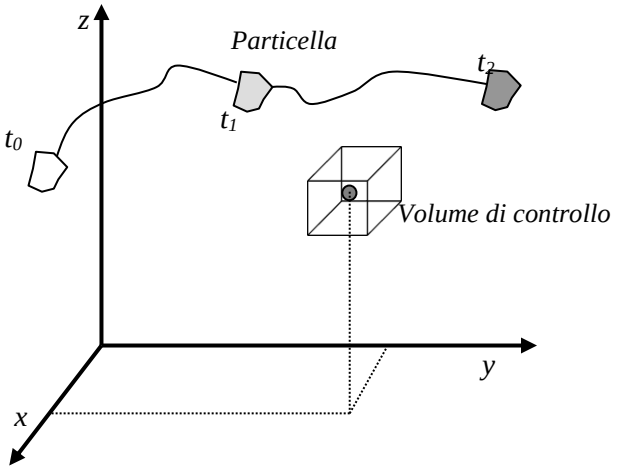


Fig. 1.5: concetto Euleriano di volume di controllo e concetto Lagrangiano di particella.

La Descrizione Lagrangiana del PBL

C'è un secondo metodo di indagine, potente ed estremamente naturale, che, dal punto di vista logico, si contrappone alla descrizione Euleriana del *PBL*: la *Descrizione Lagrangiana* che parte da presupposti totalmente differenti. Si consideri ad un istante iniziale t_0 una porzione d'aria molto piccola, avente le stesse caratteristiche del volume di controllo Euleriano, posta nella posizione

$P_0(x_0,y_0,z_0)$, cui diamo il nome di *particella* (**Fig.1.5**). Negli istanti successivi $t > t_0$ la particella si muoverà nello spazio trascinata dal fluido circostante di cui in realtà fa parte integrante. La particelle, quindi, a partire dall'istante iniziale t_0 percorrerà una traiettoria completamente caratterizzata dalla sua posizione $\mathbf{X} = (x,y,z;t)$. La descrizione Lagrangiana si basa quindi sullo studio dei vari bilanci (di massa, di quantità di moto, di energia, ecc.) *visti dal punto di vista della particella in movimento*, considerata come un'entità autonoma che può essere perturbata dall'ambiente esterno. Se si studiassero, da un certo istante iniziale in poi, tutte le possibili particelle presenti nel dominio d'indagine, si studierebbe lo stato e l'evoluzione dell'atmosfera nell'intero dominio. La Fluidodinamica ha mostrato che i due tipi di descrizione (quella Euleriana e quella Lagrangiana) sono del tutto equivalenti e si adotta di volta in volta una o l'altra a seconda della convenienza operativa.

Il Sistema di Coordinate di Riferimento

Per una descrizione quantitativa del movimento spazio-temporale di una particella o per l'individuazione di un volume di controllo è necessario adottare un adeguato *Sistema di Coordinate di Riferimento*. Dato che, come abbiamo detto, nella maggior parte degli studi del *PBL* il *dominio di indagine* presenta un'estensione verticale ridotta (tipicamente, di 1÷2 km) ed un'estensione orizzontale dell'ordine delle decine o, al massimo, delle centinaia di chilometri, di norma non è necessario considerare esplicitamente la curvatura terrestre e quindi è sufficiente un *normale sistema di riferimento cartesiano ortogonale*. A priori, tale sistema potrebbe essere qualsiasi, tuttavia è comodo adottarne uno (*sistema di riferimento meteorologico*) tale che:

- l'*asse x* sia orientato nella direzione *Est - Ovest* (positivo verso Est)
- l'*asse y* sia orientato nella direzione *Nord - Sud* (positivo verso Nord)
- l'*asse z* sia orientato nella direzione *Alto - Basso* (positivo verso l'alto).

Questa non è l'unica scelta possibile ed in certe situazioni risulteranno più comode scelte differenti, per esempio un sistema cartesiano con l'asse *x* orientato secondo le linee di flusso del fluido. Il sistema di riferimento, comunque lo si definisca, è però *fisso rispetto alla superficie terrestre* che a sua volta ruota nello spazio, quindi sarà inevitabilmente *non inerziale*, cosa che introdurrà alcune complicazioni nello studio della dinamica delle masse d'aria.

La velocità dell'aria

Normalmente l'aria della Troposfera viene studiata da un punto di vista *Euleriano* e, quindi è un'entità continua (un gas) per la quale, in ogni punto $\mathbf{X}(x,y,z)$ dello spazio (si noti che con il carattere *grassetto* si è indicata un'entità vettoriale, che in questo caso è il *vettore posizione*), è definibile un *vettore* $\mathbf{U}(x,y,z;t)$, cioè un *campo di velocità* variabile col tempo, formalmente ottenuto dalla derivata temporale del vettore posizione della particella posta al tempo t nel punto $P(x,y,z)$. Nel caso del *PBL* (ed anche dell'atmosfera in generale), la velocità del fluido prende il nome di *vettore vento*, che è quindi una *variabile vettoriale* definita in modo univoco dalle sue componenti cartesiane rispetto agli assi coordinati (indicate come v_x, v_y, v_z oppure, più comunemente, u,v,w). In moltissime situazioni, però, il vento viene anche descritto attraverso:

- il modulo U del vettore **U** (o più spesso della sua proiezione sul piano orizzontale), che prende il nome di *velocità del vento*. In pratica tra la velocità del vento e le componenti cartesiane del vettore del moto si stabilisce la relazione:

$$U = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \cong \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad [1.1a]$$

  Trascurare la componente verticale è pratica molto diffusa, essendo spesso molto inferiore alle componenti orizzontali, specialmente quando si considerano valori medi su

tempi sufficientemente lunghi. Dal punto di vista delle unità di misura, di norma si adotta sia per le singole componenti del vettore vento che per la sua velocità l'unità ($m \cdot s^{-1}$).

- secondo le *convenzioni aeronautiche* si definisce *direzione del vento D* la *direzione da cui spira il vento*, convenzione quindi *opposta* a quella dell'analisi vettoriale. Infatti, si ha una direzione di 0° quando il vento spira da Nord e questo angolo cresce fino a 360°; in particolare è 90° quando il vento proviene da Est, 180° quando proviene da Sud e 270° quando proviene da Ovest. Una relazione (Stull, 2000) per il calcolo della direzione secondo questa convenzione a partire dalle componenti cartesiane di **U** è la seguente:

$$D = 90° - \frac{360°}{2\pi} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) + \alpha_0; \qquad \alpha_0 = \begin{cases} 0° & se\ v_x < 0 \\ 180° & altrimenti \end{cases} \qquad [1.1b]$$

- una volta nota la velocità e la direzione di provenienza del vento, le componenti cartesiane orizzontali del vento si ottengono dalle relazioni seguenti:

$$v_x = u = -U \cdot \sin D \qquad v_y = v = -U \cdot \cos D \qquad [1.1c]$$

1.1.2 LA TEMPERATURA

Un volume di controllo, centrato nel punto *P*(*x,y,z*), contiene un numero elevatissimo di molecole in continua agitazione termica. La teoria cinetica dei gas dimostra come esista una ben precisa proporzionalità tra l'agitazione termica delle molecole ivi presenti e la variabile termodinamica chiamata *temperatura assoluta*. In particolare, più è disordinato il moto di agitazione termica delle molecole, maggiore è la temperatura assoluta del volumetto d'aria considerato. Ciò vale chiaramente sia nel caso di una particella Lagrangiana che di un volume di controllo Euleriano. Quindi, per ogni particella d'aria (o volume di controllo) individuata in un punto *P*(*x,y,z*) ad ogni istante *t* è definibile una *temperatura assoluta dell'aria T*, cioè una funzione scalare *T(x,y,z;t)*, normalmente misurata in gradi Kelvin (K), dipendente dallo spazio e dal tempo. Va però ricordato che tra la temperatura espressa in gradi centigradi $t_{\circ C}$ e la stessa in gradi Kelvin *T* sussiste la relazione:

$$T = 273.15 + t_{\circ C} \qquad [1.2a]$$

e tra una temperatura in gradi centigradi $t_{\circ C}$ ed una in gradi Fahrenheit $t_{\circ F}$ (unità ancora in uso nei paesi anglosassoni) valgono le relazioni di conversione seguenti:

$$t_{\circ F} = 9/5 \cdot t_{\circ C} + 32 \qquad t_{\circ C} = 5/9 \cdot [t_{\circ F} - 32] \qquad [1.2b]$$

Comunque, va sottolineato che nella descrizione del *PBL* vengono spesso impiegate anche altre definizioni non convenzionali di temperatura, come si vedrà nel seguito.

1.1.3 LA PRESSIONE

Per un volume di controllo (o una particella) la *pressione p* è quella forza per unità di superficie che agisce perpendicolarmente alla sua superficie esterna, risultato dell'azione esercitata dalle molecole dell'aria che lo circonda. Questa definizione vale sia che l'aria sia in movimento sia che permanga in quiete. L'unità di misura più usata in Fisica è il *Pascal* (1 *Pa* = 1 $N \cdot m^{-2}$), anche se in Micrometeorologia si usa più frequentemente il *chiloPascal* (kPa) e l'*ettoPascal* (hPa) numericamente equivalente ai *millibar* (mbar), unità che per comodità verrà impiegata nel seguito. In condizioni standard e al livello del mare, la pressione atmosferica è pari a 1013.25 *hPa*.

In atmosfera la *pressione è isotropica*, cioè in un punto essa è uguale in ogni direzione. Dato che la pressione, misurata ad una certa quota, è la conseguenza del peso dell'aria sovrastante, più ci si innalza e meno numerose sono le molecole presenti nella colonna d'aria che sovrasta il punto di osservazione, cosa che determina una *diminuzione progressiva della pressione con la quota,* pressoché esponenziale e dipendente dalla temperatura. Una relazione approssimata cui

giungeremo tra qualche paragrafo e che esprime tale variazione è la seguente:

$$p = p_0 \cdot exp[-(0.0342/T) \cdot z] \quad [1.3]$$

dove p_0(mbar) è la pressione al livello del mare (per es. 1013.25 mbar), T è la temperatura (K) e z è la quota (m). Quindi, *approssimativamente, nel PBL si ha una riduzione di pressione di circa 10 mbar per ogni innalzamento di 100 metri della quota.*

1.1.4 L'EQUAZIONE DI STATO DEI GAS PERFETTI

Come noto, un *gas* si dice *perfetto* quando il prodotto della propria pressione p per il volume occupato V è proporzionale alla propria temperatura assoluta T. Per un gas di questo tipo vale:

- la legge di Boyle (1627-1691) secondo cui, a temperatura costante, la pressione del gas è inversamente proporzionale al volume occupato dallo stesso;
- la legge di Charles (1746-1823) secondo cui, a pressione costante, il volume occupato dal gas è direttamente proporzionale alla temperatura;
- la legge di Avogadro (1776-1856) secondo cui volumi uguali di gas differenti alla medesima temperatura e pressione contengono lo stesso numero di molecole. In sostanza, il volume di un gas è direttamente proporzionale al numero di molecole presenti e indipendente dal tipo di gas. Se *PM* è il peso molecolare di un gas (in grammi), si definisce *mole* la massa del gas (in grammi) numericamente pari a *PM*. Il numero di molecole presenti in una mole è pari al *numero di Avogadro* $A_V = 6.02 \cdot 10^{23}$ (molecole·mole^{-1})

Da queste leggi, se p (mbar) è la pressione del gas, V (m^3) il volume occupato, n il numero di moli di gas presenti e T (K) la temperatura, si ottiene l'*equazione di stato dei gas perfetti*:

$$pV = nR^*T \quad [1.4a]$$

dove R^* è la *costante universale dei gas*, pari a 0.083145 (m^3·mbar·moli^{-1}·K^{-1}). L'importanza di questa legge, semplice, universale ed algebrica, sta nel legame che stabilisce tra la pressione assunta da n moli di un *qualsiasi* gas perfetto, presente *da solo* in un volume V definito di spazio, e la sua temperatura assoluta T. Questo legame vale sia per un'atmosfera in movimento che per una atmosfera in quiete.

L'utilizzo più immediato dell'equazione di stato dei gas perfetti è volto a definire il *volume occupato da una singola mole di un generico gas*. Dalla relazione (1.4a), posto n pari a 1, si ha che il volume occupato da una mole di gas perfetto è direttamente proporzionale alla temperatura ed inversamente proporzionale alla pressione. In condizioni normali (p=1013.25 mbar e T=273.15 K), si ha che una mole di gas perfetto occupa $22.4141 \cdot 10^{-3}$ m^3, cioè 22.414 litri.

Se, invece di considerare le moli, consideriamo il numero di molecole di gas presenti nell'unità di volume N (molecole·m^{-3}), pari a $N = n \cdot A_v/V$, in questo caso dalla (1.4a) ha che:

$$p = \frac{nR^*T}{V} = \frac{nA_v}{V} \cdot \frac{R^*}{A_v} \cdot T = N \cdot k_B \cdot T \quad [1.4b]$$

dove $k_B = R^*/A_V$ è la costante di Boltzmann pari a $1.3807 \cdot 10^{-25}$ (m^3·mbar·K^{-1}). Questa relazione può essere impiegata anche per il calcolo del numero N di molecole presenti in 1 m^3 di aria, una volta nota la temperatura e la pressione. Se, per esempio, si considera una pressione di 1013 mbar ed una temperatura di 288 K, N risulta pari a $2.55 \cdot 10^{25}$ molecole·m^{-3}. In pratica, in questo modo si è individuata la *concentrazione dell'aria in atmosfera* ad una data pressione e temperatura.

La legge di stato dei gas è valida per ogni gas perfetto presente *da solo* in un dato volume e, come è stato dimostrato, vale anche per i gas reali con un errore inferiore al 0.2%. Se, invece, si considera una miscela di M gas perfetti, l'equazione di stato non è più applicabile direttamente. In questo caso vale la *legge di Dalton* (1766-1844) secondo cui:

- ogni gas *i-esimo* presente in un una miscela gassosa esercita singolarmente una pressione p_i (*pressione parziale del gas i-esimo*) pari alla pressione che eserciterebbe se occupasse da solo l'intero volume occupato dalla miscela. Quindi se il gas *i*-esimo è presente nella miscela con N_i molecole per unità di volume, dalla (1.4b) si ha che:

$$p_i = N_i \cdot k_B \cdot T \qquad [1.4c]$$

- la pressione complessiva *p* della miscela gassosa di *M* gas perfetti differenti, ciascuno ad una pressione parziale p_i, è la somma delle pressioni parziali, cioè è pari a:

$$p = \sum_{i=1}^{M} p_i = k_B T \sum_{i=1}^{M} N_i = N_a \cdot k_B \cdot T \qquad [1.4d]$$

dove N_a è il numero totale di molecole per unità di volume nella miscela gassosa.

1.1.5 LE CARATTERISTICHE DELL'ARIA SECCA

Dal punto di vista fluidodinamico ciò che viene denominato *aria* è una miscela gassosa che richiede, a questo punto, un'accurata caratterizzazione chimica. Solo così sarà possibile trattarla rigorosamente nel seguito. Iniziamo, ora, a considerare la composizione tipica dell'aria della Troposfera, trascurando per il momento la presenza di acqua, pur essendo quest'ultima uno dei costituenti principali. Così facendo, consideriamo quindi l*'aria secca* che, nonostante appaia una forte idealizzazione, in realtà rappresenta abbastanza fedelmente alcune situazioni reali (per esempio la situazione che si presenta nelle regioni polari e nelle regioni desertiche).

La composizione chimica dell'aria secca

L'aria secca è una miscela di vari costituenti, prevalentemente gassosi, la cui concentrazione è in continuo cambiamento nello spazio e nel tempo. Questa affermazione, vera in generale, ha comunque bisogno di alcune spiegazioni. Nell'aria sono presenti alcuni gas (*gas permanenti)*, i principali dei quali sono l'*Azoto* (N_2), che rappresenta in volume il 78% dell'intera aria secca, e l'*Ossigeno* (O_2) che ne rappresenta circa il 21%. In pratica l'aria secca è rappresentata dalla miscela di questi due gas cui si aggiungono *tracce* di altri gas quali l'*Idrogeno* (H_2) e i gas nobili *Argon* (Ar), *Neon* (Ne), *Elio* (He) e *Xeno* (Xe). Dato che la quasi totalità dell'aria secca è rappresentata dalla miscela di un numero ristretto di gas permanenti, non ci si aspetta che la sua composizione vari significativamente nello spazio e nel tempo. Tuttavia, se si considera la composizione dell'aria secca con maggior attenzione, si nota come in essa siano presenti numerose altre sostanze chimiche che, sebbene in concentrazioni estremamente ridotte, possono influenzare notevolmente la vita del pianeta. In genere, tali sostanze sono il risultato delle attività umane, soprattutto di quelle industriali, e spesso la loro presenza più o meno marcata nei vari punti del globo viene indicata genericamente col termine di *inquinamento atmosferico.* Un'importante famiglia di tali sostanze è quella dei gas responsabili dell'assorbimento della radiazione ad onda lunga emessa dalla superficie terrestre, noti come *gas serra,* il cui rappresentante principale è il *Biossido di Carbonio* (CO_2), anche se svolgono un'azione rilevante anche il *Metano* (CH_4), l'*Ossido Nitroso* (N_2O) ed in misura minore l'*Ozono* (O_3). Un'altra importante famiglia è quella dei *Clorofluorocarburi* (CFC), che svolgono un ruolo determinante nei processi di distruzione della fascia di ozono stratosferico: tali sostanze, per la loro scarsa reattività, hanno tempi di residenza in atmosfera molto lunghi (dell'ordine delle decine o centinaia di anni), cosa che consente loro di raggiungere la Stratosfera entrando in complesse reazioni chimiche volte alla distruzione delle molecole di ozono presenti, con conseguente diminuzione dell'effetto di schermo nei confronti della radiazione ultravioletta.

Accanto a queste famiglie di inquinanti, responsabili di fenomeni a scala planetaria e capaci di influire sui processi fisici che regolano i meccanismi di equilibrio atmosferico, vanno ricordati poi tutti gli inquinanti presenti in quantità rilevante in prossimità del suolo, importanti

soprattutto per i loro effetti diretti sulla salute degli organismi viventi, animali e vegetali: gli *ossidi di azoto* (soprattutto NO e NO_2), gli *ossidi di zolfo* (principalmente SO_2), i *composti del carbonio* (soprattutto monossido di carbonio CO e tutta la classe degli idrocarburi), oltre ad altre sostanze presenti in fase solida o liquida, solitamente indicata col termine di *particolato* o *aerosol*, caratterizzati dalle loro dimensioni fisiche e dalla loro composizione chimica, entrambe estremamente variabili nello spazio e nel tempo. Tutte queste sostanze sono presenti a *concentrazioni assolute* estremamente basse, tali da non essere rilevanti nei processi fisici atmosferici (tranne, in qualche misura, sulla sua trasparenza che va ad alterare i bilanci energetici radiativi), ma importanti per la già ricordata azione dannosa sugli organismi viventi. Nella **Tab. 1.1** è presentata una sintesi di quanto detto. Mentre per i gas permanenti le concentrazioni indicate in tabella sono sicuramente rappresentative di una generica aria secca, per tutte le altre sostanze i valori di concentrazione riportati devono essere visti come un ordine di grandezza indicativo.

Componente	***Simbolo***	***Peso Molecolare***	***Concentrazione (% in volume)***
Azoto	N_2	28.01	78.084
Ossigeno	O_2	32.00	20.946
Argon	Ar	39.95	0.934
Biossido di Carbonio	CO_2	44.01	0.030
Neon	Ne	20.18	$2.821 \cdot 10^{-3}$
Elio	He	4.00	$0.524 \cdot 10^{-3}$
Metano	CH_4	16.04	$0.150 \cdot 10^{-3}$
Kripton	Kr	83.80	$0.114 \cdot 10^{-3}$
Idrogeno	H_2	2.02	$0.050 \cdot 10^{-3}$
Xeno	Xe	132.30	$0.009 \cdot 10^{-3}$
Ozono	O_3	48.00	$0.007 \cdot 10^{-3}$
Ammoniaca	NH_3	16.04	$0.001 \cdot 10^{-3}$
Iodio	I_2	253.81	$0.001 \cdot 10^{-3}$
Biossido di Azoto	NO_2	46.01	$0.0001 \cdot 10^{-3}$
Biossido di Zolfo	SO_2	64.06	$0.00002 \cdot 10^{-3}$
Monossido di Azoto	NO	30.00	$0.00002 \cdot 10^{-3}$
Acido Solfidrico	H_2S	34.08	$0.00002 \cdot 10^{-3}$
Monossido di Carbonio	CO	28.01	tracce

Tab.1.1: Costituenti principali dell'aria secca.

La legge di stato dell'aria secca e la sua densità

I gas nell'aria secca si trovano ad una temperatura superiore alla temperatura critica (quella sopra la quale non è possibile liquefare un gas) e quindi per essi vale con ottima approssimazione sia la legge dei gas perfetti che la legge di Dalton. Vale la pena, a questo punto, *specializzare* la legge dei gas perfetti per il caso dell'aria secca.

Innanzitutto, bisogna definire il *peso molecolare dell'aria secca*. L'aria secca è di fatto (**Tab. 1.1**) composta solo da N_2, O_2 e CO_2, presenti in 1 m^3 rispettivamente per il 78%, il 21% e lo 0.93% ed è facile mostrare come il peso molecolare dell'aria secca sia pari a 28.966. Tenendo conto di ciò, l'*equazione di stato dell'aria secca* è data dalla relazione:

$$p = \rho \cdot R_d \cdot T \qquad [1.5a]$$

dove ρ è la densità dell'aria (massa per unità di volume, in $kg \cdot m^{-3}$) e R_d è la costante universale dell'aria secca pari a 2.8704 ($mbar \cdot m^3 \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$). Da essa si ottiene immediatamente una relazione per la *densità dell'aria secca* ($kg \cdot m^{-3}$), una volta nota la pressione p (mbar) e la temperatura T (K):

$$\rho = 0.3484 \cdot p/T \qquad [1.5b]$$

Al livello del mare, se p = 1013.25 mbar e T = 288.15 K, ρ vale 1.225 $kg \cdot m^{-3}$. La dipendenza di ρ da p implica anche una dipendenza con la quota. Infatti, se la temperatura diminuisce con la

quota di circa 6.5 K·km^{-1} e se al livello del mare p_0 = 1013.25 mbar e T_0 = 288.15 K, dalla (1.3) si ha che ad una quota di 2000 m la pressione risulta pari a 790.23 mbar e quindi la densità dell'aria diventa 1.0006 kg·m^{-3}. A 2000 m di quota la densità dell'aria si è quindi ridotta del 18%.

Il Calore Specifico e la Conducibilità Termica

Il Calore Specifico è un parametro macroscopico usato per porre in relazione, nel caso di un gas ideale, la sua energia interna (che altro non è che la somma dell'energia cinetica posseduta dalle molecole che lo compongono in perenne agitazione termica) alla temperatura che lo caratterizza, ed è definito come la quantità di calore necessaria per innalzare di 1 K la temperatura di una massa unitaria di gas. Per i gas comprimibili quali l'aria, la quantità di calore necessaria per un aumento specifico unitario di temperatura dipende dal processo termodinamico utilizzato per somministrare (o sottrarre) tale calore; infatti, una parte del calore somministrato al gas andrà ad incrementare l'energia cinetica delle molecole che lo compongono, e quindi la sua energia interna *I*, ed una parte verrà impiegata nel processo di espansione. Per l'aria, considerata un gas ideale, si possono definire due distinti Calori Specifici a seconda che la somministrazione di calore avvenga a volume costante (quindi senza espansione) o a pressione costante:

- Calore Specifico a volume costante C_v. Se il volume del gas resta costante non c'è espansione, quindi l'incremento di temperatura del gas da una situazione *1*, caratterizzata dalla temperatura T_1, alla situazione *2*, caratterizzata dalla temperatura T_2, corrisponde solo ad un incremento di energia interna. Quindi il calore specifico è il rapporto tra l'incremento di energia interna e l'incremento di temperatura, cioè:

$$I_2 - I_1 = C_V(T_2 - T_1) \qquad [1.6a]$$

- Calore Specifico a pressione costante C_p. In questo caso, dallo stato *1* allo stato *2* il gas aumenterà la propria energia interna oltre che espandersi. Se si introduce il concetto di entalpia specifica *h*, definita come $h = I + p/\rho$, si ha che:

$$h_2 - h_1 = C_p(T_2 - T_1) \qquad [1.6b]$$

I due calori specifici non sono indipendenti tra loro. Infatti, è possibile dimostrare che:

$$C_p = C_V + R_d \qquad [1.6c]$$

Per l'aria, il Calore Specifico a pressione costante C_p, espresso in (J·kg^{-1}·K^{-1}), dipende solo dalla temperatura *T* (K) secondo la relazione semiempirica (Garratt, 1992):

$$C_p = 1005 + (T - 250)^2/3364 \qquad [1.6d]$$

quindi il valore 1005 J·kg^{-1}·K^{-1} è praticamente sempre corretto nelle applicazioni di interesse pratico. Come sarà evidente nel seguito, riveste una notevole importanza il prodotto ρC_p. Dalle relazioni (1.5b) e (1.6a) si ha che ρC_p è dato con ottima approssimazione da:

$$\rho C_p = 350.14 \cdot p/T \qquad [1.6e]$$

quindi alla pressione di 1013 mbar e alla temperatura di 288 K, ρC_p vale circa 1232 J·m^{-3}·K^{-1}.

Un'altra proprietà dell'aria secca di una certa importanza è la sua *conducibilità termica* K_d, cioè il flusso di calore attraverso una superficie unitaria quando il gradiente di temperatura è unitario. Una relazione per la dipendenza tra tale grandezza (J·m^{-1}s^{-1}K^{-1}) e la temperatura (K) è la seguente:

$$K_d = 0.023807 + 7.1128 \cdot 10^{-5}(T - 273.15) \qquad [1.7a]$$

Se si considera uno strato di atmosfera di spessore infinitesimo *dz* con una differenza di temperatura *dT* tra la superficie superiore e inferiore, il *flusso di calore per conduzione* che si viene a creare attraverso tale strato è dato dalla ben nota Legge di Fourier:

$$F_z = -K_d \cdot \frac{dT}{dz} \qquad [1.7b]$$

Come noto, il flusso di calore ha direzione di propagazione opposta al gradiente di temperatura.

Esercizio 1.1

Per capire l'importanza più o meno elevata che riveste il flusso di calore per conduzione in atmosfera, in generale, e nel *PBL* in particolare, consideriamo due casi tipici*:*

- una tipica situazione estiva, diurna e soleggiata, ed uno strato d'aria di spessore Δz molto piccolo (1 mm) immediatamente sopra il suolo. Se la temperatura media dello strato è 298 K e la differenza di temperatura tra la sommità dello strato e l'interfaccia con la superficie terrestre è ΔT = -12 K (valore molto realistico), dalle (1.7) si ha K_d = 0.0256 J·m^{-1}s^{-1}K^{-1} e $F_z \approx \cdot\Delta T/\Delta z$ = -306.9 W·m^{-2}, cioè un flusso di calore estremamente elevato e diretto verso l'alto (dal suolo all'aria) dovuto al forte gradiente termico presente. Come si vedrà nel seguito, è proprio questo flusso di calore che realizza il trasferimento indiretto di energia solare incidente (che riscalda il suolo) all'aria del *PBL* durante le ore soleggiate, trasferimento che produrrà turbolenza.
- una situazione tipica della troposfera medio-alta (per es. 1000 m, tipico limite superiore del *PBL*) con una temperatura media di 273 K ed un gradiente termico verticale di -6.5 K·km^{-1}. In questo caso si ha K_d = 0.0238 J·m^{-1}s^{-1}K^{-1} mentre si ha che $F_z \approx 1.5\cdot10^{-4}$ W·m^{-2}. Il flusso di calore per conduzione è quindi sei ordini di grandezza inferiore e a questa quota la sua importanza è decisamente irrilevante. Come si nota, ciò che rende differenti i due casi non è tanto la differenza di valore nella conducibilità termica, quanto piuttosto il differente gradiente di temperatura verticale dello strato d'aria considerato.

1.1.6 IL CONCETTO DI CONCENTRAZIONE DI UNA SOSTANZA IN ARIA

La presenza di una generica sostanza in aria (gassosa o particellare) ha bisogno di una quantificazione univoca e da questa necessità nasce il concetto di *concentrazione* e le sue varie definizioni. In Micrometeorologia e, soprattutto, nella Teoria della Dispersione degli Inquinanti in aria, la concentrazione di una sostanza in aria può essere definita in modi profondamente differenti, ognuno dei quali presenta ben precise applicazioni pratiche. Qui di seguito vengono presentate le principali definizioni di concentrazione utilizzate in Micrometeorologia e nella teoria della dispersione degli inquinanti in aria.

1.1.6.1 La concentrazione di massa

La *concentrazione di massa* è la definizione più naturale, che si applica ad ogni sostanza, sia gassosa che solida. Se si isola attorno ad un punto *P* un volume di controllo *V* dove è presente una massa M_A di una sostanza *A*, la concentrazione di massa ρ_A (g·m^{-3}) in quel punto è data da:

$$\rho_A = M_A/V \qquad [1.8]$$

Per un gas la concentrazione di massa (di fatto una densità) *non si conserva* al variare della pressione e della temperatura. Infatti, aumentando la temperatura, l'aria presente in *V* si espande aumentando il proprio volume. Quindi, nell'originario volume di controllo *V* il numero di molecole di *A* diminuisce e diminuisce di conseguenza anche la concentrazione di massa. Quando si studia la dispersione degli inquinanti in aria è questa la definizione che viene utilizzata ogni volta che non devono essere trattate sostanze chimicamente reattive. Anche se l'unità standard con cui si esprime la concentrazione di massa è (g·m^{-3}), per esprimere la concentrazione delle sostanze inquinanti presenti a concentrazioni molto basse è più conveniente esprimerle in μg·m^{-3}.

1.1.6.2 Il rapporto di mescolanza

Il *rapporto di mescolanza* (*frazione molare* o *mixing ratio*) C_X di un gas *X* quantifica il numero di moli di questo gas in ogni mole di aria secca ed è espresso in ($moli_X \cdot mole_{aria}^{-1}$) o, in maniera del tutto equivalente, in ($m^3 \cdot m^{-3}$), dato che il volume occupato da un gas ideale è proporzionale al numero di moli dello stesso. Il rapporto di mescolanza ha la notevole proprietà di *conservarsi* al mutare della densità dell'aria, cosa che avviene col mutare della sua temperatura e pressione e ciò ne fa una misura robusta della presenza di una sostanza in atmosfera. Dato che, nella maggior parte dei casi, verrà considerato il rapporto di mescolanza di un gas presente in tracce, per semplicità l'unità di misura adottata è il *ppmv* (*parti per milione in volume*), o più semplicemente *ppm*, e il *ppb* (*parti per miliardo*). Pertanto, si ha che:

$$1\ ppmv = 1\ ppm = 1 \cdot 10^{-6}\ moli/mole$$
$$1\ ppbv = 1\ ppb = 1 \cdot 10^{-9}\ moli/mole$$

Considerando ora l'equazione di stato dei gas perfetti, la legge di Dalton e la definizione di rapporto di mescolanza, si giunge facilmente alla relazione:

$$p_X = p \cdot C_X \qquad [1.9a]$$

relazione che lega tra loro la pressione atmosferica *p*, la pressione parziale p_X del gas *X* ed il relativo rapporto di mescolanza C_X. Spesso, nella pratica, è necessario passare da una concentrazione di massa ρ_X al relativo rapporto di mescolanza C_X. È facile verificare che, se PM_X è il peso molecolare del gas *X*, tra le due definizioni di concentrazione esistono le relazioni seguenti:

$$C_X = \rho_X \frac{R^* T}{p \cdot PM_X} \qquad \rho_X = C_X \frac{p \cdot PM_X}{R^* T} \qquad [1.9b]$$

Sostanza	Peso Molecolare	Sostanza	Peso Molecolare
Ar	39.948	NO	30.006
Ne	20.179	NO_2	46.006
Kr	83.800	O_3	48.000
Xe	131.30	H_2O	18.015
N_2	28.013	He	4.003
O_2	32.000	NaCl	58.440
CH_4	16.043	H_2O_2	34.010
CO_2	44.010	H_2SO_4	98.070
CO	28.010	HNO_3	63.010
H_2	2.016	$(NH_4)NO_3$	80.045
N_2O	44.012	$(NH_4)_2SO_4$	132.137
SO_2	64.060	C_6H_6	78.1095
NH_3	17.000	C_6H_5-CH_3	92.1364

Tab.1.2: peso molecolare delle principali sostanze di interesse.

Se, in particolare, ρ_X è espressa in ($\mu g \cdot m^{-3}$), la pressione atmosferica in (mbar), la temperatura in (K) ed il rapporto di mescolanza C_X in *ppb*, si ha che:

$$C_X = 0.08314 \cdot 10^3 \rho_X \cdot T/(p \cdot PM_X)$$
$$\rho_X = 12.0279 \cdot 10^{-3} C_X \cdot p \cdot PM_X/T \qquad [1.9c]$$

Nella **Tab.1.2** sono stati raccolti i pesi molecolari delle sostanze di maggior interesse pratico nello studio del *PBL* e della dispersione degli inquinanti in aria. Se ci si limita a SO_2, NO_2 e O_3 e se la pressione atmosferica e la temperatura valgono rispettivamente 1013 mbar e 20°*C*, i fattori di conversione tra *ppb* e $\mu g \cdot m^{-3}$ sono rispettivamente 2.66, 1.91 e 2.00.

Esercizio 1.2

In era preindustriale il mixing ratio medio di CO_2 al suolo era di 280 ppm, mentre nell'era industriale tale valore ha raggiunto e superato i 365 ppm. Se la CO_2 è ben rimescolata in atmosfera e la pressione media al suolo è di 984 mb, si vuole stimare la massa di CO_2 immessa in atmosfera durante l'intera era industriale.
Innanzitutto, si stima la massa totale di aria presente in atmosfera. La pressione p è il peso esercitato da una colonna d'aria a sezione unitaria sulla superficie terrestre e se R = 6400 km è il raggio della Terra, la massa totale m_a di aria è:

$$m_a = \frac{4\pi R^2 p}{g} = 5.2 \cdot 10^{18} \ \ kg$$

Se si indica con C_{CO2} un generico rapporto di mescolanza della CO_2, si ha che:

$$C_{CO_2} = \frac{numero\ moli\ CO_2}{numero\ moli\ aria}$$

cioè:

$$Numero\ moli\ CO_2 = C_{CO_2} \cdot numero\ moli\ aria =$$

$$C_{CO_2} \cdot \frac{massa\ aria}{Peso\ Molecolare\ aria} = C_{CO_2} \cdot \frac{m_a}{PM_{aria}}$$

Indicando con m_{CO2} la massa di CO_2 corrispondente e con m_a la massa d'aria si ottiene quindi:

$$m_{CO_2} = C_{CO_2} \cdot m_a \cdot \frac{PM_{CO_2}}{PM_{aria}}$$

La quantità di CO_2 immessa in atmosfera durante l'era industriale, in cui il rapporto di mescolanza ha subito l'incremento ΔC_{CO2} pari a:

$$\Delta C_{CO_2} = (365 - 280) = 85\ ppm = 85 \cdot 10^{-6}\ moli \cdot mole^{-1}$$

è dato da:

$$\Delta m_{CO_2} = \Delta C_{CO_2} \cdot m_a \cdot \frac{PM_{CO_2}}{PM_{aria}} = 85 \cdot 10^{-6} \cdot 5.2 \cdot 10^{18} \cdot \frac{44.012}{28.97} = 6.7 \cdot 10^{14}\ kg$$

La quantità di CO_2 immessa in atmosfera, pari a circa $6.7 \cdot 10^{11}$ t, è enorme e corrisponde a $1.8 \cdot 10^{11}$ t di carbonio. Tutto questo carbonio, convertito in CO_2, rappresenta tutto il carbonio (presente in natura sotto varie forme, come idrocarburi, carbone, ecc.) coinvolto nei processi di combustione (delle attività industriali e degli autoveicoli) che hanno reso possibile l'instaurarsi del modello di vita tipico dell'era industriale che coinvolge la gran parte del mondo.

1.1.6.3 La densità molecolare

La *densità molecolare* (*number density*) N_X di un gas X è pari al numero di molecole di quel gas presenti nell'unità di volume di aria ed è comunemente espressa come ($molecole_X \cdot m^{-3}$); questa definizione è l'unica impiegata quando si trattano le reazioni di chimica dell'atmosfera. Se si considera la reazione chimica che descrive la reazione tra due sostanze gassose X e Y da cui si ottengono i prodotti di reazione gassosi P e Q:

$$X + Y \rightarrow P + Q \qquad [1.10a]$$

il tasso di scomparsa di X ad essa dovuto eguaglia la frequenza di collisione tra le molecole di X e Y moltiplicata per la probabilità che ad ogni collisione segua la reazione chimica indicata. La frequenza di collisione, a sua volta, è proporzionale al prodotto della densità molecolare delle due specie $N_X \cdot N_Y$. Indicando con [X] e [Y] le due densità molecolari e con K la probabilità che avvenga la reazione (1.10a) quando una molecola di X collide con una di Y, si può scrivere l'equazione della cinetica chimica relativa alla reazione considerata, che quantifica il tasso di reazione di X:

$$\frac{d[X]}{dt} = -K \cdot [X] \cdot [Y] \qquad [1.10b]$$

Il rapporto di mescolanza e la densità molecolare di un gas sono in relazione tra loro attraverso la densità molecolare dell'aria N_a (molecole$_{aria}$·m^{-3}), cioè:

$$N_X = C_X \cdot N_a \qquad [1.11a]$$

A sua volta N_a dipende dalla pressione p e dalla temperatura T secondo la legge di stato dei gas. In particolare, se si considera un volume V contenente N moli di aria, $N_a = A_V\, N/V$ e quindi:

$$N_X = \frac{A_V p}{R^* T} \cdot C_X = 7.2434 \cdot 10^{24} \frac{p}{T} N_a \cdot C_X \qquad [1.11b]$$

dove C_X è espressa in (moli$_X$·moli$_{aria}^{-1}$). Come si può notare, la densità molecolare <u>*non si conserva*</u> al variare della pressione e della temperatura.

1.1.6.4 La concentrazione di sostanze non gassose

In atmosfera, oltre alle componenti gassose, sono presenti anche particelle solide o liquide sospese in aria, chiamate *particolato atmosferico* (o *aerosol atmosferico*), che presentano una dimensione caratteristica compresa approssimativamente nell'intervallo 0.001÷100 μm (le più piccole crescono rapidamente per condensazione, mentre le più grandi si depositano altrettanto rapidamente per effetti gravitazionali). Ovviamente la presenza in atmosfera di tali particelle può essere descritta solo impiegando la concentrazione di massa.

1.1.7 LE CARATTERISTICHE DELL'ARIA UMIDA.

In realtà l'aria del *PBL* non è mai secca e la presenza di nubi alla sua sommità o di nebbia o foschia nei pressi del suolo ne è un indizio evidente. La maggior parte dell'acqua allo stato gassoso entra nel *PBL* attraverso due meccanismi: *l'evaporazione* e la *traspirazione*. Si parla di <u>evaporazione</u> quando una molecola di acqua presente sopra una superficie liquida acquista (per es. a causa della radiazione solare incidente) sufficiente energia cinetica da rompere il legame esistente con le molecole circostanti. Questa iniezione di energia conferisce un moto alla molecola che, se diretto verso l'alto, le consente di abbandonare la superficie e di mescolarsi con gli altri componenti gassosi dell'aria sovrastante. La <u>traspirazione</u> è invece un meccanismo differente e riguarda l'acqua presente negli organismi viventi vegetali. Nelle ore diurne, gli *stomi* delle foglie si aprono in risposta alla presenza di energia solare incidente. Se la tensione di vapore dell'acqua presente nelle foglie eccede la tensione di vapore dell'acqua presente nell'aria, le molecole di acqua si muovono dalla zona ad alta tensione di vapore (le foglie) a quella a minore tensione di vapore (l'atmosfera). Questi due processi spesso vengono indicati collettivamente col termine *evapotraspirazione*. Spesso poi nel *PBL* sono presenti formazioni nuvolose localizzate alla sua sommità. L'aria delle nubi presenta sempre un elevato contenuto di acqua sia in fase gassosa che in fase liquida (piccole gocce di acqua) e solida (piccoli cristalli di ghiaccio). Questa non è l'unica situazione in cui l'aria contiene acqua in fase non gassosa. In effetti troviamo acqua liquida in aria durante gli eventi di pioggia e nelle nebbie e troviamo acqua in fase solida durante nevicate e brinate. Trattare tutto ciò è piuttosto complesso e, per un approfondimento, si rimanda ai testi di meteorologia generale (es. Stull 2000, Ahrens 2000).

Perché sia possibile avere del vapor d'acqua in aria è necessario che dell'acqua liquida evapori e il calore necessario per realizzare questa trasformazione di fase è il <u>*Calore Latente di condensazione*</u> λ (J·kg^{-1}) il cui valore è dato dalla relazione semiempirica (Jacobson, 2000):

$$\lambda = 2.501 \cdot 10^6 - 2370 \cdot (T - 273.15) \qquad [1.12]$$

che è la quantità di calore da somministrare ad 1 *kg* di acqua perché evapori completamente. Lo stesso calore verrà poi rilasciato in fase di condensazione, cioè nel passaggio dalla fase gassosa a quella liquida. λ dipende quindi linearmente dalla temperatura assoluta ma questa dipendenza è piuttosto debole: infatti è facile constatare come il valore di λ a 25°C è solo del 2% inferiore a

quello a 0°C.

Essendo l'aria una miscela gassosa contenente vapor d'acqua, per la ***legge di Dalton*** la sua *pressione totale P* risulta pari a $P = P_a + e$ dove P_a è la pressione che avrebbe l'aria se fosse priva di vapor d'acqua (aria secca) ed e è la pressione parziale del vapor d'acqua). Essa, essendo una pressione, è misurata in (mbar) e rispetta l'equazione di stato dei gas espressa come $e = \rho_V \cdot R_V T$ dove ρ_v è la densità del vapor d'acqua e R_v è la costante dei gas per il vapor d'acqua pari a 4.6140 $m^3 \cdot mbar \cdot kg^{-1}K^{-1}$. Ad una data temperatura la tensione di vapore non può normalmente superare un valore di soglia, la ***tensione di vapore alla saturazione*** (e_s), che dipende dalla temperatura dell'aria e cresce con essa. In effetti, se si considera un volume chiuso in cui sia presente inizialmente dell'acqua in fase liquida e dell'aria, dall'acqua sfuggiranno in aria un certo numero di molecole con conseguente aumento della presenza del vapor d'acqua ed incremento della relativa pressione parziale. D'altro canto, avverrà anche che alcune delle molecole di vapor d'acqua siano catturate dall'acqua liquida presente. Si verranno quindi a stabilire due flussi di molecole d'acqua: uno dalla fase liquida a quella gassosa e l'altro dalla fase gassosa a quella liquida. Dopo un transitorio iniziale, si giungerà ad un equilibrio in cui la pressione parziale del vapor d'acqua è e_s. Per individuare delle relazioni che permettano di quantificare la tensione di saturazione del vapor d'acqua, è interessante iniziare considerando l'equazione di Clausius-Clapeyron che esprime la variazione della tensione di saturazione con la temperatura:

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{\lambda}{R_V} \cdot \frac{e_s}{T^2} \qquad [1.13]$$

da cui, con alcune semplificazioni (Jacobson, 2000), si giunge alla seguente:

$$e_s = 6.112 \cdot exp\left[6816 \cdot \left(\frac{1}{273.15} - \frac{1}{T}\right) + 5.1309 \cdot \ln\left(\frac{273.15}{T}\right)\right] \qquad [1.14a]$$

In alternativa, si può utilizzare nell'intervallo -35°C < T_C < 35°C la seguente relazione semiempirica in cui T_C è espressa in °C:

$$e_s = 6.112 \cdot exp\left[\frac{16.67 \cdot T_C}{T_C + 243.5}\right] \qquad [1.14b]$$

La tensione di vapore saturo e_s e la tensione di vapore effettiva e caratterizzano completamente il contenuto di vapor d'acqua in aria anche se sono concetti relativamente *poco operativi*. In pratica, può essere utile impiegare anche altre grandezze quali:

- l'***umidità relativa*** (*RH*), cioè il rapporto tra la massa di vapor d'acqua presente e la massa di vapor d'acqua alla saturazione, calcolabile (in %) come:

  $$RH = 100 \cdot e/e_S \qquad [1.15a]$$

  In pratica, l'umidità relativa indica l'ammontare massimo di evaporazione che è possibile accumulare nell'aria, indipendentemente dalla temperatura della stessa. Ovviamente, quando l'umidità relativa raggiunge il 100%, si è in una situazione di saturazione.

- l'***umidità assoluta*** (*a*), cioè la massa di vapor d'acqua presente in 1 m^3 di aria umida. In pratica, se m_w è la massa di vapor d'acqua nel volume *V*, *a* ($g_{acqua}.m^{-3}_{aria}$), vale $a = m_w/V$. Usando la legge dei gas perfetti, se M_w è il peso molecolare dell'acqua (pari a 18), è facile mostrare che:

  $$a = m_w/V = e \cdot M_w/(R^*T) = 216.5 \cdot e/T \qquad [1.15b]$$

  Sempre impiegando la legge dei gas perfetti si ottiene poi che:

  $$a = 0.622 \cdot \rho \cdot e/p \qquad [1.15c]$$

  Il valore a_s alla saturazione, cioè la massima quantità di vapor d'acqua che può essere contenuta nell'aria, lo si ottiene dalle relazioni precedenti sostituendo ad *e* il valore e_s.

- il *rapporto di mescolanza* (r), cioè il rapporto tra la massa di vapor d'acqua in un dato volume di aria e la massa di aria secca presente nello stesso. Utilizzando ancora una volta la legge dei gas applicata sia all'aria secca che al vapor d'acqua, si ottiene:

$$r = 0.622 \cdot e/(p - e) \qquad [1.15d]$$

  Il rapporto di mescolanza alla saturazione r_s lo si ottiene da questa relazione sostituendo e con e_s. Da quanto detto al Punto 1.1.6.2, r è una proprietà conservativa e per questo è la variabile più usata per descrivere l'umidità dell'aria.

- l'*umidità specifica* (q), cioè la quantità di vapor d'acqua (in grammi) per ogni grammo di aria umida (g_{acqua}/g_{aria}). La relazione per il calcolo (con le solite unità di misura) è:

$$q = 0.622 \cdot e/p \qquad [1.15e]$$

  Sostituendo ad e il valore alla saturazione e_s si ha l'umidità specifica alla saturazione.

- la *temperatura di rugiada* (T_{dw}, *dew-point temperature*) è la temperatura a cui l'aria deve essere raffreddata a pressione costante perché diventi satura. Una relazione semiempirica che si può usare per il suo calcolo è la seguente (la tensione di vapore è in mbar):

$$T_{dw} = 273.15 + \frac{273.15 \cdot \log_{10}[e/6.1078]}{7.5 - \log_{10}[e/6.1078]} \qquad [1.15f]$$

  Per *dew-point depression* ΔT_{dw} si intende, poi, la differenza tra la temperatura dell'aria T e la temperatura di rugiada T_{dw} ed è una misura di quanto l'aria sia secca. La temperatura dell'aria T non può mai essere inferiore a T_{dw}. Se si cercasse di diminuire ulteriormente la temperatura, nella realtà essa resterebbe pari a T_{dw} e l'eccesso d'acqua condenserebbe.

Normalmente, *la tensione di vapore del vapor d'acqua nell'aria umida risulta molto inferiore ai valori critici ed essa stessa può considerarsi molto simile ad un gas perfetto*. In queste condizioni si può derivare *un'equazione di stato* che lega tra loro pressione, temperatura e densità dell'aria umida, molto simile a quella dei gas perfetti. Infatti, detta p e ρ rispettivamente la pressione e la densità dell'aria secca, ρ_V la densità dell'acqua e p_d la pressione dell'aria secca, si ha:

$$p = p_d + e = \rho \cdot R_d T + \rho_V R_v T = \rho \cdot R_d T \cdot \left(1 + \frac{1.61}{\rho}\rho_V\right) = \rho \cdot R_d T \cdot (1 + 0.608r) \qquad [1.16a]$$

dove il fattore moltiplicativo alla temperatura è derivante dalla presenza del vapor d'acqua. Adottando una nuova definizione di temperatura dell'aria umida, la *temperatura virtuale* (T_v):

$$T_v = T \cdot (1 + 0.608r) \qquad [1.16b]$$

l'*equazione di stato per l'aria umida* diventa:

$$p = \rho \cdot R_d T_v \qquad [1.16c]$$

formalmente identica all'equazione di stato dell'aria secca.

Il *peso molecolare* PM_w dell'aria umida varia con il contenuto di vapor d'acqua q come:

$$PM_w = \frac{28.966}{1 + 0.608 \cdot q} \qquad [1.17]$$

Nel caso dell'aria umida, la *densità* è ancora data dalla (1.5b), a patto di sostituire alla temperatura normale la temperatura virtuale T_v.

Nel caso, invece, del *calore specifico a pressione costante*, se $C_{p,dry}$ è il valore in assenza di umidità, la relazione seguente determina come tale parametro varia con la concentrazione di vapor d'acqua:

$$C_p = C_{p,dry}(1 + 0.859r) \qquad [1.18]$$

L'influenza dell'umidità su ρC_p è, invece del tutto trascurabile. Infine, di particolare interesse nelle applicazioni pratiche è il prodotto $\rho\lambda$ ($J \cdot m^{-3}$). Dalle (1.12) e (1.5b) si ottiene una relazione tra tale parametro, la temperatura e la pressione:

$$\rho\lambda = 0.3484 \cdot \frac{p}{T} \cdot [2.501 \cdot 10^6 - 2370 \cdot (T - 273.15)] \qquad [1.19]$$

Finora si è considerata l'aria umida in cui era presente solo il vapore. Variando, però, la temperatura nel tempo (o nello spazio) sono possibili vari cambiamenti di fase. Un raffreddamento dell'aria può portare, infatti, la sua tensione di vapore al valore di saturazione; in questo caso, proseguendo il raffreddamento, la tensione di vapore non può aumentare oltre il valore di saturazione e l'eccesso d'acqua in aria si condensa in minute goccioline, determinando nebbie o foschie. Ciò avviene, però, solo se in aria esistono dei *nuclei di condensazione* (particelle solide attorno a cui l'acqua si può condensare, praticamente sempre presenti). Se poi la temperatura dell'aria risultasse inferiore a 0°C, il vapor d'acqua che lascia l'aria passa in fase solida (*brinamento*). Questo passaggio di fase è un processo esotermico ed il relativo calore latente, λ_S, identico a quello caratteristico del passaggio di fase solido-gas (*sublimazione*), vale (Jacobson, 2000):

$$\lambda_s = 2.83458 \cdot 10^6 - T_{\circ C} \cdot [340 + 10.46 \cdot (T - 273.15)] \qquad [1.20a]$$

Nelle nubi, presenti frequentemente alla sommità del *PBL*, l'acqua è presente sia come vapore che come liquido e solido. In esse può aver luogo il passaggio di fase solido-liquido e viceversa (*liquefazione* e *solidificazione*) caratterizzato da un calore latente pari a (Jacobson, 2000):

$$\lambda_N = 3.3358 \cdot 10^6 + T_{\circ C} \cdot [2030 - 10.46 \cdot (T - 273.15)] \qquad [1.20b]$$

Nell'aria si può trovare acqua allo stato gassoso, liquido e solido, anche contemporaneamente, e per quantificarne complessivamente la presenza (*acqua totale*), si definisce *rapporto di mescolanza totale* r_T la somma di r (rapporto di mescolanza per il vapor d'acqua), r_L (rapporto di mescolanza dell'acqua liquida) e r_I (rapporto di mescolanza del ghiaccio). Per una particella di aria umida (con la presenza di acqua nelle tre fasi) in moto nello spazio, la variazione nel tempo del suo rapporto di mescolanza totale sarà equivalente ad un *termine di sorgente* che può essere rappresentato dall'evaporazione di acqua liquida adiacente alla particella (contributo positivo) o dalla perdita di acqua per saturazione e quindi precipitazione sotto forma di pioggia (contributo negativo). Se il termine di sorgente è nullo, lungo la traiettoria la particella sperimenterà comunque una variazione di temperatura e di pressione ma, dovendosi conservare il rapporto di mescolanza totale, inevitabilmente si assisterà ad una ridistribuzione dell'acqua presente nelle diverse fasi.

1.1.8 L'EQUAZIONE IDROSTATICA.

Dopo aver introdotto le principali variabili con cui successivamente caratterizzeremo lo stato del *PBL*, è ora opportuno stabilire alcune leggi fisiche di notevole e generale importanza cui faremo frequentemente riferimento nel seguito.

Per prima cosa va ricordato che in ogni istante di tempo ed in ogni punto dell'atmosfera tra la pressione p, la densità ρ e la temperatura T vale l'equazione di stato dei gas nella forma (1.5a) o meglio nella forma (1.16a) quando si tiene conto della presenza di vapor d'acqua nell'aria, legge sempre valida, sia nel caso in cui l'atmosfera è in moto, sia quando il moto cessa. In effetti la relazione di stato dei gas perfetti è la prima delle leggi fondamentali che governano la dinamica dell'atmosfera, come vedremo nel Capitolo successivo.

Un'altra considerazione deriva dall'evidenza sperimentale che lo stato del *PBL* varia nel tempo con continuità ed è proprio questa continua variabilità il tema del nostro studio. Tuttavia, a livello logico, nulla vieta di immaginare questa *continua variazione* come una *continua perturbazione* che si viene a sovrapporre ad un ipotetico *stato di riferimento* la cui definizione è decisamente arbitraria. Una possibile scelta dello stato di riferimento è un *PBL* in condizioni omogenee in cui siano assenti i moti dell'aria (sia orizzontali che verticali) e questa situazione ideale

viene spesso presa come riferimento nella modellizzazione del *PBL*. In pratica, definito questo *stato di riferimento*, i modelli stimano l'evoluzione nello spazio e nel tempo delle *variazioni* rispetto a tale condizione. In questa situazione ideale di sostanziale quiete, *la forza di gravità deve bilanciare esattamente la componente verticale della forza dovuta al gradiente verticale di pressione*. Tuttavia la pressione in un punto dell'atmosfera in movimento non è detto che coincida con la pressione che si avrebbe in quel punto se l'atmosfera fosse priva di moto.

Si consideri un'atmosfera in quiete e si isolino *due superfici isobariche*, una alla quota z e a pressione p_h e l'altra alla quota $z+dz$ a pressione p_h+dp_h. Tra le due superfici si consideri un *volume d'aria* con base unitaria (per es. un cilindro con asse verticale). In assenza di un gradiente orizzontale di pressione (presente solo con moti orizzontali dell'aria) e per l'isotropia della pressione atmosferica, la forza di pressione sulla superficie laterale del volume risulterà nulla e quindi il bilancio delle forze verticali si ridurrà a $p_h - (p_h + dp_h) = -g\rho dz = 0$, quindi

$$\frac{dp_h}{dz} = -g\rho \qquad [1.21]$$

che è l'*equazione idrostatica dell'atmosfera*, secondo cui in un'atmosfera in quiete *la pressione idrostatica decresce con la quota*. Questa situazione costituisce, di fatto, lo *stato di riferimento* dell'atmosfera. Come si sarà notato, nelle relazioni precedenti è stato usato il simbolo p_h per denotare la pressione di un'atmosfera in quiete, riservando invece il simbolo p alla pressione in una atmosfera in movimento.

L'equazione idrostatica è una relazione differenziale del tutto generale che può anche essere riscritta anche in forma integrale. Infatti, nello stato di riferimento la densità dell'aria dipende solo dalla quota, cioè $\rho = \rho(z)$. In questo caso se a $z = 0$ la pressione vale p_0, (convenzionalmente 1013.25 mbar), allora dalla relazione precedente si ha che:

$$p_h(z) = p_0 - g\int_0^z \rho(\zeta)d\zeta \qquad [1.22]$$

Se si definisce *geopotenziale* $\Phi(z)$ il lavoro richiesto per innalzare una particella d'aria di massa unitaria da $z = 0$ alla quota generica z, si ha che per la quota z:

$$\Phi(z) = \int_0^z g dz \qquad \rightarrow \qquad d\Phi(z) = g dz \qquad [1.23a]$$

Ovviamente $\Phi(0) = 0$. Usando la legge di stato dei gas, questa relazione diventa:

$$d\Phi(z) = g \cdot dz = -R_d\, T \cdot d(\ln p_h) \qquad [1.23b]$$

Così la variazione con la pressione (e quindi con la quota) del geopotenziale dipende solo dalla temperatura. Se si considerano le due quote generiche z_1 e z_2, si ha che:

$$\Phi(z_2) - \Phi(z_1) = g_0 \cdot (Z_2 - Z_1) = R_d \int_{p_2}^{p_1} T \cdot d(\ln p_h) \qquad [1.23c]$$

detta *equazione ipsometrica*, dove $Z = \Phi(z)/g_0$ è l'*altezza geopotenziale* e g_0 è la media globale al livello del mare dell'accelerazione di gravità, pari a 9.80665 $m \cdot s^{-2}$. Nella bassa Troposfera Z e z sono pressoché identici.

Tra i molti impieghi dell'equazione idrostatica vale la pena considerare il seguente. Usando l'equazione di stato per sostituire la densità dell'aria ρ, la (1.21) si trasforma in:

$$\frac{dp_h}{p_h} = -\frac{g}{R_d T_v} dz \qquad [1.24a]$$

relazione molto usata per interpretare le misure raccolte in un radiosondaggio. Noti, infatti, il profilo verticale della temperatura virtuale e della pressione, se si considera uno strato d'aria tra il livello a pressione p_i ed il livello a pressione p_{i+1} e se è nota la quota *i-esima* (z_i), ipotizzando che in questo strato la temperatura virtuale dell'aria sia pari alla media delle temperature virtuali

misurate ai due livelli, dall'integrazione della (1.24a) si ottiene:

$$z_{i+1} = z_i + \frac{R_d}{g} \cdot \frac{T_{v_i} + T_{v_{i+1}}}{2} \cdot \ln\left(\frac{p_i}{p_{i+1}}\right) \quad [1.24b]$$

$$z_{i+1} = z_i + 14.636 \cdot \left(T_{v_i} + T_{v_{i+1}}\right) \cdot \ln\left(\frac{p_i}{p_{i+1}}\right) \quad [1.24c]$$

L'uso di questa relazione a partire dal suolo consente di ricostruire fedelmente la corrispondenza tra quote e pressioni.

Utilizzando la legge dei gas perfetti per eliminare dalla (1.21) la densità, si ottiene:

$$\frac{dp_h}{dz} = -g \cdot \frac{p_h}{R_d T} \quad [1.25a]$$

che integrata tra la pressione di riferimento p_0 (livello del mare) e la generica pressione $p < p_0$ (cui corrisponde la quota z) considerando costante la temperatura con la quota, diventa:

$$p_h(z) = p_0 \cdot exp\left[-\frac{\alpha \cdot z}{T}\right] \quad [1.25b]$$

dove $a = g/R_d = 0.0342$ K·m^{-1}. Questa relazione che coincide esattamente con la (1.3).

Fin qui l'atmosfera è stata considerata in quiete e nell'equazione di bilancio idrostatico compare la pressione p_h. Ma se l'atmosfera fosse in movimento e ad una certa quota si registrasse una pressione *termodinamica p* (termodinamica nel senso che è quella che soddisfa la legge dei gas perfetti), che relazione ci sarebbe tra p e p_h? La risposta la fornisce Dutton (1995; pag. 62) cui si rimanda per i dettagli. Il risultato finale che si ottiene è che la pressione termodinamica e la pressione idrostatica sono effettivamente differenti. Tuttavia, il considerarle coincidenti (*approssimazione idrostatica*) è un'ottima approssimazione nelle normali condizioni dell'atmosfera.

1.1.9 CONSIDERAZIONI TERMODINAMICHE E STABILITÀ

1.1.9.1 La temperatura potenziale e la stabilità statica.

Per una particella Lagrangiana d'*aria secca* di massa unitaria in moto nel *PBL* (considerata un'entità autonoma) il *Primo Principio della Termodinamica* può essere così espresso:

$$dQ = dU + dW \quad [1.26a]$$

dove dQ rappresenta l'energia termica acquisita da tutte le sorgenti di calore esterne, cui la particella *risponde* incrementando (o decrementando) la propria energia interna dU (cioè la somma dell'energia cinetica di tutte le molecole che la costituiscono) ed il lavoro subito (o realizzato) dW. Per una particella di aria, la variazione di energia interna dU corrisponde ad un incremento (o decremento) di temperatura a volume costante:

$$dU = C_v dT \quad [1.26b]$$

dove C_v è pari a 718 J·kg^{-1}·K^{-1} alla temperatura di 298 K. Il lavoro realizzato dalla (o sulla) particella non potrà che essere un lavoro di espansione (o compressione) e sarà dato da:

$$dW = pdV = pd\alpha \quad [1.26c]$$

dove p è la pressione nella particella e dV e $d\alpha$ sono rispettivamente la sua variazione infinitesima di volume e di volume specifico ($\alpha = 1/\rho$). Quindi, dalle (1.26b) e (1.26c), la (1.26a) diventa:

$$dQ = C_p dT + pd\alpha \quad [1.26d]$$

Se si considera ora l'equazione di stato dei gas, è semplice verificare che:

$$pd\alpha = R_d dT - \alpha dp \quad [1.26e]$$

Perciò, inserendo la (1.26e) nella (1.26d) e ricordando la (1.6c), si ha che per una particella d'aria secca di massa unitaria il Primo Principio della Termodinamica può essere espresso come:

$$dQ = C_p dT - \frac{1}{\rho} dp \qquad [1.27]$$

Queste considerazioni si applicano sia ad una particella di aria secca in movimento che ad una particella a riposo. Se, in particolare, una particella s'innalza nel *PBL*, nella sua ascesa incontrerà pressioni esterne in progressiva diminuzione e quindi si espanderà a spese dell'energia cinetica posseduta dalle molecole che la compongono, con una conseguente diminuzione della propria temperatura. *Pertanto, una particella di aria in salita entro il PBL si espande e si raffredda ed analogamente una particella in discesa si comprime e si riscalda*. La salita o la discesa della particella potrebbe aver luogo, a priori, in molti modi diversi, ma il moto più interessante è un *moto di tipo adiabatico*, cioè un moto tanto rapido da impedire che ci sia uno scambio di calore tra la particella e l'ambiente circostante. In tal caso, dalla (1.27) si giunge a:

$$C_p \left[\frac{dT}{dz}\right]_{ad} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} \qquad [1.28]$$

Impiegando poi l'approssimazione idrostatica, la relazione precedente diventa pari a:

$$\left[\frac{dT}{dz}\right]_{ad} = -\Gamma_d = -\frac{g}{C_p} = -0.0098\ Km^{-1} \qquad [1.29]$$

dove Γ_d (pari a 0.0098 K·m^{-1}) è il *gradiente adiabatico dell'aria secca* (*adiabatic lapse rate*). Quindi, *la temperatura di una particella d'aria secca in moto adiabatico verticale nel PBL varia con la quota con un gradiente costante e ben definito*. In pratica, una particella di aria secca che sale nel *PBL* in moto adiabatico si raffredda di 0.98 *K* per ogni 100 metri di incremento di quota. Lo *stato di riferimento* dell'atmosfera considerato dai modellisti a questo punto prevede non solo che sia valida l'equazione idrostatica, ma anche che l'atmosfera sia in condizioni adiabatiche, cioè che il gradiente di temperatura sia quello adiabatico.

Da queste considerazioni nasce il più importante parametro termodinamico che caratterizza l'atmosfera, cioè la *temperatura potenziale* θ definita come *quella temperatura assunta da una particella di aria secca, originariamente a temperatura T, dopo un suo spostamento adiabatico da una quota cui corrisponde una pressione p, ad una quota di riferimento (approssimativamente il livello del mare) cui corrisponde una pressione di riferimento p_0 assunta pari a 1000 mbar*. Per ottenere una relazione di pratico interesse tra la temperatura potenziale θ e la temperatura assoluta normale *T*, si sfrutta il fatto che il processo subito da una particella è un processo *adiabatico*. Ricavando *1/*ρ dall'equazione di stato dei gas, dalla relazione (1.28) si ha:

$$\frac{dT}{T} = \left(\frac{R_d}{C_p}\right) \cdot \frac{dp}{p} = -0.0098\ Km^{-1} \qquad [1.30a]$$

La trasformazione adiabatica subita dalla particella di aria sarà quindi descritta integrando la relazione precedente tra la pressione generica *p* ed una pressione di riferimento p_0 ed ottenendo:

$$\int_T^\theta \frac{dT}{T} = \left(\frac{R_d}{C_p}\right) \cdot \int_p^{p_0} \frac{dp}{p} \qquad [1.30b]$$

che porta alla definizione di *temperatura potenziale:*

$$\theta = \mathrm{T} \cdot \left[\frac{p_0}{p}\right]^{R_d/C_p} \qquad [1.30c]$$

dove R_d/C_p è pari a 0.286.

Al di là del suo significato termodinamico, la (1.30c) può essere vista semplicemente come una *nuova definizione di temperatura* che, per la sua utilità (come si vedrà nel seguito), è ampiamente impiegata nella modellizzazione del *PBL*. Naturalmente, se nella (1.30c) si

sostituisse alla temperatura *normale T* la temperatura virtuale T_v, ciò che si otterrebbe sarebbe la *temperatura potenziale virtuale* indicata come θ_v che caratterizza completamente l'aria umida.

Oltre alla relazione tra la temperatura *normale T* e la temperatura potenziale θ, si è interessati spesso anche ad una relazione che leghi tra loro i rispettivi gradienti *dT/dz* e *dθ/dz*. Per ottenerla si differenzia la (1.30c), si utilizza l'equazione di stato dei gas e la definizione di Γ_d (1.29), giungendo alla relazione:

$$\frac{T}{\theta}\frac{d\theta}{dz} = \frac{dT}{dz} + \frac{g}{C_p} = \frac{dT}{dz} + \Gamma_d \qquad [1.31a]$$

Dato che θ e *T* sono espresse entrambe in gradi Kelvin, il rapporto *T*/θ è prossimo all'unità e quindi la relazione precedente può essere ben approssimata come:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{dT}{dz} + \frac{g}{C_p} = \frac{dT}{dz} + \Gamma_d \qquad [1.31b]$$

Quindi, se $dT/dz < -0.0098$ (K·m^{-1}) allora $d\theta/dz < 0$, se $dT/dz = -0.0098$ (K·m^{-1}) $d\theta/dz = 0$ e se $dT/dz > -0.0098$ (K·m^{-1}) allora $d\theta/dz > 0$. Se poi si integra la (1.31b), si ottiene una buona approssimazione della (1.30c), che semplifica notevolmente i calcoli pratici:

$$\theta = T + 0.0098 \cdot z \qquad [1.31c]$$

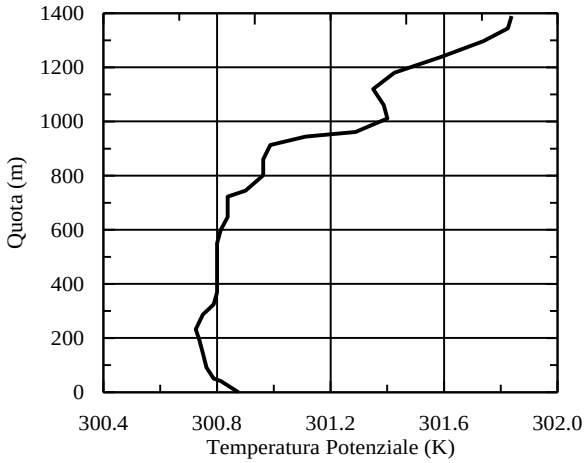


Fig.1.6: profilo verticale di temperatura potenziale (30/9/2000, 12GMT, Milano Linate).

Per illustrare l'importanza pratica della temperatura potenziale nello studio del *PBL*, è conveniente riconsiderare il profilo termico verticale presentato nella **Fig.1.3** alla luce della definizione di temperatura potenziale. Applicando la (1.30c) o la (1.31c) per trasformare *T* in θ, si ottiene il profilo di temperatura potenziale riportato nella **Fig.1.6**. La trasformazione è sorprendente! Mentre nel profilo verticale della temperatura *normale* si notava solo una lieve irregolarità che, a fatica, metteva in luce la presenza di uno strato atmosferico distinto, la trasformazione in temperatura *potenziale* fa emergere una complessa stratificazione termica che suggerisce un'analisi ancora più accurata, questa volta basata sul gradiente di temperatura potenziale. In effetti, mentre nella **Fig.1.3** il *PBL* (mostrato in un'ora diurna a forte soleggiamento) presentava un gradiente di *T* sempre positivo, tranne nella parte superiore dello strato dove era presente una spiccata inversione (*dT/dz*>0), nella **Fig.1.6** sono evidenti almeno quattro zone:

- una zona, nelle immediate vicinanze del suolo, con *dθ/dz* fortemente negativo,
- una zona intermedia con *dθ/dz* circa nullo,
- un'altra zona con *dθ/dz* fortemente positiva
- la zona superiore con *dθ/dz* positiva, ma inferiore alla precedente, che continua con gradiente circa uguale fino alla sommità della troposfera.

A questo punto è importante *riformulare* il Primo Principio della Termodinamica impiegando direttamente la temperatura potenziale. Se si differenzia la relazione (1.30c) si ottiene:

$$d\theta = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{R_d/C_p} dT + T \cdot \left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R_d/C_p}\right] \cdot dp \qquad [1.32a]$$

che, dopo semplici passaggi, si riduce a:

$$\frac{d\theta}{\theta} = \frac{dT}{T} - \frac{R_d}{C_p}\frac{dp}{p} \qquad [1.32b]$$

Inserendo questa relazione nell'espressione (1.27) si ottiene l'importante relazione seguente che evidenzia l'importanza teorica della temperatura potenziale:

$$dQ = \frac{T}{\theta} C_p \cdot d\theta \cong C_p \cdot d\theta \qquad [1.33]$$

In sostanza, il *Primo Principio della Termodinamica asserisce che ad ogni somministrazione (o sottrazione) di calore corrisponde un incremento (o decremento) di temperatura potenziale della particella*. Non c'è più bisogno, ora, di tener conto esplicitamente dell'espansione o contrazione della particella Lagrangiana.

Queste considerazioni per l'aria secca si applicano comunque anche all'aria umida purché non satura. Per quanto visto, una particella d'aria secca, durante un processo adiabatico, si raffredda quando sale e si riscalda quando scende. Anche una particella d'aria satura si comporta in maniera simile, ma il suo riscaldamento o il suo raffreddamento risulta meno marcato e la ragione di ciò sta nel fatto che l'aria satura contiene la maggior quantità possibile di vapor d'acqua. Se s'innalza e si raffredda, essa deve contenere meno vapore di quanto ne possiede e ciò determina la condensazione del vapore in eccesso sotto forma di gocce di liquido (ovviamente in presenza di nuclei di condensazione, cosa praticamente sempre verificata). Durante la condensazione viene, però, rilasciato del calore latente che compensa parzialmente il raffreddamento adiabatico. In fase di discesa, alla particella accade l'opposto: alcune gocce di acqua liquida evaporano e rimuovono calore dall'aria, compensando parzialmente il riscaldamento adiabatico. Si può ancora definire un gradiente tipico di temperatura (*saturated-adiabatic lapse rate*) Γ_s = *-dT/dz,* incontrato frequentemente nel profilo termico verticale in uno strato d'aria con nebbia o in una nube, come:

$$\Gamma_s = \frac{g}{C_p} \cdot \frac{(1 + r_s/R_d \cdot \lambda/T)}{\left(1 + 0.622 \cdot \frac{\lambda^2}{C_p R_d T^2}\right)} \qquad [1.34a]$$

Se si ignora, per semplicità, la variazione di calore specifico con l'umidità, utilizzando i valori standard per le costanti presenti, la (1.34a) si riduce alla forma più semplice seguente:

$$\Gamma_s = 0.0098 \cdot \frac{1 + 8711 \cdot r_s/T}{(1 + 1.35 \cdot 10^7 \cdot r_s/T^2)} \qquad [1.34b]$$

Vicino al suolo, *in condizioni di saturazione*, Γ_s è dell'ordine di 0.004 K·m^{-1}, valore che cresce fino a 0.006÷0.007 K·m^{-1} nella parte media della troposfera. In alta troposfera, dove l'umidità è praticamente assente, il *saturated lapse rate* tende all'*adiabatic lapse rate*.

1.1.9.2 La stabilità statica

Che cosa succederebbe se una particella d'aria alla quota *z,* subisse un'improvvisa accelerazione verso l'alto o verso il basso? A priori non si hanno elementi per dire se essa abbandonerà definitivamente la propria posizione originaria *z* oppure se si porrà ad oscillare attorno ad essa. E se poi nell'atmosfera alla quota *z* fosse presente un gradiente verticale di velocità del vento (*wind shear*) che cosa succederebbe? Queste domande non sono accademiche e di fatto derivano dall'evidenza che, in certe condizioni, in atmosfera si manifestano moti verticali di varia entità. In questo

paragrafo si studieranno questi problemi considerando solo la stratificazione termica dell'atmosfera, mentre si rimanda a Dutton (1995, pag. 75-80) per lo studio dell'influenza del *wind shear*.

Innanzitutto, i movimenti verticali delle masse d'aria presenti in atmosfera vengono studiati considerando il moto di una singola particella rispetto all'ambiente circostante e per fare ciò è necessario introdurre due ipotesi importanti per semplificare i ragionamenti:

- la pressione p_p della particella è sempre identica alla pressione dell'ambiente circostante; quindi, se la particella si muove verticalmente o orizzontalmente, essa adegua istantaneamente la propria pressione a quella dell'aria che trova attorno a sé;
- tutti i movimenti della particella hanno luogo senza scambio di calore con l'ambiente circostante; quindi, i suoi movimenti sono isoentropici e per questo la temperatura potenziale θ_p della particella non muta.

In questo modo possiamo considerare la particella *termodinamicamente isolata* dall'ambiente circostante: la sua massa non si mischia con quella dell'aria adiacente e non c'è flusso di calore tra la particella e l'ambiente attorno ad essa. Tutto ciò è ovviamente un'astrazione della realtà, un'astrazione che però è decisamente realistica nella maggior parte delle situazioni reali.

Detto ciò, si consideri una particella di aria secca in moto senza *scambio di calore e massa* con l'ambiente circostante e si ipotizzi che la sua pressione sia identica a quella dell'aria circostante. Essa si trovi alla quota z_0 (nel *PBL*) dove il gradiente di temperatura potenziale è $(d\theta/dz)_0$. Il problema che ci si pone è: *come si comporterebbe questa particella di aria in quel punto se subisse un piccolo spostamento verticale senza con ciò disturbare l'ambiente circostante*? La forza che agisce sulla particella è una forza di galleggiamento (*buoyancy*) calcolabile con la legge di Archimede (Dutton, 1995):

$$F = g \cdot (M - M_p) \qquad [1.35a]$$

dove M_p è la massa della particella di aria ed M è la massa dell'aria spostata dalla particella stessa. Se V è il volume della particella, $\rho_p = M_p/V$ è la sua densità e $\rho = M/V$ è la densità dell'aria circostante, la relazione precedente può essere riscritta come:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g \cdot \left(\frac{\rho - \rho_p}{\rho_p}\right) \qquad [1.35b]$$

quindi la particella avrà un'accelerazione diretta verso l'alto se risulterà meno densa dell'aria o verso il basso se più densa. Per la legge di stato dei gas, ricordando che la pressione è uguale sia per la particella che per l'aria circostante, detta θ_p la temperatura potenziale della particella e θ quella dell'aria, si ha che:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g \cdot \left(\frac{\theta_p - \theta}{\theta}\right) \qquad [1.35c]$$

Per studiarne il movimento verticale, si supponga che la particella si trovi all'istante iniziale t_0 alla quota z_0 e sia in equilibrio termico con l'aria circostante (cioè $\theta_p = \theta = \theta_0$) e che la particella possegga una velocità iniziale verticale w_0 (di segno arbitrario) che ne determina lo spostamento verticale. Se la particella, per la velocità iniziale w_0 si sposta da z_0 a z e $(z - z_0)$ è *piccolo,* essendo in moto adiabatico essa manterrà la propria temperatura potenziale θ_0 originale, mentre l'aria circostante si troverà alla temperatura θ propria della quota z. In questo caso la legge di Archimede per la particella si potrà scrivere come

$$\frac{d^2(z - z_0)}{dt^2} = g \cdot \left(\frac{\theta_0 - \theta}{\theta}\right) \qquad [1.36a]$$

Sviluppando θ alla quota z in un serie di Taylor arrestata al primo ordine, alla fine si giunge all'equazione differenziale seguente per lo spostamento verticale $\zeta = z - z_0$ della particella:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \left(\frac{g}{\theta}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)_0 \zeta = 0 \qquad [1.36b]$$

Essa descrive il *moto verticale della particella* e mostra in modo evidente come questo moto sia completamente condizionato dal gradiente verticale di temperatura potenziale. Questa equazione differenziale è ben nota nella Fisica e si riferisce all'oscillatore armonico. In Kreyszig (1993) si possono trovare molti dettagli teorici su un tale tipo di equazione. Comunque, dalla teoria si ha che la sua soluzione generale è:

$$\zeta = Ae^{jNt} + Be^{-jNt} \qquad [1.37]$$

dove $j = \sqrt{-1}$, A e B sono costanti il cui valore dipende dalle condizioni iniziali ed N vale in questo caso:

$$N = \sqrt{\left(\frac{g}{\theta}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)_0} \qquad [1.38]$$

N può assumere valori reali o immaginari, a seconda del segno del gradiente di temperatura potenziale. Quando il gradiente verticale della temperatura potenziale è positivo N è reale, ha le dimensioni (s^{-1}) (quelle di una frequenza) ed è noto come *frequenza di Brunt-Vaisala*. Con la condizione iniziale $\zeta = 0$ e $d\zeta/dz = w_0$, si ha che la soluzione generale dell'equazione (1.36b) è:

$$\zeta = \frac{w_0}{2jN}\cdot(e^{jNt} - e^{-jNt}) \qquad [1.39]$$

A causa del possibile segno del gradiente verticale della temperatura si possono avere, quindi, i casi seguenti:

- *Equilibrio Statico Stabile*. Se $d\theta/dz > 0$ (*situazione di inversione per la temperatura potenziale*), la relazione (1.39) diventa:

  $$\zeta = z - z_0 = \frac{w_0}{N}\cdot\sin(Nt) \qquad [1.40]$$

  quindi, *se il gradiente di temperatura potenziale è positivo, nell'atmosfera immobile la particella oscilla con frequenza N e periodo* $\tau = 2\pi/N$. Il risultato ottenuto è proprio quello dell'oscillatore armonico anche se, usando un modello formulato in modo più completo, si sarebbe ottenuta una soluzione sempre oscillante, ma con smorzamento. Queste considerazioni possono essere estese sostanzialmente anche all'atmosfera in movimento. Tutto ciò porta a dire che *una particella, immersa in un'atmosfera a gradiente di temperatura potenziale positivo, se allontanata dalla propria posizione iniziale, tende a ritornarci con un moto oscillante smorzato*. In pratica *la particella è in equilibrio statico stabile***.** Un tipico valore di N è $1.2\cdot10^{-2}s^{-1}$, quindi il periodo di oscillazione è dell'ordine di 9 minuti. Al di là delle considerazioni matematiche, questa situazione è reale in molti casi in cui il *PBL* presenta un gradiente di temperatura potenziale positivo, per esempio nelle ore notturne, quando il profilo verticale di temperatura ha un gradiente normalmente positivo.

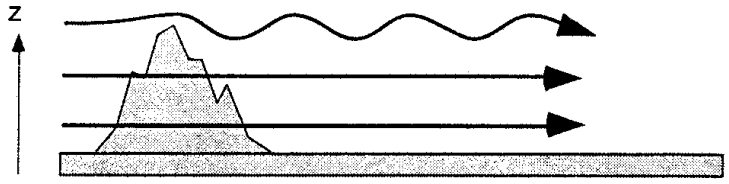


Fig.1.7: onde orografiche in condizioni di stabilità (Stull, 2000)

La cosa è ancora più evidente quando si considera una stratificazione termica notturna (quindi a gradiente positivo) in una situazione ad orografia complessa come quella

illustrata nella **Fig.1.7**. In effetti, se si isola una particella d'aria avente una traiettoria in avvicinamento alla struttura orografica, essa inevitabilmente subirà un innalzamento per superare il crinale e, una volta superatolo, inizierà ad oscillare e con lei le altre particelle adiacenti. Il risultato complessivo sarà che, a valle dell'ostruzione orografica, al moto *normale* di traslazione delle masse d'aria si verrà a sovrapporre un moto ondulatorio smorzato (onda orografica, *lee wave*) che, in prima approssimazione, sarà simile a quanto schematicamente riportato in **Fig.1.7** ed approssimativamente descritto dalla (1.40).

- *Equilibrio Statico Instabile*. Se $d\theta/dz < 0$, non è definibile la frequenza di Brunt-Vaisala (N non può che essere un numero immaginario) e la (1.39) si riduce alla forma:

$$\zeta = z - z_0 = \frac{w_0}{2} \cdot \frac{\left[exp\left(\sqrt{\frac{g}{\theta}\frac{d\theta}{dz}}\, t \right) - exp\left(\sqrt{\frac{g}{\theta}\frac{d\theta}{dz}}\, t \right) \right]}{\sqrt{\frac{g}{\theta}\frac{d\theta}{dz}}} . \qquad [1.41]$$

  Quindi in questo caso *una particella, spostata dalla propria posizione iniziale, procederà in un moto di allontanamento inarrestabile da essa. La particella si trova quindi in una situazione di equilibrio statico instabile*. Una tale situazione è tipica della parte bassa del *PBL* nelle ore diurne e soleggiate quando lì si viene ad instaurare un gradiente di temperatura potenziale negativo. In queste situazioni, le bolle d'aria calda che si formano al suolo e che si staccano da esso perché più leggere dell'aria circostante, vengono accelerate, generando movimenti ascendenti diretti alla parte mediana del *PBL*.

- *Equilibrio Statico Indifferente*. Quando, infine, *il gradiente di temperatura potenziale è nullo, la particella si trova in un equilibrio statico indifferente (neutro o adiabatico), cioè spostata dalla sua posizione di equilibrio essa procederà con moto uniforme.* In sostanza, una particella che giunge in una porzione di atmosfera neutra non verrà né accelerata né decelerata, mantenendo inalterata la propria velocità. Una situazione del genere la si incontra nella parte mediana di un *PBL* diurno generata da un forte soleggiamento, dove il gradiente verticale di temperatura potenziale è circa nullo.

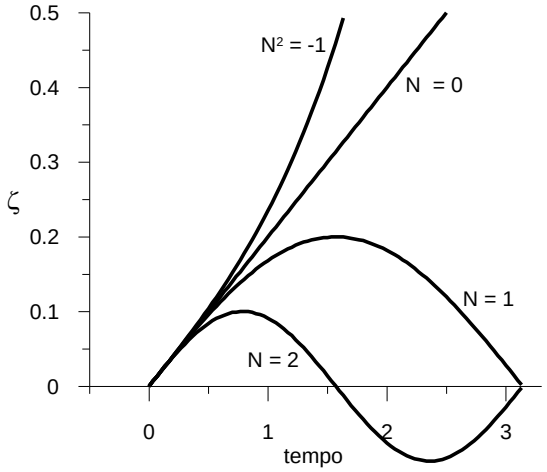


Fig.1.8: spostamento di una particella dalla posizione iniziale in diverse situazioni di stabilità

Sintetizzando, si può affermare che se in un punto del *PBL*:

- $d\theta/dz > 0$ (gradiente di temperatura potenziale positivo), in tale punto si è in una situazione *Staticamente Stabile* ed una particella spostata in verticale dalla propria posizione originaria tenderà ad oscillare attorno ad essa;

- $d\theta/dz = 0$ (gradiente di temperatura potenziale adiabatico), in tale punto ci si trova in una

situazione *Staticamente Adiabatica o Neutra* e nessuna azione viene applicata su una particella in transito in tale punto;

- $d\theta/dz < 0$ (gradiente di temperatura potenziale negativo), in tale punto si è in una situazione *Staticamente Instabile* ed ogni spostamento verticale eventualmente conferito ad una particella viene esaltato.

Per rendere visivo tutto ciò può essere utile analizzare la **Fig.1.8** in cui è rappresentato lo spostamento nel tempo di una particella sia nel caso in cui $N^2 < 0$ (cioè si è in condizioni convettive), sia quando la frequenza di *Brunt-Vaisala N* risulta reale e positiva (o nulla).

Questi concetti di stabilità, tipici della meteorologia generale, da soli non sono sufficienti a descrivere quanto avviene entro il *PBL*. Tuttavia, essi comunque costituiscono un utile punto di riferimento per analizzare situazioni reali. Quello che è interessante sottolineare è che il gradiente verticale di temperatura potenziale influenza in maniera determinante il tipo di moto di una particella entro il *PBL*.

1.2 LE CARATTERISTICHE DI UN FLUIDO VISCOSO

L'atmosfera è un fluido gassoso e come tale ci si aspetta che rispetti le leggi della Fluidodinamica. Ciò è ovviamente vero, almeno in linea di principio, anche se l'enorme complessità del sistema fisico che si sta indagando a prima vista appare scoraggiante. Mentre nei Capitoli che seguono verrà presentato nel dettaglio il modello fluidodinamico del *PBL*, qui, invece, ci si limiterà a ricordare alcuni concetti di base sui fluidi viscosi; per maggiori dettagli si faccia riferimento a Tennekes e Lumley (1972), Blackadar (1997), Arya (1987), Pope (2003) e Wyngaard (2010).

1.2.1 IL MOTO DEI FLUIDI NON VISCOSI

Il moto di un *fluido non viscoso* si presenta estremamente regolare e ordinato e può essere assimilato ad un insieme di strati adiacenti e sovrapposti di spessore infinitesimo che scorrono liberamente l'uno sull'altro senza che tra essi si origini attrito. Quando, poi, questo fluido scorre sopra una frontiera solida, tra il flusso e la frontiera non si origina alcun attrito. Il movimento sostanzialmente indipendente dei vari strati di un fluido non viscoso non permette che ci possa essere rimescolamento di fluido e tanto meno trasferimento di quantità di moto, di calore o di massa tra gli strati mobili in cui si può schematizzare il fluido in movimento. La semplice osservazione delle manifestazioni che avvengono nel *PBL* evidenzia immediatamente quanto poco ci sia in comune tra questo tipo di moto e quello dell'atmosfera nei pressi del suolo. La constatazione che il *PBL* non possa essere considerato (nemmeno in prima approssimazione) un fluido non viscoso fa naufragare la speranza di poterlo descrivere con un modello matematico semplice!

1.2.2 IL MOTO DEI FLUIDI VISCOSI

Al contrario, nello studio dell'atmosfera (e quindi del *PBL*) è indispensabile considerare l'aria come un *fluido viscoso***,** cioè un fluido il cui moto è condizionato da una resistenza interna alla deformazione, proprietà di tipo molecolare che prende il nome di *viscosità*. In effetti, quando una porzione di fluido di questo tipo si muove, le forze intermolecolari tendono a trascinare le molecole di fluido adiacenti nella medesima direzione. L'intensità di queste forze intermolecolari dipende dalla natura del fluido considerato ed una misura di tutto ciò è la viscosità. Un'importante manifestazione degli effetti della viscosità è il fatto che le particelle di fluido aderiscono alla superficie solida con cui si trovano in contatto e di conseguenza non si riscontra alcun moto relativo tra il fluido e quest'ultima. Questa è la ben nota *"no-slip condition"*, facilmente riscontrabile

nel moto delle masse d'aria sopra la superficie terrestre, oltre che nel moto di tutti i fluidi di interesse geofisico (atmosfera, oceano, ecc.) e di interesse ingegneristico.

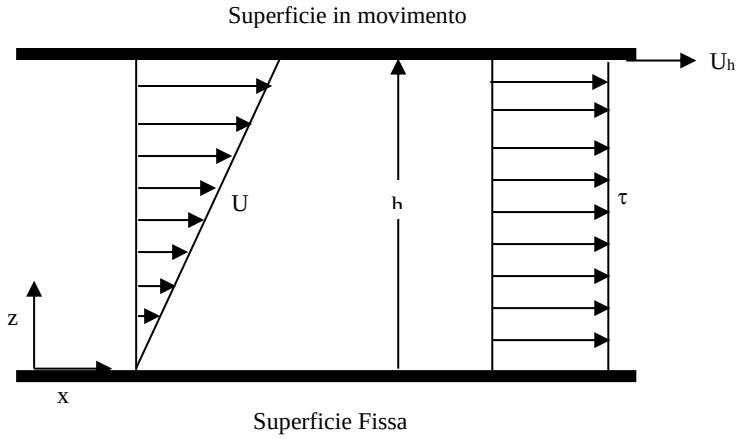


Fig.1.9: moto unidirezionale di un fluido viscoso (Flusso di Couette).

La viscosità del fluido è quindi la causa dello *sforzo di taglio* (*shearing stress*) che si origina tra strati adiacenti di fluido, definito come quella *forza per unità di superficie* che determina una variazione di velocità tra strati adiacenti (*shear*). Una semplice dimostrazione di ciò è la situazione ideale del *Flusso di Couette* (**Fig.1.9**), in cui un fluido viscoso si muove tra due superfici piane poste a distanza *h*, parallele ed infinite, una fissa e l'altra in *lento* movimento alla velocità U_h. Se la velocità orizzontale (di traslazione) del fluido è sufficientemente bassa, il fluido si muove orizzontalmente in maniera regolare ed ordinata (*moto laminare*) senza alcuna componente trasversale o verticale e, dovendo aderire ad entrambe le superfici, le particelle di fluido a contatto con la superficie in movimento hanno una velocità U_h, mentre quelle a contatto con la superficie fissa hanno velocità nulla. Quindi, nel fluido si viene a stabilire una variazione lineare di velocità direttamente proporzionale alla distanza dalla superficie fissa, con gradiente $dU/dz = U_h/h$ costante in ogni parte del fluido. Ovviamente, per mantenere lo stato di moto del *Flusso di Couette* è necessario applicare costantemente una forza alla superficie superiore del fluido e ciò avviene attraverso la piastra superiore in movimento che trasmette questo moto alle particelle di fluido immediatamente sottostanti che devono restarle aderenti. Tale forza per unità di superficie τ, applicata alla piastra superiore e trasmessa al fluido sottostante, agisce tangenzialmente e nella direzione del moto del fluido e prende il nome di *sforzo* (*stress*). La sua applicazione ha, come risultato pratico, la variazione della velocità del fluido che, nel *Flusso di Couette*, è lineare con la distanza *z* dalla superficie fissa (la velocità è nulla a $z = 0$ e pari a U_h a $z = h$); questa variazione di velocità costituisce la *reazione* del fluido all'applicazione della forza esterna.

Dall'osservazione di questo tipo di moto, Newton definì la relazione di proporzionalità tra lo sforzo (*stress*) τ ed il gradiente della velocità del fluido (*strain*):

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \qquad [1.42a]$$

ed i fluidi che presentano tale proprietà sono detti *fluidi Newtoniani*. Questa semplice relazione di proporzionalità vale nella forma data solo per un flusso monodimensionale come il *Flusso di Couette*. Vedremo successivamente come tale relazione si modifica quando si considera una geometria qualsiasi. Nella relazione (1.42a) il coefficiente di proporzionalità μ è detto *viscosità dinamica* del fluido e, per l'aria, cresce con la temperatura secondo la relazione (Jacobson, 2000):

$$\mu = 1.8325 \cdot 10^{-5} \left(\frac{416.16}{T + 120}\right) \cdot \left(\frac{T}{296.16}\right)^{1.5} \qquad [1.42b]$$

A 20°C μ vale $1.8178 \cdot 10^{-5}$ kg·m^{-1}s^{-1}. Nelle applicazioni pratiche è più frequente l'uso della

viscosità cinematica $\nu = \mu/\rho$. A 20°C ed alla pressione di 1013 mbar, ν vale $1.46 \cdot 10^{-5}$ $m^2 s^{-1}$.

Ciò che è successo effettivamente al fluido nel moto rappresentato nella **Fig. 1.9** (e in ogni altro tipo di moto di un fluido viscoso) è di una complessità stupefacente; tuttavia, l'essenza di ciò può essere così espressa (Lisieur, 1994). Immaginiamo di poter considerare il fluido costituito da un insieme elevatissimo di particelle, ciascuna grande a sufficienza da contenere un numero elevatissimo di molecole di fluido. La particella risulterebbe quindi una sorta di contenitore di molecole con pareti sostanzialmente semipermeabili. Consideriamo ora una generica di queste particelle. In assenza di moto del fluido, attraverso la superficie esterna che la delimita transiteranno varie molecole, sia molecole della particella dirette verso l'esterno (e quindi verso altre particelle), sia molecole di particelle adiacenti dirette verso l'interno della particella considerata. In media, il transito netto di molecole da e per la particella (*diffusione molecolare*) è nullo e la particella sostanzialmente è in equilibrio. Quando, però, il fluido è in movimento (come nel caso di **Fig.1.9**), nel suo interno nascono *forze viscose* che corrispondono a variazioni di quantità di moto delle particelle del fluido dovute alla diffusione molecolare attraverso la loro superficie. Infatti, se una particella è più veloce della sua vicina, le molecole che escono da essa per diffusione molecolare (molecole *rapide*) saranno rimpiazzate da molecole più lente provenienti dall'esterno. La particella di fluido che stiamo considerando perderà, quindi, quantità di moto per diffusione molecolare se è più veloce della particella vicina (e ciò tenderà a rallentarla) o guadagnerà quantità di moto se è più lenta (e tenderà ad accelerare). Questo meccanismo semplificato di scambio di quantità di moto dovuto alla diffusione molecolare giustifica qualitativamente quanto veramente si riscontra nei moti reali.

Se lo sforzo τ applicato alla superficie superiore del fluido si annullasse, che succederebbe? Ovviamente il moto si arresterebbe più o meno rapidamente e il fluido ritornerebbe in quiete. Quindi i vari meccanismi di scambio di quantità di moto si fermeranno, gli *stress* entro il fluido verranno meno e l'influenza della viscosità cesserebbe. Ma l'energia spesa per mantenere attivo il moto del fluido non potrà essere recuperata e non potrà essere restituita a chi l'aveva originariamente fornita. Il fenomeno è quindi *dissipativo* (necessita di energia per mantenersi attivo) ed è *irreversibile*.

1.2.2.1 Il tensore degli stress viscosi

La reazione del fluido all'applicazione di uno *stress viscoso* è dunque la sua *deformazione* (*strain*) che si manifesta con una variazione del proprio profilo di velocità. Questo è ciò che asserisce la relazione (1.42a) che è valida, però, solo per un moto unidirezionale come quello illustrato nella **Fig.1.9**. Di fatto, il moto di un fluido reale è in generale molto più complesso del flusso di Couette e la variazione spaziale della velocità del fluido in differenti direzioni dà luogo a *shear stress in differenti direzioni*. Per chiarire ciò, è bene premettere alcune semplici considerazioni del tutto generali sul concetto di *sforzo* e di *tensore degli sforzi viscosi*.

Il movimento di una particella in un fluido viscoso è influenzato dal moto del fluido che la circonda attraverso le forze agenti sulla sua superficie esterna proporzionali alla superficie stessa. È quindi naturale far riferimento ad esse mediante il loro valore per unità di superficie e a queste *forze specifiche* attribuiamo la denominazione di *sforzi*. Lo sforzo su una superficie, come la forza che rappresenta, è una *quantità vettoriale* ed il suo orientamento è importante, come è importante anche l'orientamento della superficie su cui tale sforzo agisce. Infatti, si definisce sforzo $\boldsymbol{\tau}$ l'entità che si ottiene dividendo una forza specifica $\delta\mathbf{F}$ per una superficie $\delta\mathbf{A}$ quando $\delta\mathbf{A}$ tende a zero:

$$\boldsymbol{\tau} = \lim_{\delta \boldsymbol{A} \to 0} \frac{\delta \boldsymbol{F}}{\delta \boldsymbol{A}} \qquad [1.43a]$$

Prima di procedere è importante rendersi conto che $\delta\mathbf{F}$ è un vettore ed anche $\delta\mathbf{A}$ è un vettore il cui modulo è pari alla porzione di superficie della particella considerata e la cui direzione coincide con la normale alla superficie stessa. L'entità $\boldsymbol{\tau}$ è quindi il rapporto tra due vettori. Pertanto, se consideriamo una generica componente cartesiana δF_j della forza specifica, essa agirà sia su δA_x

che su δA_y e δA_z, che sono le componenti cartesiane in cui si scompone il vettore $\delta\mathbf{A}$. Il fatto che queste forze specifiche, che portano alla deformazione della particella, dipendano dall'orientamento della superficie su cui agiscono introduce un elevato grado di complessità nel ragionamento che ci accingiamo a fare. In primo luogo, la genericità del concetto di particella di fluido comporta che la sua forma possa essere qualsiasi e quindi che l'orientamento della sua superficie esterna vari anche in maniera bizzarra da punto a punto.

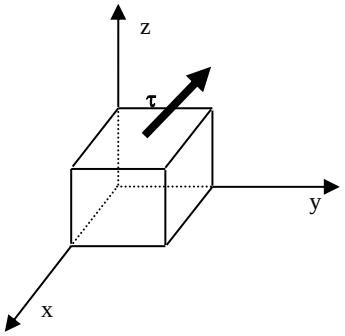


Fig.1.10: sforzo agente su una faccia di una particella cubica di fluido viscoso.

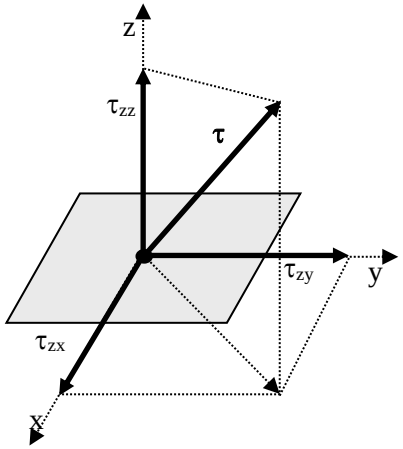


Fig.1.11: decomposizione dello sforzo su una superficie nelle relative componenti cartesiane.

Per semplicità, si consideri una particella *cubica*, centrata in $P(x,y,z)$ con spigoli orientati secondo gli assi coordinati (**Fig.1.10**) e si concentri l'attenzione sulla sua faccia superiore orientata secondo la normale $\mathbf{n}_z$, vettore di modulo unitario e direzione e verso coincidente con l'asse *z*. Questa superficie separa due zone di fluido: il fluido interno alla particella e quello esterno ad essa, zone con proprietà dinamiche a priori distinte. Per questo, il fluido esterno alla particella, che lambisce la faccia superiore della stessa, eserciterà una forza specifica $\boldsymbol{\tau}_z$ indicata nella **Fig.1.11**. Questa forza specifica può avere un orientamento qualsiasi ed è completamente caratterizzata dalle tre componenti cartesiane τ_{zx}, τ_{zy} e τ_{zz}, (cioè τ_{zi}, $i = x, y, z$) dove il primo pedice indica l'orientamento della superficie (cioè la normale alla superficie) ed il secondo pedice i diversi assi coordinati a cui si riferisce la forza specifica. Se ora consideriamo la faccia *Est* della particella la cui normale $\mathbf{n}_y$ ha direzione e verso concorde con l'asse *y*, vediamo anche in questo caso che tale superficie separa due regioni di fluido a caratteristiche diverse. Il fluido esterno alla particella, anche in questo caso, eserciterà su tale superficie una forza specifica $\boldsymbol{\tau}_y$ che normalmente sarà differente da $\boldsymbol{\tau}_z$ e le cui componenti cartesiane saranno τ_{yx}, τ_{yy} e τ_{yz} (cioè τ_{yi}, $i = x, y, z$). Analogo ragionamento può essere fatto anche per la superficie *Sud* (con normale $\mathbf{n}_x$) ed in questo caso la forza specifica esercitata dal fluido circostante sarà $\boldsymbol{\tau}_x$, in generale differente sia da $\boldsymbol{\tau}_z$ che da $\boldsymbol{\tau}_y$, le cui componenti cartesiane saranno τ_{xx}, τ_{xy} e τ_{xz} (cioè τ_{xi}, $i = x, y, z$). In sostanza, possiamo concludere che se ci poniamo in un punto $P(x,y,z)$ ed esploriamo il fluido circostante posizionando

una superficie unitaria centrata su *P*, l'azione del fluido circostante sarà differente a seconda dell'orientamento della superficie e pari a τ_{xi} per la superficie orientata a *Sud*, τ_{yi} se la superficie è orientata ad *Est* e τ_{zi} per una superficie orientata verso l'alto, $i = x, y, z$.

Queste considerazioni sono state fatte ipotizzando una particella di forma cubica e sembrerebbero legate a questa particolare scelta. Tuttavia, si può dimostrare in maniera del tutto generale che lo stato di stress interno ad un fluido viscoso è completamente definito dalle nove componenti τ_{ij} ($i = x, y, z$ e $j = x, y, z$) sopra individuate che risultano essere le componenti di un'entità nota come *tensore del secondo ordine* $\boldsymbol{\tau}$. Quindi $\boldsymbol{\tau}$ è il *tensore degli sforzi viscosi*.

Analizziamo ora alcune proprietà del tensore degli sforzi. In primo luogo, è consuetudine evitare di indicare esplicitamente gli assi coordinati: in pratica la componente *x* sarà indicata col pedice 1, la *y* col pedice 2 e la *z* col pedice 3. Quindi le componenti del tensore degli sforzi viscosi saranno indicate genericamente come τ_{ij}, $i,j = 1,2,3$ ed il tensore $\boldsymbol{\tau}$ può essere rappresentato dalla matrice:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \qquad [1.43b]$$

Non è nostra intenzione addentrarci nella complessa Teoria Formale dei Tensori e cercheremo, qui e nel seguito, di sfruttare al meglio il fatto che un tensore del secondo ordine come $\boldsymbol{\tau}$ è completamente rappresentato matematicamente da una matrice di rango 3, come mostrato nella (1.43b). Tuttavia, fin da ora è importante sottolineare alcuni fatti importanti. In primo luogo va evidenziato come i valori assunti delle nove componenti del tensore $\boldsymbol{\tau}$ dipendano completamente dal sistema di riferimento cartesiano adottato. Quindi uno stesso moto di un fluido viscoso *visto* in un punto dello spazio presenta tensori $\boldsymbol{\tau}$ diversi a seconda di come si è scelto il sistema di riferimento. In particolare, il tensore $\boldsymbol{\tau}$ non è invariante alla rotazione del sistema di riferimento. Questo fatto va sempre tenuto presente. Tuttavia, la Teoria dei Tensori ci garantisce che esistono delle grandezze deducibili dagli elementi del tensore che non mutano col mutare del sistema di riferimento e tali grandezze sono gli *Invarianti del tensore* che, nel caso di un tensore del secondo ordine come $\boldsymbol{\tau}$ sono esattamente tre. Ritorneremo sull'argomento al Cap. 8 (Vol. 1). Per ora vale la pena soffermarci soltanto sul primo di questi invarianti tensoriali che è costituito dalla somma degli elementi diagonali della matrice che lo rappresenta (cioè la *traccia della matrice*). Ovviamente ci si aspetta che tale somma abbia un significato fisico; in effetti si può provare che essa è legata alla pressione del fluido in quel punto, dalla relazione:

$$p = -\frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) \qquad [1.43c]$$

Un'altra proprietà del tensore degli sforzi è la sua simmetria data dal fatto che $\tau_{ik} = \tau_{ki}$ per ogni valore di *i* e di *k* e ciò comporta che delle 9 componenti del tensore solo 6 siano tra loro indipendenti. Quando il fluido è in equilibrio e a riposo, lo sforzo si riduce alla sola pressione che ubbidisce esclusivamente alle leggi della Termodinamica. Viceversa, quando il fluido è in movimento, la distribuzione spaziale (cioè il *campo*) di sforzo non è più rappresentato dalla sola pressione, anche se normalmente essa risulta essere la componente preponderante.

1.2.2.2 Gli effetti del tensore degli stress viscosi

Lo sforzo viscoso nel fluido comporta la deformazione del fluido stesso la cui manifestazione macroscopica è la variazione locale del suo campo di velocità. Per una migliore comprensione, si consideri un esempio bidimensionale di moto orizzontale con velocità in direzione *x* variabile linearmente con l'altezza (parte sinistra di **Fig.1.12**). Come indicato in figura, ad ogni quota il campo di velocità può essere *decomposto* in tre parti distinte (tre campi). La *prima componente* è una velocità uniforme, normalmente chiamata *campo di traslazione.* Il suo effetto su un volume di controllo è quello di traslarlo rigidamente nella direzione del moto, senza produrre alcun cambiamento nella sua forma, orientazione e volume. Il secondo campo è una *rotazione rigida* del

volume di fluido; in questo caso la particella mantiene il volume e la forma originaria, pur cambiando il proprio orientamento nello spazio. Il terzo campo è una *pura deformazione* e consiste nello stiramento in una direzione (*stretching*) e nella compressione (*squeezing*) lungo la direzione mutuamente perpendicolare. Esiste normalmente anche un altro campo in cui si dovrebbe decomporre il campo originale di velocità (assente, però, in **Fig.1.12**) ed è *un'espansione a tasso costante in tutte le direzioni*, normalmente nota come *divergenza*. Quindi il *moto di un fluido* può sempre essere visto come la *sovrapposizione* di:

- una traslazione rigida (che non ne cambia né la forma né il volume),
- una rotazione attorno ad un asse definito (che non cambia né forma né volume),
- una deformazione (che ne cambia la forma) e
- un'espansione (che ne cambia il volume).

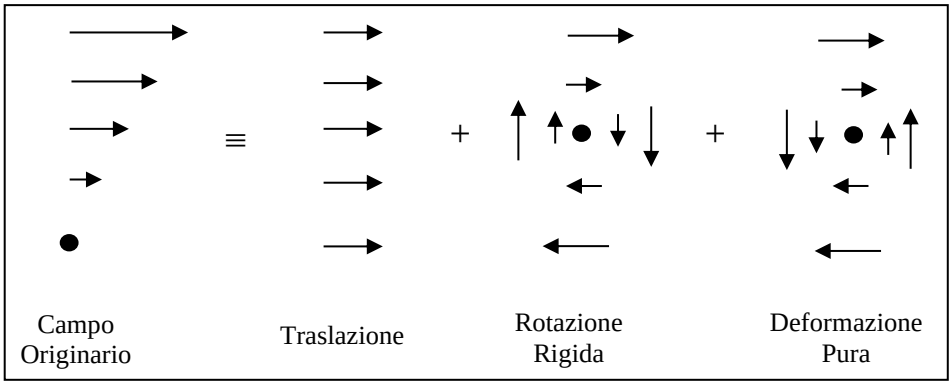


Fig.1.12: decomposizione schematica di un semplice campo di velocità in campi elementari (da Blackadar,1997).

Si consideri il caso bidimensionale in cui il moto del fluido è orizzontale. In un punto $P_0(x_0,y_0)$ il vettore velocità sia $\mathbf{u}(x_0,y_0)$. Per un *piccolo* spostamento (vettoriale) $\delta\mathbf{x} = (\delta x,\delta y)$ essa varierà e sarà $\mathbf{u}(x_0+\delta x, y_0+\delta y) = \mathbf{u}(x_0,y_0) + \delta\mathbf{u}$. Per ottenere $\delta\mathbf{u}$, si sviluppi in serie di Taylor il vettore **u** ricordando che lo spostamento $\delta\mathbf{x}$ è *piccolo*:

$$u_x(x_0+\delta x, y_0+\delta y) = u_x(x_0,y_0) + \delta x\cdot\frac{\partial u_x}{\partial x} + \delta y\cdot\frac{\partial u_x}{\partial y} + O(\delta x^2,\delta y^2)$$
$$u_y(x_0+\delta x, y_0+\delta y) = u_y(x_0,y_0) + \delta x\cdot\frac{\partial u_y}{\partial x} + \delta y\cdot\frac{\partial u_y}{\partial y} + O(\delta x^2,\delta y^2) \qquad [1.44a]$$

dove $O(\delta x^2,\delta y^2)$ indica l'errore commesso troncando al primo termine lo sviluppo di Taylor. Perché sia visibile che il moto risulta scomponibile nella traslazione pura, nella rotazione rigida, nella deformazione e nella divergenza, alla prima delle (1.44a) aggiungiamo e togliamo le quantità:

$$\frac{\delta x}{2}\cdot\frac{\partial u_y}{\partial y};\qquad \frac{\delta y}{2}\cdot\frac{\partial u_y}{\partial x}$$

ed alla seconda le quantità:

$$\frac{\delta x}{2}\cdot\frac{\partial u_x}{\partial y};\qquad \frac{\delta y}{2}\cdot\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

ottenendo:

$$u_x(x_0+\delta x, y_0+\delta y) = u_x(x_0,y_0) + \frac{\delta x}{2}D + \frac{\delta x}{2}T + \frac{\delta y}{2}H - \frac{\delta y}{2}\zeta$$
$$u_y(x_0+\delta x, y_0+\delta y) = u_y(x_0,y_0) + \frac{\delta y}{2}D - \frac{\delta y}{2}T + \frac{\delta x}{2}H + \frac{\delta x}{2}\zeta \qquad [1.44b]$$

dove, oltre alla traslazione pura rappresentata da $\mathbf{u}(x_0,y_0)$, sono presenti anche:

- la ***divergenza orizzontale***, responsabile della dilatazione uniforme del volume della

particella e data da:

$$D = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

- la *componente verticale della vorticità*, che rappresenta una rotazione rigida della particella senza mutamento di volume, data da:

$$\zeta = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

- la *deformazione di shearing* (*taglio*) che rappresenta una deformazione di taglio del volume della particella:

$$H = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

- *la deformazione per allungamento* (*stretching*), cioè la deformazione del volume della particella consistente in un allungamento disomogeneo nelle due dimensioni:

$$T = \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

Ovviamente tutto quanto detto può essere esteso facilmente al caso tridimensionale. Tuttavia, la notazione cartesiana porterebbe a relazioni di una lunghezza e complessità eccessiva. Per ovviare a ciò, in Fluidodinamica viene comunemente adottata quella che viene chiamata *notazione tensoriale compatta* che, se da un lato rende le relazioni decisamente più maneggevoli, dall'altro non è affatto immediata. Per la sua comprensione si rimanda all'**Appendice 2**, anche se di volta in volta cercheremo di introdurla in manera *morbida*. Innanzitutto, ricordando che le generiche componenti del vettore velocità **u** vengono indicate come u_i (i = 1, 2, 3), la notazione sintetica indica proprio con u_i l'intero vettore. Premesso ciò, la relazione seguente esprime la variazione di *ogni* componente *i*-esima di **u** dopo uno specifico spostamento δx in *ogni direzione k*:

$$u_i(\delta x_k) = u_x(0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\delta x_k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\delta x_k \qquad [1.45a]$$

Il primo termine di destra è la pura traslazione, il secondo la pura rotazione ed il terzo l'effetto combinato di divergenza e deformazione. In particolare, per la componente *x* della velocità ($i = 1$) e la direzione *z* ($k = 3$) lungo cui si considera lo spostamento, la (1.45a) diventa:

$$u_x(\delta z) = u_x(0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\delta z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\delta z \qquad [1.45b]$$

Pure in questa relazione, anche se con maggior difficoltà, sono individuabili le componenti principali del moto sopra elencate. Tra di esse, la componente più interessante è quella della rotazione rigida. Mentre in un moto puramente orizzontale era presente solo un movimento di pura rotazione attorno all'asse verticale, in un moto generico sono presenti tutte e tre le componenti della rotazione (*vorticità*). Senza entrare nei dettagli, la *vorticità* è un vettore che è dato, in notazione vettoriale, da $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}$ (col simbolo **x** si è indicato il prodotto vettoriale). Quindi:

$$\zeta_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}; \qquad \zeta_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}; \qquad \zeta_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \qquad [1.45c]$$

Introdotte queste brevi nozioni sul concetto di tensore degli stress viscosi, ritorniamo ora alla relazione fondamentale che mette in relazione tra loro *stress* e *strain* che nella forma più semplice è rappresentata dalla (1.42a). Essa afferma che il *tensore degli sforzi viscosi* agente su una generica particella è proporzionale, attraverso la viscosità dinamica, alle deformazioni subite dalla particella durante il moto. In generale (rimandando per i particolari ai testi specializzati), tale equazione dovrebbe essere generalizzata nella forma seguente:

$$\tau_{ik} = -p \cdot \delta_{ik} + \mu \cdot \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right] + \left[\mu_B - \frac{2}{3}\mu\right] \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\delta_{ik} \qquad [1.46a]$$

dove μ_B è il coefficiente di *viscosità bulk* (circa nullo per la maggior parte dei gas e quindi anche per l'aria dell'atmosfera) e μ è la *viscosità dinamica*. Si ricorda poi che tra la viscosità dinamica μ e la *viscosità cinematica* ν vale la relazione $\mu = \rho\nu$. Pertanto, la relazione tra *stress* viscosi e deformazioni del fluido risulta così espressa (Blackadar, 1997):

$$\tau_{ik} = -p \cdot \delta_{ik} + \mu \cdot \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\delta_{ik}\right] \qquad [1.46b]$$

dove l'operatore di Kronecker δ_{ik} assume il valore 1 se $i = k$ e 0 in caso contrario. Anche questa relazione è scritta in notazione tensoriale e la sua interpretazione non è immediata. Pur rimandando alla citata **Appendice 2** per i dettagli ed indicando con *u*, *v* e *w* rispettivamente u_1, u_2 e u_3, consideriamo due casi particolari:

- lo sforzo τ_{zx}, la componente verticale dello sforzo viscoso nella direzione *x*, si riduce a:

$$\tau_{zx} = \mu \cdot \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right] \qquad [1.46c]$$

- lo sforzo τ_{xx}, la componente longitudinale (lungo *x*) dello sforzo viscoso nella direzione *x*, si riduce invece a:

$$\tau_{xx} = -p + \mu \cdot \left[2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] \qquad [1.46d]$$

Il tensore degli sforzi viscosi rappresenta quindi la causa della deformazione subita dal volume di controllo ed è direttamente proporzionale alla viscosità propria del fluido. Un altro effetto importante dovuto alla viscosità è la dissipazione di energia cinetica durante il moto del fluido, che viene costantemente convertita in calore. Perciò, per mantenere il moto, è necessario fornire continuamente energia al fluido oppure ci deve essere una conversione di energia potenziale, presente sotto forma di gradienti di pressione e densità.

Ricaviamo ora la forza viscosa per unità di volume dovuta allo *shear* verticale che produce uno *stress* di taglio in direzione *x*. Per fare ciò si consideri il volume di controllo di **Fig.1.13**.

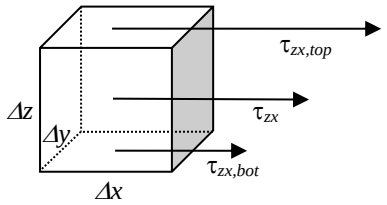


Fig.1.13: esempio di shearing stress in direzione x su un volume di controllo di aria

La forza viscosa netta sul volume di controllo è pari allo *stress* applicato alla faccia superiore dello stesso meno quello applicato alla faccia inferiore, moltiplicato per l'area su cui lo *stress* agisce. Se τ_{zx} è lo stress al centro del volume e se $\partial\tau_{zx}/\partial z$ è il suo gradiente verticale, gli *stress* sulla faccia superiore e inferiore sono rispettivamente:

$$\tau_{zx,top} = \tau_{zx} + \frac{\Delta z}{2} \cdot \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \qquad \tau_{zx,bot} = \tau_{zx} - \frac{\Delta z}{2} \cdot \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \qquad [1.47a]$$

Sottraendo lo *stress* che opera sulla faccia inferiore da quello che opera sulla faccia superiore, moltiplicando per l'area di applicazione e dividendo per la massa M_V del volume di controllo (pari a $M_V = \rho \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$) si ottiene la forza netta per unità di massa in direzione *x* dovuta allo *shear* di velocità in direzione *z*:

$$F_{v,zx} = \frac{\left(\tau_{zx,top} - \tau_{zx,bot}\right) \cdot \Delta x \Delta y}{\rho \cdot \Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \qquad [1.47b]$$

che, sulla base della (1.42a), diventa:

$$F_{v,zx} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cong \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad [1.47c]$$

Ragionamenti analoghi possono essere fatti per una variazione di *u* nelle direzioni *x* e *y* ed anche per le analoghe variazioni delle altre componenti cartesiane del vento. Il risultato complessivo è che, a causa degli sforzi viscosi, sul volume di controllo si verrà ad applicare una forza le cui tre componenti cartesiane sono:

$$F_{v,x} = \nu \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] \qquad F_{v,y} = \nu \cdot \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right]$$
$$F_{v,z} = \nu \cdot \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] \qquad [1.48a]$$

e che, in notazione tensoriale, si riducono a:

$$F_{v,i} = \nu \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \qquad [1.48b]$$

Prima di proseguire è interessante notare come un valore tipico per il *PBL* di *shear* del vento sia dell'ordine di 0.5 s^{-1}. Se, per semplificare la valutazione, si prende a riferimento la relazione (1.42a), risulta che τ/ρ (*sforzo in forma cinematica*) è circa $7.3 \cdot 10^{-6}$ $m^2 s^{-2}$, valore molto piccolo e trascurabile rispetto agli altri tipi di sforzo misurati nel *PBL*. Quindi la situazione reale in cui si trova normalmente *PBL* è decisamente più complessa di quella tipica di un fluido viscoso Newtoniano in moto laminare e ciò, come vedremo immediatamente, dipende dalla presenza della turbolenza nel *PBL*.

L'azione della viscosità su un fluido come l'aria del *PBL* è reale e continua ed è descritta esattamente nei termini che abbiamo presentato finora ma, come vedremo progressivamente nei Capitoli successivi, il suo ruolo potremmo dire che è apparentemente *sotterraneo*. In effetti, come vedremo subito sotto, la caratteristica principale del moto dell'aria nel *PBL* è il suo *disordine* (la sua caoticità, la sua turbolenza) che determina a sua volta l'insorgere di altri *stress* diversi da quelli viscosi. In pratica, anticipando quanto avremo modo di mostrare al Cap. 4 (Vol. 1), i movimenti a grande scala delle masse d'aria dell'atmosfera causano la nascita di super-particelle (vortici, *eddy*) caratterizzati da dimensioni caratteristiche rilevanti (dell'ordine dell'estensione verticale del *PBL*) ma con un'elevata instabilità intrinseca. Questa instabilità fa sì che questi vortici si frazionino velocemente nel tempo in vortici di dimensioni inferiori a loro volta instabili e quindi pronti a frazionarsi anch'essi, in un processo a cascata che riduce progressivamente la dimensione dei vortici *figli*. La viscosità agisce senza eccezioni su tutti i vortici, grandi e piccoli, ma la sua azione costante e continua è ben poco evidente a fronte del ribollire di movimento dovuto alla turbolenza. Ma quando nel processo di frazionamento a cascata la dimensione dei vortici *figli* raggiunge una dimensione caratteristica (dell'ordine della microscala di Kolmogorov, come vedremo dell'ordine del millimetro), a questo punto l'azione della viscosità, prima sostanzialmente trascurabile, aumenta progressivamente e velocemente di importanza sopraffacendo la turbolenza e distruggendo fisicamente i vortici e dissipandone irreversibilmente l'energia. Quindi l'importanza degli sforzi viscosi non sta tanto nella loro azione continua sul moto dell'aria del *PBL* (che comunque esistono) quanto piuttosto sulla loro azione dissipativa. Riassumendo ed anticipando, i due grandi attori della dinamica del *PBL* sono da un lato il sole, che introduce costantemente energia nel *PBL* che si trasforma in movimento, e la viscosità che la sottrae costantemente dal sistema in un processo ciclico senza fine.

1.2.3 IL MOTO TURBOLENTO

Come detto, un moto laminare è un moto ordinato in cui gli strati adiacenti di fluido scorrono gli uni sugli altri con un piccolo rimescolamento e con un trasferimento reciproco di proprietà esclusivamente a scala molecolare. In un moto laminare i vari campi associati al fluido (velocità, temperatura e concentrazione) sono altamente regolari e variabili solo gradualmente nello spazio e nel tempo. E tutto ciò non sta tra le evidenze sperimentali del *PBL*, almeno nella sua parte più vicina al suolo. Un aspetto interessante del moto laminare di un fluido viscoso è il suo comportamento in prossimità di un confine rigido (**Fig.1.14**). In questo caso l'analisi del profilo di velocità del fluido evidenzia come la *no-slip condition* faccia sì che il profilo di velocità sia nullo alla superficie ed aumenti fino a raggiungere un *valore di equilibrio* lontano dalla superficie stessa. Si può quindi individuare uno strato di spessore *h* in cui è presente un *disturbo* al moto del fluido determinato dalla presenza della superficie rigida e dalla sua interazione col fluido viscoso, disturbo rappresentato dal gradiente verticale di velocità che diminuisce progressivamente allontanandosi dalla superficie. La presenza di questo strato, che è un'evidenza sperimentale in tutti i fluidi reali (in movimento a velocità estremamente basse), fu inizialmente ipotizzata da Prandtl nel 1905 e lo spessore *h* così individuato viene comunemente detto *Strato Limite* (*Boundary Layer*). La situazione ideale di **Fig.1.14** è quasi sempre lontana dalla realtà dei fluidi reali e può essere riprodotta in laboratorio solo con fluidi ad elevatissima viscosità, in un moto estremamente lento e che transitano su superfici molto lisce. L'evidenza sperimentale mostra invece che, quando le superfici sono rugose (come lo sono le superfici naturali su cui scorrono le masse d'aria), quando la velocità di traslazione del fluido è considerevole e la viscosità è bassa, il moto cambia drasticamente d'aspetto e si presenta altamente disordinato ed irregolare sia nello spazio che nel tempo. Ci troviamo, quindi, di fronte a ciò che è normalmente indicato come *moto turbolento*.

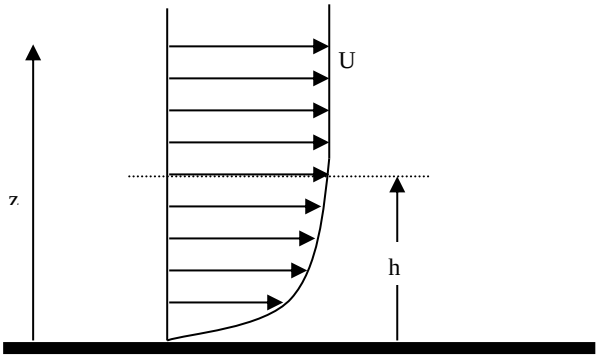


Fig.1.14: moto di un fluido viscoso su una superficie e sviluppo di uno strato limite.

Per meglio comprendere tutto ciò, conviene rifarsi agli studi di Osborne Reynolds (1883), prendendo a riferimento la situazione sperimentale di **Fig.1.9** e di **Fig.1.14**. Si supponga di realizzare in laboratorio una situazione come quella descritta (un fluido che scorre parallelamente ad una superficie piana rigida, in cui sia evidente la presenza di un *Boundary Layer* di spessore *h* e che sia caratterizzato da una velocità *U* lontano dalla frontiera rigida). Si supponga, inoltre, di poter variare a volontà la velocità *U*. Prima di condurre l'esperimento conviene individuare uno o più parametri che lo possano descrivere, anche se sinteticamente. Sicuramente un parametro è la velocità *U*, tuttavia per poter descrivere anche la natura fisica della frontiera rigida (per esempio la rugosità) e soprattutto il suo effetto sul moto del fluido risulta spontaneo considerare anche *h* come un parametro di interesse. Ovviamente si avranno tanti comportamenti diversi del fluido (in particolare tanti profili di velocità diversi) quanti saranno i tipi di fluido considerati e quindi è necessario tenere conto in qualche modo anche la natura fisico-chimica del fluido stesso. Tra le tante possibilità, la viscosità cinematica ν parrebbe essere un buon candidato. Effettivamente questi sono anche i parametri che Reynolds prese in considerazione nei suoi storici esperimenti. In particolare, invece di considerarli separatamente, Reynolds costruì con essi un *indicatore*

sintetico adimensionale noto come *numero di Reynolds* e definito come:

$$Re = \frac{U \cdot h}{\nu} \qquad [1.49]$$

Questo indice, anche se sintetico, descrive compiutamente il tipo di fluido con la presenza della viscosità cinematica), il tipo di moto (attraverso la velocità) e le caratteristiche della frontiera rigida (attraverso lo spessore del Boundary Layer). Si inizi l'esperimento e si aumenti gradualmente *U* a partire da *U = 0*. Una volta realizzato un piccolo incremento di *U*, se ne registri il valore, si individui *h* e si calcoli il valore di *Re*. L'esperimento evidenzierà la situazione seguente:

- a bassi valori di *Re* (inferiori a circa 10^3), cioè a bassi valori di *U*, il moto del fluido permarrà regolare (cioè laminare) ovunque. Un esempio di un tale moto è presentato nella **Fig.1.15**.
- aumentando *U* e quindi *Re*, il moto permarrà laminare (regolare) finché *Re* non supera un valore critico, che dipende da molti fattori come la rugosità della frontiera rigida, la geometria della stessa, ecc., ma comunque dell'ordine di 10^3. A questo punto si inizieranno a vedere i primi cambiamenti nel moto del fluido. Infatti, (Tennekes e Lamley, 1972) il moto laminare del fluido, costituito originariamente da uno scorrimento regolare di *lamine* piane di fluido le une sulle altre, progressivamente presenterà instabilità *bidimensionali*, che si potranno manifestare con ondeggiamenti verticali in evoluzione con l'aumentare di *Re* fino a diventare *tridimensionali* (**Fig.1.16** e **Fig.1.17**). A questo punto, il moto, ancora sostanzialmente ordinato, comincerà ad evidenziare *disturbi intensi e localizzati* di tipo tridimensionale, apparentemente casuali nello spazio e nel tempo.

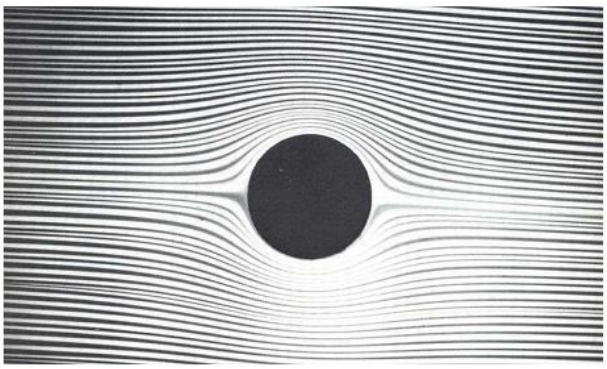


Fig. 1.15: esempio di moto laminare a basso Re. Il fluido in regime laminare fluisce attorno ad un cilindro il cui asse è perpendicolare al moto (Van Dyke, 1982)

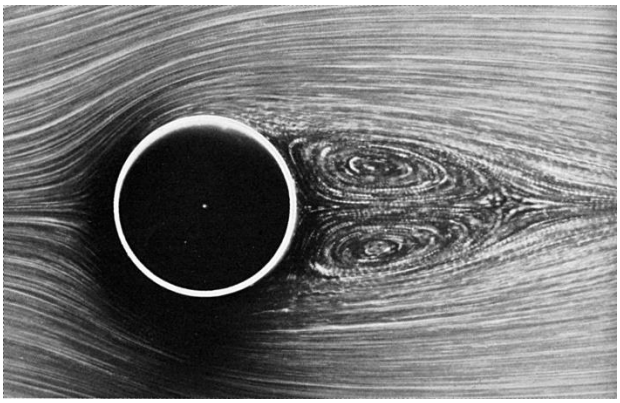


Fig.1.16: instabilità bidimensionali in un flusso laminare (Van Dyke, 1982)

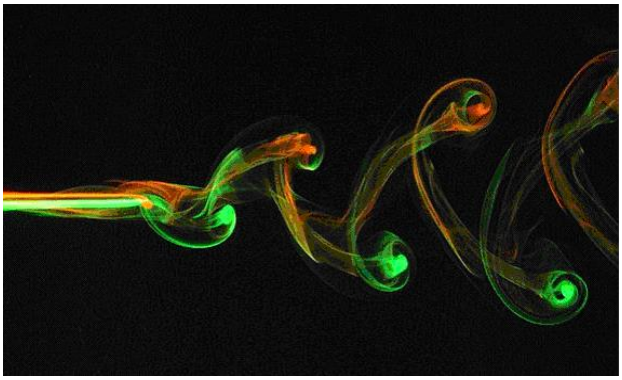


Fig.1.17: disturbi tridimensionali ed intensi in un flusso laminare (Van Dyke, 1982)

- con l'aumentare di *Re*, questi disturbi tridimensionali *casuali* aumentano di numero, di frequenza e d'intensità, si mischiano tra loro, si rompono, fino a coinvolgere tutto il fluido presente nel *Boundary Layer* (**Fig.1.18**). A questo punto il moto del fluido è ben lontano dal suo stato originale: infatti si individua ancora un moto di traslazione che ricorda un movimento laminare cui però si vanno a sovrapporre perturbazioni più o meno intense a seconda del valore di *Re* e della distanza dalla frontiera rigida, perturbazioni apparentemente senza senso e quindi descrivibili come perturbazioni completamente casuali. Entro il *Boundary Layer* si viene ad instaurare quindi un tipo di moto sostanzialmente disordinato e caotico (*casuale*) a cui si dà il nome di *moto turbolento*.

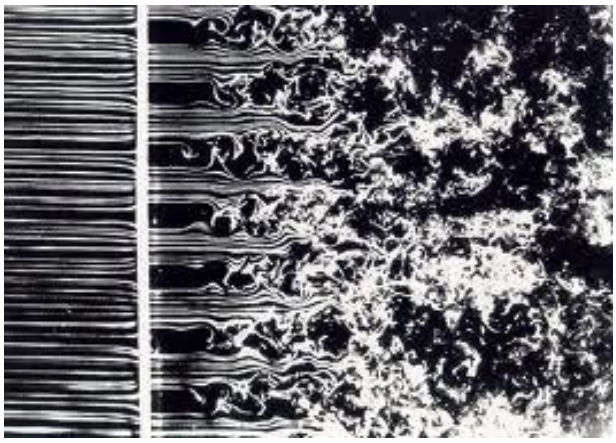


Fig.1.18: passaggio di un fluido in regime laminare (a sinistra) per una griglia che aumenta Re fino ad instaurare una turbolenza completa del fluido (a destra) (Van Dyke, 1982)

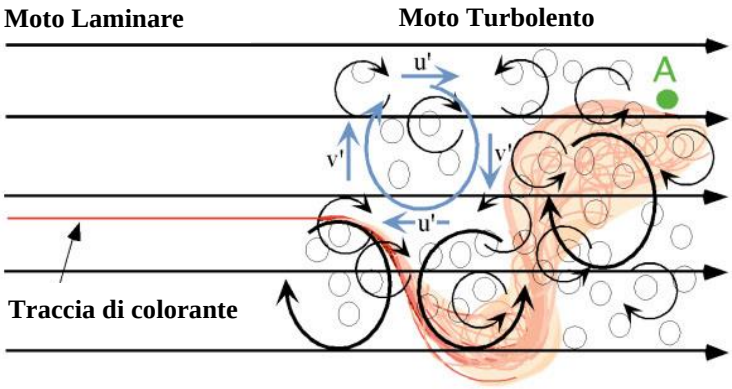


Fig.1.19: schematizzazione del moto laminare e del moto turbolento (www.dspace.mit.edu)

La **Fig. 1.19** illustra sinteticamente tutto ciò. Essa mostra una traccia di colorante che viene introdotta (parte sinistra della figura) in un fluido differente che si muove (da sinistra verso destra) in moto laminare. Come si nota, non si ha un'apprezzabile diffusione del colorante nel fluido. Tuttavia, appena il moto del fluido diviene turbolento (parte destra della figura), la traccia di colore si disperde in strutture turbolente di varie dimensioni e tridimensionali. Questa trasformazione di una sottile traccia di colante in un insieme complesso di strutture tridimensionali determina una sua rapida ed efficace dispersione all'interno dell'intero fluido in cui è stato immesso.

Ancora più sorprendente è un'altra evidenza sperimentale. Immaginiamo di condurre l'insieme degli esperimenti descritti in differenti laboratori dotati, ciascuno, della medesima struttura sperimentale e di misura. Si immagini, inoltre, di verificare con estrema attenzione che le attrezzature sperimentali siano identiche, ovviamente nell'ambito delle possibilità di misura. Si conducano i vari esperimenti in maniera identica e si raccolgano tutti i dati ottenuti. Se si considera un esperimento condotto a basso *Re*, in cui il moto del fluido resta laminare, i risultati raccolti dai vari laboratori coincideranno. Se, invece, si considera un esperimento in cui il moto del fluido ha raggiunto la turbolenza, anche se lo si realizza in laboratori virtualmente identici e si registrano i dati ottenuti dopo l'inevitabile transitorio iniziale, si noterà che i campi di velocità (e non solo) che caratterizzano il moto del fluido saranno *certamente* diversi, anche se le condizioni iniziali erano *virtualmente* identiche. Siamo di fronte ad un fenomeno che si comporta in maniera totalmente deterministica in alcuni casi ed in maniera apparentemente stocastica in altri? La risposta parrebbe sì, anche se sappiamo che il fluido *deve* rispettare le leggi della fluidodinamica che sono rigidamente deterministiche. In realtà, visto che non è possibile assicurare un livello assoluto di precisione sia negli apparati sperimentali che nella strumentazione di misura, le condizioni iniziali ed al contorno ottenute nei diversi laboratori inevitabilmente saranno di pochissimo differenti. Dobbiamo, quindi concludere che le perturbazioni sulle condizioni iniziali ed al contorno, pure infinitesime, praticamente non influenzano il moto del fluido a bassi *R*e, mentre lo influenzano drammaticamente ad alti. Questo aspetto, tipico anche di altri sistemi dinamici non lineari, è sicuramente l'espressione caratteristica di un sistema *caotico*.

Fig.1.20: evidenze nell'accensione di un fiammifero (www.reorbit.com)

Ciò che è stato evidenziato in questo esperimento ideale (che comunque può essere realizzato realmente con una certa facilità) ha riscontri oggettivi nella vita di tutti i giorni (come si vede nella **Fig.1.20**) e nel moto di tutti i fluidi di interesse ingegneristico (flusso di liquidi e gas in condotti) e di interesse geofisico (oceani e atmosfera).

È praticamente impossibile dare una definizione precisa di turbolenza (Tennekes e Lumley, 1972; Monin e Yaglom, 2007a), ma se ne possono, però, indicare alcune proprietà generali:

- *l'irregolarità*: la caratteristica più evidente della presenza di turbolenza nel moto di un fluido è l'irregolarità che caratterizza il campo delle principali variabili che lo descrivono, studiate nella prima parte del Capitolo, cioè la temperatura, la pressione, la densità, la

velocità e la concentrazione delle diverse specie chimiche presenti nell'aria. Queste irregolarità hanno le caratteristiche proprie di un *fenomeno stocastico* e suggeriscono che un metodo di indagine possibile potrebbe essere proprio quello statistico.

- *la diffusività*: le irregolarità caratteristiche di un moto turbolento determinano un *rapido rimescolamento* di porzioni di fluido con caratteristiche chimiche e fisiche differenti e quindi un incremento del tasso di trasferimento di massa, quantità di moto e calore. La **Fig. 1.19** evidenzia proprio questo.

- *l'alto numero di Reynolds*: la turbolenza nel moto di un fluido si instaura solo ad elevati valori di *Re*. Come qualitativamente spiegato in Monin e Yaglom (2007a), il numeratore della (1.49) rappresenta le *forzanti inerziali*, cioè quelle forzanti del moto che dipendono dal gradiente di velocità, mentre il denominatore risulta proporzionale alle forze viscose. Mentre le forzanti inerziali agiscono nel senso di destabilizzare il moto del fluido, la forzante viscosa ha un effetto regolarizzante. Alti valori di *Re* stanno a significare che l'azione destabilizzante delle forzanti inerziali prevale sull'effetto regolarizzante dei termini viscosi.

- *la sua tridimensionalità*: Tennekes e Lumley (1972) evidenziano come nel moto dei fluidi geofisici siano spesso evidenti *perturbazioni bidimensionali* non turbolente (onde di gravità, onde orografiche, ecc.). Tuttavia, l'impronta della turbolenza è data solo dalla presenza di strutture irregolari *tridimensionali* che ne costituiscono l'elemento distintivo.

- *è un fenomeno dissipativo*: i flussi turbolenti sono sempre dissipativi dato che gli sforzi viscosi compiono lavoro di deformazione che aumenta l'energia interna del fluido a spese dell'energia cinetica posseduta dal fluido stesso. Quindi, per mantenersi attiva, la turbolenza richiede una continua somministrazione di energia esterna per compensare le perdite dovute all'azione degli sforzi viscosi. Se cessa tale apporto energetico, la turbolenza decade rapidamente. Come vedremo, la sorgente di energia esterna privilegiata per mantenere la turbolenza nel *PBL* è il sole che riscalda l'interfaccia aria-suolo, il quale, a sua volta, restituisce energia all'aria immediatamente sovrastante.

- *è un fenomeno continuo*: la turbolenza non è un fenomeno di tipo microscopico, ma macroscopico ed è quindi governato dalle leggi della Meccanica dei Fluidi. Questa affermazione potrebbe sembrare una contraddizione con la prima caratteristica elencata, tuttavia così non è. Come sarà più chiaro nel seguito, è effettivamente possibile presentare un apparato teorico che descrive il moto turbolento di un fluido basato sulle leggi della Meccanica dei Fluidi, tuttavia la presenza di non linearità in tali leggi, concentrate prevalentemente nella descrizione delle forzanti inerziali, da un lato spiega l'apparente casualità del moto turbolento (la sua *caoticità*) e dall'altro evidenzia come un tale costrutto teorico non sia in grado di produrre un *modello* praticamente utilizzabile. Pertanto, il trattare la turbolenza come un fenomeno più o meno stocastico, più che una necessità teorica, è il risultato della *disperazione* nel trattare nella pratica moti di questo genere.

Dalla **Fig.1.6**, si può stimare in 10^3 m l'estensione verticale tipica del *PBL*. Con velocità del vento di $5 \div 10$ m·s^{-1}, *Re* vale circa $10^8 \div 10^9$, valore molto elevato che dovrebbe comportare un moto dell'aria di tipo turbolento, cosa confermata dalle osservazioni sperimentali. Un esempio significativo di ciò è dato dalla **Fig.1.21** in cui si mostra l'evoluzione temporale delle tre componenti del vento a 10 m dal suolo ottenute con uno strumento a bassa inerzia. Ciò che incuriosisce è *l'estrema irregolarità dei segnali meteorologici*, non dovuta a disturbi derivanti dall'apparato di misura, ma propria dell'aria del *PBL*. Le irregolarità si riscontrano su tutte le componenti del vento e ciò è un'impronta inequivocabile della tridimensionalità di un fenomeno turbolento. In quanto turbolento, il *PBL* non presenta, in condizioni nominalmente stazionarie, un campo di velocità veramente costante nel tempo, ma piuttosto un andamento irregolare, anche se non completamente casuale. La varietà di fluttuazioni di differenti periodi ed ampiezze osservate nei tre

andamenti di **Fig.1.21** mostrano la complicata struttura della turbolenza responsabile dell'elevata capacità da parte di un fluido turbolento di trasferire quantità di moto e calore, di rimescolare specie chimiche differenti e di propagare reazioni chimiche (in particolare la combustione).

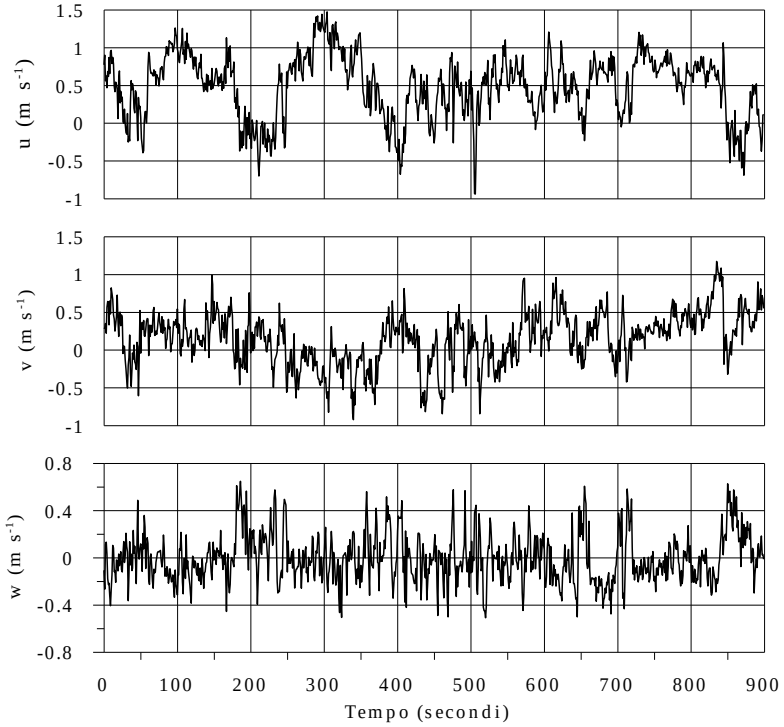


Fig.1.21: andamento temporale delle tre componenti del vento

Da un punto di vista puramente teorico, il moto turbolento dell'atmosfera è un esempio di un sistema meccanico non lineare con un enorme numero di gradi di libertà, che non consentono di giungere ad una definizione consistente del fenomeno. Spesso viene naturale pensare che tale complesso comportamento del fluido, nella realtà, sia il risultato della sovrapposizione di moti disordinati e difficilmente prevedibili ad un moto sostanzialmente regolare e prevedibile. Questa è in pratica l'ipotesi di Reynolds che, come si vedrà, *separa il moto in due componenti profondamente differenti*: un andamento medio, regolare e prevedibile (*valore medio*), sostanzialmente deterministico, e le fluttuazioni altamente irregolari e totalmente imprevedibili, praticamente di natura stocastica (*fluttuazioni turbolente*). A prima vista il termine fluttuante potrebbe sembrare completamente casuale, tuttavia ad un esame più attento, esso suggerisce la presenza di una qualche forma di regolarità. La ricerca micrometeorologica ha cercato spiegazioni di questo fatto ed ha tentato, con successo, di usare proprio questo apparente *rumore* per trarre informazioni preziose sullo stato e sull'estensione verticale del *PBL*. E questo è in pratica il tema che verrà trattato in tutti i capitoli seguenti.

1.3 LA FENOMENOLOGIA TIPICA DEL PBL

Da quanto visto si può affermare che l'aria del *PBL* è un fluido viscoso in moto turbolento che scorre sopra una frontiera rigida e rugosa (il suolo). Ciò fa sì che la velocità media dell'aria decresca quanto più ci si avvicina al suolo, fino ad annullarsi in corrispondenza di questa barriera rigida, rispettando la *no-slip condition*. Nella velocità dell'aria si produce quindi un gradiente (*shear* del vento), tanto più marcato quanto minore è la distanza dal suolo. Oltre a ciò, il moto dell'aria è altamente turbolento, tranne in un piccolo strato d'aria, a diretto contatto col suolo ed estremamente sottile (dell'ordine di ν/U), in cui il moto del fluido è sostanzialmente laminare.

Esercizio 1.3

Poco sopra si è affermato che in un piccolo strato a diretto contatto col suolo l'aria del *PBL* presenta un moto sostanzialmente laminare e che questo strato d'aria ha una dimensione verticale dell'ordine di ν/U. Verifichiamo che ν/U abbia effettivamente le dimensioni di una lunghezza e determiniamone l'ordine di grandezza. La viscosità cinematica dell'aria in condizioni standard è pari a $\nu = 1.461 \cdot 10^{-5}$ $m^2 s^{-1}$ ed una tipica velocità media del vento può essere posta pari a $U = 5$ $m \cdot s^{-1}$.

Dal punto di vista dimensionale si ha che:

$$\left[\frac{\nu}{U}\right] = \frac{m^2}{s} \cdot \frac{s}{m} = m$$

quindi il rapporto ν/U è effettivamente una lunghezza. Utilizzando i valori proposti per la viscosità cinematica e la velocità del vento si ha che:

$$\nu/U = 1.461 \cdot 10^{-5} / 5 = 2.9 \cdot 10\text{-}6 \text{ m} = 2.9 \text{ } \mu\text{m}$$

In effetti questo strato è veramente molto ridotto. È interessante notare come la sua dimensione verticale aumenti col diminuire della velocità media del vento. Infatti, se $U = 0.1$ $m \cdot s^{-1}$, lo spessore dello strato laminare raggiunge il valore di 0.14 mm, comunque sempre molto piccolo.

Il fatto che questo strato di atmosfera sia molto ridotto in spessore ci autorizza ad ignorarne l'esistenza? Assolutamente no! Anche se spesso lo trascureremo nelle considerazioni pratiche, è proprio lì che hanno origine la maggior parte delle cause che determinano e mantengono attiva la turbolenza del *PBL*.

Nella maggior parte del *PBL* la turbolenza è presente in forma più o meno accentuata, con strutture più o meno irregolari e tridimensionali, normalmente indicate col termine *vortici* (*eddy*), originate dall'interazione tra il suolo e le masse d'aria in movimento nell'atmosfera e che si propagano prevalentemente verso l'alto. La causa principale della loro generazione è lo *shear del vento*, anche se un'ulteriore causa sembra derivare dal collasso delle oscillazioni armoniche o pseudo-armoniche (onde) che normalmente sono presenti nel moto dell'aria. Questa turbolenza è di *tipo meccanico* ed è dovuta solo al movimento delle masse d'aria ed alla loro interazione col suolo. Esiste anche un altro tipo di turbolenza, la *turbolenza convettiva* che trae origine proprio dall'immissione di energia termica nel *PBL* in corrispondenza dell'interfaccia aria-suolo. Mentre la turbolenza meccanica è sempre presente in un fluido in movimento, la turbolenza convettiva si manifesta solo quando nel sistema viene immessa energia termica e quindi, nel caso del *PBL*, solo nelle ore diurne e soleggiate.

L'osservazione del *PBL* ha evidenziato come le situazioni diurne, caratterizzate da un forte soleggiamento, differiscano profondamente da quelle notturne, anche se in entrambe è presente la turbolenza. Nel presentare la fenomenologia tipica del *PBL* separeremo nettamente questi due casi che rappresentano di fatto due regimi fluidodinamici completamente differenti: ciò fa del *PBL* un esempio unico nel panorama del moto dei fluidi di interesse geofisico. Il primo caso (moto in situazioni con soleggiamento rilevante) prende normalmente il nome di *situazione convettiva*, mentre il secondo caso viene normalmente indicato come *situazione stabile*. Il *PBL*, nel primo caso viene comunemente indicato come *CBL* (*Convective Boundary Layer*), mentre nel secondo caso si usa frequentemente la denominazione *SBL* (*Stable Boundary Layer*). Va sottolineato poi che la fenomenologia che si presenterà sarà quella di una *situazione paradigmatica*, cioè della situazione tipica caratteristica delle località prive di orografia e lontane dal mare, con suolo morfologicamente omogeneo e si ipotizzerà che siano assenti fenomeni meteorologici violenti come temporali, tempeste, ecc. Il quadro che qui faremo sarà esclusivamente fenomenologico, per metterci in grado di iniziare lo studio della dinamica del *PBL*. Ritorneremo sull'argomento con maggiori dettagli al Cap. 8.

1.3.1 IL PBL CONVETTIVO

Dal punto di vista geometrico, il *PBL* è in una situazione del tutto simile ad altri fluidi confinati da una frontiera rigida, come l'oceano per esempio. Ciò che rende, però, il *PBL* unico nelle situazioni convettive è che su di esso agisce una *fonte di calore ciclica*. Per comprendere ciò è necessario ricordare che per la superficie terrestre, alle medie e basse latitudini, il sole è una presenza diurna costante con un suo ciclo giornaliero e stagionale. Senza entrare nel dettaglio (lo si farà in seguito), la radiazione elettromagnetica emessa costantemente dal sole attraversa l'intera atmosfera, perdendo solo una parte della propria energia originaria, e raggiunge il suolo dove subisce una riflessione più o meno rilevante a seconda delle caratteristiche ottiche del suolo. Su base annuale (Oke, 1987), circa il 25% di tutta la radiazione solare incidente viene riflessa dall'atmosfera, il 25% viene da essa assorbita, il 3% viene riflessa dalla superficie terrestre ed il 47% giunge all'interfaccia atmosfera-suolo e viene da esso assorbita. È il suolo, quindi, che riceve una quantità rilevante di radiazione solare e la restituisce all'aria sovrastante. In effetti, l'*iniezione* di energia termica nel *PBL* si realizza all'interfaccia aria-suolo dove il suolo, riscaldato dal sole, trasferisce per conduzione una notevole quantità di energia nei primi millimetri di aria, come abbiamo visto all'*Esercizio 1.1*. L'atmosfera si trova quindi nelle condizioni di una *enorme pentola* (generalmente animata da un moto di traslazione, circa parallelo al suolo) piena di aria posta al di sopra di una intensa fonte di calore.

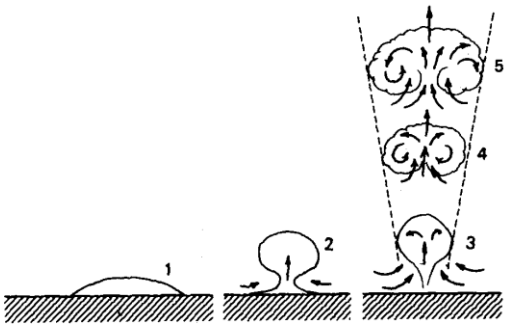


Fig.1.22: modello semplificato dello sviluppo dei vortici convettivi (Oke,1987).

All'interfaccia aria-suolo sono presenti due sorgenti di turbolenza completamente differenti. La prima è di *tipo meccanico*, comune a tutti i fluidi viscosi in movimento sopra una superficie rigida e rugosa, che dà luogo a *vortici* di dimensione relativamente limitata. La seconda è di *tipo convettivo* e quindi di *origine termica*, che dà origine a vortici (*thermals*) sui cui agisce la forza di Archimede dovuta alla differenza di densità dell'aria contenuta nei vortici rispetto alla densità all'aria circostante. La loro forza motrice è quindi il *galleggiamento* (*buoyancy*) e le dimensioni dei vortici sono ben maggiori di quelle di origine meccanica, raggiungendo anche molte centinaia di metri. Un possibile meccanismo di formazione e di evoluzione dei *thermals* è illustrato nella **Fig.1.22** (Oke, 1987). L'aria al di sopra di superfici particolarmente calde si riscalda in maniera prevalente e localmente, dando origine ad una *bolla* molto più calda dell'aria circostante, appiattita al suolo (*stadio 1* in **Fig.1.22**) e con un'instabilità interna che non si manifesta immediatamente, ma solo dopo aver catturato sufficiente calore. A questo punto (*stadio 2* di **Fig.1.22**) la bolla inizia a contrarsi e ad assumere una forma sempre più sferica fino a staccarsi dal suolo ed innalzarsi nel *PBL*, mossa dalla forza di galleggiamento (*stadio 3* di **Fig.1.22**). La velocità di ascesa iniziale è elevata ma, durante la salita, la bolla inizia il processo di *inglobamento* (*entrainment*) di aria fredda circostante a temperatura inferiore che, da un lato, produce un aumento delle proprie dimensioni e dall'altro un abbassamento della propria temperatura media e quindi della spinta di galleggiamento. La diminuzione della spinta di galleggiamento e l'aumento della resistenza aerodinamica dovuta all'incremento dimensionale fanno sì che la velocità di ascesa del *thermal* diminuisca progressivamente fino ad arrestarsi completamente.

Lo spazio di troposfera interessato dai moti verticali dei *thermals* è proprio il *CBL*. Questo strato di atmosfera risente inevitabilmente del movimento ascendente (e poi discendente per la conservazione della massa) dei *thermals* e, per questo, presenta caratteristiche di turbolenza ben differenti dalla porzione di troposfera sovrastante: per la prima volta nella nostra discussione il *PBL* riceve una definizione meno vaga. La generazione di *thermals* ed il loro innalzamento entro il *PBL* comporta che il *profilo verticale della temperatura potenziale media assuma una forma ben precisa* come quella di **Fig.1.23**, dove viene mostrato un tipico profilo verticale della temperatura potenziale media in un'ora diurna con buon soleggiamento. Come si nota chiaramente, sono distinguibili alcuni *strati tipici*.

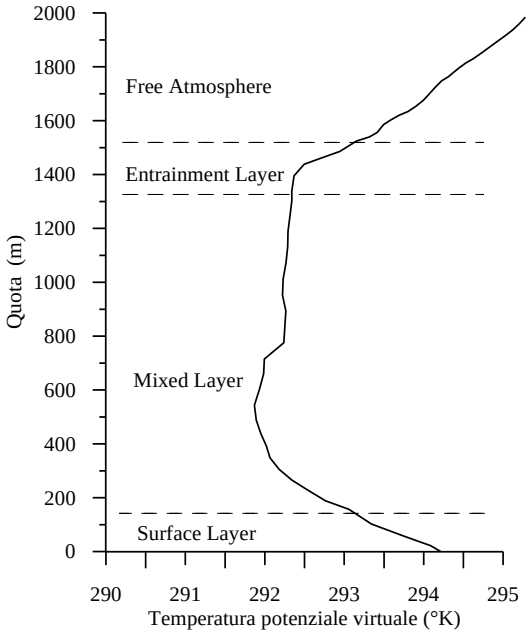


Fig. 1.23: tipico profilo verticale diurno della temperatura potenziale virtuale

Il primo strato, molto sottile, si estende dal suolo ad una quota di circa un centinaio di metri e prende il nome di *Strato Superficiale* (*Surface Layer, SL*). In esso la temperatura potenziale diminuisce con la quota, evidenziando uno stato di *instabilità statica*. È questo lo strato in cui si ha la formazione e la prima evoluzione delle strutture termiche coerenti ed in cui è concentrata la maggior parte degli effetti di *shear*. Ricordando quanto detto al *Punto 1.1.9.2*, in presenza di un gradiente negativo di temperatura potenziale, una particella d'aria (in questo caso un *thermal*) liberata nei pressi del suolo con una data velocità iniziale, abbandona la propria posizione iniziale acquisendo un moto ascensionale sempre più veloce. Questo strato rappresenta quindi una specie di *catapulta* per il flusso verso l'alto di particelle di aria e quindi di quantità di moto, di calore, di umidità e di inquinamento.

Sopra questo è presente un ulteriore strato caratterizzato da una temperatura potenziale praticamente costante, corrispondente ad una situazione di *adiabaticità statica* (gradiente di temperatura potenziale circa nullo) che prende il nome di *Strato Rimescolato* **(***Mixed Layer, ML*) ed in cui le strutture coerenti hanno il loro massimo sviluppo. Una particella che raggiunge il *ML* provenendo dal *SL*, non incontra ostacoli al moto ascensionale salvo la resistenza aerodinamica, visto che la stratificazione termica non altera significativamente la sua velocità ascensionale

Al di sopra del *ML*, però, i vortici cominciano a perdere energia e contemporaneamente inizia un processo di inglobamento dell'aria proveniente dagli strati superiori che partecipa alla rapida dissoluzione dei vortici convettivi. Questo strato, normalmente indicato come *Strato di Entrainment* (*EL*), è caratterizzato da un forte gradiente positivo di temperatura potenziale. Una particella di aria che lo raggiunge, dopo essere partita dal *SL* ed aver attraversato il *ML*, si ritrova in uno stato di *stabilità statica* che ne frena il moto fino ad arrestarla. A questo punto, la particella

verrà inglobata in un vortice discendente, raggiungerà con esso il suolo e verrà nuovamente catapultata verso l'alto in un ciclo che avrà fine solo col venir meno dell'apporto di radiazione solare. A questo punto risulta più chiaro perché il *PBL* sia il luogo in cui è praticamente confinato l'inquinamento atmosferico e perché sia necessario studiare le caratteristiche del *PBL* per precederlo e comprenderlo. Infatti, un profilo di temperatura potenziale come quello della **Fig.1.23** evidenzia come il *PBL sia* una *trappola* per le particelle e i gas che, una volta emessi al suolo, hanno grande difficoltà a sfuggire. Un esempio di ciò è la situazione riprodotta nella **Fig. 1.24** in cui viene mostrato come il fumo prodotto da un incendio di grandi dimensioni venga intrappolato all'interno del *PBL* convettivo.

Fig. 1.24: il fumo prodotto da un incendio intrappolato entro il PBL convettivo

Sopra il *PBL* la troposfera presenta i suoi tratti caratteristici con un incremento pressoché costante della temperatura potenziale (*Free Atmosphere*).

Per PBL si intende, quindi, l'insieme dello Strato Superficiale, dello Strato Rimescolato e di quello di Entrainment e spesso il profilo verticale della temperatura potenziale rilevato nelle ore a grande insolazione lo individua in maniera estremamente chiara. Alla quota z_i, corrispondente alla sua sommità, viene dato il nome di *altezza di rimescolamento* dai modellisti della dispersione degli inquinanti in aria.

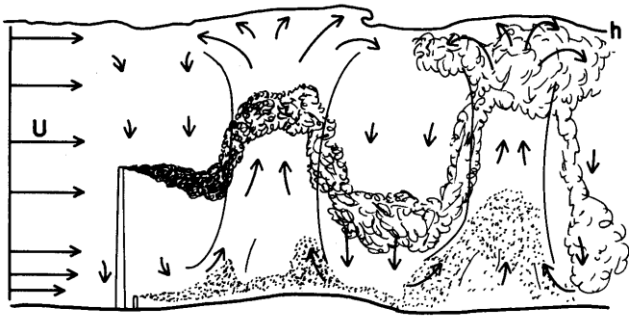


Fig.1.25: comportamento dei pennacchi di fumo in un PBL convettivo (Briggs, 1988)

I pennacchi (*plume*) di inquinanti emessi dai camini industriali a varie quote sono in balia dei moti ascendenti e discendenti che si instaurano entro il *PBL* e, prima di disperdersi, presentano i tipici *ondeggiamenti* (*looping*) rappresentati nella **Fig.1.25**. Nella **Fig.1.26** si ripropone una celeberrima rappresentazione grafica realizzata da Wyngaard (1990) per illustrare questi concetti fenomenologici. Da essa risulta che nel *PBL* si può individuare:

- un **flusso ascendente** (*updraft*) che consiste in vortici di grandi dimensioni che hanno origine nei pressi del suolo, salgono nel *SL* e nel *ML*, arrivando fino allo strato di *entrainment* dove si mescolano con una parte di aria dell'atmosfera libera;

- un **flusso discendente** (*downdraft*) che lentamente scende verso il suolo.

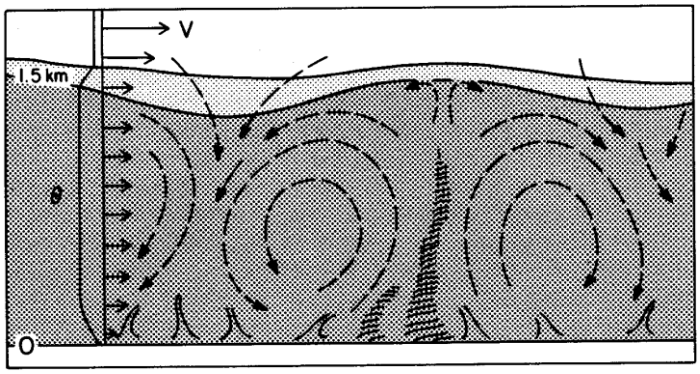


Fig.1.26: rappresentazione pittorica del PBL convettivo realizzata da Wyngaard (1990).

Gli *inquinanti tendono perciò ad accumularsi nel ML, mentre sopra il PBL la loro concentrazione è molto bassa*. Essi sono trasportati dai *thermals*, perciò l'incapacità di questi ultimi a superare la sommità dello strato rimescolato porta come diretta conseguenza l'intrappolamento degli stessi nel *ML* e questo spiega perché l'inquinamento atmosferico è prevalentemente localizzato entro il *PBL*. Tuttavia, il meccanismo di *entrainment* non solo immette aria della *Free Atmosphere* nel *PBL*, ma immette nella *Free Atmosphere* anche aria del *PBL*, anche se in misura limitata. Se in questa aria è presente dell'inquinante, esso si propagherà a grandi distanze ben poco disperso (la turbolenza e quindi la capacità disperdente della *Free Atmosphere* è estremamente limitata) ed anche ad alta velocità se avrà la sventura di raggiungere quote dove è presente una corrente a getto di forte intensità. Ciò spiega perché si siano riscontrati anche trasporti di inquinanti a grande distanza, non altrimenti spiegabili (si ricordi l'inquinamento da radionuclidi prodotto dall'incidente di Chernobyl, diffuso su tutta Europa, ed il trasporto a scala globale delle ceneri emesse durante violente eruzioni vulcaniche, come quella del vulcano Krakatoa nel 1983).

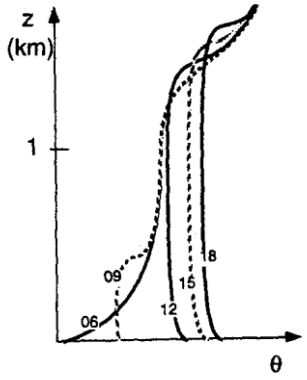


Fig.1.27: evoluzione temporale dei profili di temperatura potenziale (Stull, 2000)

Il profilo verticale di temperatura potenziale nel *PBL* convettivo mantiene, in un giorno sereno e soleggiato, la forma caratteristica evidenziata in precedenza per tutto il periodo in cui è attiva la convettività: da circa un'ora dopo l'alba a circa un'ora prima del tramonto. Ciò che cambia nel corso della giornata è l'estensione verticale del *PBL* (in continua crescita) e quindi lo spessore di atmosfera in cui si sviluppa tale profilo. Un esempio di ciò è illustrato nella **Fig.1.27** dove sono presentati i profili di temperatura potenziale relativi ad una giornata tipica rilevati alle ore 9, 12, 15 e 18. Come si può notare, ciascun profilo termico presenta la forma abituale; l'unico elemento che distingue un profilo dall'altro è l'estensione verticale in continua crescita col trascorrere del tempo. Il profilo delle ore 9 suggerisce un valore dell'estensione verticale del *PBL* z_i dell'ordine dei 500 m che cresce fino a circa 1500 m tre ore dopo (alle ore 12), evidenziando un

tasso di crescita molto elevato. Questa velocità di accrescimento del *PBL* diminuisce però nelle ore successive, come viene chiaramente indicato dai profili delle ore 15 e delle ore 18.

Considerando ancora la **Fig.1.27**, dove è mostrato anche il profilo delle ore 6 quando ancora non erano presenti le situazioni convettive, si possono fare alcune interessanti considerazioni. All'inizio del periodo convettivo della giornata, l'atmosfera presenta un tipico profilo di temperatura potenziale caratterizzato da un gradiente sempre positivo, risultato dell'evoluzione notturna del *PBL*. Dal momento in cui ha inizio l'apporto energetico solare all'interfaccia aria-suolo inizia anche un trasferimento di energia alla parte bassa dell'atmosfera che progressivamente *erode* l'inversione notturna, instaurando un regime convettivo in una porzione di aria di spessore inizialmente limitato e dando inizio alla generazione del *PBL* convettivo. L'immissione di energia continua col passare del tempo e l'erosione dell'inversione notturna progrediscono coinvolgendo porzioni di atmosfera sempre maggiori, il cui spessore risulta proporzionale all'integrale dell'energia immessa. In maniera più specifica si consideri la **Fig.1.28** in cui è evidenziato il profilo verticale di temperatura stabile così come si presenta all'inizio del periodo convettivo. Trascorso un certo tempo dall'instaurarsi delle situazioni convettive, al tempo t_1, con buona approssimazione, il profilo verticale di temperatura potenziale è circa costante e pari a $\theta_{ML}(t_1)$ fino alla quota $z_i(t_1)$ (che è l'estensione verticale del *PBL* a tale istante) e sopra questa quota persiste, almeno in prima approssimazione, il profilo stabile notturno. L'*erosione* di tale profilo è avvenuta al di sotto di $z_i(t_1)$ e l'area quadrettata è proporzionale al calore trasferito alla parte bassa del *PBL* che è servito per realizzare tale erosione. Se si considera un tempo successivo t_2, il profilo termico schematico sarà costituito da un profilo costante di temperatura, e pari a $\theta_{ML}(t_2)$ fino alla quota $z_i(t_2)$ e a quote più elevate persiste il profilo notturno. La sua erosione si è così ulteriormente accentuata da t_1 a t_2 ed è conseguente alla nuova immissione di calore nel sistema, proporzionale all'area tratteggiata. Il modello fisico di erosione indicato in figura è estremamente semplice (ma efficace). Infatti, per conoscere ad un tempo t l'estensione verticale z_i del *PBL* quando al suolo la temperatura potenziale vale $\theta(t)$ si ipotizza, semplificando la realtà, che $\theta(t)$ sia costante nel *PBL* e si individua la quota di intersezione tra il profilo termico notturno e la retta $\theta(z) = \theta(t) = \text{costante}$.

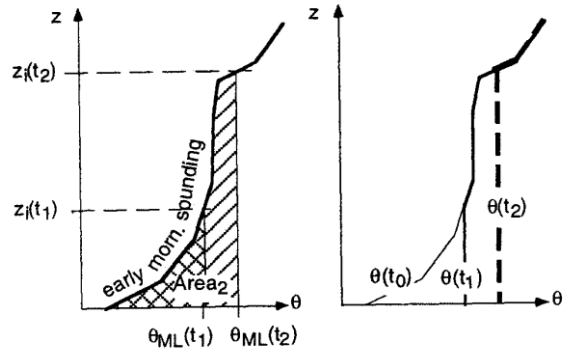


Fig. 1.28: evoluzione del PBL nel tempo (Stull, 2000)

Esercizio 1.4

Il profilo verticale di temperatura potenziale all'inizio del periodo convettivo di una giornata soleggiata sia lineare con la quota, con valore al suolo di 5°C e con gradiente di 3 $K \cdot km^{-1}$. Se l'energia termica cumulata immessa in una colonna d'aria del *PBL* di base unitaria all'interfaccia aria-suolo fino al tempo t è di $6.2 \cdot 10^5$ $J \cdot m^{-2}$, calcolare la temperatura potenziale al suolo al tempo t e l'estensione verticale raggiunta dal *PBL*.

L'energia termica Q immessa nel *PBL* fino al tempo t può essere calcolata dalla conoscenza del gradiente di temperatura potenziale $\Gamma = d\theta/dz$ (supposto costante nel profilo notturno) impiegando il Primo Principio della Termodinamica espresso in termini di temperatura potenziale. In particolare, consideriamo una colonna d'aria

avente una base di 1 m^2 che ad un generico istante τ (precedente a *t*) si estende fino alla quota *z* (che è la quota massima cui è giunta l'erosione dell'inversione notturna) e che sia caratterizzata da una temperatura θ che non varia dal suolo a *z*. Perché questa colonna d'aria vari nell'intervallo infinitesimo tra τ e $\tau+dt$ la propria temperatura potenziale media di $d\theta$, erodendo ulteriormente l'inversione notturna, è necessario che acquisisca dal suolo una quantità di calore pari a:

$$dQ = \rho C_p \cdot d\theta \cdot z$$

Dato che si è ipotizzato in questo semplice modello che al di sopra della sommità *z* della colonna l'aria mantenga il profilo termico notturno, cioè un profilo che varia linearmente con *z* con gradiente $\Gamma = 3\ K \cdot m^{-1}$, allora si ha che $d\theta = \Gamma \cdot dz$. Quindi:

$$dQ = \rho C_p \cdot \Gamma \cdot z \cdot dz$$

Sulla base di tutto ciò, l'energia termica *Q* cumulata dalla colonna d'aria dall'inizio dell'erosione fino al tempo *t* risulta pari a:

$$Q = \int_0^t dQ(t) = \rho C_p \cdot \int_0^{z_i} \Gamma \cdot z \cdot dz = \frac{1}{2}\rho C_p \cdot \Gamma \cdot z_i^2$$

Quindi

$$z_i = \sqrt{2Q/\left[\rho C_p \cdot \Gamma\right]}$$

In condizioni standard $\rho = 1.225\ kg \cdot m^{-3}$, $C_p = 1004.67\ J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$, perciò:

$$z_i = \sqrt{2 \cdot 6.2 \cdot 10^5 / \left[1.225 \cdot 1004.67 \cdot 0.003\right]} = 580m$$

A questo punto la temperatura potenziale al tempo *t* risulta pari a:

$$\theta(t) = 5 + \frac{d\theta}{dz} \cdot z_i = 5 + 0.003 \cdot 580 = 6.74°C$$

È necessario fare un'ultima osservazione sul profilo verticale di temperatura potenziale nelle situazioni convettive. Normalmente lo strato di *entrainment* ed il *SL* sono di estensione limitata rispetto al *ML*, soprattutto nelle ore centrali della giornata e nel pomeriggio. Per questo sarà utile in alcune considerazioni che verranno fatte nel seguito semplificare drasticamente la forma di tale profilo nei termini mostrati in **Fig.1.29**. In pratica il profilo verticale di temperatura potenziale θ può essere considerato costante in tutto il *PBL*, dal suolo fino a z_i, dove lo strato di *entrainment* viene ridotto ad un semplice salto (*slab*) di temperatura potenziale $\Delta\theta$. Questo modello semplificato di profilo verticale di temperatura viene indicato col termine *slab model*.

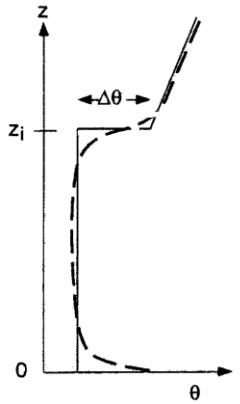


Fig.1.29: modello ideale di profilo verticale convettivo di temperatura potenziale (Stull, 2000)

Il vapor d'acqua presente nel *PBL* ha come sorgente principale la superficie terrestre, sia

a causa dell'evaporazione che si produce dagli specchi d'acqua (oceani, laghi e fiumi) che della traspirazione della vegetazione. La sua concentrazione tende a *diminuire con la quota* con un tasso relativamente elevato nel *SL*, mantenendosi pressoché costante nel *ML*. In corrispondenza dello *strato di entrainment* si assiste ad una rapida diminuzione fino praticamente ad annullarsi nella *Free Atmosphere* (questo non è vero in generale, soprattutto quando si è in presenza di nubi *sinottiche*). Questo comportamento è molto netto e ciò è spesso utilizzato per identificare la sommità del *ML* dai radiosondaggi.

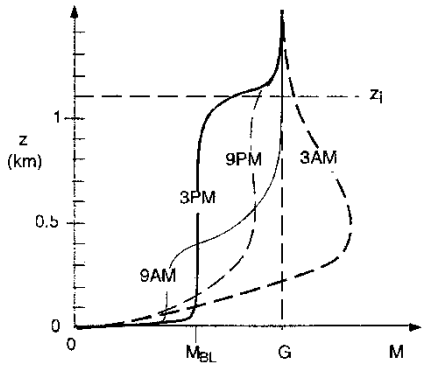


Fig.1.30: profilo verticale del vento del vento nel PBL. Con M è indicata la velocità del vento, con M_{BL} il suo valore nel ML e con G il valore del vento geostrofico (Stull 2000)

Per quanto riguarda il profilo verticale della velocità del vento, va detto che la condizione di *no-slip* determina una velocità nulla in prossimità del suolo (non esattamente al suolo, come si vedrà nel seguito, ma in corrispondenza ad una quota piccola, ma variabile a seconda delle dimensioni verticali tipiche degli elementi presenti al suolo che ne determinano la rugosità). Col crescere della quota, la velocità del vento aumenta in maniera circa logaritmica in tutto lo strato superficiale. La presenza di *shear* nello strato superficiale è una chiara indicazione della turbolenza meccanica sempre presente in un fluido viscoso come l'atmosfera. Entro il *ML*, invece, la velocità del vento si mantiene spesso circa costante e lo *shear* è ridotto, chiaro indice del fatto che nello strato rimescolato la produzione di turbolenza meccanica è ridotta. Viceversa, all'*entrainment* la velocità del vento presenta brusche variazioni adeguandosi rapidamente, con l'aumentare della quota, alla situazione a mesoscala dettata dai gradienti di pressione a grande scala *(vento geostrofico*). Ciò è rappresentato schematicamente nella **Fig.1.30** dai profili relativi alle ore 9 a.m. e 3 p.m. Nella figura, con *G* viene indicato il vento geostrofico (in pratica il vento al di sopra del *PBL*) che è preso come riferimento per comprendere le caratteristiche del profilo anemologico convettivo e che, come vedremo, è il risultato diretto dei gradienti orizzontali di pressione.

Durante il giorno l'estensione verticale del *PBL* non è costante, ma al contrario continua ad aumentare proporzionalmente all'immissione nel sistema di energia solare. In pratica è minima nelle prime ore della mattina, quando è prevalente l'influenza della pura turbolenza meccanica, ed aumenta proporzionalmente all'integrale di energia solare fino al tramonto quando decade molto rapidamente in corrispondenza dell'interruzione di apporto energetico solare. A questo punto il *PBL* convettivo inizia a distruggersi. Per prima cosa si dissolve entro il *SL* il profilo a gradiente di temperatura potenziale negativo e progressivamente anche una parte del profilo entro il *ML*, a cui si sostituisce un profilo di temperatura potenziale a gradiente positivo tipicamente notturno. Ciò è evidente nella **Fig.1.31** dove sono presentati i profili verticali di temperatura potenziali rilevati alle ore 18, 21, 03 e 06 di una giornata tipica. Il primo profilo, sicuramente convettivo rappresenta il punto di partenza del decadimento notturno del *PBL* mentre l'ultimo rappresenta il risultato finale di tale processo. La cosa interessante è che il profilo termico nella parte alta del *PBL* risulta *abbandonato ad un lento decadimento* e spesso risulta ancora visibile il giorno successivo. Questo strato di *vecchio PBL abbandonato,* detto *Residual Layer (RL),* presenta un gradiente di temperatura potenziale o nullo o debolmente positivo.

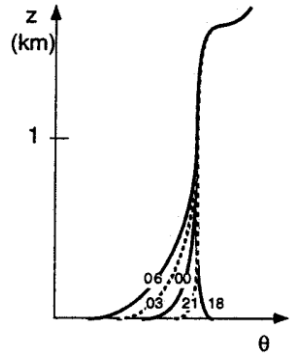


Fig. 1.31: profilo verticale di temperatura potenziale alle ore 18, 21, 00, 03 e 06 di una giornata serena tipica (Stull 2000)

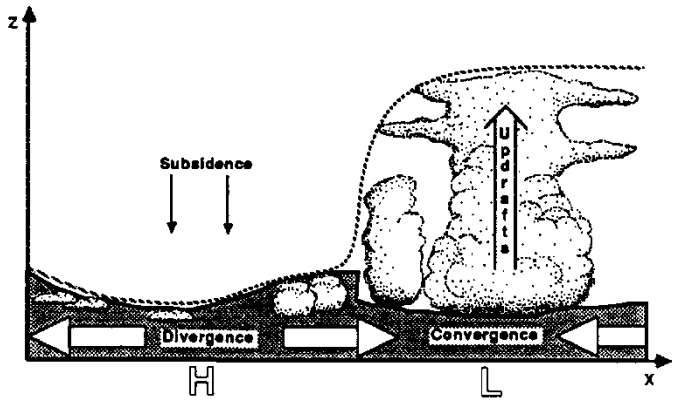


Fig.1.32: influenza delle circolazioni sinottiche sul PBL (Stull, 1988)

La velocità con cui z_i aumenta col tempo prende il nome di <u>*velocità di entrainment*</u> w_e e non può mai essere negativa. Esistono però anche cause diverse dall'immissione di energia termica nel *PBL* che producono un incremento o un decremento di z_i (cioè un'espansione o una contrazione del *PBL*) e tali cause sono di tipo *sinottico*. Come noto, la distribuzione spaziale della pressione atmosferica presenta zone con massimi (zone di alta pressione) e zone con minimi (zone di bassa pressione). Le alte e le basse pressioni sono sistemi atmosferici a simmetria pressoché circolare, con diametri caratteristici elevati (dell'ordine dei 1000 *km*). Attorno ad un'alta pressione le masse d'aria si muovono con un movimento spiraliforme in senso orario nell'emisfero Nord (e antiorario in quello Sud). Di fatto, tale moto tende a far allontanare l'aria dal centro dell'alta pressione e ciò, per la conservazione della massa, richiede che dell'aria dalla parte alta della troposfera discenda nella sacca di alta pressione (*subsidenza*) a compensazione dell'aria in allontanamento. Si determina quindi una *divergenza* del flusso delle masse d'aria. La velocità con cui l'aria scende dalla parte alta della troposfera è la <u>*velocità di subsidenza*</u> w_s sicuramente negativa. Sebbene la subsidenza spinga aria dell'atmosfera verso il suolo, tale aria non può penetrare nel *PBL* a causa della forte inversione termica all'*entrainment*. Il risultato netto è quindi la contrazione verticale del *PBL* e la conseguente diminuzione di z_i (**Fig.1.32**) In pratica, la variazione di z_i col tempo dipende dagli effetti combinati e contrastanti di w_e e w_s cioè: $dz_i/dt = w_e + w_s$. Attorno ad una bassa pressione, invece, le masse d'aria ruotano in modo spiraliforme in senso antiorario nell'emisfero Nord (e orario in quello Sud), convergendo verso il centro della bassa pressione stessa (fenomeno di *convergenza*). Per la conservazione della massa, questa volta devono svilupparsi moti ascendenti a grande scala che comportano una netta espansione verso l'alto del *PBL* e conseguentemente un incremento di z_i ed una velocità di subsidenza w_s positiva. Spesso questa forzante sinottica è così efficace da innalzare la sommità del *PBL* a quote elevatissime o da eliminare totalmente il *PBL* stesso (**Fig.1.32**). In questi casi l'aria del *PBL* si rimescola efficacemente con l'aria della troposfera riducendo drasticamente l'inquinamento atmosferico e le nubi

a grande sviluppo che normalmente si formano possono produrre eventi di pioggia che contribuiscono ulteriormente alla depurazione dagli inquinanti eliminandoli per dilavamento.

1.3.2 IL PBL STABILE

Se si prende in considerazione una tipica situazione notturna, si nota come essa risulti molto meno definita e chiara della situazione diurna. L'aria continua ad essere turbolenta, tuttavia tale turbolenza non ha origini convettive, essendo assente l'apporto energetico solare. L'unica sorgente di turbolenza è quindi la turbolenza meccanica indotta dallo *shear* del vento, come tipico di ogni fluido viscoso che scorra sopra una superficie solida e rugosa, turbolenza che in parte viene inibita e contrastata da un intenso fenomeno di raffreddamento dell'atmosfera, più intenso negli strati più vicini al suolo. Nella **Fig.1.33**, dove viene illustrata in maniera *pittorica* questa situazione, si nota come il *PBL* notturno (*Stabile*) sia sede di una turbolenza caratterizzata dalla presenza di vortici di piccola dimensione localizzati nelle immediate vicinanze del suolo. Più ci si allontana dalla superficie terrestre, più diminuisce il livello di turbolenza. Il moto è intrinsecamente stabile e la presenza di un gradiente di temperatura potenziale sempre positivo favorisce l'instaurarsi di fenomeni ondosi, come per esempio le tipiche onde di gravita, il *meandering* orizzontale o le onde orografiche, quando il terreno presenta rilievi montuosi.

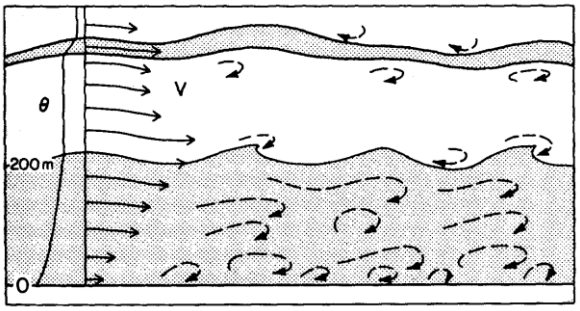


Fig. 1.33: rappresentazione pittorica del PBL stabile (Wyngaard, 1990)

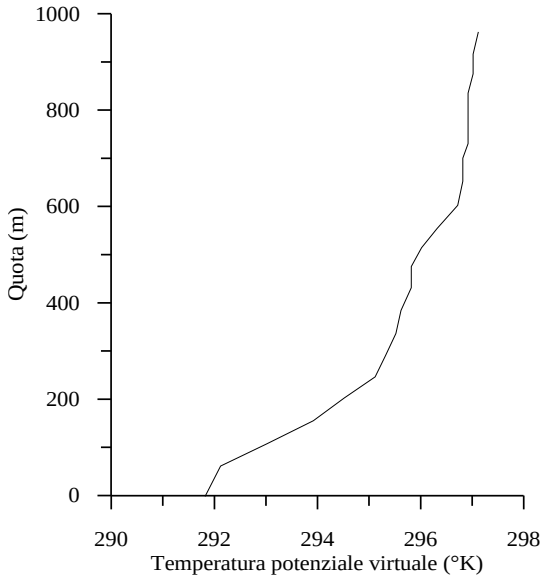


Fig. 1.34: tipico profilo notturno di temperatura potenziale.

Nelle ore notturne il profilo di temperatura potenziale presenta un gradiente sempre positivo, maggiore nei pressi del suolo e gradualmente decrescente con la quota (**Fig.1.34**). In questo

caso, il *PBL* può essere individuato, almeno in prima approssimazione, nello strato più vicino al suolo, sede di un profilo termico a maggior gradiente termico la cui forma è approssimativamente di tipo esponenziale. All'inizio del periodo stabile, in sostanza poco prima del tramonto, il tipico profilo convettivo di temperatura potenziale degenera in un profilo a temperatura potenziale costante. Mancando l'apporto energetico solare, il suolo inizia ad irraggiare energia termica (nella banda dell'infrarosso), raffreddandosi progressivamente. Il raffreddamento del suolo comporta di conseguenza un raffreddamento dell'aria sovrastante, che coinvolge uno spessore d'aria crescente col tempo. Il risultato netto di tutto ciò è che la temperatura potenziale presenta un profilo esponenziale con la quota via via più marcato con un'inversione al suolo sempre maggiore. Questo comportamento perdura per tutto il periodo stabile della giornata (in sostanza per tutta la notte) esaltandosi sempre di più, finché il ritorno dell'apporto solare inizia ad erodere l'edificio creatosi durante la stabilità, ricostruendo progressivamente l'ambiente convettivo. Mancando l'apporto convettivo, durante la notte si forma vicino al suolo uno *Strato Stabile* (*SBL*) caratterizzato da una debole e sporadica turbolenza.

Sebbene il vento al livello del suolo diventi frequentemente molto debole, in quota i venti possono diventare addirittura *supergeostrofici*, cioè possono raggiungere velocità superiori a quanto richiesto dal gradiente orizzontale di pressione tipico del luogo, presentando un massimo tipico (come mostrato in **Fig.1.30** al profilo delle 3 a.m.) detto *low level* o *nocturnal jet*.

Al contrario del *ML* diurno, lo *SBL* non presenta un limite superiore ben definito e si raccorda al *RL* in maniera molto *smooth* (**Fig.1.35***)*. In pratica, la sommità dello *SBL* viene definita come quella quota in cui l'intensità della turbolenza è inferiore ad una piccola frazione del valore assunto in superficie o come lo strato di atmosfera col maggior gradiente termico.

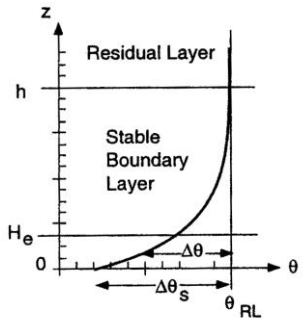


Fig. 1.35: profilo schematico verticale di temperatura potenziale (Stull, 2000)

Gli inquinanti emessi nello *SBL* si disperdono relativamente poco in senso verticale e maggiormente in senso orizzontale, dando luogo, con vento debole, a tipiche oscillazioni orizzontali (*meandering*). La ridotta estensione verticale del *SBL* può produrre però interessanti (e spesso pericolose) situazioni nella dispersione degli inquinanti dalle ciminiere. Se la ciminiera emette i fumi ad una quota superiore alla sommità del *SBL* (o, che è lo stesso, i fumi per la spinta di galleggiamento superano tale quota), il pennacchio di fumo *galleggia* sopra il *SBL* senza raggiungere il suolo e quindi producendo livelli di concentrazione al suolo praticamente nulli. Al contrario, se la sorgente emittente è molto vicina al suolo, la ridotta capacità disperdente dello *SBL* determina l'instaurarsi di fenomeni di forte inquinamento atmosferico. A volte due ciminiere vicine, con caratteristiche di emissione differenti (una con fumi poco galleggianti e l'altra con fumi molto galleggianti), possono influire in modo molto diverso sul livello di inquinamento al suolo.

Lo spazio qui riservato alle situazioni stabili è sensibilmente inferiore a quello riservato alle situazioni convettive, ma ciò non significa che le prime siano più semplici delle seconde, anzi è proprio il contrario! Mentre il sole nelle situazioni convettive *traina* con la propria energia l'evoluzione del *PBL*, smorzando sensibilmente i fenomeni atmosferici a grande scala, la sua assenza nelle situazioni stabili fa sì che emerga indisturbata una moltitudine di fenomeni atmosferici (come, per esempio, le onde gravitazionali) che si mescolano ed interagiscono tra loro fornendo all'osservatore un quadro di difficile interpretazione. Sono ormai decenni che la Ricerca si

concentra sull'esplorazione strumentale e teorica dei *misteri* del *PBL* stabile e finalmente si inizia ad intravvedere una logica nei fenomeni che emergono e, quindi, almeno timidamente, si inizia a descriverli, a ricostruirli e prevederli correttamente. E tutto ciò grazie al fatto che il nostro pianeta è naturalmente provvisto di due *laboratori* naturali dove è possibile studiare con maggiore semplicità la micrometeorologia stabile: l'Artide e l'Antartide. In queste zone desolate ed inospitali, dove negli ultimi decenni sono operative anche per l'intero anno basi dotate di strutture sperimentali presidiate, è possibile studiare la turbolenza nelle situazioni stabili con maggior profitto che alle medie latitudini, da un lato per la persistenza della stabilità che agevola le osservazioni e dall'altro per l'intensità dei fenomeni. Nel Capitolo 8 approfondiremo ulteriormente il tema.

1.3.3 IL CICLO GIORNALIERO DEL PBL

La vita sulla Terra (lontano dalle zone polari) è scandita dall'alternarsi continuo del giorno e della notte oltre che dall'alternarsi delle stagioni. Questa presenza ciclica della fonte principale di energia, il Sole, è ovviamente la conseguenza della geometria cosmica (la forma sferica della Terra, il suo moto di rotazione ed il suo moto di rivoluzione attorno al Sole). E la presenza ciclica di una fonte di energia termica per il *PBL* fa sì che vengano ad alternarsi situazioni di connettività a situazioni di stabilità. Queste considerazioni forniscono il filo conduttore per una breve sintesi del quadro fenomenologico che si è venuto fin qui delineando.

Conviene riflettere sul fatto che la sfericità (approssimativa) del globo terrestre ed il suo moto di rotazione attorno al proprio asse fa sì che quando una porzione della superficie terrestre gode della presenza del Sole, un'altra porzione opposta del pianeta si trova in condizioni notturne. Proprio questo meccanismo, tutto geometrico, determina l'insorgere di vari fenomeni che, alla fine, portano all'instaurarsi dei moti a grande scala delle masse d'aria che interessano l'intera atmosfera. Se l'atmosfera è in moto, la turbolenza meccanica è attiva. Quindi, il Sole, anche se indirettamente, sovraintende alla generazione ed al mantenimento della turbolenza meccanica nel *PBL*, oltre che alla generazione ed al mantenimento della turbolenza convettiva. Se, però, consideriamo un punto qualsiasi della superficie terrestre, assistiamo ad un continuo alternarsi del giorno e della notte, alternanza che determina un tipico ciclo giornaliero nello stato del *PBL*.

Prima dell'alba, la temperatura potenziale cresce costantemente con la quota, soprattutto in prossimità del suolo dove il gradiente è massimo. Il gradiente positivo di temperatura potenziale indica che il *PBL* è ovunque staticamente stabile e che sono presenti solo piccoli vortici dovuti allo *shear*, originati nelle immediate vicinanze del suolo e poco estesi sulla verticale.

Dopo l'alba inizia l'apporto energetico solare e quindi inizia ad instaurarsi la situazione convettiva diurna con un'estensione verticale del *PBL* che cresce in funzione dell'integrale di energia radiante giunta al suolo durante le ore diurne. Oltre a ciò, entro tutto il *PBL* si instaura un profilo verticale di temperatura potenziale tipico che, col passare del tempo, si spinge a quote sempre maggiori. Nelle prime ore convettive, però, si può assistere ad un fenomeno particolare. Pennacchi di fumo emessi nella notte al di sopra dello strato stabile e che gli galleggiavano sopra poco dispersi per la ridotta turbolenza incontrata (*lofting*), vengono raggiunti dai *thermals* generati dal riscaldamento diurno e vengono violentemente incorporati nei moti discendenti dei *downdraft*, raggiungendo quindi il suolo dove generano situazione di elevata concentrazione locale. Questo è il ben noto fenomeno della *fumigazione*.

Circa *mezz'ora prima del tramonto* i *thermals* cessano di formarsi, consentendo un decadimento della turbolenza nello strato precedentemente rimescolato che è molto rapido nello strato superficiale e molto meno nella parte sovrastante del *PBL*. Questo strato, sostanzialmente *abbandonato a sé stesso,* è detto *Residual Layer* (*RL*) dato che le sue variabili di stato sono inizialmente le stesse dello strato rimescolato. Il *RL* ha una stratificazione termica circa neutra e così la turbolenza è circa uguale in tutte le direzioni; è per questo che i pennacchi emessi nel *RL* tendono a disperdersi con una geometria conica (*coning*). Dato che il *RL non è a diretto contatto del suolo,* la sua evoluzione risulta totalmente disaccoppiati dall'aria sottostante. Durante la notte lo strato superficiale stabile normalmente cresce, modificando costantemente la base del *RL*.

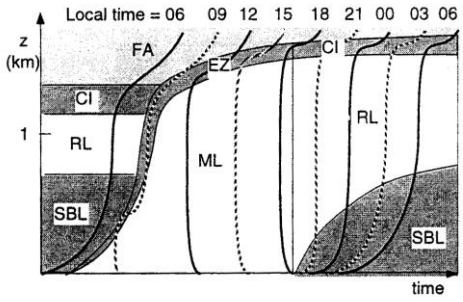


Fig. 1.36: profilo verticale della temperatura potenziale nelle varie ore di un giorno soleggiato (Stull, 2000)

Il ciclo giornaliero descritto è riassunto graficamente nella **Fig.1.36** dove si nota chiaramente che dall'alba al tramonto si assiste ad un progressivo accrescimento della zona convettiva del *PBL* (costituita dal *SL*, dal *ML* e dallo strato di *Entrainment*). Il limite superiore di tale zona è spesso chiamato *altezza di rimescolamento convettiva* (z_i). Nelle ore notturne, invece, la struttura del *PBL* è molto più complessa e ciò che risulta più evidente è la presenza di uno strato turbolento di origine meccanica presso la superficie terrestre che, pur avendo un'individualità minore rispetto allo strato convettivo diurno, è comunque quantificabile, anche se in maniera meno univoca, ed il suo limite superiore, normalmente indicato col simbolo h_m, viene comunque denominato *altezza di rimescolamento meccanica*.

L'evoluzione giornaliera del *PBL* descritta può essere *vista* impiegando vari sistemi di osservazione *remote sensing* (di cui parleremo al Capitolo 11) in grado di sondare verticalmente l'atmosfera con continuità. Tali sistemi sono posizionati a terra ed inviano in atmosfera ad istanti prefissati impulsi sonori (SODAR) o raggi laser (LIDAR). Se si inviasse verticalmente in atmosfera un raggio laser (LIDAR), si avrebbe un'interazione tra la radiazione elettromagnetica del raggio e l'aerosol presente in aria generando un eco di ritorno. La presenza di aerosol in atmosfera è una costante in tutta la parte bassa della Troposfera ed è costituito principalmente da particolato solido di provenienza antropica e naturale cui si aggiungono idrometeore di varie dimensioni. Dato che l'aerosol è prevalentemente confinato entro il *PBL*, l'eco di ritorno che ne evidenzia la presenza e che è proporzionale alla concentrazione alle varie quote, consente di individuare immediatamente quella porzione di atmosfera in cui risiede e si rimescola l'aerosol a causa della turbolenza, quindi evidenzierà proprio il *PBL*.

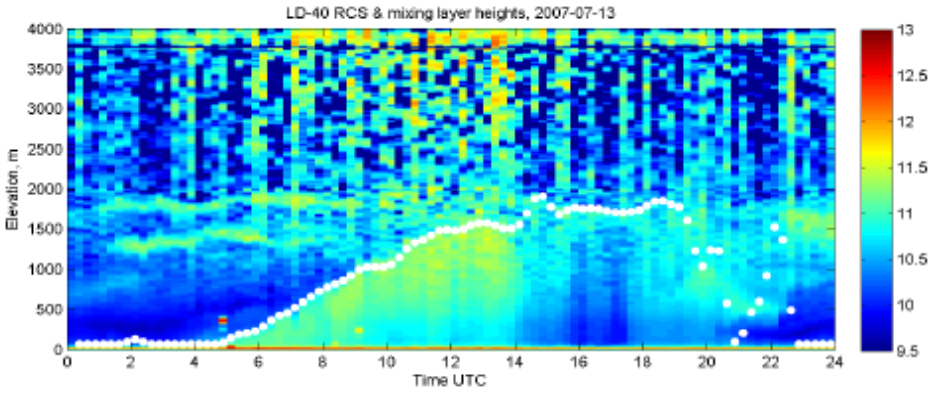


Fig.1.37: andamento giornaliero del segnale retrodiffuso di un LIDAR (i punti bianchi evidenziano la sommità del PBL) (G. Gobbi, informazione privata).

Nella **Fig.1.37** è presentato un esempio di registrazione dell'eco di ritorno di un LIDAR nell'arco di un'intera giornata in una località alle medie latitudini caratterizzata da un notevole apporto di energia solare, cosa che giustifica il valore di circa 1500 metri dell'estensione massima

giornaliera del *PBL*. Anche in questo caso si nota come l'estensione verticale notturna del *PBL* è estremamente ridotta e circa costante, mentre con l'apporto di energia solare il *PBL* cresce molto rapidamente fino a stabilizzarsi nelle ore pomeridiane. Si nota poi che poco prima del tramonto tutta la struttura turbolenta svanisce molto rapidamente riassumendo i limitati valori tipici delle ore notturne. Si noti la straordinaria somiglianza che la **Fig. 1.37** ha con la **Fig.1.36**.

1.4 CONCLUSIONI

In questo Capitolo, dopo aver introdotto l'evidenza sperimentale dell'esistenza del *Planetary Boundary Layer* (*PBL*) come stratificazione distinta della parte bassa della Troposfera, abbiamo focalizzato l'attenzione in tre direzioni precise.

In primo luogo, si è cercato di definire con rigore la metodologia d'indagine che verrà utilizzata nel seguito e le principali variabili che essa richiede. Così facendo si è giunti ad alcuni concetti fondamentali: la legge di stato dei gas e l'equazione idrostatica, il Primo Principio della Termodinamica e la temperatura potenziale, la stratificazione termica e la stabilità statica. Tali concetti compariranno ovunque nei prossimi Capitoli.

Successivamente, sono stati ricordati e riassunti alcuni semplici concetti di Fluidodinamica relativi alle caratteristiche del moto di un fluido viscoso, visto che è fuori discussione che i moti atmosferici (ed anche quelli del *PBL*) siano di questo tipo. Ma l'aria del *PBL* è indubbiamente un fluido viscoso caratterizzato, però, da un moto perennemente turbolento e ciò ha richiesto di introdurre i primi concetti, almeno fenomenologici, relativi alla turbolenza (meccanica e convettiva) che verranno sviluppati ed approfonditi nei Capitoli successivi. Ricordiamo che è proprio la turbolenza atmosferica la causa primaria della dispersione degli inquinanti in aria e dei fenomeni di inquinamento atmosferico.

Per vedere come questi concetti si presentano nel *PBL* reale (almeno alle medie e basse latitudini), si è dedicata l'ultima parte del Capitolo ad un'illustrazione dettagliata della fenomenologia delle situazioni convettive e stabili e del ciclo giornaliero che le alterna con continuità, con l'obiettivo dichiarato di costruire un riferimento fenomenologico tranquillizzante quando, nei Capitoli successivi, tutto ciò prenderà la forma tutt'altro che amichevole di equazioni differenziali alle derivate parziali o di equazioni differenziali stocastiche. Tutto ciò costituisce la base necessaria per intraprendere in maniera rigorosa lo studio della dinamica del *PBL* e lo studio dell'inquinamento atmosferico.

PROBLEMI

P01.01 L'anemometro di una stazione meteorologica misura una velocità media del vento di 3 $m \cdot s^{-1}$ ed una direzione di 200°N. Se si suddividono le direzioni di provenienza del vento in 32 settori centrati sulle direzioni cardinali (N, NNE, NE, ENE, ecc.) in quale di questi settori si colloca la direzione misurata? Quanto valgono le componenti cartesiane del vettore vento misurato?

P01.02 Se la componente cartesiana zonale (W-E) del vento è pari a 3.7 nodi e la componente meridionale (S-N) è pari a 5.1 nodi, quanto vale la velocità (in $m \cdot s^{-1}$) e la direzione di provenienza del vento?

P01.03 Si consideri un pallone sonda lanciato dal suolo nel punto di coordinate (1 km, 1 km). Si ipotizzi, inoltre, che il campo di moto (velocità e direzione del vento) sia omogeneo orizzontalmente e che vari ogni 15 minuti secondo la tabella seguente:

Periodo	Velocità vento (m/s)	Direzione Vento (°N)	Velocità Ascensionale (cm/s)
1	1	224	2
2	1.3	183	3
3	1.1	137	1
4	3.1	249	2
5	1.3	2	-1
6	1.2	49	1

Se la sonda segue fedelmente il vento incontrato, calcolare la traiettoria della sonda e determinare la sua posizione dopo 90 minuti dal lancio e la quota raggiunta impiegando le velocità ascensionali riportate nell'ultima colonna della tabella.

P01.04 Si rilasci da terra un pallone sonda e si registri ogni 15 minuti la relativa velocità e direzione che sono riportate nella tabella seguente:

Periodo	Velocità (m/s)	Direzione (°N)
1	1.5	39
2	3.1	199
3	2.2	269
4	2.0	178
5	1.1	121
6	1.3	42

Se al termine dei 90 minuti di registrazione la posizione orizzontale del pallone è nel punto di coordinate (10km, 10 km), calcolare quale avrebbe dovuto essere la posizione del lancio.

P01.05 Si consideri un *PBL* in condizioni stazionarie caratterizzato da una stratificazione adiabatica e da un campo di vento omogeneo in orizzontale e variabile con la quota. Le relazioni che esprimono la variazione della velocità del vento u (m/s) e della direzione D (°) con la quota z sono:

$$u = \frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \qquad\qquad D = D(z_0) \cdot \alpha \cdot z$$

dove z_0 è la quota in corrispondenza della quale la velocità del vento è nulla, k e α sono delle costanti e u_* è la velocità di scala (*friction velocity*). Si ipotizzi inoltre che:

$z_0 = 0.1$ m, $k = 0.4$, $u_* = 0.3$ m/s, $D(z_0) = 180°$, $\alpha = 0.045°/m$

Se in questo *PBL* alla quota z_0 si rilascia una particella che risale l'atmosfera con una velocità costante pari a 0.4 m/s:

- calcolare numericamente la traiettoria X(t), Y(t) della particella tra il tempo t = 0 e t = 1800"
- calcolare nello stesso intervallo temporale l'andamento della temperatura della particella ipotizzando che il PBL sia in condizioni idrostatiche, calcolare come varia la densità della particella in questo intervallo temporale.

P01.07 Dimostrare la relazione (1.5a) e verificare il valore numerico indicato per la costante dei gas per l'aria secca.

P01.08 Dimostrare la relazione (1.16a) e (1.16b).

P01.09 Dimostrare la relazione (1.27).

P01.10 Un monitor tradizionale di un PC è un esempio di tubo a vuoto. Se entro il video viene realizzato un vuoto perfetto, quale forza agisce sullo schermo del monitor posto a livello del mare se tale schermo è quadrato con diagonale pari a 24" (61 cm)?

P01.11 Calcolare la densità molecolare di CO_2 e dell'aria al livello del mare (p=1013mb e T=0°C) sapendo che il relativo rapporto di mescolanza vale 365 ppm.

P01.12 Se la densità molecolare di O_3 è $N_{O3}=1.5\cdot10^{12}$molecole$\cdot$cm^{-3}, T=285K e p=980 mb, trovare il rapporto di mescolanza dell'O_3 e la relativa pressione parziale.

P01.13 Ottenere una relazione analitica che descriva la densità di una particella d'aria che inizialmente possiede una densità ρ_s ed una pressione p_s e che si espande in modo adiabatico alla pressione p.

P01.14 Calcolare lo spessore verticale di uno strato d'atmosfera posto tra le pressioni 1000 e 500 mb, supponendo che tale strato sia isotermo. Fare i calcoli sia per una temperatura di 273 K che per una temperatura di 250 K.

P01.15 Dimostrare la relazione (1.33c) che esprime il Primo Principio della Termodinamica in funzione della temperatura potenziale.

P01.16 Ottenere una relazione analitica che esprima la variazione di pressione con la quota in un'atmosfera con gradiente termico costante.

P01.17 La quota di crociera di un aereo subsonico e di un aereo supersonico è rispettivamente 12 km e 20 km. Qual è la differenza relativa nella densità dell'aria tra le due quote?

P01.18 Trovare un procedimento di calcolo, eventualmente iterativo, per individuare la temperatura dell'aria una volta nota la sua temperatura virtuale ed il rapporto di mescolanza.

P01.19 Se l'aria possiede la una temperatura di 21°C, un'umidità relativa del 65% ed una pressione di 1005 mb, quanto vale l'umidità assoluta, l'umidità specifica ed il rapporto di mescolanza.

P01.20 Una stazione meteorologica misura T=293 K e r_h = 50% al tramonto. Assumendo che la tensione di vapore dell'acqua sia costante durante la notte, di quanto dovrà diminuire la temperatura dell'aria perché nel corso della notte ci sia formazione di nebbia?

P01.21 Calcolare il peso molecolare dell'aria secca se la percentuale volumetrica di azoto presente è il 78%, la percentuale di ossigeno è il 21% e quella di anidride carbonica è lo 0.93%.

P01.22 Se in atmosfera la temperatura diminuisce con la quota di 6.5 K ogni chilometro e la pressione diminuisce di 10 mb ogni 100 metri, come varia la densità dell'aria secca con la quota se al suolo la temperatura è di 288 K e la pressione di 1013 mb?

P01.23 Si consideri un piccolo strato di atmosfera di 1 mm di spessore immediatamente adiacente alla superficie terrestre in cui il moto medio risulta dell'ordine di 0.01 ms^{-1}. Determinare il Numero di Reynolds caratteristico di questo piccolo strato d'atmosfera e stabilire se il moto è laminare o turbolento.

P01.24 Durante le ore di un giorno soleggiato si assiste al flusso di calore all'interfaccia aria-suolo descritto nella tabella seguente.

Ora	Flusso calore (W/m^2)	Ora	Flusso calore (W/m^2)	Ora	Flusso calore (W/m^2)	Ora	Flusso calore (W/m^2)
1	-19	7	5	13	300	19	-5
2	-15	8	20	14	220	20	-10
3	-32	9	70	15	150	21	-19
4	-25	10	180	16	80	22	-27
5	-10	11	220	17	30	23	-30
6	-6	12	270	18	10	24	-32

Se si ipotizza che la conducibilità termica dell'aria valga $K_d = 0.0256$ J m^{-1} s^{-1} K^{-1}, stimare la differenza di temperatura che si instaura tra l'interfaccia aria suolo e la quota di 2 mm.

P1.25 Si consideri una particella che si trova ad una quota del PBL in cui il gradiente di temperatura potenziale è pari a 0.5 K/m. Se viene spostata dalla sua posizione iniziale con una velocità verticale pari a 0.5 m/s e se la temperatura media dell'aria è di 300 K, calcolare se questa particella oscilla attorno alla propria posizione iniziale. In caso affermativo, calcolare l'escursione massima di questa oscillazione.

P1.26 Si consideri lo strato di PBL compreso tra le quote $z_1 = 950$ m e $z_2 = 1250$ m. La temperatura e la velocità del vento alla base ed alla sommità di questo strato d'aria siano rispettivamente:

$\theta_1 = 301.2$ K, $\theta_2 = 302.6$ K, $u_1 = 4$ m/s $u_2 = 10$ m/s

Stabilire se questo strato di atmosfera si trova in condizioni stabili o meno e perché.

2. MODELLO FLUIDODINAMICO DEL PBL

Il *PBL* è un sistema fisico che inevitabilmente deve rispettare le leggi della Fluidodinamica. Questa asserzione è del tutto vera in generale e non ammette eccezioni. Dobbiamo ricordarcelo sempre, sia che in noi alberghi l'anima del teorico, sia che la nostra anima sia prevalentemente sperimentale. Non può esistere un fenomeno rilevabile in atmosfera, stazionario o meno, locale o meno, che non sia completamente spiegabile dalle normali leggi della Fluidodinamica (e della Termodinamica), e anche quando, come accadrà nei Capitoli successivi, useremo pesantemente metodologie statistiche, non dobbiamo dimenticarci mai che il loro uso è pertinente non perché il *PBL* sia un sistema di natura stocastica, ma perché la caoticità che lo contraddistingue, completamente deterministica, può essere più facilmente dominata impiegando metodologie statistiche. Da qui l'importanza di conoscere nel dettaglio le leggi della Fluidodinamica cui tale sistema deve ubbidire, cioè il *modello fluidodinamico del PBL*.

In sintesi, un modello fluidodinamico dell'atmosfera e del *PBL* è un insieme di relazioni matematiche, prevalentemente differenziali, che descrivono l'evoluzione nello spazio e nel tempo delle variabili che caratterizzano questo fenomeno fisico. Il dominio spaziale considerato potrebbe essere del tutto generico e potrebbe non tener conto del fatto che nei vari strati di atmosfera, e soprattutto nella Troposfera, hanno luogo fenomeni meteorologici caratterizzati da scale spaziali e temporali molto diverse tra loro. Se, però, il dominio d'indagine presenta una dimensione orizzontale dell'ordine delle decine o centinaia di migliaia di chilometri, coprendo sostanzialmente tutta l'atmosfera o gran parte di essa, ciò che si evidenzierebbe sarebbero soprattutto le evoluzioni a grande scala, anche temporale (ordine dei giorni o dei mesi). In sostanza, stiamo parlando dei *fenomeni sinottici* studiati dalla Climatologia e dalla Meteorologia Sinottica. Adottare un dominio spaziale d'indagine di questo tipo parrebbe, a prima vista, il modo più generale di porsi nei confronti dello studio dell'atmosfera, ma le limitazioni insite negli strumenti di calcolo, attualmente insuperabili, fanno sì che sia inevitabile perdere i *dettagli* a scale spaziali e temporali molto inferiori. In sostanza, se si adottasse un dominio d'indagine planetario, sarebbe sicuramente possibile studiare le grandi circolazioni tropicali e le perturbazioni atlantiche in arrivo sull'Europa, ma difficilmente si potrebbe, per esempio, ottenere una visione chiara e dettagliata dell'atmosfera al di sopra della città di Roma e quindi ricostruire o prevedere l'inquinamento atmosferico della città. Atkinson (1981) usa il termine *Macroscala* per indicare questa scala. Se, però, si diminuisce l'estensione orizzontale del dominio, limitandosi a poche centinaia o decine di chilometri, si vedono gradualmente emergere i dettagli di una struttura atmosferica molto più complessa come fronti, brezze e fenomeni orografici. È a questo punto che diventa evidente la natura caotica della parte bassa della troposfera (il *PBL*) e quindi la sua turbolenza intrinseca. Questa è sicuramente la scala più interessante per la Micrometeorologia, specialmente se in verticale non si va oltre la prima parte della troposfera. A tale scala viene dato il nome di *Mesoscala*. Si può pensare di abbassare ulteriormente la scala spaziale e temporale e, a questo punto, emergono fenomeni atmosferici ancora più irregolari e locali. Questa è la *Microscala*, che costituisce ad oggi la frontiera da raggiungere nelle normali applicazioni meteorologiche e dispersive.

Dato che il nostro interesse è focalizzato prevalentemente sulla Mesoscala, il dominio di indagine tipico da prendere in considerazione è una porzione di atmosfera di dimensione orizzontale dell'ordine delle centinaia di chilometri e verticale di alcuni chilometri, tale da contenere tutto il *PBL* ed una buona porzione della troposfera sovrastante. Anche se in questo Capitolo non se ne parlerà esplicitamente, i calcoli veri verranno effettuati scomponendo il dominio spaziale di indagine in celle elementari e frazionando il tempo di interesse in incrementi temporali (*time step*) opportuni e discreti. La *risoluzione spaziale* del modello sarà quindi pari alla dimensione caratteristica della cella elementare, mentre la *risoluzione temporale* sarà pari al *time step*. Se per un

modello a scala globale la cella elementare ha dimensioni orizzontali tipiche di 400 per 400 km, una dimensione verticale di 1 km ed una risoluzione temporale di 300 secondi, un tipico modello a Mesoscala tratta celle elementari con dimensione orizzontale e verticale rispettivamente dell'ordine del chilometro e delle decine di metri, e *time step* dell'ordine del secondo.

Senza preoccuparsi inizialmente né del tipo di dominio d'indagine né della natura caotica dell'atmosfera, le relazioni fluidodinamiche che la descrivono verranno dedotte impiegando le leggi fondamentali della Fisica Classica, cioè:

1. la legge di conservazione della massa;
2. la seconda legge di Newton e la conservazione della quantità di moto;
3. la prima legge delle Termodinamica e la conservazione dell'entalpia;
4. l'equazione di stato dei gas;
5. la conservazione dell'acqua presente in atmosfera nei vari stati di aggregazione;
6. la conservazione delle specie chimiche (gas, aerosol e particelle) presenti in aria.

Applicando tali leggi (di conservazione o di stato), vengono individuate delle relazioni di tipo preferenzialmente differenziale e ***prognostico*** per ogni grandezza fisica che descrive lo stato del *PBL*. Va ricordato che una relazione di tipo prognostico è una relazione differenziale che lega la variazione temporale di una data variabile (per esempio una delle tre componenti cartesiane del vento) alla variazione spaziale della stessa e di altre variabili rilevanti, oltre che ad eventuali termini di sorgente. Il risultato cui si giunge è un modello matematico in grado di descrivere, almeno teoricamente, le ***variazioni istantanee*** *nello spazio e nel tempo* delle grandezze fisiche che descrivono il *PBL*. Il sistema di riferimento spaziale adottato per la loro deduzione è un sistema di riferimento cartesiano ortogonale non inerziale, solidale con la superficie terrestre, certamente scomodo per la Macroscala ma sicuramente ideale per la Mesoscala. Dutton (1995) e Holton (2004) presentano le relazioni fluidodinamiche di conservazione espresse in coordinate sferiche, più adatte alla Macroscala. Nei paragrafi successivi viene presentato in modo sistematico ma sintetico tutto ciò. Per una discussione più dettagliata si rimanda a Matveev (1965), Wallace e Hobbs (1977), Holton (2004), Dutton (1995), e Pielke (2002). Riferimenti più specifici alle problematiche del *PBL* sono in Arya (1987), Blackadar (1997), Nieuwstadt e van Dop (1982), Stull (1988), Garratt (1992), Sorbjan (1989) e Wyngaard (2010).

Introdotti alcuni concetti matematici di base, ripercorreremo le varie leggi di conservazione della Fisica applicate ad un gas perfetto, schematizzazione realistica dell'aria nella parte bassa della Troposfera. Da esse otterremo un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali, una per ciascuna delle variabili che descrivono la dinamica dell'atmosfera, trascurando i termini il cui peso risulta irrilevante ai fini pratici. Il risultato ottenuto sarà un rassicurante modello differenziale che costituisce il modello fluidodinamico dell'atmosfera e, nel nostro caso, del *PBL* in cui, a prima vista, non sembrerebbero presenti tutte quelle irregolarità cui diamo il nome di turbolenza, e che sono un'evidenza sperimentale quotidiana quando si misurano le diverse variabili meteorologiche. Nella realtà, il modello differenziale ottenuto è altamente non lineare e presenta un comportamento caotico, dove le irregolarità che le misure mettono in luce sono nascoste ben nel profondo di equazioni all'apparenza decisamente benevole. Arriveremo ad uno sconfortante risultato: il modello matematico ottenuto è corretto ma completamente inapplicabile in pratica! Tanta fatica per nulla? Assolutamente no! In effetti, proprio da questo modello matematico e dalla conoscenza delle sue bizzarre caratteristiche, individueremo un percorso alternativo che ci porterà alla scrittura di un modello operativo di pratica applicazione. Ma dovremo aspettare fino al Cap. 4. per giungere a questo importante risultato.

2.1 ALCUNI STRUMENTI MATEMATICI DI BASE

Prima di entrare nel vivo della deduzione delle leggi fluidodinamiche che governano il *PBL*, vale la pena richiamare alcune nozioni di base dell'Analisi Matematica, indispensabili per la comprensione del seguito. Si suppone che al lettore siano familiari i concetti di limite, derivata ed integrale, mentre nell'**Appendice 2** sono stati raccolti per comodità i concetti principali relativi alla teoria dei vettori, agli operatori vettoriali ed alla notazione sintetica tensoriale.

2.1.1 LO SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR E LA PREDIZIONE NUMERICA

Si consideri un punto $P(x,y,z)$ del dominio di indagine riferito ad un sistema inerziale di coordinate cartesiane ortogonali e sia $f(P)$ il valore assunto in quel punto da una generica variabile scalare (es. la temperatura dell'aria). Il quesito che ci si pone è se sia possibile ottenere il valore della variabile f in un *intorno* di P piccolo a piacere, a partire dalla conoscenza di $f(P)$. Ricordiamo che, visto il basso numero di Knudsen che caratterizza l'atmosfera, l'approccio continuo è più che legittimo.

Per semplicità, si consideri inizialmente uno spazio monodimensionale descritto dalla sola coordinata x. Se la funzione $f(x)$ è differenziabile almeno $n+1$ volte e nota in un punto x_0, il *Teorema di Taylor* garantisce che il suo valore in $x = x_0 + \delta x$ sia esprimibile come:

$$f(x) = f(x_0) + \delta x \cdot \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} + \left.\frac{\delta x^2}{2!} \cdot \frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0} + \cdots + \left.\frac{\delta x^n}{n!} \cdot \frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x_0} + O(\delta x^{n+1}) \qquad [2.1]$$

Il Teorema di Taylor garantisce quindi la possibilità di approssimare il valore di $f(x)$ in un intorno sufficientemente piccolo di x_0, impiegando solo ciò che si conosce della funzione f nel punto x_0. L'errore commesso con tale approssimazione è rappresentato dal termine $O(\delta x^{n+1})$, proporzionale alla potenza $(n+1)$-*esima* della distanza δx tra x_0 e x. Adottando un'opportuna unità di misura, è sempre possibile avere $\delta x < 1$, quindi, al di là della precisa natura di $O(\delta x^{n+1})$, la sua proporzionalità con δx^{n+1} fa sì che al tendere di n all'infinito $O(\delta x^{n+1})$ tenda a zero. In sostanza, maggiore è l'informazione della funzione $f(x)$ nel punto x_0 (e quindi maggiore è il numero di derivate di cui si dispone), minore è l'errore commesso approssimando $f(x_0 + \delta x)$ con lo sviluppo di Taylor.

La semplicità analitica dello sviluppo in serie di Taylor di una funzione ad una sola variabile si perde inevitabilmente quando si cerca un analogo sviluppo per una funzione a N variabili $f(x_1, .., x_N)$, cioè definita in uno spazio N-dimensionale. Immaginiamo, infatti, che tale funzione sia nota nel punto $\mathbf{x}_0 = (x_{01},\ldots, x_{0N})$ assieme alle sue derivate parziali fino all'ordine $n+1$. In questo caso il valore di questa funzione in un punto $\mathbf{x}_0+\boldsymbol{\xi}$ prossimo a $\mathbf{x}_0$, cioè $f(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}) = f(x_{01}+\xi_1, x_{02}+\xi_2 .., x_{0N}+\xi_N)$ è dato esattamente dallo sviluppo seguente:

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi}) = f(\boldsymbol{x_0}) + \sum_{m=1}^{n} \left.\frac{[\xi_1(\partial/\partial x_1) + \cdots + \xi_N(\partial/\partial x_N)]^m f}{m!}\right|_{\boldsymbol{x_0}} + R_{n+1} \qquad [2.2a]$$

dove il termine R_{n+1} è l'errore commesso arrestando lo sviluppo della serie all'ordine n. Per una funzione a due variabili $f(x,y)$, il relativo sviluppo in serie di Taylor risulta molto meno complesso e, se lo si arresta al termine del secondo ordine attorno al punto (a,b), è dato dall'espressione seguente:

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,b) &+ (x-a)\frac{\partial f}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y} \\ &+ \frac{1}{2!}\left[(x-a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (y-b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2(x-a)\cdot(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right] + \cdots \end{aligned} \qquad [2.2b]$$

Per ottenerne una scrittura più compatta, conviene introdurre i vettori $\mathbf{x} = (x,y)$ e $\mathbf{a} = (a,b)$, il vettore gradiente $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{a})$ e la matrice Hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{a})$ definiti come:

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \begin{matrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x} \\ \left[\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial y}\right] \end{matrix} \qquad H(a) = \begin{matrix} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x \partial y} \\ \left[\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial y \partial x}\right. & \left.\frac{\partial f^2(\boldsymbol{a})}{\partial y^2}\right] \end{matrix}$$

con cui si ottiene

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{T}} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T \boldsymbol{H}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \cdots \qquad [2.2c]$$

Come si vedrà nel seguito, è normale imporre il rispetto di una delle relazioni di bilancio della Meccanica Classica (massa, quantità di moto, ecc.) al fluido in un generico punto *P* dello spazio. Per fare ciò, il metodo standard è quello di considerare un volume di controllo di dimensione infinitesima centrato in *P*, ipotizzando di conoscere in quel punto il valore delle variabili coinvolte dalla relazione di bilancio. Ovviamente non si ipotizza che siano disponibili altre informazioni su tali variabili e lo sviluppo in serie di Taylor, che ben si coniuga col concetto di volume di controllo infinitesimo, è l'unico strumento utilizzabile. In effetti è solo impiegando questa tecnica che possiamo definire il valore di tali variabili agli spigoli del volume di controllo (supposto a forma di parallelepipedo) noto il valore delle stesse al punto *P*.

Il Teorema di Taylor applicato alle variabili meteorologiche consente di fare ulteriori considerazioni. Per semplicità si consideri ancora una volta la sola direzione *x* ed una grandezza scalare $f(x)$. Se essa è nota con la propria derivata prima in un punto x_0 e se x è sufficientemente prossimo a x_0 tale che $\delta x = x - x_0$ sia piccolo, l'errore commesso approssimando $f(x)$ con ciò che è noto in x_0 mediante lo sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine:

$$f(x) \cong f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx} \cdot \delta x \qquad [2.3a]$$

è proporzionale a δx^2. In sostanza, trascurando i termini di ordine due, in un intorno sufficientemente piccolo di x la variabile f è lineare con coefficiente angolare pari alla derivata di $f(x)$ in x. Questa considerazione sarà fondamentale in molti degli sviluppi successivi e si fonda sulla stessa definizione di derivata:

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{\delta x} = \frac{df(x_0)}{dx} \qquad [2.3b]$$

Sia nota, poi, in $P = (x)$ al tempo t la grandezza f (per es. una delle componenti cartesiane del vento, la temperatura, ecc.). Una sua approssimazione al tempo $t + \Delta t$, dove anche in questo caso l'incremento temporale Δt è piccolo, la si ottiene impiegando la conoscenza di f nel punto (x,t), della sua derivata parziale temporale al tempo t e lo sviluppo di Taylor arrestato al primo termine:

$$f(x, t + \Delta t) \cong f(x, t) + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_t \Delta t \qquad [2.4]$$

che è lo *scheletro* di ogni approssimazione numerica usata per determinare la variazione nel tempo di *f*. Se il modello fluidodinamico differenziale del *PBL* è in grado di fornire in ogni punto del dominio e ad un certo istante *t* la *tendenza* di *f*, cioè il suo tasso di variazione nel tempo, la (2.4) può fornire, almeno in linea di principio, il valore di *f* negli istanti successivi, quindi è in grado di fornire una *prognosi*, cioè una predizione. In pratica le cose sono più complicate come vedremo al Cap. 7, senza però che venga meno la logica di fondo del ragionamento fatto.

2.1.2 LA DERIVATA MATERIALE O TOTALE

Come si è visto, il *PBL* può essere descritto sia in termini Euleriani che in termini Lagrangiani. Ora ci poniamo l'obiettivo di trovare un legame analitico tra le due modalità descrittive. Per fare ciò, si consideri nello spazio un *volume di controllo* infinitesimo di dimensioni δx, δy e δz localizzato nel punto $P(x,y,z)$ ad un istante t_0 come mostrato nella **Fig.2.1.** Si ipotizzi, poi, che il

sistema di coordinate usato sia inerziale e si consideri, inoltre, una grandezza fisica scalare *f* caratterizzante il *PBL* (per semplicità uno scalare, come la temperatura).

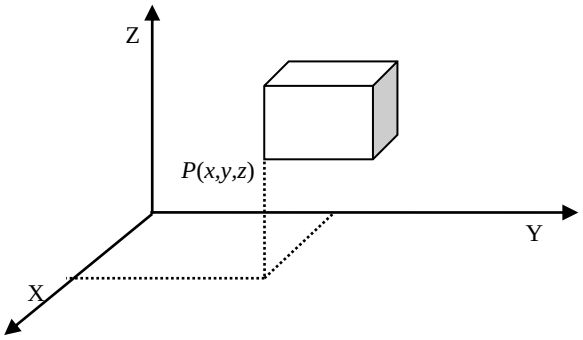


Fig.2.1: volume di controllo nello spazio al tempo t_0

Dal punto di vista Euleriano, tale grandezza può variare nel tempo, pur riferendosi sempre al volume di controllo considerato che resta fisso nello spazio. Considerazioni analoghe negli altri volumi di controllo che compongono il dominio d'indagine portano a ritenere che, in generale, *f* sia funzione dello spazio e del tempo, cioè $f(x,y,z,t)$. Nel volume di controllo centrato in $P(x,y,z)$, il tasso di variazione nel tempo di *f* è dato dalla derivata parziale $\partial f/\partial t$ mentre la variabilità *locale* nello spazio è data dalle derivate parziali $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ e $\partial f/\partial z$, cioè dalla variazione di *f* tra il volume di controllo considerato e quelli adiacenti. La conoscenza delle quattro derivate parziali in ogni punto *P* ad ogni istante *t* garantisce la conoscenza prognostica dell'intero campo *f*.

La visione Lagrangiana risulta invece molto differente. Se a t_0 si considera una *particella* del tutto coincidente col volume di controllo di **Fig.2.1**, nei tempi successivi t_1, t_2, ... tale particella si muoverà nello spazio, mantenendo l'identità materiale che possedeva al tempo t_0 e percorrendo una traiettoria completamente definita dalle funzioni $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ che descrivono la variazione nel tempo della posizione del suo spigolo *P*. Da ciò si deduce che le componenti cartesiane della *velocità della particella* **u** (qui e in tutto il seguito con una variabile in grassetto si indica una grandezza vettoriale) al tempo *t* sono date da:

$$u = \left(\frac{dx}{dt}\right)_t \qquad v = \left(\frac{dy}{dt}\right)_t \qquad w = \left(\frac{dz}{dt}\right)_t \tag{2.5}$$

Ma come varia nel tempo la grandezza *f* che a t_0 valeva $f(x,y,z;t_0)$? Dopo un intervallo di tempo δt, la particella si è mossa dal punto che occupava all'istante t_0 e la grandezza *f* che caratterizza la particella è variata di conseguenza; quindi, nell'intervallo di tempo δt la variazione di *f* sarà:

$$\delta f = f\big(x(t_0+\delta t), y(t_0+\delta t), z(t_0+\delta t)\big) - f\big(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\big) \tag{2.6a}$$

che, usando lo sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine, diventa:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial t}\delta t + \frac{\partial f}{\partial x}[x(t_0+\delta t) - x(t_0)] + \frac{\partial f}{\partial y}[y(t_0+\delta t) - y(t_0)] + \frac{\partial f}{\partial z}[z(t_0+\delta t) - z(t_0)] + O(\delta t^2) \tag{2.6b}$$

Per $\delta t \to 0$, il *tasso di variazione* dello scalare *f* caratteristico della particella risulta pari a:

$$\frac{Df}{Dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta f}{\delta t} \tag{2.7a}$$

quindi la (2.6b), per $\delta t \to 0$, si riduce alla <u>*Relazione di Eulero*</u>:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} \tag{2.7b}$$

dove *Df*/*Dt* prende il nome di *derivata materiale* o di *derivata totale* o anche di *derivata sostanziale* e rappresenta il tasso di variazione di *f nella* particella in movimento.

La visione Lagrangiana, quindi, è focalizzata sull'analisi del comportamento delle caratteristiche di una particella in movimento ed il tasso di variazione di una sua generica proprietà *f* è completamente descritto dalla sua derivata materiale, nonché dalla traiettoria della particella. Se la grandezza *si conserva* durante il moto, *Df*/*Dt* = 0. Al contrario, la visione Euleriana è focalizzata su un punto ben preciso dello spazio (e quindi su un volume di controllo fisso nello spazio e immutabile nel tempo), perciò la descrizione della variazione complessiva della grandezza *f* deve essere fatta impiegando le tre derivate parziali spaziali (per catturare la *variazione spaziale del campo*) e la derivata parziale temporale (per catturare la *variazione temporale del campo*). Il risultato fondamentale fin qui raggiunto è una relazione analitica, forte ed univoca, tra la descrizione Lagrangiana e quella Euleriana, utilissima nel seguito. Spesso si vedrà che usare la descrizione Lagrangiana risulta concettualmente più semplice, anche se alla fine per gli usi pratici è inderogabile giungere ad una descrizione Euleriana. La relazione di Eulero (2.7b) è l'arma d'uso generale che verrà utilizzata a questo scopo. Naturalmente si poteva arrivare alla (2.7b) in modo molto più spiccio, ma con molti sottintesi fisici, considerando che:

- *f* è una funzione di quattro variabili, *f*(*x*,*y*,*z*,*t*)
- il suo differenziale esatto è pari a:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad [2.7c]$$

- dividendo per *dt* ed utilizzando le (2.5), la sua derivata totale è quindi la (2.7b).

Si consideri, ora, in un sistema inerziale una particella su cui agisce una forza **F** per unità di massa con componenti cartesiane F_x, F_y e F_z e determiniamone l'accelerazione applicando la Seconda Legge di Newton. Dato che si considera una particella e non un volume di controllo, useremo una logica Lagrangiana secondo cui ad ogni generico istante *t* la particella occuperà una diversa posizione nello spazio (descriverà, quindi, una traiettoria a partire da una ben precisa posizione iniziale) e possiederà una velocità **U** di componenti (*u*, *v*, *w*). Per la Seconda Legge di Newton si ha che:

$$\frac{du}{dt} = F_x \qquad \frac{dv}{dt} = F_y \qquad \frac{dw}{dt} = F_z \qquad [2.8a]$$

Vista la genericità della particella, queste sono le relazioni differenziali che descrivono, dal punto di vista Lagrangiano, il moto dell'atmosfera. Da esse, impiegando la Relazione di Eulero, si deducono immediatamente le analoghe leggi riferite ad una descrizione Euleriana:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= F_x \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= F_y \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= F_z
\end{aligned} \qquad [2.8b]$$

che costituiscono il modello matematico del campo di moto dell'atmosfera da un punto di vista Euleriano, scritte rispetto ad un sistema inerziale. Come vedremo, le (2.8b) altro non sono che le *Equazioni di Navier-Stokes* scritte in un sistema inerziale senza esplicitare i termini forzanti, equazioni che si studieranno estesamente nel seguito. Prima di andare oltre, è bene fare almeno un'osservazione. Anche se alla (2.8b) si è giunti *meccanicamente* dalla (2.8a), applicando la Relazione di Eulero, queste due relazioni hanno un significato fisico profondamente diverso. Mentre la (2.8a) descrive la variazione del moto di una generica particella Lagrangiana, la (2.8b) descrive come in un ben preciso punto dello spazio la velocità dell'aria muta nel tempo, cioè quello che misureremmo ponendo in quel punto un anemometro ideale.

Le relazioni (2.8b) presentano alcune proprietà interessanti. In primo luogo, si nota la stretta interdipendenza tra le tre equazioni in cui compaiono sempre contemporaneamente le tre componenti del vento. Inoltre, si può notare come il sistema in esame *non sia lineare* visto che nelle sue equazioni compaiono i prodotti tra le componenti del vento e le rispettive derivate parziali. Infatti, se (u_1,v_1,w_1) e (u_2,v_2,w_2) sono due soluzioni del sistema (2.8b), la combinazione lineare delle due non è una possibile soluzione di (2.8b). Questa non linearità è una delle condizioni richieste perché un sistema dinamico presenti caratteristiche caotiche (come si vedrà nel seguito) e quindi ci si può aspettare che l'atmosfera possieda tali caratteristiche, come in effetti è del tutto evidente dal punto di vista sperimentale.

Finora la derivata materiale è stata definita solo per uno scalare *f*. Come si modifica nel caso in cui la si debba definire per un vettore **u**? Se consideriamo singolarmente ogni componente scalare u_x, u_y e u_z (cioè u_1, u_2, u_3) del vettore **u,** le rispettive derivate materiali saranno date ciascuna da relazioni del tipo della (2.7b). In pratica, si ha che:

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad [2.9a]$$

Adottando, però, la notazione tensoriale (**Appendice 2**) questa relazione può essere riscritta nella forma compatta:

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad [2.9b]$$

Prima di concludere, si riconsideri la (2.9a). È ovvio che tale relazione rappresenti, in realtà, tre distinte relazioni differenziali, la prima per la componente u_1 del moto, la seconda per la componente u_2 e la terza per la componente u_3. Quindi l'indice *i* sta ad indicare globalmente tutte le u_i, che in questo caso sono le tre componenti del moto. Ben diverso è il compito assegnato all'indice *j*. Esso si ripete, stando sia ad indicare una componente generica del moto che una coordinata spaziale. Abbiamo visto che l'indice ripetuto nel secondo membro a destra della relazione indica una sommatoria. Vista la semplicità della relazione differenziale, i dubbi per il lettore sono minimi, ma in certe espressioni differenziali complesse non è semplice individuare a prima vista quali siano gli indici di *tipo i* (che indicano il fatto che l'espressione in realtà rappresenta collettivamente tante espressioni formalmente identiche quanti sono i valori dell'indice) e quali di *tipo j* (che implicano la presenza di una sommatoria). Per rendere la vita più semplice, utilizziamo la convenzione introdotta da Sorbjan (1989), in cui si rappresentano indici di *tipo-i* con le normali lettere dell'alfabeto latino, e quelli di *tipo-j* con lettere greche. Così risalta subito all'occhio del lettore dove stanno le sommatorie. Utilizzando questa convenzione, la relazione (2.9b) può essere riscritta come:

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \qquad [2.9c]$$

Nel seguito adotteremo sempre questo trucco, rendendo la vita più semplice al lettore che può dedicare maggiore attenzione alla fisica del problema.

2.1.3 LA PARTICELLA ED I CAMPI LAGRANGIANI

Il punto di partenza della visione fluidodinamica Lagrangiana è la particella di fluido, che è un entità continua e rappresenta un punto, sempre individuabile, che si muove nel dominio di calcolo con la velocità locale del fluido. Quindi, se il campo di moto Euleriano nel dominio di indagine non è uniforme e stazionario, ma varia da punto a punto e da istante ad istante, la particella Lagrangiana, descrivendo una traiettoria nel dominio, varierà continuamente la propria velocità e al generico istante *t*, quando raggiungerà la posizione $\mathbf{X}_p(t)$, la sua velocità sarà identica a quella prevista dal campo di moto Euleriano in tale posizione e a quell'istante. Se $\mathbf{X}_p$ è la posizione assunta dalla particella al tempo *t*, essa ad un *tempo di riferimento* (iniziale) t_0 si trovava nella posizione **Y.** Per ricordare ciò, la posizione della particella viene indicata come:

$$\boldsymbol{X}_p = \boldsymbol{X}_p(\boldsymbol{Y}, t) \qquad [2.10a]$$

Matematicamente $\boldsymbol{X}_p$ è una funzione (dello spazio e del tempo) che definisce la *traiettoria* della particella ed è definita completamente dalle due equazioni:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_p(\boldsymbol{Y}, t_0) &= \boldsymbol{Y} \\ \frac{\partial \boldsymbol{X}_p(\boldsymbol{Y}, t)}{\partial x} &= U\big(\boldsymbol{X}_p(\boldsymbol{Y}, t); t\big) \end{aligned} \qquad [2.10b]$$

La prima equazione esprime il fatto che all'istante iniziale la particella si trovava nella posizione **Y**, mentre la seconda esprime il fatto che la velocità della particella eguaglierà all'istante finale *t* la velocità (Euleriana) locale **U** del fluido. Da questa equazione si deduce che, una volta nota la funzione **U** che rappresenta la velocità di una particella, nel senso che si conosce la sua distribuzione nello spazio e nel tempo, è possibile risalire alla posizione iniziale di tale particella del fluido, nota la sua posizione ad un istante *t* e questo per ogni particella che compone il fluido.

2.1.4 LE PECULIARITÀ DI UN SISTEMA DI RIFERIMENTO NON INERZIALE

Finora si è sempre considerato un sistema di riferimento inerziale. Anche se teoricamente non ci sono controindicazioni in proposito, dal punto di vista pratico è opportuno riferire ogni ragionamento ad un sistema di riferimento in qualche maniera solidale con la terra in rotazione attorno al proprio asse con velocità di rotazione pari al vettore $\boldsymbol{\Omega}$ il cui modulo vale:

$$|\boldsymbol{\Omega}| = \Omega \cong \frac{2\pi}{86164\ s} = 7.292 \cdot 10^{-5}\ rad \cdot s^{-1} \qquad [2.11]$$

Si noti che 86164 secondi è il tempo effettivo impiegato dalla Terra per compiere una rotazione completa attorno al proprio asse rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. È quindi il *giorno siderale*, pari a 23 h, 56' e 4", di poco inferiore al *giorno convenzionale*. Un tale sistema di riferimento è chiaramente non inerziale. Per il momento, tra tutti i possibili sistemi di riferimento non inerziali, si consideri quello (**Fig.2.2**) la cui origine è posta al centro della terra e l'asse *z* coincide con l'asse di rotazione terrestre, positivo in direzione del Polo Nord.

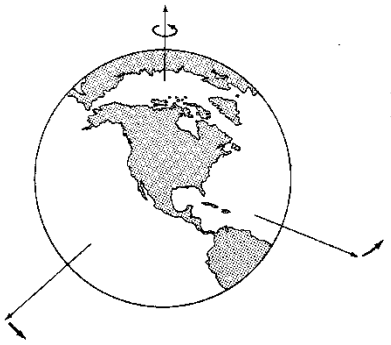


Fig.2.2: sistema cartesiano di assi fisso rispetto alla terra e rotante con essa (Dutton,1995)

Se si considerano contemporaneamente sia un sistema di riferimento inerziale che uno non inerziale, rotante rispetto al primo, tra la *velocità assoluta* $\mathbf{v_a}$ di un punto materiale in movimento (cioè riferita al sistema inerziale) e la *velocità relativa* **v** (nel sistema rotante) verrà la relazione vettoriale seguente:

$$\boldsymbol{v_a} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v_r} \qquad [2.12]$$

dove $\mathbf{v_r}$ è la velocità di rotazione del sistema non inerziale (in questo caso quello di **Fig.2.2**).

Il quesito che ci si pone è come si trasforma una derivata materiale di una grandezza scalare o di una grandezza vettoriale relativa ad una particella quando si passa da un sistema inerziale ad un sistema non inerziale, rotante con velocità angolare costante. Seguendo Dutton

(1995, pag. 221-226), si può affermare (e dimostrare) che:

- per uno *scalare* Φ, la derivata materiale $D\Phi/Dt$ è resta immutata nei due sistemi di riferimento;
- per una *grandezza vettoriale* **A**, tra la derivata materiale nel sistema inerziale $(D\mathbf{A}/Dt)_a$ e quella nel sistema rotante (a velocità costante $\boldsymbol{\Omega}$) $D\mathbf{A}/Dt$ intercorre la relazione:

$$\left(\frac{D\boldsymbol{A}}{Dt}\right)_a = \frac{D\boldsymbol{A}}{Dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} \qquad [2.13]$$

dove il simbolo × indicata il prodotto vettoriale (**Appendice 2**).

2.2 IL MODELLO PER LE VARIABILI ISTANTANEE

Nel seguito del Capitolo si individua, a partire dalle leggi di conservazione, un modello teorico completo, costituito in prevalenza da equazioni differenziali alle derivate parziali, che descrive in termini Euleriani l'evoluzione spazio-temporale del valore istantaneo delle grandezze che caratterizzano lo stato e la dinamica dell'atmosfera. La precisazione sul fatto che il valore sia istantaneo parrebbe del tutto superflua, visto che sempre nella Fisica si opera in questo modo, ma è comunque rilevante alla luce di ciò che emergerà nel seguito della trattazione. Inoltre va sottolineato che per poter scrivere queste relazioni di conservazione è necessario innanzitutto stabilire un ben preciso sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Inevitabilmente la scelta del sistema di riferimento è completamente arbitraria. Una possibilità concreta è utilizzare il sistema di riferimento meteorologico. Per limitare un'eccessiva complessità nell'esposizione, le varie relazioni verranno dedotte introducendo spesso delle semplificazioni. Riferimenti più dettagliati si trovano in Landau e Lifshitz (1987) e Dutton (1995).

2.2.1 LA CONSERVAZIONE DELLA MASSA

Dato che in atmosfera la massa non si crea e non si distrugge, è necessario che essa si conservi. Da questo ovvio principio fisico si deduce la prima delle relazioni differenziali del modello fluidodinamico del *PBL* che verrà dedotta seguendo la logica Euleriana, anche se non è difficile ottenerne una deduzione Lagrangiana (Holton, 2004). Prima, però, di farci completamente assorbire dagli aspetti matematici del problema, è opportuno addentrarci un po', almeno in termini qualitativi, negli aspetti fisici del problema. Ancora una volta (Lisieur, 1994) immaginiamo che il fluido (l'aria, nel nostro caso), sia costituito da particelle di piccole dimensioni ognuna delle quali delimitata da una superficie esterna e costituita da un numero elevatissimo di molecole. Queste molecole non sono in quiete, ma in continua agitazione termica e alcune attraverseranno questa superficie, abbandonando la particella *madre* e finendo nelle particelle vicine. D'altro canto, attraverso la superficie esterna della particella che stiamo considerando entreranno anche molecole provenienti dalle particelle vicine. Insomma, all'interno del fluido si instaurerà una *diffusione molecolare*. Però se ci riferiamo alla scala temporale del continuo, grande rispetto alla scala temporale tipica dell'agitazione termica, il bilancio medio di massa è nullo. In pratica, in media il numero delle molecole che abbandonano una data particella è pari al numero di molecole che vi entrano dall'esterno.

La tecnica che useremo per dedurre dal principio di conservazione della massa le relative implicazioni sul moto dell'atmosfera consiste nell'individuare un volume di controllo Euleriano localizzato in una generica posizione nel dominio di calcolo (**Fig.2.3**), costituito da un parallelepipedo con le facce orientate secondo gli assi di riferimento. Questa scelta è totalmente arbitraria, ma non influenza in alcun modo le deduzioni che ne derivano: in effetti si potrebbe prendere a riferimento un volume di controllo di forma qualsiasi, ed un esempio di come si possano condurre

i calcoli in questo caso è dato da Sorbjan (1989). La massa contenuta nel volume di controllo altro non è che il prodotto del volume stesso per la densità dell'aria ρ caratteristica del punto in cui è collocato, che dipende sia dallo spazio che dal tempo. Il volume di controllo, in generale, si può trovare in un punto dello spazio in cui il flusso d'aria entrante attraverso la sua superficie esterna è maggiore di quello uscente, o viceversa. Ad un dato istante, quindi, la variazione netta di densità in un punto (che corrisponde al centro del volume di controllo) dipenderà dalla variazione totale del flusso d'aria entrante e uscente.

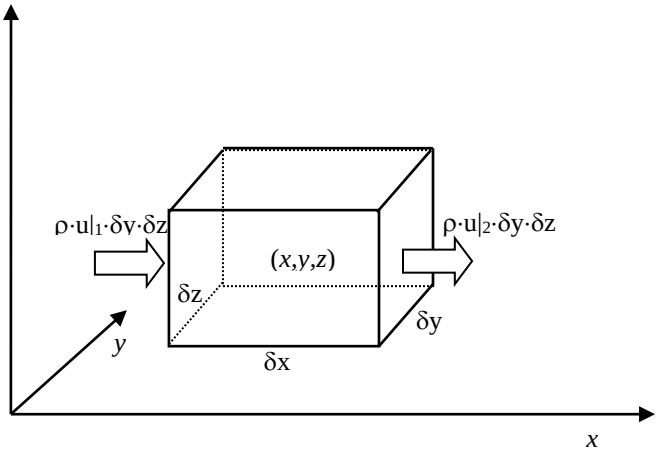


Fig.2.3: bilancio di massa per un volume di controllo Euleriano

2.2.1.1 La formulazione di base

Si consideri il volume di controllo di **Fig.2.3**, centrato nel punto *P*(*x*,*y*,*z*) con volume $V = \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$ Dato che ipotizziamo che i lati del parallelepipedo siano piccoli, anche il volume *V* sarà piccolo di conseguenza. La conservazione della massa in un contesto Euleriano afferma che *il flusso di massa entrante nel volume di controllo deve essere esattamente bilanciato dal flusso di massa uscente e dal tasso di accumulazione della massa entro il volume stesso*.

Si consideri la direzione *x*. Sia ρ la densità dell'aria e *u* la componente *x* del moto alla faccia di sinistra. Il flusso di massa che attraversa tale superficie sarà pari a $\rho \cdot u|_1 \cdot \delta y \cdot \delta z$. Per esprimere l'analogo flusso alla faccia di destra (sempre in direzione *x*), se δ*x* è sufficientemente piccolo, è possibile far uso dello sviluppo di Taylor arrestato al primo termine, ottenendo:

$$\rho u|_2 = \rho u|_1 + \left.\frac{\partial \rho u}{\partial x}\right|_1 \delta x + O(\delta x^2) \qquad [2.14a]$$

Dato che il flusso entra nel volume di controllo dalla faccia di sinistra ed esce dalla faccia di destra, il flusso netto di massa nella direzione *x* risulta pari a:

$$-\frac{\partial \rho u}{\partial x} \cdot \delta x \delta y \delta z + O(\delta x^2) \qquad [2.14b]$$

In modo analogo si può ragionare per le direzioni *y* e *z*. Indipendentemente dai flussi di massa entranti ed uscenti dal volume di controllo, ci può essere un incremento di massa nel volume solo a fronte di una variazione della densità dell'aria. Quindi la variazione complessiva di massa presente nel volume di controllo sarà pari a $V \cdot \partial\rho/\partial t$. Alla luce di tutto ciò, ad ogni istante la *conservazione della massa* sarà data dalla relazione:

$$-\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) \cdot \delta x \delta y \delta z + O(\delta x^2) = V \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad [2.14c]$$

Al tendere a zero di δ*x*, δ*y* e δ*z*, gli errori di approssimazione introdotti dallo sviluppo di Taylor tendono anch'essi ad annullarsi e quindi la (2.14c) prende la forma seguente, nota come

l'*equazione di continuità*:

$$-\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}\right)=\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad [2.15a]$$

che è la rappresentazione matematica del principio di conservazione della massa. Tale relazione, *differenziale* e *prognostica*, lega tra loro le componenti del vento e la densità dell'aria. La relazione così ottenuta è scritta in *forma di flusso*, visto che le componenti della velocità sono moltiplicate per la densità dell'aria e quindi rappresentano il flusso di materia. Per il principio della conservazione della massa, la variazione temporale della densità dell'aria è totalmente bilanciata dalla *divergenza* del flusso di materia $\rho\boldsymbol{u}$. La (2.15a) è stata scritta in termini cartesiani. La sua riscrittura in termini tensoriali porta alle due relazioni seguenti del tutto equivalenti:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha}=0 \qquad \frac{D\rho}{Dt}+\rho\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}=0 \qquad [2.15b]$$

come è facile dimostrare.

2.2.1.2 Alcune semplificazioni

Le relazioni (2.15*a* e *b*) rappresentano *esattamente* il principio della conservazione della massa, ma possono subire consistenti semplificazioni sulla base di un'analisi di scala (cioè sulla base del peso relativo) dei vari termini che le compongono, congruentemente con le dimensioni del dominio di indagine a mesoscala prescelto (Holton 2004 e Pielke 2002). Per prima cosa si riscriva la (2.15b) utilizzando le proprietà delle derivate:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{u_\alpha}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}=0 \qquad [2.16a]$$

In genere, la distribuzione spazio-temporale a Mesoscala di pressione e densità dell'aria non si discosta molto dalle caratteristiche dell'atmosfera standard a riposo introdotte al Cap. 1 e riassunte nell'equazione idrostatica (1.21b). Partendo da queste constatazioni, è possibile definire (Holton, 2004) una pressione standard $p_0(z)$ variabile solo in verticale (e non in orizzontale e nel tempo), definibile come la media temporale della media orizzontale della pressione ad una certa quota z. In pratica $p_0(z)$ è il *valore di background sinottico* della pressione, in corrispondenza del quale si definisce una densità standard $\rho_0(z)$ (*valore di background della densità dell'aria*) tale che $p_0(z)$ e $\rho_0(z)$ rispettino *esattamente* l'equazione idrostatica. Con questa ipotesi, il campo spazio-temporale della pressione e della densità dell'aria potranno essere visti come i campi risultanti dalla sovrapposizione dei rispettivi valori di *background* p_0 e ρ_0 (variabili solo con z) e delle *perturbazioni a mesoscala* p" e ρ" (variabili nello spazio e nel tempo):

$$\begin{aligned} p(x,y,z,t) &= p_0(z)+p"(x,y,z,t) \\ \rho(x,y,z,t) &= \rho_0(z)+\rho"(x,y,z,t) \end{aligned} \qquad [2.16b]$$

Questa è l'*Ipotesi Idrostatica*. Naturalmente, quando l'atmosfera è a riposo, p" e ρ" saranno nulli. Usando l'approssimazione idrostatica, l'equazione di continuità (2.16a) risulta pari a:

$$\underbrace{\frac{1}{\rho_0+\rho"}}\cdot\underbrace{\left[\frac{\partial \rho"}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial \rho"}{\partial x_\alpha}\right]}_{A}+\underbrace{\frac{w}{\rho_0+\rho"}}_{B}\cdot\frac{\partial \rho_0}{\partial z}+\underbrace{\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}}_{C}=0 \qquad [2.16c]$$

Sulla base delle evidenze sinottiche (Holton, 2004), risulta che il rapporto $\rho"/\rho_0$ è molto inferiore all'unità e dell'ordine di 10^{-2}. Inoltre, sempre su basi sinottiche si può definire una *lunghezza di scala orizzontale* $L \sim 10^6$ m, *una velocità di scala orizzontale* $U \sim 10$ m·s^{-1}, una *velocità si scala verticale* $W \sim 10^{-2}$ m·s^{-1} e un tempo di scala $L/U \sim 10^5$ s.

Si consideri il termine **A** della (2.16c); dalle considerazioni precedenti e da un'analisi di scala si ha che:

$$\frac{1}{\rho_0+\rho"}\cdot\left[\frac{\partial\rho"}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial\rho"}{\partial x_\alpha}\right]\sim\frac{\rho"1}{\rho_0}\cdot\frac{U}{L}\cong 10^{-7}s^{-1}$$

Per analizzare il termine **B** della (2.16c), per prima cosa si nota che:

$$\frac{w}{\rho_0+\rho"}\cdot\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\sim\frac{10^{-2}}{H}$$

dove *H* è una lunghezza di scala verticale caratteristica da stimare. Se si considera il parametro. H_a, denominato *density scale depth* e definito approssimativamente come:

$$H_\alpha\cong\left[\frac{\partial(\ln\rho_0)}{\partial x}\right]^{-1}$$

si ha che, nelle situazioni reali a mesoscala, H_a ha un valore dell'ordine di 8 km (Pielke 2002). Questo risultato lo si ottiene immediatamente considerando la relazione (1.25b) ipotizzando un'atmosfera isoterma a 273 K. *Se la lunghezza di scala H è dello stesso ordine di grandezza della density scale depth* H_a il termine **B** vale circa 10^{-6}.

Si espanda il termine **C** della (2.16b) nelle tre componenti cartesiane. A livello sinottico, $\partial u/\partial x$ e $\partial v/\partial y$ tendono ad assumere valori dello stesso ordine di grandezza ma di segno opposto e quindi tendono a bilanciarsi. Inoltre:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\cong\left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|\cong 10^{-1}\frac{U}{L}\qquad\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\cong 10^{-1}\frac{U}{L}\cong 10^{-6}s^{-1}\qquad\left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|\sim\frac{W}{H_\alpha}\cong 10^{-6}s^{-1}$$

Alla fine, questa analisi porta ad affermare che se *H* è dello stesso ordine di grandezza di H_a, i termini **B** e **C** sono di un ordine di grandezza superiori al termine **A** che, quindi, può essere trascurato. Questa assunzione (*Assunzione Anelastica*) fa sì che l'equazione di continuità si riduca alla forma seguente:

$$\frac{\partial\rho_0 u}{\partial x}+\frac{\partial\rho_0 v}{\partial y}+\frac{\partial\rho_0 w}{\partial z}=\frac{\partial\rho_0 u_\alpha}{\partial x_\alpha}=0 \qquad [2.17]$$

cui si giunge considerando che i gradienti orizzontali di ρ_0 sono nulli per definizione, mentre, visto che il rapporto $\rho'/\rho_0\ll 1$, $(\rho'+\rho_0)^{-1}\approx\rho_0^{-1}$. La precedente viene normalmente indicata come ***Forma Anelastica dell'Equazione di Continuità* o *Deep Continuity Equation***.

Se, invece, $H \ll H_a$, (*Ipotesi di Incomprimibilità*), l'ordine di grandezza del termine **B** risulta inferiore a quello del termine **C** e perciò la (2.16c) può essere ulteriormente semplificata trascurando i termini **A** e **B** (e quindi eliminando la presenza della densità di *background*). In questo modo si ottiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}=0 \qquad [2.18]$$

relazione che afferma il fatto che la divergenza del campo di moto (vento) deve essere nulla. Questa equazione è indicata come *la* ***Forma Incomprimibile dell'Equazione di Continuità (Shallow Continuity Equation***) e rappresenta molto bene la realtà del *PBL* quando la velocità dell'aria, come è normale, è di molto inferiore alla velocità del suono (circa 300 ms^{-1}).

La (2.15b) è un'*equazione prognostica* e descrive come varia nello spazio e nel tempo il tasso di variazione della densità dell'aria. Viceversa, le semplificazioni qui introdotte, cioè la (2.17) e la (2.18), sono delle *equazioni diagnostiche* che, in parole povere, più che fornire una legge che la densità dell'aria deve seguire, determinano una sorta di vincolo che deve essere rispettato. Nel primo caso l'equazione anelastica stabilisce un vincolo, nello spazio e nel tempo, per il flusso di materia, mentre la forma incomprimibile dell'equazione di continuità stabilisce un legame forte tra le diverse componenti del vettore di velocità in un punto. In quest'ultimo caso, il *campo di moto è solenoidale*.

2.2.2 LA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

In base alla *seconda legge di Newton* un punto materiale (quindi una particella Lagrangiana), cui venga applicata una forza, reagisce acquisendo un'accelerazione inversamente proporzionale alla propria massa. In un sistema di riferimento inerziale, se **F** è il vettore della forza applicata, *m* la massa associata al punto materiale e **a** l'accelerazione acquisita, si ha che:

$$\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a} \qquad [2.19a]$$

L'impiego di questo principio di conservazione consente di individuare le relazioni prognostiche per le tre componenti del moto, cioè di individuare il campo vettorale Euleriano **u**(**x**,*t*) dove **x** è un punto qualsiasi del dominio di indagine e *t* è il tempo. In questo caso, il modo più semplice di procedere è quello di adottare un approccio Lagrangiano, cioè considerare il moto di una *particella*. I ragionamenti sviluppati al punto 2.1.2 vengono ora completati e definiti.

2.2.2.1 Le Equazioni di Navier-Stokes

Se si considera una generica particella di dimensioni infinitesime e di massa *m*, è possibile assimilare il suo comportamento meccanico a quello di un punto materiale di pari massa e quindi applicare la relazione (2.19a). Per comodità e senza togliere nulla alla generalità del ragionamento, si consideri, al posto della forza applicata alla particella, l'equivalente forza specifica **F'**=**F**/*m* e se $\mathbf{V}_n$ è il vettore velocità della particella Lagrangiana, la relazione precedente può essere riscritta come:

$$\left(\frac{D\boldsymbol{V_n}}{Dt}\right)_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{F'} \qquad [2.19b]$$

dove $(D/Dt)_n$ è la derivata materiale riferita ad un sistema inerziale. Di fatto, questa è la relazione prognostica del moto che governa l'atmosfera, una volta esplicitate le forzanti meccaniche specifiche (per unità di massa). Naturalmente c'è una complicazione importante: essa vale solo in un sistema di riferimento inerziale. Sarebbe irrealistico mantenere un tale sistema di riferimento, mentre è sicuramente più comodo adottarne uno non inerziale solidale con la terra che ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}$ costante (**Fig.2.2**). Ricordando quanto detto al punto 2.1.4 e seguendo Dutton (1995, pag. 220-225), la (2.19b), che descrive la variazione temporale della velocità $\mathbf{V}_n$ della particella Lagrangiana in un sistema di riferimento inerziale, si trasforma nella relazione equivalente valida però in un sistema di riferimento rotante. La sua forma vettoriale è la seguente:

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} + 2 \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{V}) + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) = \boldsymbol{F'} \qquad [2.20]$$

dove **R** è il vettore posizione della particella rispetto dal centro della terra. Da questa si può notare che:

- il primo termine rappresenta la derivata materiale della velocità della particella come vista dal sistema rotante;
- il secondo termine è un'accelerazione apparente dovuta alla rotazione terrestre (*accelerazione di Coriolis*), attiva solo quando la particella è in moto relativo rispetto alla terra;
- il terzo termine è l'accelerazione centripeta, sempre presente anche quando la particella è a riposo.

Per ora la (2.20) è scritta in notazione vettoriale e perché risulti una relazione totalmente definita (ovviamente in termini di derivata materiale) è necessario esplicitare le forzanti in essa presenti.

La forzante derivante dalla pressione

La prima forzante esterna da considerare è quella che deriva dalla variabilità nello spazio e nel tempo della pressione atmosferica. Considerando una generica particella a forma di parallelepi-

pedo (**Fig.2.4**), è necessario scrivere una relazione che esprima la forza specifica (per unità di massa) che ad essa si applica per effetto della pressione esterna.

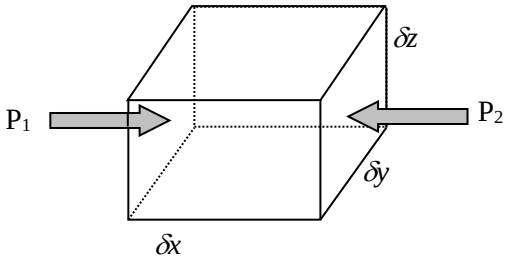


Fig. 2.4: particella soggetta ad un gradiente di pressione lungo x

Considerando la figura, la differenza di pressione tra le due facce del volume perpendicolari all'asse *x* (p_1 sulla faccia Ovest e p_2 sulla faccia Est) può essere espressa, impiegando un'espansione di Taylor arrestata al primo ordine, come:

$$p_2 - p_1 = \frac{\partial p}{\partial x}\delta x + O(\delta x^2) \qquad [2.21a]$$

perciò la forza per unità di massa, diretta in senso opposto al gradiente di pressione, è:

$$f_{PGx} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + O(\delta x^2) \qquad [2.21b]$$

che, quando $\delta x \to 0$, diventa:

$$f_{PGx} = \lim_{\delta x \to 0}\left[-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + O(\delta x^2)\right] = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad [2.21c]$$

Analoghe considerazioni valgono per le direzioni *y* e *z* e quindi, il vettore forza per unità di massa dovuto alle differenze spaziali di pressioni (cioè al gradiente di pressione) risulta dato da:

$$\boldsymbol{f}_{PG} = -\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k}\right] = -\frac{1}{\rho}\cdot\boldsymbol{\nabla} p \qquad [2.21d]$$

La forzante derivante dalla gravità

La seconda forzante esterna è la forza di gravità **g** esercitata dalla terra sulla particella. È consueto, data la geometria del sistema, combinare tale forza con la forza apparente centripeta, ottenendo la forzante di *gravità modificata* espressa come:

$$\boldsymbol{f}_{GR} = -g\boldsymbol{k} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R}) \qquad [2.22a]$$

dove *g* è l'usuale accelerazione di gravità. Questa forzante è diretta sempre secondo la verticale e, per il momento, è scritta in notazione vettoriale.

Per completezza, è opportuno ricordare che *g* è funzione sia della latitudine Φ che della quota *z* secondo la relazione:

$$g = g_\Phi \cdot \left(\frac{R_e}{R_e + z}\right)^2 \qquad [2.22b]$$

$$g_\Phi = 9.806160 \cdot [1 - 2.64 \cdot 10^{-3}\cos 2\Phi + 5.9 \cdot 10^{-6}\cos^2 2\Phi]$$

dove *z* (m) è la quota sul livello del mare e R_e ($6.37\cdot10^6$ m) è il suo raggio medio.

La forzante viscosa

L'ultima forzante è una *forzante interna* che tiene conto della dissipazione di quantità di moto di un fluido viscoso in movimento dovuta all'azione molecolare, come già si è visto al punto 1.2.2. Senza entrare in dettaglio ed operando opportune semplificazioni dettate dalla natura geometrica e fisica della parte bassa della Troposfera (agli interessati si raccomanda il paragrafo 6.8 di

Dutton, 1995), indicando con ν il coefficiente di viscosità cinematica dell'aria, questa forzante risulta pari a:

$$\boldsymbol{f}_{VS} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k} \qquad [2.23a]$$

dove:

$$F_i = \nu \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha^2} \qquad [2.23b]$$

Quando si trattano fenomeni a Mesoscala e si studia il comportamento medio del *PBL*, si può facilmente verificare che tale forzante risulta del tutto ininfluente e quindi può essere ignorata. A rigore ciò è vero solo lontano dai bordi rigidi del dominio di indagine (nel caso del *PBL*, lontano dal suolo), dove, al contrario, gioca un ruolo essenziale. Anche se è vero che nelle relazioni operative che descrivono il *PBL* le forzanti viscose restano ai margini dell'attenzione (o addirittura vengono ignorate), tuttavia implicitamente continuano a giocare un ruolo primario essendo l'unica causa di irreversibilità e di dissipatività del sistema e governando, assieme ai moti turbolenti, i meccanismi di scambio energetico che hanno luogo alle scale spaziali più piccole.

Le leggi finali della conservazione della quantità di moto

Complessivamente, la forzante **F**' presente nella (2.19b) risulta essere la somma vettoriale delle componenti seguenti:

$$\boldsymbol{F'} = \boldsymbol{f}_{PG} + \boldsymbol{f}_{GR} + \boldsymbol{f}_{VS} \qquad [2.24]$$

Ricordando la relazione di Eulero per la derivata materiale, la (2.20), che esprime la seconda legge della meccanica ed in particolare la variazione nello spazio e nel tempo del moto dell'aria del *PBL*, si trasforma nelle ***Equazioni di Navier-Stokes*** qui scritte in notazione vettoriale (Dutton, 1995, pagg. 221-226):

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = -\boldsymbol{V}\cdot\nabla\boldsymbol{V} - \frac{\mathbf{1}}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p - g\boldsymbol{k} - 2\boldsymbol{\Omega}\cdot\times\boldsymbol{V} + \nu\cdot\nabla^2 V \qquad [2.25a]$$

La forma vettoriale delle equazioni di Navier-Stokes non è la forma preferita per le applicazioni pratiche. La sua trasformazione nell'analoga forma tensoriale non è immediata e richiede alcune riflessioni per cui è utile quanto presentato nell'**Appendice 2**. In particolare:

- non è certamente complesso verificare che: $V\cdot\nabla V = u_\alpha\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}$ e $\boldsymbol{\nabla}p = \frac{\partial p}{x_\alpha}$
- usando l'operatore *Delta di Kronecker*, è evidente che $g\boldsymbol{k} = \delta_{i,3}$. Quindi le componenti orizzontali del moto (i = 1 e 2) sono nulle e la componente verticale è pari a *-g*,
- complesso è sviluppare il termine che nasce dalla rotazione terrestre. Si ricordi che il vettore velocità di rotazione **Ω** a priori ha componenti Ω_i (i = 1,..,3) ed il vettore velocità **V** ha componenti u_i, quindi:

$$\boldsymbol{\Omega}\cdot\times\boldsymbol{V} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

- è immediato vedere come $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha^2}$
- si usi l'operatore ε_{ijk}, detto *alternating unit tensor*, che vale 1 se la sequenza di indici *ijk* è 123, 231, 312, vale -1 se la sequenza vale 321, 213, 132 e 0 in tutti gli altri casi.

Tutte queste considerazioni fanno sì che la versione tensoriale delle equazioni di Navier-Stokes nella forma vettoriale (2.25a) possa essere riscritta nei termini seguenti:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_\alpha\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - g\delta_{i3} - 2\varepsilon_{ijk}\Omega_j u_k + \nu\cdot\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha^2} \qquad [2.25b]$$

Un nuovo sistema di riferimento

Finora si è adottato un generico sistema di riferimento non inerziale rotante con la Terra, ma per comodità operativa, dovendo considerare un dominio a mesoscala, conviene adottare un sistema di coordinate tangenziali come quelle raffigurate nella **Fig.2.5** dove:

1. l'origine degli assi è il punto P_0 posto sulla superficie terrestre alla generica latitudine Φ,
2. l'asse *z* sta sulla congiungente di P_0 col centro della terra ed è diretto *verso* l'atmosfera,
3. gli assi *x* e *y* giacciono sul piano tangente la superficie terrestre in P_0 e sono diretti rispettivamente verso Est e verso Nord.

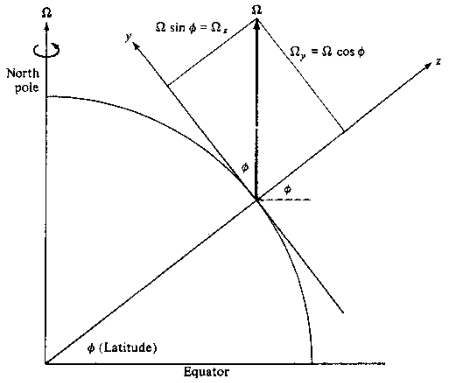


Fig.2.5: sistema di coordinate tangenziali

Questo è il sistema di riferimento naturale per un osservatore al suolo ed il suo utilizzo è giustificato solo se il dominio di indagine è relativamente limitato in latitudine e longitudine, così da poter trascurare gli effetti della curvatura terrestre. Rispetto ad un tale sistema, il vettore $\boldsymbol{\Omega}$ presenta le componenti $\Omega_x = 0;\ \Omega_y = |\Omega| \cos \Phi;\ \Omega_z = |\boldsymbol{\Omega}| \sin \Phi$ e quindi:

$$-2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{V} = -2\Omega \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = -2\Omega \cdot [(u_3 \cos \Phi - u_2 \sin \Phi) \cdot \boldsymbol{i} + u_1 \sin \Phi \cdot \boldsymbol{j} - u_1 \cos \Phi \cdot \boldsymbol{k}] \quad [2.26a]$$

È consuetudine, per semplificare la scrittura delle equazioni di moto, definire come ***Parametro di Coriolis*** *f* la grandezza:

$$f = 2\Omega \cdot \sin \Phi \quad [2.26b]$$

che, alle medie latitudini, vale circa 10^{-4}. Dato, poi, che a Mesoscala la componente verticale del moto $u_3 = w$ risulta piccola (circa due ordini di grandezza inferiore a quelle orizzontali), il termine $2\Omega \cdot u_3 \cdot \cos\Phi$ risulta del tutto trascurabile rispetto al termine $2\Omega \cdot u_1 \cdot \sin\Phi$. Adottato questo sistema di riferimento non inerziale, le equazioni del moto (cioè le ***Equazioni di Navier Stokes***) possono essere riscritte in notazione cartesiana nel modo seguente, ricordando che $u = u_1$, $v = u_2$ e $w = u_3$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + fv + \nu \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - fu + \nu \cdot \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right] \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \cdot \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] \end{aligned} \quad [2.27a]$$

Questo sistema di equazioni, scritto nella forma estesa cartesiana, può essere riscritto in maniera compatta nella forma tensoriale seguente:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - g\delta_{i3} + f\varepsilon_{i\alpha 3}u_\alpha + \nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha^2} \qquad [2.27b]$$

più complessa da leggere, ma più semplice da maneggiare nelle considerazioni teoriche.

Esercizio 2.1

Consideriamo alcuni esempi tipici di applicazione delle Equazioni di Navier-Stokes nei fluidi. Anche se ben lontani dalla realtà dell'atmosfera, essi possono essere utili per la comprensione di queste equazioni. In particolare, consideriamo moti di fluidi in condizioni stazionarie e con una geometria piano-parallela, cioè tale che il moto del fluido è monodimensionale (lungo l'asse *x*) e ha luogo tra due piani paralleli di estensione infinita e paralleli all'asse *x*. In questo caso, per la geometria del moto, le componenti del moto *u* e *v* sono costanti rispettivamente lungo gli assi *x* e *y*, mentre la componente verticale *w* è costantemente nulla. Le Equazioni del moto, in un sistema non inerziale, si riducono alla forma seguente:

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u$$
$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 v$$
$$\frac{Du}{Dt} + g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 w$$

Se *x* è la direzione del moto, se la situazione è stazionaria e se si trascurano le forze di Coriolis, esse si riducono a:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{d^2 u}{dz^2}; \qquad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}; \qquad g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

In pratica, l'unica equazione del moto è la prima che può essere riscritta come:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (*)$$

Consideriamo ora due casi particolari di moto piano-parallelo.

Moto di Couette

Già abbiamo incontrato al Capitolo 1 questo tipo di moto in cui il fluido scorre tra due piastre, quella inferiore ($z = 0$) resta ferma ($u = 0$) mentre quella superiore ($z = h$) è in movimento alla velocità U_h. Per la *no-slip condition* il fluido deve aderire ad entrambe le piastre. È facile mostrare che integrando la relazione (*) si ottiene l'espressione seguente per il profilo verticale della velocità:

$$u = U_h\frac{z}{h} - \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}z(h-z)$$

che è una combinazione di un profilo lineare e di un profilo parabolico. È immediato vedere come il profilo diventi lineare quando è nullo il gradiente orizzontale di pressione. In questo caso lo stress di taglio risulterà costante ovunque e pari a:

$$\tau = \mu\frac{du}{dz} = \mu\frac{U_h}{h}$$

Moto di Poiseuille

Nel caso del moto di Poiseuille, le due piastre sono immobili, quindi a $z = 0$ e a $z = h$ la velocità del fluido è sempre nulla. Per la *no-slip condition* il fluido deve aderire ad entrambe le piastre. È molto semplice integrare la relazione (*) anche in questo caso, giungendo alla relazione seguente:

$$u = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}z(h-2z)$$

e quindi lo shear stress risulta pari a:

$$\tau = -\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}(h - 2z)$$

Quindi, per mantenere stazionario il moto è necessario mantenere un gradiente orizzontale di pressione costante e negativo.

2.2.2.2 Le equazioni di Navier-Stokes adimensionali

Le equazioni di Navier-Stokes (2.27), che descrivono il moto dell'aria nell'atmosfera, comprendono alcuni termini caratteristici:

- l'accelerazione del moto rappresentato dal primo membro di sinistra delle equazioni,
- l'avvezione rappresentata dagli ultimi tre membri di sinistra delle equazioni,
- la forzante derivante dai gradienti di pressione,
- l'effetto della rotazione terrestre,
- l'effetto della gravità e
- l'azione della viscosità dell'aria.

Naturalmente, esse sono del tutto generali per costruzione, ma la loro generalità la si apprezza solo in maniera limitata se scritte in questi termini. Analizziamole ora con maggior dettaglio e, per fare ciò, rendiamole adimensionali, cioè facciamo in modo che le differenti variabili presenti in esse siano tutte numeri adimensionali. Per fare ciò, è necessario definire una *Lunghezza di scala L* la cui individuazione è sostanzialmente arbitraria. Un modo per definirla quantitativamente lo si può ottenere nel modo seguente: se si considera un generico dominio di interesse, per esempio di forma parallelepipeda, i fenomeni che si potranno evidenziare non potranno che avere una estensione spaziale non superiore alle dimensioni del dominio stesso. Si può quindi individuare *L* come la massima estensione (per esempio orizzontale) di tale dominio che, in un'analisi a Mesoscala, è dell'ordine di 10^6 m. In questo modo:

- è possibile definire delle <u>*coordinate cartesiane adimensionali*</u> come: $X_i = x_i/L$;
- è necessario poi individuare delle velocità adimensionali. Innanzitutto, dalle misure sperimentali disponibili, è possibile individuare un *Velocità Caratteristica del Moto M* che, per esempio, potrebbe essere dell'ordine di 10 m·s^{-1}. È quindi possibile definire delle <u>*componenti adimensionali del moto*</u> come: $U_i = u_i/M$;
- a questo punto, la variabile $T = Mt/L$ altro non è che un tempo adimensionale;
- da ultimo, la <u>*versione adimensionale della pressione*</u> la si ottiene come $P = p/(\rho M^2)$

Inserendo nelle equazioni di Navier-Stokes (2.27a) le nuove variabili adimensionali, si ottiene il sistema di equazioni differenziali seguente:

$$\begin{aligned}
\frac{M^2}{L}\left[\frac{\partial U}{\partial T} + U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} + W\frac{\partial U}{\partial Z}\right] &= -\frac{M^2}{L}\frac{\partial P}{\partial X} + fMV + \frac{\nu M}{L^2}\cdot\left[\frac{\partial^2 U}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}\right] \\
\frac{M^2}{L}\left[\frac{\partial V}{\partial T} + U\frac{\partial V}{\partial X} + V\frac{\partial V}{\partial Y} + W\frac{\partial V}{\partial Z}\right] &= -\frac{M^2}{L}\frac{\partial P}{\partial Y} - fMU + \frac{\nu M}{L^2}\cdot\left[\frac{\partial^2 V}{\partial X} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}\right] \\
\frac{M^2}{L}\left[\frac{\partial W}{\partial T} + U\frac{\partial W}{\partial X} + V\frac{\partial W}{\partial Y} + W\frac{\partial W}{\partial Z}\right] &= -\frac{M^2}{L}\frac{\partial P}{\partial Z} - g + \frac{\nu M}{L^2}\cdot\left[\frac{\partial^2 W}{\partial X} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2}\right]
\end{aligned} \qquad [2.28a]$$

che, moltiplicate per L/M^2, diventano:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial T} + U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} + W\frac{\partial U}{\partial Z} &= -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{V}{Ro} + \frac{1}{Re}\cdot\left[\frac{\partial^2 U}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}\right] \\
\frac{\partial V}{\partial T} + U\frac{\partial V}{\partial X} + V\frac{\partial V}{\partial Y} + W\frac{\partial V}{\partial Z} &= -\frac{\partial P}{\partial Y} - \frac{U}{Ro} + \frac{1}{Re}\cdot\left[\frac{\partial^2 V}{\partial X} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}\right] \\
\frac{\partial W}{\partial T} + U\frac{\partial W}{\partial X} + V\frac{\partial W}{\partial Y} + W\frac{\partial W}{\partial Z} &= -\frac{\partial P}{\partial Z} - \frac{Lg}{M^2} + \frac{1}{Re}\cdot\left[\frac{\partial^2 W}{\partial X} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2}\right]
\end{aligned} \qquad [2.28b]$$

del tutto equivalente alle equazioni originarie (2.27a), anche se hanno un significato concettuale molto importante. Infatti, esse descrivono il moto di un fluido generico senza evidenziare direttamente la dipendenza del moto dalla dimensione del dominio d'interesse, visto che tutte le coordinate e le componenti del moto sono adimensionali. Inoltre, in esse manca una qualsiasi forma di dipendenza diretta dalla viscosità del fluido considerato (e quindi dalla sua natura fisica), dalla rotazione terrestre e, di fatto, anche dalla gravità. Compare, invece, una dipendenza diretta da tre parametri adimensionali: il *Numero di Rossby* *Ro*, il *Numero di Reynolds* *Re* e la *Gravità Adimensionale* g_* definiti rispettivamente come:

$$Ro = \frac{M}{fL} \qquad Re = \frac{ML}{\nu} \qquad g_* = \frac{Lg}{M} \qquad [2.28c]$$

Che significato ha tutto ciò? Significa che se per due fluidi (gas o liquidi) questi tre parametri sono identici, allora questi due fluidi presentano un moto identico: ci sarà quindi una *similarità dinamica tra i vari fluidi*. La descrizione del moto fatta con le equazioni di Navier-Stokes adimensionali è quindi molto più generale di quanto viene fatto dalle (2.27).

Nel rendere adimensionali le (2.27) è scomparsa la dipendenza esplicita dalla viscosità cinematica, la dipendenza dal dominio di calcolo e dalle dimensioni e tempi caratteristici del moto ed è scomparsa anche la dipendenza esplicita dalla rotazione terrestre, mentre ciò che è comparso è l'insieme di tre parametri adimensionali: la gravità adimensionale, il Numero di Rossby *Ro*, ed il Numero di Reynolds *Re* ed il loro valore relativo rispetto all'unità determina l'importanza delle forze gravitazionali, di Coriolis e viscose nel moto del fluido. Infatti, si può affermare che:

- se il Numero di Rossby *Ro* è piccolo rispetto all'unità, allora la forza di Coriolis peserà notevolmente nel moto del fluido e non potrà essere trascurata;
- se il Numero di Reynolds *Re* è elevato, il termine viscoso peserà poco sul moto del fluido e se poi *Re* tende all'infinito, tale termine sarà del tutto trascurabile.
- se la Gravità Modificata g_* è piccola, gli effetti dell'accelerazione di gravità sul moto del fluido saranno trascurabili.

Questa è la ragione per cui le equazioni di Navier-Stokes scritte per la parte bassa della Troposfera appaiono differenti da quelle scritte per il moto di un fluido in un condotto: le equazioni sono le stesse, ma il fatto che *Ro* e *Re* siano differenti nei due casi può consigliare di trascurare termini che risultano irrilevanti, diversi nei due casi considerati.

2.2.3 L'EQUAZIONE DI STATO DEI GAS

Il sistema di quattro equazioni differenziali costituito dall'equazione di continuità e dalle equazioni di Navier-Stokes contiene 5 incognite *(ρ, p, u, v, w)*, quindi non è matematicamente chiuso, cioè non consentono di individuarne una soluzione univoca, e ciò dipende dal fatto che finora sono state considerate solo relazioni fisiche di tipo meccanico, senza considerare in alcun modo le leggi della Termodinamica.

La prima legge Termodinamica che prendiamo in considerazione *è l'equazione di stato di un gas* già trattata al *Cap.1*. La sua espressione (1.5a) varrebbe rigorosamente solo nel caso in cui in atmosfera fosse assente l'umidità; tuttavia, in sua presenza, l'equazione di stato assume una

forma leggermente diversa, come si è visto. Dato che il contenuto di vapore acqueo può essere descritto dall'*umidità specifica q* e dalla *tensione di vapore e*, sotto l'ipotesi che l'aria ed il vapore acqueo siano gas ideali, si ha che:

$$p = p_d + e = \rho_d R_d T + \rho_V R^V T = \rho R_d T \cdot (1 + 0.61q) \qquad [2.29a]$$

dove con p_d si è indicata *la pressione parziale dell'aria secca e* R_v=1.61R_d. Definendo *temperatura virtuale* (1.16b) la temperatura che deve avere una quantità di aria secca ad una certa pressione *p* perché la sua densità sia la stessa di una particella d'aria con umidità specifica *q* alla stessa pressione, la forma dell'equazione di stato risulta essere la seguente:

$$p = \rho R_d T_v \qquad [2.29b]$$

Aggiungere questa equazione alle equazioni di Navier-Stokes e all'equazione di continuità, non consente, comunque, di *chiudere* il sistema visto che ora il numero di incognite del problema è salito a sei mentre il numero di equazioni è solo pari a cinque.

2.2.4 LA PRIMA LEGGE DELLA TERMODINAMICA

La seconda considerazione termodinamica da invocare per chiudere il sistema di equazioni è la conservazione dell'entalpia, vista la comparsa della temperatura e della pressione nell'equazione di stato dei gas. La trattazione completa e rigorosa dell'argomento è analiticamente laboriosa e si rimanda chi fosse interessato a Landau e Lifshitz (1987) e a Dutton (1995). Qui di seguito si è preferito fornire una presentazione decisamente semplice, anche se parziale, dell'argomento.

Affrontiamo il problema ancora una volta da una prospettiva Lagrangiana considerando lo stato termodinamico di una particella d'aria in moto, completamente definito una volta noti due dei tre parametri seguenti: la pressione *p*, il volume *V* (o la densità ρ) e la temperatura virtuale T_v. Se questo sistema termodinamico subisce una trasformazione, la quantità di calore *dQ* scambiata attraverso le *pareti* della particella e la variazione del suo volume *dV* dovuta alla pressione *p* sono legate alla variazione di energia interna *dU* dalla *Prima Legge della Termodinamica*:

$$dU = dQ - pdV \qquad [2.30a]$$

In altre parole, il sistema scambia energia con l'esterno o acquistando una quantità di calore *dQ* oppure compiendo del lavoro *pdV*. Come mostrato al punto 1.1.9.1, la (2.30a) può essere riscritta per una particella di aria umida, congruentemente con la (1.27), come:

$$dQ = C_p dT_v - \alpha dp \qquad [2.30b]$$

dove si è sostituita la densità con il volume specifico α definito come il reciproco della densità. Dividendo poi per *dt*, si ottiene:

$$\frac{dT_v}{dt} = \frac{1}{C_p}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{\rho C_p}\frac{dp}{dt} \qquad [2.31a]$$

che evidenzia come il tasso di variazione della temperatura virtuale della particella dipenda dal tasso di variazione del calore scambiato con l'ambiente esterno e dalla variazione nel tempo della sua pressione. Derivando rispetto al tempo la definizione di temperatura potenziale virtuale θ_v ed usando la legge di stato dei gas si giunge alla relazione seguente che esprime il tasso di variazione della temperatura potenziale virtuale in funzione del tasso di variazione della temperatura virtuale e della pressione:

$$\frac{d\theta_v}{dt} = \frac{\theta_v}{T_v}\cdot\left(\frac{dT_v}{dt} - \frac{1}{\rho C_p}\frac{dp}{dt}\right) \qquad [2.31b]$$

Se, ora, si sostituisce la (2.30b) nella relazione precedente si nota come da essa scompaia il tasso di variazione della pressione giungendo all'importante relazione seguente che mette in relazione il tasso di variazione di temperatura potenziale virtuale della particella col tasso di variazione del

termine di sorgente:

$$\frac{d\theta_v}{dt} = \frac{\theta_v}{T_v}\frac{1}{C_p}\frac{dQ}{dt} \qquad [2.31c]$$

Questa relazione esprime il fatto che la variazione della temperatura potenziale virtuale di una particella Lagrangiana dipende dal tasso di calore scambiato attraverso le pareti della stessa. Va ricordato che, la *derivata lagrangiana* che compare nella relazione precedente rappresenta il tasso di variazione di temperatura potenziale virtuale *dentro* la particella e perciò altro non è che la derivata materiale. Per questo, il modo più corretto di scriverla sarebbe il seguente:

$$\frac{D\theta_v}{Dt} = \frac{\theta_v}{T_v}\frac{1}{C_p}\frac{dQ}{dt} \qquad [2.31d]$$

Per ottenere l'analoga relazione Euleriana basta sostituire alla derivata materiale della temperatura potenziale virtuale la sua controparte Euleriana, ottenendo:

$$\frac{\partial\theta_v}{\partial t} + u_\alpha\frac{\partial\theta_v}{\partial x_\alpha} = \frac{\theta_v}{T_v}\frac{1}{C_p}\frac{dQ}{dt} = S_T^* \qquad [2.31e]$$

che è l'equazione che descrive l'evoluzione nello spazio e nel tempo della temperatura potenziale virtuale in funzione del campo di moto presente e delle trasformazioni termodinamiche avvenute. In questa relazione è presente il termine di sorgente S^*_T di cui si tratterà nel seguito. Per ora è sufficiente premettere che tale termine rappresenta il trasferimento di calore dovuto alle trasformazioni di fase dell'acqua atmosferica, alle reazioni chimiche esotermiche ed endotermiche, alla convergenza/divergenza dei flussi radiativi ed alla dissipazione di calore dovuta alla diffusività molecolare. Esplicitando il termine di diffusività molecolare e raggruppando in S_T tutti gli altri termini di sorgente, la (2.31e) finalmente assume la forma definitiva seguente:

$$\frac{\partial\theta_v}{\partial t} + u_\alpha\frac{\partial\theta_v}{\partial x_\alpha} = \nu_T\frac{\partial^2\theta_v}{\partial x_\alpha^2} + S_T \qquad [2.32]$$

dove ν_T è la *diffusività termica molecolare* legata alla conducibilità termica K_d (1.7) dalla relazione $\nu_T = K_d/(\rho C_p)$. In assenza di nuvole e di precipitazioni e trascurando le reazioni chimiche e la dissipazione di energia termica per i moti molecolari, il termine di sorgente si riduce alla convergenza/divergenza dei flussi radiativi, studiata in dettaglio nel Cap. 6.

Conviene, a questo punto, fare alcune considerazioni fisiche tratte da Monin e Yaglom (2007a). Se consideriamo la (2.32) notiamo come il termine legato alla diffusività termica molecolare dipenda dai gradienti di temperatura (come, del resto, era già stato affermato dalla 1.7b). Ipotizziamo per il momento che il termine di sorgente S_T ed il termine di diffusività termica molecolare siano entrambi nulli. In questo caso la (2.32) affermerebbe che la derivata materiale della temperatura è nulla e ciò implicherebbe che l'entalpia (e quindi la temperatura) di ogni particella risulti conservata. Immaginiamo ora che ciò sia vero, a meno della diffusività termica molecolare.

Bisogna, in primo luogo, ricordare che il trasporto di calore avviene entro l'atmosfera, che è caratterizzata da un elevatissimo numero di Reynolds *Re* e che quindi è in condizioni turbolente. In questo caso, la propagazione di calore causata dal trasporto in un fluido turbolento di particelle in movimento (cioè la *diffusione turbolenta*) normalmente è più rapida della propagazione dovuta ai moti molecolari (*diffusione molecolare*). In effetti, a causa della diffusione turbolenta il fumo di una sigaretta viene disperso in una stanza in pochi secondi, mentre la sola diffusione molecolare giungerebbe allo stesso effetto solo dopo vari giorni. Ciò vuol dire che dobbiamo ignorare la diffusione molecolare? La risposta è decisamente no!

Il trasporto di calore da parte delle particelle in movimento porta ad una situazione in cui il volume occupato inizialmente dalla particella calda, col procedere del tempo, è esteso in certe direzioni e compresso in altre, perdendo progressivamente la propria forma originaria ed assumendo col tempo forme sempre più complesse ed irregolari. Dato che questo ragionamento vale anche per miscele di sostanze diverse disperse in un fluido turbolento, questo fenomeno è stato

facilmente verificato e riprodotto in laboratorio. Nella parte superiore della *Fig.2.6* è stato disegnato ciò. Come si vede, la particella originaria di forma regolare, col procedere del tempo (qui è mostrata la situazione in due istanti successivi) perde la propria regolarità originaria dando luogo a strutture sempre più complesse. Pur cambiando di forma col tempo, il volume totale della particella non cambia, nonostante la deformazione. Come risultato, se si trascurasse la diffusione termica molecolare, si avrebbero distribuzioni di temperatura decisamente irregolari (si veda la parte *b* della figura) con valori o pari a 0 o pari a θ_0 (temperatura media iniziale della particella). In conclusione, la diffusione turbolenta, da sola, porterebbe alla formazione nel fluido di strati altamente distorti ed irregolari cui sarebbero associate rapide variazioni termiche. La *regolarizzazione* della distribuzione di temperatura è realizzata dalla diffusività termica molecolare che consente alla particella di inglobare molecole provenienti da particelle circostanti a diversa temperatura e quindi di costruire un'infinità di strutture a temperatura intermedia, permettendo al campo di essere meno irregolare. Questo effetto di regolarizzazione della diffusività termica molecolare è tanto più efficace quanto maggiore è ν_T.

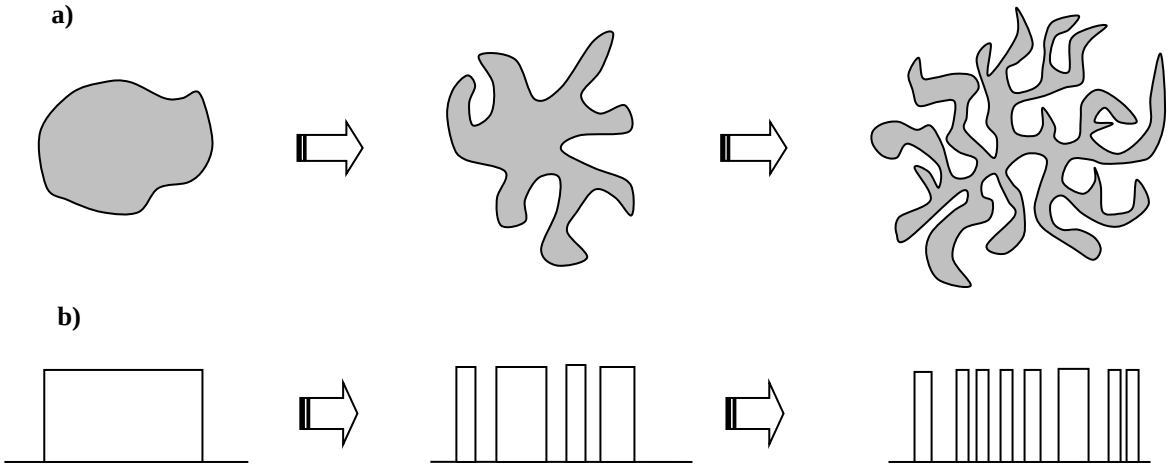


Fig. 2.6: a) variazione nella forma del volume occupato da una particella calda a causa della diffusione turbolenta; b) distribuzione schematica della temperatura media lungo una retta che interseca la particella (rielaborazione da Monin e Yaglom, 2007a)

2.2.5 LA CONSERVAZIONE DELL'UMIDITÀ

Dato che nella conservazione del calore è presente il termine di sorgente che tiene conto, tra l'altro, della trasformazione di fase dell'acqua presente nell'aria umida, per chiudere il sistema di equazioni non basta solo la definizione di temperatura potenziale virtuale, ma occorre anche la relazione di bilancio dell'acqua in atmosfera. L'acqua in atmosfera però è presente sia come vapore che come liquido e solido.

Se con q_v si indica l'umidità specifica dell'aria, cioè la massa di vapor d'acqua per unità di massa dell'aria umida (nello stesso volume), e si ragiona in maniera del tutto analoga a quanto si è fatto al punto 2.2.1 per la conservazione della massa, si giunge facilmente ad una relazione che ne esprime il bilancio, relazione che scritta in notazione tensoriale risulta pari a:

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial q_v}{\partial x_\alpha} = \nu_q \frac{\partial^2 q_v}{\partial x_\alpha^2} + \frac{S_{qv}}{\rho_{air}} \qquad [2.33a]$$

in cui si è tenuto conto anche del termine di diffusione molecolare. In questa relazione S_{qv} rappresenta il termine netto di sorgente per il vapor d'acqua (massa totale vapor d'acqua introdotta o persa nell'unità di volume e di tempo) e ν_q è la diffusività del vapor d'acqua che, a 15°C e 1013 mb, vale $2.49 \cdot 10^{-5}$ $m^2 s^{-1}$. Con ρ_{air} si è indicata la densità dell'aria umida. Dato che in atmosfera

l'acqua può essere presente anche in fase liquida (la cui umidità specifica è q_L) e in fase solida (la cui umidità specifica è q_S), è necessario affiancare alla (2.33a) le analoghe equazioni di bilancio per le altre due fasi, ottenendo:

$$\frac{\partial q_L}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial q_L}{\partial x_\alpha} = \nu_T \frac{\partial^2 q_L}{\partial x_\alpha^2} + \frac{S_{qL}}{\rho_{air}} \qquad \frac{\partial q_S}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial q_S}{\partial x_\alpha} = \nu_T \frac{\partial^2 q_S}{\partial x_\alpha^2} + \frac{S_{qS}}{\rho_{air}} \qquad [2.33b]$$

dove S_{qL} e S_{qS} sono i termini di sorgente rispettivamente per l'acqua in fase liquida e solida. Si noti come in queste relazioni sia assente il termine di diffusività molecolare, trascurato perché del tutto irrilevante in questo caso.

Se ora si aggiungono queste equazioni differenziali alle tre equazioni di Navier-Stokes, all'equazione di continuità, alla legge di stato e all'equazione per la temperatura potenziale virtuale, il sistema ottenuto è finalmente chiuso.

2.2.6 LA CONSERVAZIONE DI UNA SPECIE CHIMICA

Le differenti equazioni che costituiscono il modello matematico dell'atmosfera (e quindi del *PBL*) ottenute finora, di fatto, ipotizzano di trattare un *ipotetico* gas perfetto (l'*aria*) che ubbidisce alla legge di stato e, per cui, tra l'altro, è definibile anche un *peso molecolare* e ciò non ha creato problemi di sorta. Tuttavia, in Atmosfera, oltre all'Azoto e all'Ossigeno (che sono i costituenti atmosferici principali) è presente una moltitudine di specie chimiche differenti, la cui presenza, però, è estremamente ridotta, come visto al Paragrafo 1.1.5. Di fatto, salvo rarissime eccezioni, tali sostanze sono presenti in traccia e, di conseguenza, non alterano significativamente lo stato e la dinamica del *PBL*. Tuttavia, pur presenti in traccia, queste sostanze sono oggetto di interesse per la loro pericolosità per la salute umana e per la vita degli ecosistemi. Da qui l'interesse alla loro dispersione nel *PBL* una volta emessi, cosa che costituirà l'argomento dell'ultima parte del libro, dedicata alla dispersione degli inquinanti in aria e quindi all'inquinamento atmosferico derivante (il Vol. 3). Comunque, il punto di partenza di ogni tipo di studio di questo tipo è la legge di conservazione cui devono ubbidire singolarmente tutte le specie chimiche presenti in atmosfera. Ma spesso queste sostanze sono chimicamente reattive e ciò dovrà essere considerato nelle diverse equazioni di conservazione, visto che parte di alcune sostanze emesse (*inquinanti primari*) scomparirà, mentre alcune sostanze originariamente non emesse, per esempio l'Ozono, verranno generate (*inquinanti secondari*).

Se si indica con c_m la densità molecolare istantanea (moli per volume di aria) o la densità (grammi per volume di aria) di una generica specie chimica presente in una particella di aria, con la medesima metodologia sviluppata per la conservazione della umidità si giunge alla seguente relazione che ne esprime la conservazione:

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial c_m}{\partial x_\alpha} = -c_m \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \nu_m \frac{\partial^2 c_m}{\partial x_\alpha^2} + S_m \qquad [2.34a]$$

In essa S_m è il termine di sorgente che include sia le emissioni vere e proprie della sostanza considerata, sia la *deposizione* della specie al suolo (cioè la rimozione di una specie o per interazione diretta col suolo e la vegetazione ivi presente, che è la deposizione secca, o per l'interazione con le idrometeore presenti nel *PBL*, che è la deposizione umida), sia anche l'apporto o la perdita della specie in esame derivante da trasformazioni chimiche con altre specie presenti. Va poi notato che nel secondo termine di destra è presente la diffusività molecolare ν_m, propria della sostanza in esame, che varia non solo da sostanza a sostanza, ma anche con la temperatura e la pressione. Maggiori dettagli possono essere trovati in Jacobson (2005, pagg. 528-529). Prendendo in considerazione la (2.34a) si nota che:

- in realtà si dovranno scrivere tante equazioni del tipo (2.34a) quante sono le sostanze considerate (o meglio presenti in aria). È subito chiaro che il numero di equazioni da scrivere e da considerare sarà elevatissimo.

- Se tra tali sostanze si instaurano reazioni chimiche che le coinvolgono reciprocamente, le loro equazioni di conservazione costituiscono un sistema di equazioni legate tra loro proprio dalla chimica che le coinvolge attraverso il termine di sorgente. Come vedremo, ciò equivale ad aggiungere tante equazioni differenziali ordinarie quante sono le reazioni che hanno luogo in atmosfera, ciascuna delle quali descrive matematicamente la relativa cinetica chimica.
- L'accoppiamento evidente tra le *grandezze meteorologiche* e la concentrazione di sostanze chimiche esiste *apparentemente* solo nel fatto che la particella è in moto nello spazio. In realtà sarebbero da considerare anche le influenze della presenza delle sostanze sui parametri meteorologici. Uno di essi è l'alterazione della trasparenza dell'atmosfera che, a sua volta, altera i flussi radiativi. Per ragioni di semplicità operativa, normalmente è solo questo aspetto che viene trattato e spesso anche in maniera approssimata. Di fatto, in un modello meteorologico, soprattutto se a Mesoscala, si realizza un effettivo disaccoppiamento tra la dinamica meteorologica e la dispersione delle sostanze in aria.

La relazione (2.34a) è stata scritta tenendo conto del fatto che la concentrazione considerata è una densità. Ciò comporta inevitabilmente che la concentrazione non si conserva se l'atmosfera è comprimibile. Se invece, invece di c_m si considerasse il *mixing ratio* χ_m, l'equazione di conservazione risulterebbe la seguente (Tampieri, 2017):

$$\frac{\partial \chi_m}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \chi_m}{\partial x_\alpha} = \nu_m \frac{\partial^2 \chi_m}{\partial x_\alpha^2} + S_m \qquad [2.34b]$$

ed è facile convincersi che una particella, in assenza di sorgenti e trascurando la diffusività molecolare, conserva il proprio *mixing ratio* iniziale.

2.2.7 RIEPILOGO DELLE EQUAZIONI

Nei punti precedenti sono stati applicati i principi di conservazione della Meccanica Classica e le leggi della Termodinamica al moto dell'atmosfera, ottenendo come risultato un sistema di equazioni (prevalentemente differenziali alle derivate parziali) che costituiscono il *Modello Fluidodinamico dell'Atmosfera* (e del *PBL*). È probabile che il quadro che si è delineato risulti piuttosto confuso, per cui, riassumendo, si ha che:

- l'applicazione della <u>*legge di conservazione della massa*</u> ha condotto alla relazione differenziale prognostica per il campo di densità $\rho(x,y,z,t)$ espressa in forma tensoriale come:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad [2.35a]$$

- la <u>*legge di conservazione della quantità di moto*</u> ha condotto a tre relazioni differenziali prognostiche per le tre componenti del vento che definiscono univocamente il campo vettoriale di velocità dell'atmosfera, espresse in forma tensoriale come:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + f \varepsilon_{i\alpha 3} u_\alpha + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha^2} \qquad [2.35b]$$

- l'applicazione della <u>*conservazione dell'entalpia*</u> ha condotto all'equazione differenziale prognostica per il campo di temperatura potenziale virtuale espressa come:

$$\frac{\partial \theta_v}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \theta_v}{\partial x_\alpha} = \nu_T \frac{\partial^2 \theta_v}{\partial x_\alpha^2} + S_T \qquad [2.35c]$$

- la presenza di <u>*acqua*</u> in atmosfera, sia in forma vapore che in forma liquida e solida, ha richiesto l'applicazione del <u>*principio di conservazione della massa*</u>, separatamente per i

tre stati di aggregazione, giungendo alle equazioni differenziali prognostiche seguenti:

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial q_v}{\partial x_\alpha} = \nu_T \frac{\partial^2 q_v}{\partial x_\alpha^2} + S_{qv} \qquad [2.35d]$$

$$\frac{\partial q_L}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial q_L}{\partial x_\alpha} = S_{qL} \qquad [2.35e]$$

$$\frac{\partial q_S}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial q_S}{\partial x_\alpha} = S_{qS} \qquad [2.35f]$$

- in atmosfera vale la *legge di stato dei gas*, espressa come:

$$p = \rho \cdot R_d T_v \qquad [2.35g]$$

- dato che in atmosfera sono presenti in misura variabile altre *sostanze chimiche* che, in prima approssimazione, non alterano lo stato complessivo dell'atmosfera, se è necessario considerarle singolarmente (come è il caso quando si studia la dispersione degli inquinanti in aria) allora l'applicazione della *legge di conservazione* a ciascuna di esse conduce ad un'equazione differenziale prognostica del tipo:

$$\frac{\partial \chi_m}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \chi_m}{\partial x_\alpha} = \nu_m \frac{\partial^2 \chi_m}{\partial x_\alpha^2} + S_m \qquad [2.35h]$$

Si avranno quindi tante equazioni prognostiche quante sono le specie chimiche considerate. Tuttavia, vale la pena ricordare che queste relazioni godono (almeno in prima approssimazione, quasi sempre valida nel *PBL*) di una particolarità interessante: esse indicano una dipendenza stretta della concentrazione delle specie dai campi *meteorologici* (velocità, temperatura, umidità, densità, pressione), anche se non è vero il viceversa. Di fatto tali equazioni risultano sostanzialmente separate da quelle *meteorologiche*. Nella discussione che seguirà esse non verranno direttamente ed esplicitamente coinvolte. Ad esse ritorneremo, invece, nel Vol. 3 del libro, quando studieremo in dettaglio la dispersione degli inquinanti in aria.

Va sottolineato, poi, che tutte le equazioni prognostiche del modello fluidodinamico contengono un termine legato alle proprietà molecolari del fluido (viscosità, diffusività molecolare, ecc.). Il loro peso in tali equazioni è estremamente ridotto, soprattutto entro il *PBL*, e ciò sarà la ragione per cui frequentemente essi verranno ignorati nelle applicazioni pratiche, anche se tali termini rivestono un'importanza estrema quando ci si avvicina alle frontiere solide del dominio di indagine (l'interfaccia aria-suolo, aria-mare, ecc.), dove deve valere la *no-slip condition*.

Ora, il *sistema di equazioni differenziali meteorologiche* individuato (le 2.35a-f) costituisce un *sistema chiuso*, dato che consta di nove equazioni differenziali nelle nove variabili (ρ, u, v, w, p, θ_v, q_v, q_L,, q_S) e tale sistema dà conto di tutti i fenomeni atmosferici; in particolare, tutta la complessità della turbolenza dovrebbe essere contenuta in questo modello.

2.3 IL MODELLO E LA TURBOLENZA

Il modello di *PBL* presentato considera le variabili istantanee reali che caratterizzano il sistema *PBL*, cioè quelle che potremmo misurare in un punto e in un istante con uno strumento ideale a risposta rapida e le equazioni individuate ci dicono semplicemente che per tali variabili valgono sempre le leggi della Fluidodinamica. In teoria, un sistema di equazioni differenziali chiuso, una volta definite opportune condizioni iniziali ed al contorno, *dovrebbe* essere risolubile cioè dovrebbe fornire come soluzione l'insieme dei campi tridimensionali incogniti (campo di moto, campo di temperatura potenziale virtuale, campo di pressione, ecc.), ma finora non è nota alcuna

soluzione analitica di questo sistema in situazioni reali. Quelle presentate nei vari testi di Fluidodinamica si riferiscono a situazioni estremamente ideali e a fluidi molto viscosi in regime laminare, quindi di nessun interesse geofisico. Si rimanda chi fosse interessato a ciò all'esposizione fatta in Monin Yaglom (2007a). Gli esempi, poi, proposti in precedenza non contraddicono questa osservazione: essi sono solo un supporto didattico semplificato alla comprensione delle diverse leggi di conservazione. In pratica, il modello ottenuto cui possiamo dare il nome di *modello istantaneo di PBL* è un costrutto matematico elegante e fisicamente rigoroso che ha il pregio di spiegare ogni fenomeno che ha luogo in atmosfera, sia le circolazioni a mesoscala che le irregolarità turbolente. Tuttavia, le sue caratteristiche matematiche impediscono che da esso si possa ottenere un modello analitico applicabile alle esigenze reali (es. previsione del tempo o dispersione degli inquinanti). In pratica, se ogni fenomeno rilevato nella realtà non può contraddire il modello istantaneo del *PBL*, esso tuttavia non ci consente di realizzare effettivamente la previsione di un fenomeno che si realizzerà nella realtà.

Se si abbandonasse l'idea di una risoluzione analitica e si propendesse per una soluzione numerica, le difficoltà non diminuirebbero, come si vedrà nel seguito. In effetti vale la pena sottolineare una circostanza importante. Si immagini pure di possedere le tecniche di risoluzione numerica necessarie per affrontare questo sistema di equazioni: esiste la possibilità concreta di indicare con assoluta certezza quali siano le condizioni iniziali ed al contorno di un sistema così complesso com'è l'atmosfera, che nel *PBL* si presenta all'osservazione con marcati tratti stocastici? Si tratterebbe di dare, per esempio, ad un dato istante iniziale i campi *istantanei certi* delle diverse variabili in un dominio spaziale reale. La non linearità di molti dei termini presenti nelle equazioni di bilancio fa sospettare che piccoli errori nella determinazione delle condizioni iniziali ed al contorno possano avere effetti catastrofici sui risultati ottenibili integrando il sistema. In effetti il comportamento *caotico* delle equazioni di bilancio è stato ampiamente evidenziato nelle sperimentazioni numeriche (Sorbjan, 1989).

Pur supponendo di poter superare queste difficoltà, la risoluzione di tale sistema è proibitiva anche da un punto di vista numerico. Infatti, la difficoltà sta nel fatto che risolvere in maniera corretta tale sistema di equazioni differenziali significa *risolvere* (cioè far emergere) tutte le scale spazio-temporali caratteristiche della turbolenza del *PBL*. Dato che, come vedremo, lo spettro tipico della turbolenza si estende per oltre cinque decadi, è immediato constatare quanto questo problema sia ben al di là delle capacità degli strumenti di calcolo attualmente disponibili. Quindi il modello istantaneo, pur avendo il pregio teorico di descrivere in modo naturale, esauriente e corretto l'evoluzione spazio-temporale del *PBL*, risulta totalmente inapplicabile allo stato attuale della tecnologia, almeno nelle situazioni di pratico interesse. Nonostante ciò, sfruttando la notevole potenza di calcolo attualmente disponibile, il modello istantaneo di *PBL* viene sempre più spesso usato come *laboratorio numerico* per esplorare più comodamente i misteri del *PBL*, soprattutto del *PBL stabile*. Questo modo di procedere attualmente prende il nome di *Direct Numerical Simulation* (*DNS*). Parecchio lavoro è stato fatto in tal senso e gli studi modellistici di Basu et al. (2021a,b) sono due esempi interessanti di applicazioni *DNS* per esplorare intriganti aspetti del *PBL* stabile. Tuttavia, ad oggi, i *DNS* costituiscono solo un utile strumento di ricerca di base e non sono in grado di affrontare problemi di interesse pratico come le previsioni a breve-medio termine delle condizioni dell'atmosfera o la dispersione degli inquinanti in aria. Il pregio *logico* del modello istantaneo sta però nel fatto che esso è l'unica espressione matematica della complessa realtà fisica che caratterizza l'atmosfera. In particolare, queste equazioni nascondono nel loro interno sia i moti a grande scala, sia le irregolarità turbolente dei diversi campi istantanei, anche se nulla di ciò è facilmente visibile. Tutto resta celato nella loro natura matematica ed in particolare nella loro non linearità e nella loro ipersensibilità alle condizioni inziali. Usando una terminologia moderna, il *PBL è un sistema caotico* descritto matematicamente dal modello istantaneo. Nei punti che seguono ci si limiterà ad evidenziare nella maniera più semplice possibile tutto ciò, sottolineando alla fine come la descrizione di un sistema caotico come il *PBL* possa essere affrontato con profitto utilizzando strumenti matematici tipici dei processi stocastici, nonostante il *PBL sia un sistema fisico totalmente deterministico.* Una trattazione maggiormente completa e formale viene data in Frisch (1995) e McDonough (2007).

2.3.1 LA NON LINEARITÀ DELLE EQUAZIONI PROGNOSTICHE

Le relazioni del modello istantaneo, oltre che essere *dissipative* (è presente in tutte le relazioni prognostiche, tranne in quella che esprime la conservazione della massa dell'aria e nella legge dei gas, un termine dipendente dalla viscosità), sono *non lineari* e la loro non linearità è soprattutto concentrata nel termine avvettivo. Oltre che costituire una notevole complicazione analitica, *i termini non lineari ridistribuiscono l'energia tra le varie scale del moto, senza alterare il bilancio globale di energia* (Frisch, 1995). Dimostrare tale affermazione non è semplice e si rimanda a Monin e Yaglom (2007b) per i dettagli.

L'effetto della non linearità lo si può apprezzare anche impiegando un semplice esempio monodimensionale che rappresenta la semplificazione estrema delle equazioni del moto. Invece di considerare l'intero apparato teorico descritto, mettiamoci in una situazione altamente idealizzata in cui il campo di moto sia monodimensionale, *inviscido* (cioè è assente il termine dipendente dalla viscosità), in un sistema di riferimento inerziale e senza forzanti esterne. In sostanza la velocità del fluido U sarà uno scalare, funzione solo del tempo e della coordinata longitudinale x, che ubbidisce alla relazione non lineare:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \qquad [2.36a]$$

Immaginiamo, poi, che all'istante iniziale t_0 il campo di velocità sia dato dalla funzione periodica:

$$U(x, t_0) = B\cos(kx) = B\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \qquad [2.36b]$$

dove L è la dimensione del dominio di interesse, x è la posizione nel dominio considerata a partire da un'origine arbitraria e k è il numero d'onda dato da $k = 2\pi/L$. Quindi, all'istante iniziale, il campo di moto è costituito da una sola armonica spaziale. Proviamo ora a risolvere l'equazione (2.36a). Un modo semplice è quello di considerare un tempo $t > t_0$, tale che $t - t_0$ sia molto piccolo. In questo caso si può esprimere U al tempo t come una serie di Taylor e, dato che $\Delta t = t - t_0$ è piccolo, tale sviluppo può essere arrestato al termine del primo ordine, ottenendo che:

$$U(x, t) \cong U(x, t_0) + (t - t_0)\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t_0} \qquad [2.36c]$$

cioè:

$$\frac{U(x, t) - U(x, t_0)}{(t-, t_0)} \cong \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t_0} \qquad [2.36d]$$

Tenuto conto di ciò e dell'equazione del moto (2.36a), è immediato constatare che l'evoluzione nello spazio e nel tempo del campo di moto è data, almeno in prima approssimazione, da:

$$\frac{U(x, t) - U(x, t_0)}{(t - t_0)} \cong -U\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{t_0} \qquad [2.36e]$$

quindi:

$$U(x, t) \cong U(x, t_0) - (t - t_0)\cdot\left(U\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{t_0} \qquad [2.36f]$$

Sapendo che a t_0 il campo di moto era dato dall'armonica monocromatica (2.36b) si avrà che:

$$U(x, t) = B\cos(kx) + (t-, t_0)\cdot\frac{B^2k}{2}\sin(2kx) + \cdots \qquad [2.36g]$$

Questo è il campo di velocità dopo un *time-step*. La non linearità della (2.36a) ha comportato che il sistema, descritto all'istante iniziale da un'armonica cosinusoidale monocromatica, evolvendo da t_0 a t *corrompesse* questa armonica sovrapponendo ad essa armoniche multiple della frequenza di base (nell'approssimazione adottata è visibile l'armonica a frequenza $2k$). È intuitivo rendersi

conto che l'energia, inizialmente posseduta dall'armonica monocromatica, con l'evolvere del tempo si *ridistribuisce* su armoniche a maggior frequenza. Se la (2.36b) fosse vista come un vortice con dimensione caratteristica L, con l'evolvere del tempo a tale vortice si affiancherebbero altri vortici (sicuramente degradando quello iniziale monocromatico) con dimensioni frazionarie (quello indicato nella (2.36g) ha dimensione caratteristica $L/2$). In sostanza abbiamo una *cascata di vortici* che è l'analogo della *cascata energetica* (*energy cascade*) ipotizzata da Kolmogorov e di cui si tratterà nel seguito.

Inoltre, è interessante notare come il campo, inizialmente regolare (*smooth*), evolvendo nel tempo abbandoni progressivamente tale regolarità, visto che all'armonica originaria si vengono a sovrapporre armoniche che perturbano il segnale originario rendendolo sempre più irregolare. In effetti, il modello si può costruire anche per ottenere il campo di velocità dopo due *time-step*. Non si riportano le equazioni relative per la loro complessità. Comunque, impiegando questo modello per due *time-step* con B = 2 ms^{-1}, L = 1000 m, $t - t_0$ = 30 s, si ottiene quanto riportato nella **Fig. 2.7**, in cui sono evidenziati sia il campo di moto iniziale che i campi di moto ottenuti dopo il primo ed il secondo *time-step*. Quanto mostrato conferma le osservazioni fatte. Dopo un certo numero di *time-step* che renderanno ancora più irregolare il campo, chi sarà più in grado di decidere se il segnale (altamente irregolare) così ottenuto sia una sovrapposizione di armoniche o piuttosto un segnale totalmente stocastico?

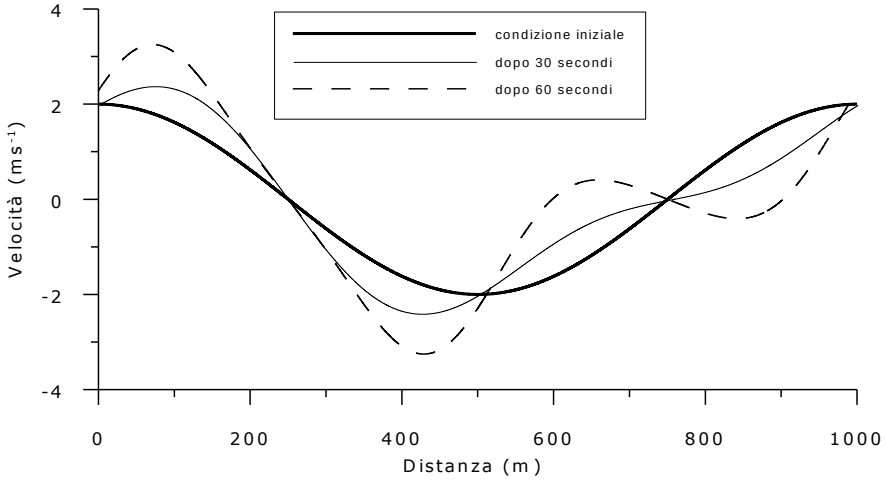


Fig. 2.7: evoluzione del modello semplificato (2.33a) in due time-step

Ancora più interessante è riproporre questo esempio didattico, prendendo ora come riferimento un moto bidimensionale. In questo caso, sotto le medesime ipotesi, si ha che le equazioni che lo governano sono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = 0\\ \frac{\partial V}{\partial t} + U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} = 0\end{aligned} \qquad [2.37a]$$

Se, per semplicità, ipotizziamo che all'istante iniziale t_0 le due componenti della velocità non siano correlate tra loro e che ciascuna sia descritta dalle semplici armoniche seguenti:

$$\begin{aligned}U(x,y,t_0) = B\cos(kx)\cdot\cos(ly)\\ V(x,y,t_0) = B'\cos(k'x)\cdot\cos(l'y)\end{aligned} \qquad [2.37b]$$

Ripercorrendo la strada usata per il caso monodimensionale si otterrebbe dopo un *time-step*:

$$\begin{aligned}U(x,y,t) = B\cos kx\cos ly + (t-t_0)\\ \cdot\left[B^2 k\sin kx\cdot\cos kx\cdot\cos^2 ly + BB'l\cos kx\cdot\cos k'x\cdot\sin ly\cdot\cos l'y\right]\end{aligned} \qquad [2.37b]$$

$$VV(x,y,t) = B'\cos k'x\cos l'y + (t-t_0)\cdot \\ \cdot\left[[BB'k'\sin k'x\cdot\cos kx \right. \\ \left.\cdot\cos ly\cdot\cos l'y + B'^2\, l'\cos^2 k'x\cdot\sin l'y\cdot\cos l'y\right] \qquad [2.37c]$$

Ciò che è interessante notare, non visibile nell'esempio monodimensionale precedente, è il fatto che la presenza del termine non lineare nelle (2.37a) non solo produce armoniche a maggior frequenza, che si sovrappongono all'armonica monocromatica iniziale, ma induce anche un accoppiamento tra le armoniche presenti nelle due componenti cartesiane della velocità, accoppiamento non esistente all'istante iniziale.

2.3.2 FORTE SENSIBILITÀ ALLE CONDIZIONI INIZIALI

Una delle caratteristiche peculiari delle equazioni prognostiche che descrivono i moti atmosferici è la loro forte sensibilità alle condizioni iniziali. Non è facile dimostrare matematicamente questa affermazione e, di fatto, ci è arrivato per un caso fortuito Lorenz (1963) studiando proprio l'evoluzione dell'atmosfera con un modello semplificato. Limitandoci ad evidenziare la sensibilità intrinseca delle equazioni fluidodinamiche a piccole variazioni nelle condizioni iniziali senza addentrarci in eccessive complicazioni matematiche, è opportuno riproporre un semplice modello proposto da Frisch (1995), per illustrare la forte sensibilità delle equazioni fluidodinamiche alle condizioni iniziali. Una trattazione decisamente più corretta sul piano formale la si può trovare in Polly e McDonough (2012).

A questo scopo, Frisch ha costruito un modello ultrasemplificato del moto di un fluido, cui ha dato il nome di *Poor Man's Navier-Stokes Equation* che parte da una forma vettoriale semplificata della legge del moto del tipo:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = -[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} + \nabla p] + \nabla^2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F} \qquad [2.38a]$$

dove **F** è una forzante esterna. Operando una drastica semplificazione ed una discretizzazione nel tempo (indicata dal pedice *n* che indica l'istante t_n e dal pedice n+1 che indica l'istante t_{n+1}), Frisch è giunto alla relazione seguente:

$$\underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}}_{u_{n+1}-u_n} = -\underbrace{[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} + \nabla p]}_{=-2u_n^2}\underbrace{+\nabla^2\boldsymbol{u}}_{-u_n} + \underbrace{\boldsymbol{F}}_{+1} \qquad [2.38b]$$

cioè:

$$u_{n+1} = 1 - 2u_n^2 \qquad [2.38c]$$

L'interessante di questa procedura sta nel fatto che l'operazione di discretizzazione, comune a tutti i metodi di risoluzione numerica di equazioni differenziali, ha trasformato un problema differenziale in un problema algebrico particolare. Più precisamente, la relazione algebrica (2.38c) è quello che i matematici chiamano una *mappa discreta*, cioè una relazione tra il valore di una variabile u_n all'istante t_n ed il valore u_{n+1} di questa variabile all'istante t_{n+1}. Quindi questa equazione è una *mappa non lineare* di tipo molto particolare. La Teoria del Caos tratta questo argomento in maniera molto approfondita.

Qui ci concentriamo solo su un aspetto che tale mappa presenta. Se eseguiamo due esperimenti numerici distinti con le due condizioni iniziali:

$u_0 = 0.10000$

$u_0 = 0.10001$

che differiscono tra loro dello 0.01% ed utilizziamo la relazione (2.38c), otteniamo quanto riportato in **Fig 2.8.** A dispetto della semplicità della mappa, la non linearità in essa presente determina un segnale di *output* decisamente irregolare che, a prima vista, appare del tutto casuale. Ma non è tutto! Come si vede dalla figura, i due segnali prodotti dalla mappa discreta in corrispondenza di due condizioni iniziali di pochissimo differenti, dopo un transitorio iniziale lungo circa 15

passi, differiscono profondamente tra loro. A prima vista sembrerebbero due segnali totalmente differenti. Quindi, questa mappa, che cattura almeno una parte delle non linearità delle equazioni fluidodinamiche, evidenzia una loro esasperata dipendenza dalle perturbazioni di lieve entità nelle condizioni inziali, facendoci ritenere, a ragione, che le medesime caratteristiche appartengano anche al modello fluidodinamico dell'atmosfera.

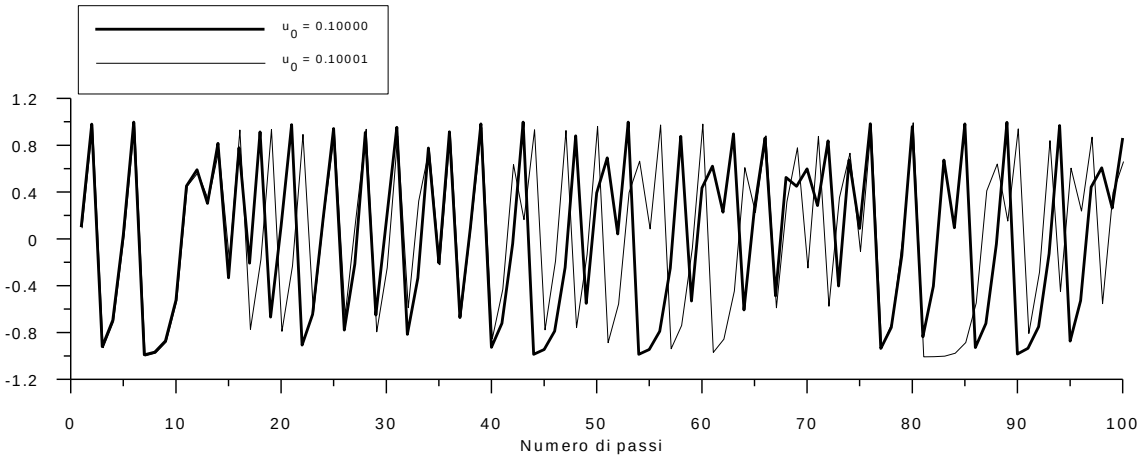


Fig. 2.8: output della Poor Man's N-S equation per due condizioni che differiscono di 0.01%

2.3.3 CARATTERISTICHE CAOTICHE DEL MODELLO DI ATMOSFERA

A prima vista non si riesce ad individuare alcuna ragione logica per cui le variabili che descrivono lo stato del *PBL* (le variabili meteorologiche, quindi) non abbiano caratteristiche completamente deterministiche. In sostanza, siamo fedeli all'affermazione di Albert Einstein: *Dio non gioca a dadi*. Eppure, le osservazioni sperimentali (per esempio quelle mostrate nella **Fig.2.9**, che si riferiscono all'andamento temporale delle tre componenti cartesiane del vento e della temperatura potenziale in un'ora diurna e soleggiata misurati a 3 metri dal suolo) mostrano tali e tante irregolarità da instillare qualche dubbio in proposito. In realtà, proprio questo problema è stata la causa scatenante del lavoro fatto da molti studiosi, fra cui svetta quello di Edward N. Lorenz, che può essere così riassunto:

- l'atmosfera, ed in special modo il *PBL*, è un sistema deterministico altamente complesso, descritto correttamente da un insieme di relazioni matematiche totalmente deterministiche che esprimono le leggi di conservazione della Fisica Classica. Tali relazioni sono di tipo differenziale ed *altamente non lineari*;
- la non linearità di tali relazioni fa sì che le variabili del sistema, che ubbidiscono rigorosamente al modello fluidodinamico, presentino variazioni spazio-temporali tanto irregolari da *apparire* semplici realizzazioni di processi stocastici, cioè completamente casuali.

È opportuno ora riassumere alcuni concetti già esposti in precedenza (Pope, 2003). Si ipotizzi di stabilire un insieme ben definito di condizioni per un esperimento di tipo fluidodinamico (per esempio il flusso di un liquido in un condotto) e di poter ripetere ogni volta che si voglia tale esperimento. Focalizziamoci, per esempio, sulla misura, in un ben preciso punto del condotto, della velocità longitudinale istantanea del fluido dopo un determinato tempo dall'inizio dell'esperimento e sia *A* il valore assunto dalla velocità secondo le leggi deterministiche della fluidodinamica. Se effettivamente ad ogni ripetizione dell'esperimento la velocità assume il valore *A*, il moto del fluido considerato è totalmente deterministico e questo capita quando il moto è laminare. Se, invece, ad ogni ripetizione dell'esperimento la velocità non assume il valore atteso *A* ma presenta valori più o meno differenti, si è di fronte ad una situazione sperimentale che non si può definire deterministica e questo è il caso di un moto turbolento. Perché capita ciò?

In primo luogo, è ben difficile, se non impossibile, mantenere le condizioni sperimentali invariate da esperimento a esperimento. In effetti sono inevitabili perturbazioni, normalmente molto piccole, nelle condizioni sperimentali: si pensi, per esempio a piccole variazioni nella temperatura del fluido, a piccole vibrazioni dell'apparato sperimentale o a variazioni nella rugosità delle superfici su cui scorre il fluido. Nel caso dell'aria del *PBL*, se si immaginano le masse d'aria che scorrono su una superficie con vegetazione erbacea, si capisce subito come la rugosità di questa superficie vari continuamente visto che l'erba si piega nella direzione del vento, oscillando continuamente attorno ad una inclinazione di equilibrio. Se in natura nulla si può fare per rendere immutabili le condizioni al contorno di un esperimento, nelle attività di laboratorio si può fare molto per limitare le differenze tra esperimento ed esperimento, anche se mai esse possono essere completamente eliminate. Anche le condizioni iniziali non possono essere definite con una precisione assoluta. Tutto ciò porta a dire che, mentre effettuando un calcolo fedele alla fluidodinamica, si utilizzano informazioni certe (deterministiche), nel realizzare un esperimento o nell'evolversi di un fenomeno naturale ciò che determina lo stato di moto del fluido viene in continuazione perturbato. Tali perturbazioni normalmente sono di lieve entità e ciò farebbe pensare che la loro influenza dovrebbe essere poco rilevante.

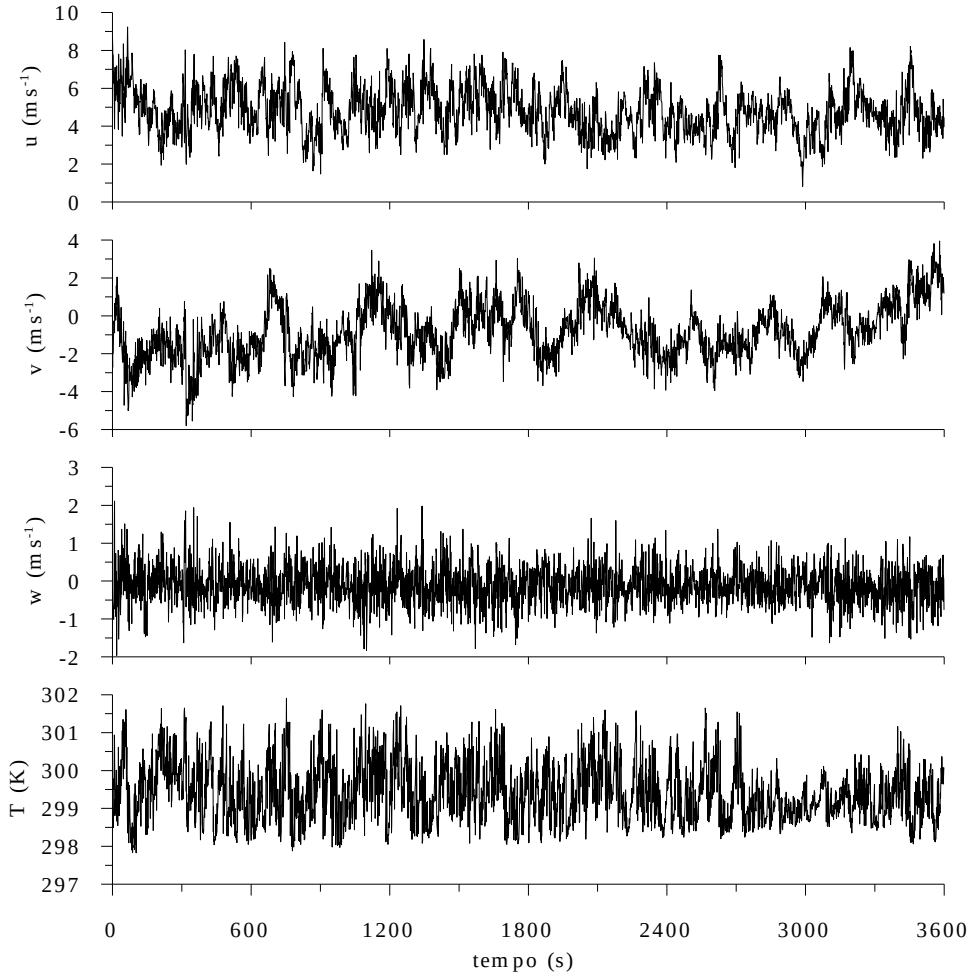


Fig. 2.9: andamenti temporali delle tre componenti cartesiane del vento e della temperatura potenziale in un'ora diurna e soleggiata a 3 metri dal suolo

In realtà le leggi della fluidodinamica che sovrintendono al moto dell'aria in atmosfera sono altamente non lineari ed estremamente sensibili alle perturbazioni. Si rese conto di ciò, in maniera del tutto fortuita, il meteorologo Lorenz durante l'utilizzo di un modello di previsione

meteorologica semplificato. Da allora il fenomeno venne studiato con maggior attenzione finché Lorenz pubblicò un celebre articolo (Lorenz, 1963) in cui studiava nel dettaglio un problema di convezione atmosferica e metteva in risalto le caratteristiche caotiche delle leggi che governano l'atmosfera. L'interesse suscitato dall'argomento raggiunse il culmine quando Lorenz presentò il 29 dicembre 1972 al *13° Meeting dell'American Association for Advancement of Science* dedicato al *Global Atmospheric Research Program* la celebre memoria dal titolo provocatorio: "*Does the flap of a butterfly's wings in Brasil set off a tornado in Texas?"*. Da qui è nata la teoria del Caos come scienza matematica, teoria che tuttora si sta sviluppando.

Senza approfondire alcunché, ma per renderci conto almeno superficialmente della natura caotica dell'atmosfera, conviene considerare al posto delle complesse leggi della fluidodinamica la loro semplificazione già adottata da Lorenz per lo studio della convettività e costituita dal seguente sistema di equazioni differenziali, le equazioni di Lorenz (Lorenz, 1993):

$$\frac{dx}{dt} = \sigma \cdot (y - x) \qquad \frac{dy}{dt} = \rho x - y - xz \qquad \frac{dz}{dt} = -\beta z + xy \qquad [2.39]$$

in cui con *x, y* e *z* sono indicate le variabili di stato del sistema, mentre σ, ρ e β sono dei parametri numerici. La soluzione di tale sistema fornisce l'andamento temporale delle tre variabili. Ad ogni istante *t* la soluzione definisce un punto nello spazio delle soluzioni (*spazio delle fasi*), punto che nel tempo descrive una *traiettoria*. Essa è rigorosamente deterministica, visto che è descritta da relazioni deterministiche, non si interseca mai e si va a concentrare attorno a due regioni specifiche dello spazio (*attrattori*). Per analizzare un caso concreto, si integrino numericamente le relazioni (2.39), ipotizzando che σ, ρ e β valgano rispettivamente 10, 8/3 e 28 e partendo dalle condizioni iniziali (*t = 0*): $[x(0), y(0), z(0)] = [0.1, 0.1, 0.1]$. Anche se la traiettoria risultante potrebbe essere graficata tridimensionalmente, per semplicità in **Fig. 2.10** ne viene data la proiezione sul piano (*x*,*z*). Ecco la celebre *farfalla di Lorenz*!

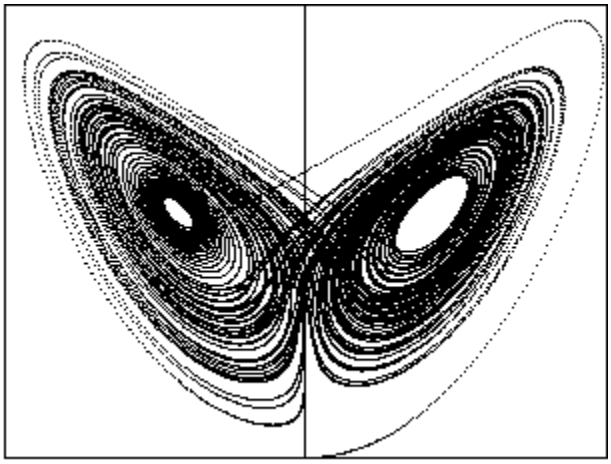


Fig. 2.10: la farfalla di Lorenz proiettata sul piano (*x*,*z*).

Analizziamo ora l'andamento nel tempo delle variabili di stato, in particolare la variabile *x*, riportato nella parte superiore della **Fig. 2.11**. L'andamento è curioso: dopo un transitorio iniziale di durata inferiore a 20 s, *x*(*t*) inizia ad oscillare in maniera inusuale. Questo andamento, prodotto da un modello rigorosamente deterministico, presenta marcati tratti stocastici. Ciò che interessa è verificare come si modifica in presenza di perturbazioni. Rispetto a perturbazioni delle condizioni iniziali, il comportamento del sistema di Lorenz è simile a quello visto al punto precedente. Infatti, se si introduce una perturbazione alla sola condizione iniziale per la variabile *x* e si sostituisce al valore originario 0.1 il valore $0.1+10^{-6}$, cioè 0.100001, ciò che si ottiene è la seconda curva della **Fig. 2.11**, indicata come $\underline{x}$ (*t*). Le caratteristiche dinamiche della curva sono le stesse, ma i valori sono diversi. In effetti la curva inferiore della **Fig. 2.11** evidenzia la differenza tra $\underline{x}(t)$

e $x(t)$: fino a circa 35 secondi dall'istante iniziale non ci sono differenze e in questo intervallo temporale la piccola perturbazione nelle condizioni iniziali risulta ininfluente. Subito dopo e all'improvviso, l'influenza si manifesta ed i valori riportati evidenziano differenze sostanziali. Questo semplice esempio evidenzia come un sistema deterministico, decisamente più semplice del modello fluidodinamico del *PBL*, presenti un'acuta sensibilità alle condizioni iniziali e quindi, in un certo senso, non consenta effettivamente delle predizioni deterministiche. Di fatto, se si ripete molte volte l'integrazione numerica delle equazioni di Lorenz con piccolissime perturbazioni nelle condizioni iniziali di volta in volta diverse, ciò che si ottiene è una serie di andamenti di *x*, sostanzialmente identici nei primi 30 secondi e successivamente molto diversi. Se si considera un dato istante *t*, quando i vari andamenti differiscono, il valore assunto da *x* sarà apparentemente del tutto casuale, anche se ottenuto da un modello completamente deterministico. Un sistema fisico di tal genere viene denominato ***sistema caotico***.

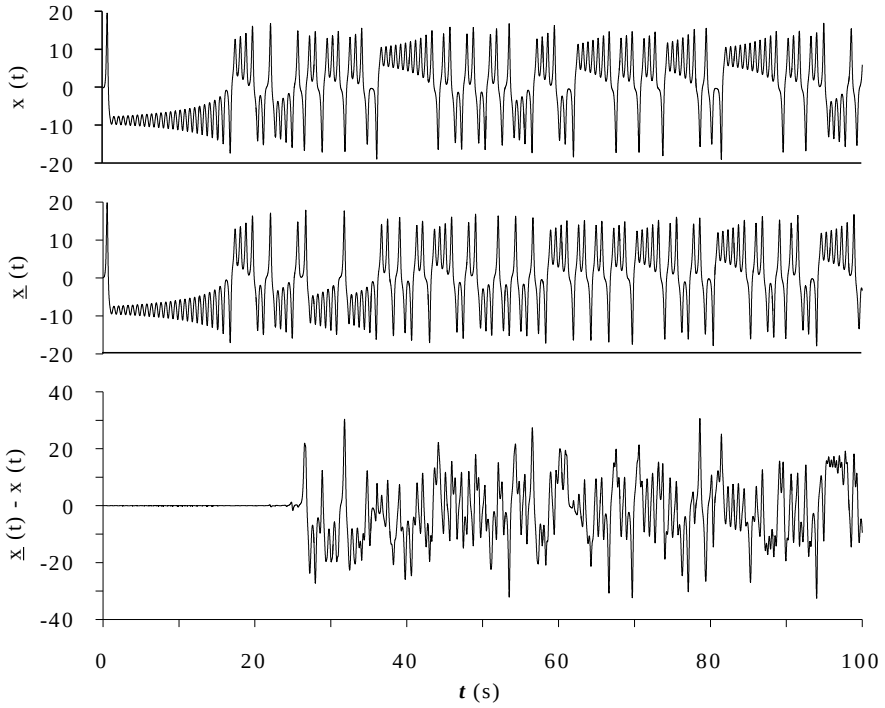


Fig.2.11: andamento nel tempo della variabile x delle equazioni di Lorenz

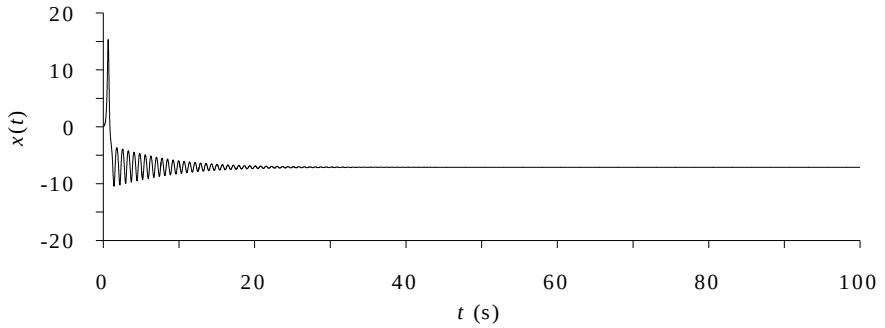


Fig.2.12: andamento nel tempo t delle equazioni di Lorenz col parametro $\rho = 20$

C'è un'ulteriore osservazione da fare. L'insieme dei parametri σ, ρ e β definiscono, in qualche modo, le proprietà strutturali del sistema e quindi una ben precisa soluzione (che è una traiettoria nello spazio delle fasi). Se li variamo, otterremo una *famiglia di soluzioni* cui, in generale, corrisponderanno comportamenti differenti del sistema (cioè traiettorie diverse nello spazio

delle fasi). Una cosa interessante succede se il parametro ρ delle equazioni di Lorenz invece di valere 28, come in precedenza, vale 20. In questo caso l'andamento $x(t)$ e $\underline{x}(t)$ coincidono, cioè le piccole perturbazioni iniziali sono ininfluenti (**Fig.2.12**). Come si vede, il comportamento è regolare e deterministico (in pratica un'oscillazione smorzata), decisamente insensibile alle perturbazioni nelle condizioni iniziali. Si può vedere come il *valore critico* di ρ sia circa 24.74. (*punto di biforcazione*). Sotto tale valore il sistema si comporta come in **Fig. 2.12** ed è insensibile a perturbazioni nelle condizioni iniziali, mentre sopra si comporta come in **Fig. 2.11** ed è estremamente sensibile ad ogni perturbazione. In sostanza, tale parametro determina il *regime dinamico* del sistema, ruolo svolto in atmosfera dal numero di Reynolds.

Per concludere, possiamo affermare con Lorenz (1993), che *un sistema caotico è deterministico*, ma le variabili che lo caratterizzano *appaiono* talmente irregolari da mascherare completamente questo determinismo facendole *sembrare* a tutti gli effetti delle *variabili stocastiche*. Questo è il contesto in cui ci troviamo studiando il *PBL*.

2.3.4 L'INTERPRETAZIONE STATISTICA DEL MODELLO DI ATMOSFERA

Convinti, ormai, della natura caotica dei moti atmosferici, è lecito domandarsi se questa visione possa essere *operativa*, cioè possa condurci ad un modello che ci consenta di ottenere risultati pratici, come prevedere le condizioni del tempo (tema caro alla meteorologia classica), descrivere la dispersione degli inquinanti in aria o quantificare lo scambio di CO_2 dalla vegetazione all'atmosfera. Purtroppo, la risposta a questo quesito è totalmente negativa! La teoria del caos è intrigante, affascinante ed elegante ma, ad oggi, non conduce lontano. Ma è poi così importante? In fondo, della natura atomica della materia siamo ben consci, ma quando è possibile, evitiamo accuratamente di usare la Meccanica Quantistica e ci rifugiamo nella più tranquillizzante Meccanica Classica. In sostanza, pur sapendo quale sia il modello fisico più realistico allo stato attuale delle conoscenze, operativamente ci limitiamo ad adottarne uno più semplice, finché non usciamo dal suo campo di applicabilità.

Come la Meccanica Classica appare lo strumento più adatto per descrivere il movimento di un'automobile (anche se a rigore dovremmo seguire il moto di tutti gli atomi che la compongono, integrando una spaventosa versione dell'equazione di Schrödinger), così cerchiamo di individuare un modello più naturale, immediato e tranquillizzante per descrivere le variabili atmosferiche così come ci appaiono dalle rilevazioni sperimentali. Per fare ciò, riprendiamo in considerazione l'andamento nel tempo di una qualsiasi delle variabili meteorologiche nel *PBL*, come per esempio una delle componenti del vento (o la temperatura) illustrate in **Fig. 2.9**. Ciò che ci colpisce analizzando uno di questi segnali (per esempio la componente *u* del vento) sono alcune caratteristiche che ora illustriamo.

Irregolarità degli andamenti nel tempo e nello spazio delle variabili meteorologiche

In primo luogo, come anticipato al Cap. 1, il segnale appare altamente irregolare, disorganizzato e in esso sono individuabili una *gran varietà di scale differenti* (temporali, in questo caso) *sovrapposte* le une alle altre. Ciò altro non è che la dimostrazione della presenza di strutture coerenti residenti nel *PBL* di varia estensione ed intensità ed in continua evoluzione. Come sarà detto in seguito, tali strutture, nelle situazioni convettive, nascono caratterizzate da grandi dimensioni ed evolvono disgregandosi progressivamente in strutture sempre più piccole e numerose. È quindi un inarrestabile processo a cascata che coinvolge l'intero *PBL*. L'andamento nel tempo delle tre componenti cartesiane della velocità del vento e della temperatura potenziale *presentano un andamento irregolare* anche se sappiamo che ciò è il risultato della natura caotica dell'atmosfera. Tuttavia, a prima vista, tali andamenti potrebbero essere visti anche come delle realizzazioni contemporanee di variabili totalmente stocastiche e quindi del tutto imprevedibili. Si comincia a delineare, quindi, un possibile modello operativo basato sulla teoria dei processi stocastici che sappiamo essere decisamente operativo.

Impredicibilità di comportamenti delle variabili meteorologiche

In una giornata soleggiata poniamo due termometri a risposta rapida nei pressi del suolo, uno in una posizione e l'altro posto 2 m sottovento al precedente e registriamo contemporaneamente la temperatura dei due sensori per un periodo di 100 s. Ciò che registriamo è quanto visibile nella **Fig. 2.13**. Entrambi i segnali sono irregolari, ma se consideriamo contemporaneamente le misure fornite dai due sensori, vediamo immediatamente quanto esse siano differenti. L'aspetto generale è il medesimo, ma i dettagli sono differenti. La logica vorrebbe che, dato che i due sensori si trovano praticamente nello stesso punto, i segnali da essi registrati dovrebbero essere sostanzialmente coincidenti, come lo dovrebbero essere pure le principali caratteristiche del segnale, come per esempio le pendenze. In pratica, se notiamo che ad un certo istante la temperatura del primo termometro mostra un andamento crescente, ci dovremmo aspettare che ciò succeda anche per il segnale registrato dal secondo termometro, cosa che non accade in generale. In sostanza non è possibile dedurre (*predire*) l'andamento del secondo segnale dal primo, quindi i due segnali sono *impredicibili*, anche se sicuramente *parenti*.

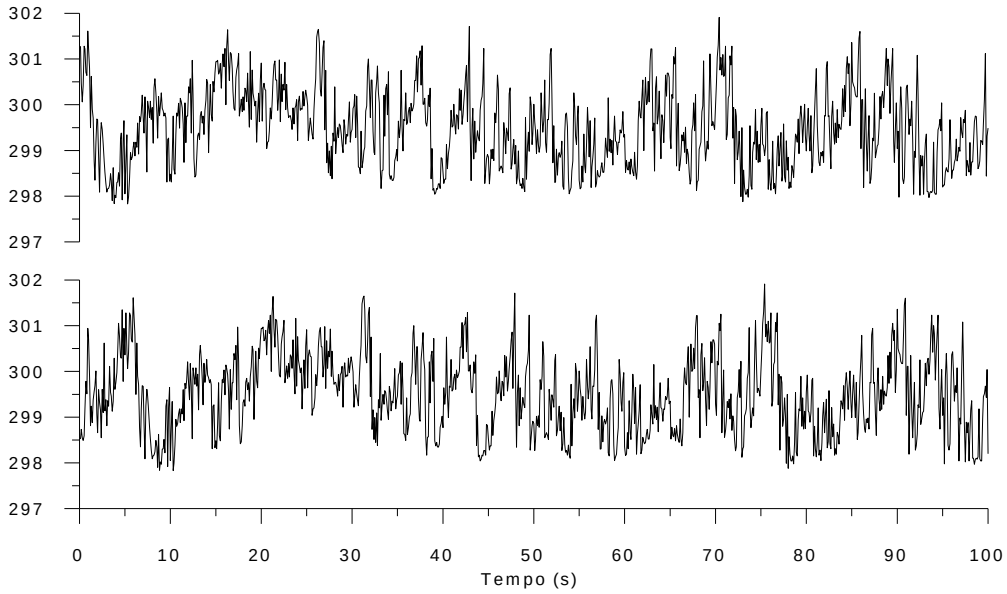


Fig. 2.13: andamento della temperatura a due punti di misura distanti 2 m sottovento

Riproducibilità di alcune proprietà collettive

Analizzando più nel dettaglio i due andamenti di temperatura di **Fig. 2.13** ci si accorge che questo grado di parentela può essere individuato e quantificato. Potremmo fare cose molto complicate, ma limitiamoci a calcolare i valori campionari di media, varianza, skewness e kurtosis per i due segnali. I valori ottenuti sono riportati nella tabella seguente.

Parametro	Sensore 1	Sensore 2
Media	299.51	299.48
Varianza	0.73	0.72
Skewness	0.214	0.258
Kurtosis	-0.62	-0.60

I parametri calcolati per i due segnali sostanzialmente coincidono. Dato che le grandezze calcolate sono i principali parametri che definiscono statisticamente un segnale, possiamo concludere che i due segnali sono *statisticamente equivalenti*. In pratica la situazione trovata risulta del tutto analoga all'aver considerato due *realizzazioni* indipendenti di un unico processo stocastico.

Tutto ciò si riferisce a misure fatte in un intervallo di tempo limitato e in un solo punto. Considerazioni analoghe si possono ovviamente fare in punti differenti del *PBL* ed anche in tempi

differenti. L'irregolarità insita negli andamenti temporali è innegabile e quanto riportato nella figura non è un caso isolato ma la normalità entro il *PBL*. Nel resto dell'atmosfera, invece, la turbolenza è minore (cioè le irregolarità sono meno marcate) ma comunque non totalmente assente. Dato che si è interessati ad una *visione globale* del *PBL* e del suo stato, ciò di cui si ha bisogno è un apparato matematico in grado di descrivere l'evoluzione spazio-temporale dei campi delle principali variabili meteorologiche.

Modello statistico del PBL

Nella prima parte del Capitolo è stato presentato il modello fluidodinamico del *PBL*, inteso come l'insieme di relazioni matematiche (prevalentemente differenziali) che legano tra loro le variabili descrittive del *PBL* in modo che risultino soddisfatte le leggi di conservazione della massa, della quantità di moto, del calore e della conservazione delle specie chimiche. Queste relazioni devono essere indubbiamente vere. Ma vera è anche la natura caotica che contraddistingue questi fenomeni: in effetti essi sono rigorosamente deterministici ma il loro *aspetto* è tipicamente stocastico.

Consci di tutto ciò, dal punto di vista operativo è opportuno considerare come *ipotesi di lavoro* (o meglio come *modello operativo*) il fatto che le *variabili meteorologiche* (le tre componenti del vettore vento, la temperatura potenziale, la pressione, ecc.) possono essere trattate come se fossero *realizzazioni di processi stocastici*. Fatta questa ipotesi, a questo punto è possibile procedere adottando le normali tecniche descrittive messe a punto per i *processi stocastici*. Come detto, ciò non corrisponde alla realtà fisica ma risulta essere solo una scelta di comodo che verrà impiegata come modello descrittivo dell'evoluzione del *PBL*. A questo proposito, vale la pena ricordare quanto affermato da Panofsky e Dutton (1983):

> *"i concetti probabilistici entrano nello studio della turbolenza del PBL perché le nostre capacità di calcolo e di analisi sono limitate, non perché ci sia nella turbolenza una casualità intrinseca."*

Adottando, quindi, per ragioni di comodo, una visione probabilistica:

- se si considera un punto generico del *PBL* ed un istante temporale qualsiasi, *non è possibile a priori definire esattamente il valore che assumeranno queste variabili*, ma è possibile *solo* individuare la *probabilità* con cui se ne può osservare un determinato valore;

- la *probabilità di osservazione* di un dato valore per una delle variabili considerate non è *a priori* indipendente dall'analoga probabilità di osservazione delle altre variabili. Le variabili meteorologiche *non* sono quindi *statisticamente indipendenti*, dato che tra loro devono comunque sempre valere le leggi di conservazione della Fluidodinamica. Questa osservazione può essere considerata come *un vincolo deterministico* al problema stocastico che si sta considerando;

- quanto è visibile in un istante temporale, *a priori* non può essere indipendente da quanto si è visto agli istanti precedenti e da quanto si vedrà nei successivi, dato che le relazioni della Fluidodinamica cui devono necessariamente ubbidire le variabili considerate sono, come si vedrà, relazioni differenziali sia nello spazio che nel tempo.

Da tutto ciò è evidente che ci aspetta l'impresa titanica di dover individuare l'*evoluzione spazio-temporale di variabili stocastiche tra loro dipendenti*! Ma da questa considerazione è partito il lavoro pionieristico di Osborne Reynolds che ancor oggi costituisce l'unica porta attraverso cui affrontare operativamente lo studio della turbolenza del *PBL*.

PROBLEMI

P02.01 Una nave si muove verso N ad una velocità di 10 km h^{-1}. Alla superficie la pressione cresce verso N ad un tasso di 5 Pa km^{-1}. Qual è il tasso di variazione della pressione registrato in un'isola vicina se la pressione, a bordo della nave, diminuisce di 100 Pa ogni 3 ore?

P02.02 La temperatura in un punto 50 km a N di una stazione meteorologica è 3°C più fredda di quella registrata alla stessa stazione. Se il vento spira da NE alla velocità di 20 m s^{-1} e l'aria è stata riscaldata per radiazione al tasso di 1 °C h^{-1}, qual è la variazione di temperatura registrata localmente alla stazione meteorologica?

P02.03 Si consideri un volume di controllo di forma cubica con gli spigoli paralleli agli assi coordinati e lunghi 20 m. Sulla faccia W l'aria possiede una temperatura di 20°C e il vento sia pari a u_W = 10 m s^{-1}. Sulla faccia E la temperatura è 18°C e u_E = 10 m s^{-1}. Calcolare il termine avvettivo.

P02.04 Ottenere l'equazione di continuità considerando un volume di controllo di forma qualsiasi. (Suggerimento: usare un bilancio di massa integrale, il teorema di Green e la considerazione che ciò che si ottiene deve essere valido per ogni volume considerato)

P02.05 Si consideri l'equazione di continuità nella forma espressa dalla (2.15b). Si dimostri che una forma è del tutto equivalente è la seguente

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

P02.06 Consideriamo una strada rettilinea larga 25 metri ed orientata nella direzione W-E. A metà di essa si apre una diramazione ad angolo retto rivolta verso S, larga 8 metri. Se l'aria fluisce lungo la strada da W a E e la sua velocità è di 20 ms^{-1} prima della diramazione e 19 ms^{-1} dopo, che velocità ha l'aria entro la diramazione? (Suggerimento: assumere che il moto dell'aria sia bidimensionale).

P02.07 Consideriamo un moto di un fluido a densità costante in un condotto convergente. Sia *x* la coordinata lungo l'asse del condotto e *y* la direzione trasversale ad essa. L'ampiezza del condotto sia dato dalla relazione seguente:

$$Y = Y_0/(1 + x/\ell)$$

Trovare la componente del moto *v*(*x*,*y*) quando si instaura un moto bidimensionale stazionario e la componente del moto lungo l'asse *x* è dato dalla relazione

$$u(x, y) = u_0(1 + x/\ell) \cdot [1 - (y/Y)^2]$$

P02.08 Una lunghezza di scala sinottica può essere definita come quella scala orizzontale in corrispondenza della quale la forza di Coriolis è significativa e le forze viscose trascurabili. Dato che l'aria del *PBL* presenta una densità pari a 1.23 kg·m^{-3} ed una velocità tipica di 10 ms^{-1}, determinare tale lunghezza di scala (Suggerimento: che ruolo hanno *Ro* e *Re*?)

P02.09 Scrivere un programma in Fortran o Python o MatLab o R che risolva il problema di Lorenz nelle condizioni indicate al punto 2.3.3 e graficare il risultato nel piano (*x*,*z*), cioè la farfalla di Lorenz, ed anche il risultato nello spazio (*x*,*y*,*z*).

P02.10 Sperimentare come variano le due rappresentazioni (2D e 3D) della soluzione del problema di Lorenz al variare del valore dei parametri σ, ρ e β.

3. DESCRIZIONE STATISTICA DELLA TURBOLENZA

Nel Capitolo 2 è stato presentato il modello fluidodinamico che descrive lo stato ed il moto dell'atmosfera e si è visto che, pur essendo esatto, questo modello in pratica non è utilizzabile per la non linearità e per la natura caotica che lo caratterizza. Si è visto, inoltre, che la natura caotica della turbolenza può essere descritta in maniera più semplice e tranquillizzante con un modello statistico che attribuisce ai campi delle variabili atmosferiche marcate caratteristiche stocastiche. Alla luce di ciò, per procedere adottiamo la seguente ipotesi di lavoro: *pur consci che i campi meteorologici evolvono secondo leggi totalmente deterministiche, operativamente ipotizziamo che essi siano dei processi stocastici tridimensionali (cioè dei campi stocastici) che possono essere descritti dalle leggi della Statistica*. Questa non è la realtà dei fatti, ma un modello concettuale ed operativo *che funziona* e che ci condurrà a dominare la turbolenza del *PBL*.

In questo Capitolo vengono presentati i dettagli di questa ipotesi di lavoro. Nella sua prima parte verrà trattato il problema *nel dominio del tempo*; in pratica si considereranno le variabili meteorologiche così come le possiamo vedere nella vita quotidiana, cioè nella loro evoluzione nello spazio Euclideo e nel tempo. La seconda parte, invece, sarà dedicata alla loro descrizione *nel dominio delle frequenze*. Questa descrizione è decisamente poco usuale e vede ogni fenomeno atmosferico come una sovrapposizione di *armoniche*, cioè di andamenti periodici sinusoidali nello spazio e nel tempo a diversa ampiezza e frequenza. In questo modo risultano più evidenti le diverse scale spaziali e temporali del fenomeno e le interazioni tra scale diverse. Tutto ciò si riferisce ad una visione totalmente *Euleriana* della turbolenza, che è poi il metodo descrittivo più utilizzato per studiare il *PBL*. Tuttavia, esiste anche una visione *Lagrangiana* che è di estrema importanza nella descrizione dei fenomeni di dispersione degli inquinanti in aria. Pur rimandando una trattazione sistematica di ciò, si concluderà questo Capitolo presentando i concetti principali della visione Lagrangiana della turbolenza atmosferica.

I vari argomenti verranno trattati mantenendo una ragionevole completezza ed un buon livello di correttezza formale, anche se a volte saremo costretti a sacrificare una parte del rigore a favore di una maggiore comprensione. Chi fosse interessato ad approfondire l'argomento faccia riferimento ai classici testi di Monin e Yaglom (2007a e b), a Pope (2003) e a Panofsky e Dutton (1983). Ulteriore materiale sull'argomento può essere trovato in Bendat e Piersol (1986), testo caratterizzato da un'esemplare chiarezza espositiva unita alla rinuncia dichiarata di ogni complicazione formale non strettamente necessaria. Da ultimo va segnalato il libro di von Storch e Zwiers (1999) in cui è fornita una lucida e completa trattazione dell'analisi statistica applicata alla meteorologia ed alla climatologia.

3.1 ANALISI NEL DOMINIO DEL TEMPO

Il modo più naturale per trattare un problema fisico è quello di descriverne la variabilità nello spazio tridimensionale Euclideo e nel tempo, anche se tale sistema è descritto da variabili di tipo stocastico. Ci addentreremo in questa materia in maniera graduale. In primo luogo, considereremo un punto nello spazio ed un istante temporale e studieremo le caratteristiche di una generica variabile meteorologica in questo contesto, vista come una variabile stocastica. Oltre a ciò, prenderemo in considerazione anche l'interdipendenza tra variabili stocastiche, cosa che è caratteristica di tutte le variabili meteorologiche. In pratica, questa è la situazione in cui ci si trova quando viene realizzata una misura isolata di una variabile meteorologica (per esempio la temperatura) o di più variabili tra loro dipendenti (per esempio le componenti cartesiane del vento). Considereremo, quindi, ogni variabile meteorologica come una *variabile stocastica*. Successivamente si passerà a considerare cosa succederebbe a questa variabile, relativa ad un ben preciso punto dello spazio,

se la seguissimo al variare del tempo. In questo caso la considereremo un *processo stocastico*. Infine, passeremo a studiare il caso generale di un campo meteorologico variabile nello spazio e nel tempo, considerandolo un *campo stocastico*.

Prima di entrare nel vivo della deduzione delle leggi fluidodinamiche che governano il *PBL*, vale la pena richiamare alcune nozioni di base dell'Analisi Matematica, indispensabili per la comprensione del seguito. Si suppone che al lettore siano familiari i concetti di limite, derivata ed integrale, mentre nell'**Appendice 2** sono stati raccolti per comodità i concetti principali relativi alla teoria dei vettori, agli operatori vettoriali ed alla notazione sintetica tensoriale.

3.1.1 LE VARIABILI METEOROLOGICHE E LE VARIABILI STOCASTICHE

Se si considera un punto nel *PBL* ad un istante *t*, ci si può domandare quale possa essere il valore di una grandezza meteorologica (per esempio la temperatura *T*) in quel punto e in quell'istante. Nell'ipotesi adottata di completa casualità delle variabili meteorologiche, non sarebbe possibile attribuire a *T* un ben preciso valore che, a priori, potrebbe essere *qualsiasi*. Se si eseguisse, però, una *misura ideale* che non perturba l'ambiente misurato (procedura cui diamo il nome di *campionamento*), si otterrebbe ovviamente un ben preciso valore di *T* (diciamo θ). In termini statistici θ è una *realizzazione della variabile stocastica T*. Astraendo, possiamo ipotizzare che ogni variabile meteorologica si comporti come una variabile stocastica, cioè come un'*entità astratta* che può fornire sempre un valore (realizzazione) mediante un'operazione di campionamento.

Perché si è ottenuto θ come realizzazione di *T* e non un altro valore? La Statistica non è in grado di dirci nulla al riguardo, se non che θ è una delle possibili realizzazioni *attese* per questa variabile stocastica. Conviene soffermarci su questo punto. Una variabile stocastica, in generale (e quindi una variabile meteorologica), a priori potrebbe assumere un valore qualsiasi, purché tale valore abbia un significato fisico. Se, per esempio, considerassimo una delle componenti cartesiane della velocità del vento, a priori le sue possibili realizzazioni potrebbero risultare pari a qualsiasi numero reale tra $-\infty$ e $+\infty$. La temperatura potenziale, invece, così come la pressione atmosferica, la radiazione solare globale e la pioggia (tanto per fare alcuni esempi concreti) potranno avere solo realizzazioni il cui valore non potrà che essere espresso da un numero reale non negativo. Si potrebbe obiettare che questa affermazione dipende da come è definito lo zero della scala delle temperature (o delle pressioni). In realtà, comunque si definisca lo zero della scala delle temperature o delle pressioni, l'intervallo in cui sono contenuti i possibili valori delle realizzazioni di queste variabili presenterà sempre un estremo inferiore finito ed uno superiore infinito. Pertanto, ciò che si deduce è che, pur essendo qualsiasi il valore che a priori può assumere una realizzazione di una variabile stocastica, tale valore dovrà comunque appartenere ad un insieme di valori ben preciso, determinato dalla natura fisica della variabile. Tale insieme (che mostra una notevole somiglianza con l'intervallo di definizione di una funzione in Analisi) è detto *spazio campionario* o *spazio delle fasi*. Gli esempi precedenti permettono di individuare uno spazio delle fasi continuo, costituito o dall'insieme completo dei numeri reali o dall'insieme dei numeri reali non negativi. Tuttavia, lo spazio delle fasi potrebbe essere costituito anche da un insieme discreto e finito di valori. A parte il caso del lancio di una moneta (che prevede uno spazio delle fasi contenente solo i due valori *vero, falso*) e quello del lancio di un dado (lo spazio delle fasi contiene i numeri interi da 1 a 6), in Meteorologia abbiamo esempi significativi di variabili meteorologiche con spazio delle fasi discreto. Infatti, se si considera l'evento di presenza/assenza di precipitazione liquida, lo spazio delle fasi è costituito da due valori (*piove, non piove*), mentre se si considera la copertura del cielo e la si misura in ottavi di cielo coperto, lo spazio delle fasi sarà costituito dai numeri interi da 0 a 8. Nel seguito considereremo solo variabili stocastiche con spazio delle fasi continuo.

Ritorniamo ora all'esempio della temperatura. Con una buona dose di semplificazione e di astrazione, abbandonando un po' di rigore formale, potremmo ipotizzare di *ripetere* la misura della temperatura un numero infinito di volte. Di fatto stiamo ipotizzando la possibilità di realizzare un *esperimento ideale* che produce un insieme di *campionamenti ideali* ottenuti tutti

effettuando la medesima misura su un sistema fisico totalmente invariato. Così facendo si otterrebbero le realizzazioni θ_1, θ_2, …, θ_i,.. a priori tutte diverse tra loro, che potremmo considerare misure realizzate da infiniti sensori di dimensione infinitesima posti esattamente tutti nello stesso punto dello spazio ed operanti nel medesimo istante. Ciò che apparirebbe analizzando l'insieme di tutte queste realizzazioni è che tali misure non sono necessariamente distribuite uniformemente tra -∞ e +∞, ma che, di fatto, esiste una certa *verosimiglianza* connessa ad ogni possibile valore dello spazio delle fasi, dato che è più verosimile che si riscontrino alcuni valori piuttosto che altri. Per esempio, alla base Antartica Concordia (a Dome C) è molto verosimile che la temperatura estiva dell'aria raggiunga i -40°C, ma è ben poco verosimile che essa possa essere di +30°C. La verosimiglianza (*likelihood*) di ciascuna realizzazione o di un evento è un concetto astratto e sfuggente, spesso espresso in termini molto qualitativi, che deve essere convertito in un concetto quantitativo e misurabile e tale concetto è la *probabilità di un evento*.

3.1.1.1 La Probabilità

Ritornando al valore della temperatura in un punto dello spazio e ad un istante, si consideri l'evento (A) costituito da una *realizzazione* θ di T che risulti inferiore ad un valore prefissato T_A. Per determinare la *probabilità campionaria* di questo evento (dedotta, cioè, dall'analisi delle realizzazioni disponibili) si eseguano M campionamenti ideali (M potrebbe e dovrebbe essere un numero molto elevato) cui corrispondono le realizzazioni θ_i ($i = 1, 2, \dots, M$) di T. Sia N_A il numero di realizzazioni tali che $\theta_i < T_A$. Si definisce *probabilità campionaria dell'evento A* il rapporto:

$$P_A\{\theta_i < T_A\} = \frac{N_A}{M} \qquad [3.1]$$

Abbandonando ancora una volta il rigore matematico, si può dire che la *probabilità di un evento A* è data quantitativamente dalla (3.1) se il numero di realizzazioni M tende all'infinito. La probabilità è quindi un *numero adimensionale* compreso tra 0 e 1: una probabilità 0 identifica un *evento impossibile*, mentre una probabilità 1 identifica un *evento certo*.

3.1.1.2 La Funzione Distribuzione Cumulata

Ora è finalmente possibile chiedersi quale possa essere la probabilità che T presenti valori inferiori ad un ben definito valore T_A. Una volta realizzato l'esperimento ideale un numero M di volte, estremamente elevato, la probabilità campionaria dell'evento $T < T_A$ si ottiene conoscendo il numero N_A di realizzazioni di T inferiori a T_A ed applicando la (3.1). Se T_A è arbitrario (in sostanza se ci si domanda quale sia questa probabilità per ogni possibile valore di T_A):

$$F(T_A) = \lim_{M\to\infty} \frac{N_A}{M} \qquad [3.2]$$

è una funzione di T_A che prende il nome di *funzione di distribuzione cumulata* (*CDF*). Ciò che abbiamo detto per la temperatura potenziale vale per qualsiasi altra variabile stocastica. Come esempio, la **Fig. 3.1** mostra la CDF di 36000 realizzazioni quasi contemporanee di temperatura. In essa si nota come la conoscenza della *CFD* consenta di ottenere informazioni preziose sulla variabile T. In effetti, anche se una generica realizzazione θ avrebbe potuto assumere qualsiasi valore reale, nella realtà c'è oltre il 50% di probabilità che essa valga non più di 299.4K (cioè circa la metà delle realizzazioni presenta un valore non superiore a 299.4K). Comunque, non ci potranno mai essere realizzazioni con valore inferiore a 297K (evento impossibile). Inoltre, si nota come la *CDF* sia una funzione non decrescente, come è facile dimostrare in generale.

Riassumendo e generalizzando, si può affermare che la *CDF* di una variabile stocastica deve possedere le seguenti proprietà:

- $F(-\infty) = 0$, cioè l'evento è impossibile. Non è quindi possibile che una realizzazione della variabile stocastica stia al di fuori del proprio spazio delle fasi;

- $F(+\infty) = 1$, cioè l'evento è certo. Si afferma quindi che una qualsiasi realizzazione di questa variabile certamente assumerà un valore entro lo spazio delle fasi;
- $F(T_A) \geq F(T_B)$, se $T_A \geq T_B$, cioè la *CDF* è una funzione non decrescente;
- $F(T_A) - F(T_B) = P\{ T_A > \theta \geq T_B\} \geq 0$.

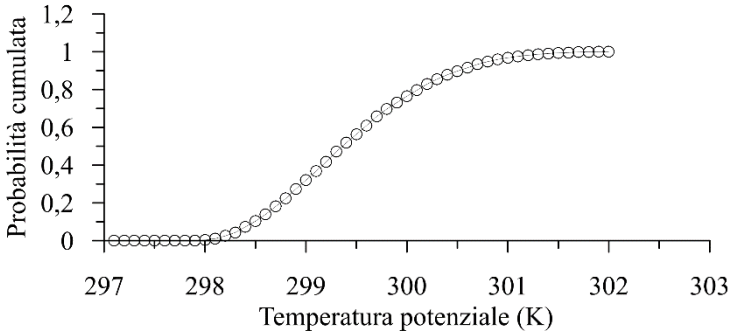


Fig. 3.1: esempio di Funzione di Distribuzione Cumulata (CDF) per la temperatura

Sulle caratteristiche analitiche della *CDF* in generale non si può dire molto. Potrebbe essere una funzione continua ed infinitamente derivabile, ma potrebbe anche non esserlo. Potrebbe anche avere forme strane come, per esempio, essere la somma di una funzione continua e derivabile con funzioni Delta di Dirac o con funzioni a gradino poste in vari punti dello spazio delle fasi con notevoli complicazioni nella manipolazione analitica della *CDF*. Senza peccare in eccessivo ottimismo, nell'ambito della fisica del *PBL* il considerare continue e derivabili le *CDF* delle variabili meteorologiche è un'ipotesi decisamente aderente alla realtà dei fatti.

3.1.1.3 La Funzione di Distribuzione di Probabilità

Dalla *funzione di distribuzione cumulata F* si può ottenere un'ulteriore funzione di estrema utilità, la *funzione di densità di probabilità PDF*. Per definirla (anche se in maniera poco rigorosa) si consideri ancora la variabile stocastica *T* caratterizzata dalla propria *CDF* indicata come $F(\cdot)$. La probabilità che una sua realizzazione θ stia nell'intervallo $T_A + \Delta T$ e T_A è sicuramente pari a:

$$P\{T_A + \Delta T > \theta \geq T_A\} = F(T_A + \Delta T) - F(T_A) \qquad [3.3a]$$

come risulta dall'ultima delle proprietà elencate per la *CDF*. Se poi ΔT tende a zero, si ha la definizione di *PDF*, indicata col simbolo $p(\cdot)$:

$$p(T_A) = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{P\{T_A + \Delta T > \theta \geq T_A\}}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{F(T_A + \Delta T) - F(T_A)}{\Delta T} \qquad [3.3b]$$

che è quindi il rapporto tra la probabilità cumulata relativa all'intervallo ΔT e l'intervallo stesso, quindi una *densità*. Come si nota, la *PDF* non è adimensionale, ma ha le dimensioni dell'inverso della dimensione propria della variabile stocastica considerata. La *PDF* è l'essenza di una variabile stocastica, infatti, *X* è una variabile stocastica se e solo se esiste una *PDF* associata tale che $p(x)\cdot dx$ è pari alla probabilità che una sua realizzazione assuma un valore compreso tra *x* e $x + dx$. In tal caso si dice che la *variabile stocastica X è distribuita secondo la distribuzione p*. Oltre a ciò, dalla (3.3b) si nota che, se *F* è una funzione continua e derivabile, allora $p(x)$ ne è la derivata.

Non è possibile in generale individuare a priori quale possa essere la *PDF* di una variabile stocastica *X*. Se, però, si effettuano *N* campionamenti e se n_i è il numero di realizzazioni con valore compreso tra $x_i - \Delta x/2$ e $x_i + \Delta x/2$, il rapporto $f_i = n_i/N$ rappresenta la *frequenza campionaria* con cui una realizzazione di *X* cade nell'intervallo finito considerato. Ci si aspetta, inoltre, che f_i si avvicini *asintoticamente* ad un numero specifico e che sia una funzione ad andamento regolare (*smooth*) dell'intervallo Δx. Si può dimostrare che, al tendere di *N* all'infinito, la *PDF* è data da:

$$p(x) = \lim_{N\to\infty}\left(\lim_{\Delta T\to 0}\frac{f_i}{\Delta x}\right) \qquad [3.3c]$$

Si può anche dimostrare che questa procedura di stima campionaria di una *PDF* è un buon stimatore della *PDF* vera. Nella **Fig. 3.2** viene mostrata la *PDF* delle realizzazioni di temperatura che hanno condotto alla *CFD* di **Fig. 3.1**. Da essa si vede come, una volta individuata la *PDF*, tutto sia molto più chiaro: anche se una qualsiasi realizzazione di *T* potrebbe avere un valore qualsiasi, è decisamente *più probabile* che tale valore rientri nell'intervallo 298 ÷ 301 K e che sia vicino a 299.5 K. È immediato poi verificare come la *PDF* sia caratterizzata dalle proprietà seguenti:

$$\text{a)}\quad p(x) = \frac{dF(x)}{dx},$$

$$\text{b)}\quad p(x) \geq 0,$$

$$\text{c)}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot dx = 1, \qquad [3.3d]$$

$$\text{d)}\quad \int_{a}^{b} f(x)\cdot dx = F(b) - F(a)$$

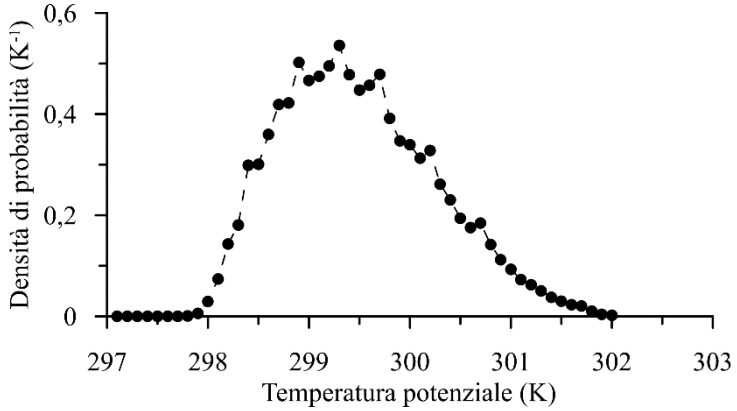


Fig. 3.2: densità di probabilità campionaria per la temperatura potenziale caratterizzata dalla CFD di Fig. 3.1

La prima proprietà definisce la *parentela operativa* tra *CDF* e *PDF*, consentendo di passare da una funzione all'altra con estrema semplicità. Evidentemente è stata scritta ipotizzando che *F* fosse una funzione continua e derivabile, condizione normalmente soddisfatta dalle variabili meteorologiche. La seconda proprietà deriva direttamente dalla prima: se la *CDF* è una funzione non decrescente, la sua derivata, cioè la *PDF*, non può che essere non negativa. La terza proprietà è la *condizione di normalizzazione*; in parole povere, asserisce con molto buon senso che qualche valore questa benedetta variabile dovrà pur averlo. La quarta proprietà è ancora una volta una relazione analitica tra *CDF* e *PDF*, ma questa volta di tipo integrale e decisamente più operativa. Tutto ciò non è formalmente rigoroso. Proprio perché non possiamo essere certi che le proprietà analitiche della *CDF* siano tali da consentire le operazioni di derivata e di integrale nel senso convenzionale del termine (l'integrale di Rienmann, per essere chiari), sarebbe necessario operare in maniera differente. In particolare, la probabilità che una realizzazione della variabile stocastica *T* abbia valore compreso tra T_* e T_*+ *dT* può essere indicata come:

$$dF(T_*) = F(T_* + dt) - F(T_*) \qquad [3.3e]$$

A questo punto, l'ultima delle condizioni (3.3d) può essere scritta come:

$$\int_{T_B}^{T_A} dF(T) = F(T_A) - F(T_B) \qquad [3.3f]$$

dove il segno di integrale indica ora l'*integrale di Rienmann-Stieltjes*; nell'**Appendice 3** vengono presentate sinteticamente la sua definizione e le caratteristiche salienti che lo caratterizzano.

La Statistica dimostra che la conoscenza della *PDF* di una variabile stocastica comporta la conoscenza completa del sue caratteristiche statistiche.

Concludiamo, ora, con una curiosità importante. Consideriamo la funzione generalizzata (*distribuzione*) Delta di Dirac $\delta(x\text{-}x_0)$ che può essere definita come:

$$\begin{cases} \delta(x - x_0) = 0 & se\ x \neq x_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \cdot dx = 1 & se\ x = x_0 \end{cases} \qquad [3.4a]$$

oppure, se $f(\cdot)$ è una funzione generica:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \delta(x - x_0) \cdot dx = f(x_0) \qquad [3.4b]$$

In **Appendice 3** sono presentate le altre caratteristiche di questa funzione. Se confrontiamo la (3.4a) con le caratteristiche proprie di una *PDF*, ci accorgiamo la Delta di Dirac le soddisfa tutte. Quindi, per una variabile stocastica *X* distribuita seconda una Delta di Dirac risulta che:

$$P\{x \in [a,b]\} = \int_a^b \delta(x - x_0) \cdot dx = \begin{cases} 1, & se\ x_0 \in [a,b] \\ 0, & se\ x_0 \notin [a,b] \end{cases} \qquad [3.4c]$$

In parole povere, la probabilità di trovare una realizzazione di *X* in un generico intervallo è 1 o 0 a seconda che tale intervallo contenga o meno x_0. Chiaramente ciò implica che il valore di *X* deve essere esattamente x_0 e che quindi la variabile *X* è una variabile deterministica. A questo punto potremmo azzardarci ad affermare che ogni variabile deterministica è una variabile stocastica distribuita secondo una Delta di Dirac.

3.1.1.4 La media, la varianza ed i momenti

L'individuazione della *PDF* di una variabile stocastica consente di evidenziare quali siano i valori più probabili di una sua eventuale realizzazione. Da qui ad individuare un *valore caratteristico* delle sue realizzazioni ed il modo con cui tali realizzazioni si distribuiscono attorno a questo valore il passo è breve. In pratica, ciò che si sta cercando è un metodo alternativo per descrivere la *PDF*: invece di darne la forma funzionale, si tenta di definire una serie di *indicatori* (indicatori statistici) che ne descrivono completamente le caratteristiche. Tali indicatori, nel caso ipotetico in cui sia possibile avere la disponibilità di tutte le possibili realizzazioni della variabile stocastica, sono delle grandezze deterministiche.

Si consideri una variabile stocastica *X* con generica realizzazione *x*, caratterizzata da una *PDF* $p(x)$. Si definiscono *momenti di ordine n* le quantità seguenti:

$$B_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot p(x)\, dx = E[x^n] = \overline{x^n} \qquad [3.5a]$$

Conviene fare alcune considerazioni. La prima riguarda l'integrale nella (3.5a). A rigore dovrebbe essere un integrale di Rienmann-Stieltjes, tuttavia per semplicità espositiva continuiamo a mantenere la tipica notazione dell'integrale di Rienmann, visto che ci aspettiamo *PDF* (e quindi *CDF*) analiticamente poco complicate. Questa ipotesi verrà mantenuta nel seguito. La seconda osservazione si riferisce all'operatore $E[\cdot]$ che è sicuramente l'operatore più importante di tutta la Statistica e che, applicato ad una variabile stocastica *X* (che può essere l'insieme completo di tutte le realizzazioni *x* o funzioni delle stesse), porta ad individuarne il *valore atteso* (*expectation*) o *valor medio statistico*. Il valore atteso non è il valore più probabile della variabile, ma è quello che si

ottiene *pesando* tutti i possibili valori che può assumere una realizzazione della variabile con la rispettiva probabilità di occorrenza, quindi è il valore caratteristico, cioè il valore che *ci aspetteremmo* da essa e che tiene conto della dinamicità della variabile nello spazio delle fasi. Tipograficamente, l'operatore $E[\cdot]$ spesso viene sostituito da una barra sovrapposta, simbolo universalmente noto per valor medio. Dalla definizione (3.5a) si vede come l'integrale sia strettamente positivo quando n è pari, quindi si ha che:

$$B_{2n} = E[x^{2n}] = \overline{x^{2n}} \qquad [3.5b]$$

Secondo un noto Teorema della Statistica, la conoscenza di tutti gli infiniti momenti di una distribuzione equivale alla conoscenza completa della PDF. A prima vista parrebbe di non aver guadagnato nulla introducendo i momenti (le difficoltà operative paiono del tutto identiche), ma come si vedrà nel seguito ciò non è completamente vero.

Di tutti i momenti descritti dalla relazione (3.5a), il più importante è sicuramente il *momento del primo ordine*, detto media (*media di insieme* o *valor medio*) definito come:

$$\mu_X = \bar{x} = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) \cdot dx \qquad [3.5c]$$

È interessante notare come la media d'insieme sia un concetto *totalmente deterministico* che potremmo esprimere così: *quali siano i valori che assumeranno le realizzazioni di una variabile stocastica X non è possibile dirlo con precisione, ma sicuramente il valore più rappresentativo dell'intera distribuzione statistica è il suo valor medio d'insieme.*

La conoscenza della media d'insieme di X (cioè del suo valore atteso) consente ora di introdurre l'importante concetto di *fluttuazione di una realizzazione attorno al valor medio*, concetto su cui si fonda, di fatto, tutta la Micrometeorologia. Si definisce X' di una variabile X la variabile stocastica la cui generica realizzazione è data da:

$$x' = x - \mu_X \qquad [3.6a]$$

L'introduzione del concetto di fluttuazione rispetto al valor medio inizia a spostare l'attenzione dal comportamento dell'intera variabile alle irregolarità, più o meno marcate, che le sue realizzazioni mostrano attorno al proprio valore caratteristico.

Dal concetto di fluttuazione, si possono derivare nuovi tipi di momenti, decisamente più familiari ed operativi, i *momenti centrali di ordine n* che di fatto sono i momenti delle fluttuazioni rispetto al valore atteso dalla variabile stocastica e che formalmente sono definiti come:

$$b_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^n \cdot p(x)\, dx = E[(x')^n] = \overline{(x')^n} \qquad [3.6b]$$

Anche in questo caso è facile vedere come i momenti pari siano non negativi. Si può dimostrare che, *nel caso in cui siano noti il valor medio di insieme e tutti gli infiniti momenti centrali, la distribuzione di una generica variabile stocastica risulta totalmente nota.*

Di tutti gli infiniti momenti centrali che si possono ottenere con la (3.6b) solo tre di essi (oltre al valor medio) sono di interesse pratico ed universalmente noti:

- il primo di essi è il *momento centrale del secondo ordine* o *varianza* σ^2, definito come:

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot p(x)\, dx \qquad [3.7a]$$

  che *quantizza* la *dispersione* delle diverse realizzazioni di una variabile stocastica rispetto al proprio valor medio. È immediato verificare che essa ha le dimensioni del quadrato delle dimensioni della variabile stocastica. Dalla varianza si ottiene la *deviazione standard* σ_X, la radice quadrata della varianza, che ha le medesime dimensioni della variabile stocastica considerata e che visualizza meglio la dispersione delle singole realizzazioni

rispetto al valore atteso. Un altro indicatore molto utilizzato nello studio della turbolenza, strettamente legato alla deviazione standard, è il rapporto tra la deviazione standard ed il valore atteso, cioè l'*intensità della turbolenza* (grandezza adimensionale) definita come:

$$I_X = \sigma_X / \mu_X \qquad [3.7b]$$

- la varianza (e quindi anche la deviazione standard) non è in grado di descrivere la *simmetria* della distribuzione. Ciò viene fatto, invece, dal *momento centrale del terzo ordine*, normalizzato dalla deviazione standard, noto come *Skewness* e definito da:

$$Sk = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\mu_X)^3}{\sigma_X^3} \cdot p(x)\, dx \qquad [3.8]$$

  Quando tale parametro assume valori positivi, la distribuzione della variabile stocastica è asimmetrica con la *coda* rivolta verso destra ed è quindi più probabile avere valori elevati positivi della variabile piuttosto che valori elevati negativi. Se, invece, è negativa, la coda della distribuzione è localizzata alla sinistra del valor medio. Se una distribuzione è totalmente simmetrica rispetto al valor medio, deve presentare un valore di *Skewness* nullo. Si noti come la *Skewness* sia adimensionale.

- la *kurtosis* è il un momento centrale del *quarto ordine*, normalizzato dalla deviazione standard, che quantifica il *grado di piattezza* della distribuzione. Tanto minore è il valore di *Kurtosis*, tanto più piatta è la distribuzione. La sua definizione è:

$$Kurt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\mu_X)^4}{\sigma_X^4} \cdot p(x)\, dx \qquad [3.9]$$

  Per come è definito, anche questo parametro è adimensionale.

È possibile mettere in relazione i momenti generici con i momenti centrali. Infatti, sviluppando i conti, è facile verificare che:

$$\begin{gathered} b_1 = 0 \\ b_2 = B_2 - B_1^2 \\ b_3 = B_3 - 3B_1B_2 + 2B_1^3 \\ b_4 = B_4 - 4B_1B_3 + 6B_1^2B_2 - 3B_1^4 \end{gathered} \qquad [3.10]$$

Da ultimo, nelle applicazioni sia pratiche che teoriche è spesso comodo trattare variabili stocastiche aventi media nulla e varianza unitaria. Per arrivare a ciò è sempre possibile definire la *variabile standardizzata* corrispondente così definita:

$$\hat{X} = (X - \bar{X})/\sigma_X \qquad [3.11a]$$

la cui *PDF* risulta pari a:

$$\hat{p}(\hat{x}) = \sigma_X \cdot p(\bar{x} + \sigma_X \cdot x) \qquad [3.11b]$$

ed i cui momenti centrali sono:

$$\widehat{b_n} = b_n / \sigma_X^n \qquad [3.11c]$$

Ci si trova quindi ad aver a disposizione due modi diversi per descrivere il comportamento di una variabile stocastica: il primo prevede la conoscenza analitica della *PDF*, mentre il secondo prevede la conoscenza del valor medio statistico e degli infiniti momenti centrali (o in alternativa degli infiniti momenti non centrali). Quale metodologia adottare? Se per considerazioni puramente teoriche non ci sono dubbi sul fatto che l'uso diretto della *PDF* presenta innegabili vantaggi, la conoscenza del valor medio e dei momenti centrali permette di affrontare il problema della turbolenza atmosferica in maniera operativamente più efficace e questo per due motivi. Il primo motivo si fonda su una *speranza* che i fatti praticamente confermano: è sperabile che solo alcuni dei momenti centrali siano significativi per descrivere operativamente con sufficientemente fedeltà la *PDF* di una variabile turbolenta. Se ciò fosse confermato dalle osservazioni, basterebbe

raggiungere una buona conoscenza del valor medio e di alcuni dei momenti centrali delle variabili che descrivono la turbolenza atmosferica per poterne affrontare una realistica descrizione statistica. In pratica, ciò ci permetterebbe di *chiudere* un problema teoricamente senza fine. Alla luce dei fatti, questa ipotesi operativa sembra sufficientemente corretta e, ancor più interessante, i momenti coinvolti sono al massimo quelli del quarto ordine. Il secondo motivo risiede nel fatto che la determinazione dei momenti è semplice e può essere fatta a partire dalle realizzazioni della variabile, come vedremo al punto 3.1.1.7.

3.1.1.5 Alcune distribuzioni notevoli

Le *PDF* (e quindi anche le *CDF*) possono essere a priori di qualsiasi tipo. Ne esistono però alcune che hanno un'importanza teorica e pratica notevole e a cui si approssimano le distribuzioni delle variabili caratteristiche della turbolenza del *PBL*. Qui di seguito si presentano gli esempi più significativi.

La distribuzione uniforme

Una variabile stocastica *X* con realizzazioni *x* è distribuita secondo una *Distribuzione Uniforme* se, dato uno spazio campionario costituito dall'intero insieme dei numeri reali ed individuati due interi *a* e *b* (*a* < *b*), si ha che:

$$p(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & per\ \ a \le x < b \\ 0 & per\ \ x < a\ \ oppure\ x \ge b \end{cases} \qquad [3.12a]$$

Una variabile stocastica di questo tipo può assumere valori compresi solo tra *a* e *b* aventi tutti la medesima probabilità. È immediato ottenere analiticamente la cumulata, data da:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & per\ x < a \\ (x-a)/(b-a) & per\ \ a \le x < b \\ 0 & per\ x \ge b \end{cases} \qquad [3.12b]$$

Utilizzando queste definizioni, è facile mostrare che:

$$\mu = \frac{1}{2}(a+b) \qquad \sigma^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2$$
$$Sk = 0 \qquad Kurt = 1.8$$

La distribuzione esponenziale

Una variabile stocastica è descritta da una *Distribuzione Esponenziale* quando, definito un parametro reale positivo λ, la sua *PDF* è data da:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} & per\ x \ge 0 \\ 0 & per\ x < 0 \end{cases} \qquad [3.13a]$$

e la cui Cumulata è:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\lambda} & per\ x \ge 0 \\ 0 & per\ x < 0 \end{cases} \qquad [3.13b]$$

Si può dimostrare che il valore medio e la varianza di una distribuzione esponenziale sono rispettivamente pari a λ e a λ^2, mentre i generici momenti di ordine *n* sono dati da:

$$B_n = n!\,\lambda^n \qquad [3.13c]$$

La distribuzione normale

La distribuzione più nota ed utilizzata in Fluidodinamica e nella Teoria degli Errori è sicuramente la *Distribuzione Normale* o *Gaussiana.* Una variabile stocastica *X* con media μ e deviazione standard σ è distribuita secondo tale distribuzione quando la propria *PDF* è espressa come:

$$p(x) = N(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-\mu)^2/\sigma^2} \qquad [3.14a]$$

Per questa distribuzione $Skew = 0$, $Kurt = 3$ e tutti i momenti dispari (eccetto la media) sono nulli. La sua cumulata è, inoltre, espressa dalla relazione:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}\right] dt = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] \qquad [3.14b]$$

in cui è presente la funzione speciale *erf* (*Error Function*) le cui proprietà sono riportate sinteticamente in **Appendice 3**.

Una forma più conveniente della distribuzione normale la si ottiene impiegando la variabile standardizzata *Z* la cui generica realizzazione è:

$$z = \frac{(x-\mu)}{\sigma} \qquad [3.15]$$

È facile mostrare come *Z* sia distribuita secondo una Normale a media nulla e varianza unitaria.

La distribuzione Log-Normale

Se una variabile stocastica *X* è distribuita secondo una Normale con media μ e deviazione standard σ, allora la variabile stocastica *Y*, definita come:

$$Y = exp(X) \qquad [3.16a]$$

è distribuita secondo una distribuzione *Log-Normale*. Se si indica con *y* una sua realizzazione, la *PDF* relativa è data da:

$$f(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left[-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad [3.16b]$$

Si rimanda ad un testo di Statistica per le proprietà caratteristiche di una tale distribuzione.

3.1.1.6 Il cambio di variabili

Sia *X* una variabile stocastica con *PDF* pari a *p*(*x*) e sia *G*(*X*) un'altra variabile stocastica la cui generica realizzazione *g*(*x*) sia una funzione continua ad un solo valore reale della realizzazione *x*. Un esempio di funzione *G*(*X*) è la variabile normalizzata (3.15a). L'obiettivo è determinare la *PDF* *p*(*g*) noto *p*(*x*).

Se la funzione inversa *x*(*g*) è anch'essa una funzione continua ad un solo valore reale, allora:

$$p(g) = \frac{p(x)}{|dg/dx|} \qquad [3.17a]$$

Se invece *x*(*g*) è una funzione a *n*-valori (*n* intero) allora:

$$p(g) = \frac{n \cdot p(x)}{|dg/dx|} \qquad [3.17b]$$

Esercizio 3.1

Sia *X* una variabile distribuita secondo una Normale con media μ e varianza σ^2. Si determini la *PDF* delle due variabili stocastiche le cui realizzazioni sono, rispettivamente:

$$z = (x-\mu)/\sigma \qquad y = e^x$$

1) Consideriamo il primo caso. Si ha che:

$$\frac{dz}{dx} = \sigma^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad p(z) = \frac{p(x)}{1/\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

2) Consideriamo il secondo caso. Si ha che:

$$\frac{dy}{dx} = e^x \qquad \Rightarrow \qquad p(y) = \frac{p(x)}{e^x} = \frac{1}{y \cdot \sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x - \mu)^2/2\sigma^2}$$

Esercizio 3.2

Sia Φ una variabile stocastica che rappresenta l'angolo di fase di una funzione seno di *X*. Sia poi ϕ una realizzazione della variabile Φ e *x* una realizzazione di *X*, data da:

$$x = A \cdot \sin(2\pi f_0 t_0 + \phi)$$

dove *A*, f_0 e t_0 sono tutte costanti. Supponiamo, inoltre, che Φ sia distribuita secondo una distribuzione uniforme, cioè:

$$p(\phi) = \begin{cases} (2\pi)^{-1} & \text{se} \quad 0 \le \phi \le 2\pi \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo caso la funzione inversa ha due valori reali. Dato che:

$$\frac{dx}{d\phi} = A\cos(2\pi f_0 t_0 + \phi) = A\sqrt{1 - \sin^2(2\pi f_0 t_0 + \phi)} = \sqrt{A^2 - x^2}$$

quindi:

$$p(x) = \frac{2\,p(\phi)}{dx/d\phi} = \begin{cases} \pi\left(\sqrt{A^2 - x^2}\right)^{-1} & \text{se} \quad |x| < A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

3.1.1.7 La stima campionaria della media e dei momenti centrali

Definiti i momenti di una distribuzione e sapendo che la loro conoscenza equivale alla conoscenza della *PDF*, è necessario ora rendere operativo il loro uso, cioè bisogna rispondere alla domanda: *come fare a calcolarli al meglio senza conoscere la PDF, dalla sola conoscenza delle realizzazioni indipendenti ottenuti ripetendo N volte un esperimento ideale (campionamento) nelle medesime condizioni?* Questo è l'argomento che ci accingiamo a trattare, definendo gli *operatori* (*stimatori*) che, agendo sulle realizzazioni di una variabile stocastica, producono una *stima* dei suoi vari momenti. Ci limiteremo qui ad individuare stimatori del valor medio e dei principali momenti centrali e, successivamente, ci accorgeremo che ciò è del tutto sufficiente. Procederemo trascurando un po' il rigore formale e privilegiando gli argomenti euristici, seguendo prevalentemente quanto proposto da von Storch e Zwiers (1999, pag. 80-83).

Si consideri una variabile stocastica scalare *X* e le sue *N* realizzazioni indipendenti ottenute da un esperimento ideale x_i, i = 1,2,.., *N*. Si consideri, in primo luogo, il suo *valore atteso*:

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x)\, dx \qquad [3.18a]$$

Si ipotizzi, inoltre, che le *N* realizzazioni siano organizzate in ordine crescente, cioè che per ogni generico indice i valga la relazione $x_{i-1} < x_i$. Il metodo per individuare un suo stimatore campionario si basa nel suddividere l'intero asse reale da -∞ a +∞ (che rappresenta il più generale spazio delle fasi possibile per una variabile stocastica scalare) in opportuni sottospazi (sotto-intervalli): il primo da -∞ a $(x_1+x_2)/2$, il secondo da $(x_1+x_2)/2$ a $(x_2+x_3)/2$ e così via fino all'ultimo che andrà da $(x_{N-1}+x_N)/2$ a +∞. Fatto ciò, si riscriva l'integrale (3.18a) spezzandolo in tanti sotto-integrali quanti sono i sottospazi individuati:

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{(x_1+x_2)/2} x \cdot p(x)\, dx + \sum_{i=2}^{N-1} \left\{ \int_{(x_{i-1}+x_i)/2}^{(x_i+x_{i+1})/2} x \cdot p(x)\, dx \right\} + \int_{(x_{N-1}+x_N)/2}^{+\infty} x \cdot p(x)\, dx \qquad [3.18b]$$

Ognuno dei sotto-integrali presenti nella sommatoria lo si può approssimare utilizzando la *CDF* ed una forma un po' *brutale* del Teorema della Media, ottenendo:

$$\int_{(x_{i-1}+x_i)/2}^{(x_{i1}+x_{i+1})/2} x \cdot p(x)dx \cong x_i \left[F_X\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) - F_X\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \right] \qquad [3.18c]$$

$$\int_{-\infty}^{(x_1+x_2)/2} x \cdot p(x)dx \cong x_1 \left[F_X\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - 0 \right] \qquad [3.18d]$$

$$\int_{(x_{N-1}+x_N)/2}^{+\infty} x \cdot p(x)dx \cong x_N \left[1 - F_X\left(\frac{x_{N-1} + x_N}{2}\right) \right] \qquad [3.18e]$$

visto che $F_X(+\infty) = 1$. Ogni sottospazio delle fasi su cui opera ogni singolo sotto-integrale, per costruzione, contiene una sola realizzazione e quindi la differenza tra le *CDF* presenti nei vari integrali vale sempre $1/N$. Ciò comporta che una stima del valore atteso $\widehat{\mu_X}$ sarà data dalla semplice media aritmetica delle realizzazioni, cioè da:

$$\mu_X \cong \widehat{\mu_X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \qquad [3.19a]$$

Quindi lo stimatore del valore atteso di una variabile stocastica è la media aritmetica delle sue realizzazioni. Con procedimento analogo si giunge alla stima dei momenti di ogni ordine:

$$B_n \cong \widehat{B_n} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i)^n \qquad [3.19b]$$

Per quanto riguarda i momenti centrali, si giunge ai relativi stimatori, in generale, impiegando le relazioni esistenti tra momenti centrali e non centrali. In particolare, per la varianza si avrà:

$$\sigma^2 \cong s_b^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu_X)^2 \qquad [3.19c]$$

Si noti che abbiamo usato un simbolo inconsueto per indicare la stima della varianza e ciò sarà più chiaro nel seguito. Per la *Skewness* e la *Kurtosis*, i relativi stimatori sono:

$$Sk \cong \hat{S} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \mu_X)^3}{s_b^3} \qquad Kurt \cong \hat{K} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \mu_X)^4}{s_b^4} \qquad [3.19d]$$

Definiti in questo modo gli stimatori, ci si domanda quanto essi siano *buoni*. A tale scopo possiamo introdurre due concetti:

- il concetto di ***distorsione*** (***bias***): è desiderabile che il valore atteso della stima di un parametro statistico Φ (valor medio, varianza, ecc.) di una variabile stocastica, ottenuto mediante uno stimatore, coincida col vero valore del parametro, cioè che $E[\Phi] = \Phi$. Uno stimatore che rispetta questa condizione si dice *stimatore non distorto* (*unbiased*)

- è desiderabile che lo scarto quadratico medio tra tale stimatore $\hat{\Phi}$, basato su un insieme di N realizzazioni indipendenti, ed il valore vero tenda a zero al tendere all'infinito della numerosità dell'insieme delle realizzazioni, cioè:

$$\lim_{N\to\infty} E\left[\left(\hat{\Phi}-\Phi\right)^2\right]=0$$

Uno stimatore che possiede la proprietà di correttezza asintotica è detto essere uno stimatore *consistente*.

Si consideri lo stimatore *media statistica* e se ne valuti il valore atteso. In effetti se eseguissimo *N* volte un esperimento ideale ottenendo *N* realizzazioni indipendenti della variabile stocastica *X* e se ripetessimo *M* volte tutto ciò, sempre nelle medesime condizioni sperimentali, otterremmo *M* stima $\widehat{\mu_X}$ (a priori differenti) di μ_X. Tuttavia, è facile mostrare come lo stimatore della media statistica sia *unbiased* e consistente. Se invece si considera lo stimatore della varianza si dimostra come esso sia *biased*. È facile però mostrare come il nuovo stimatore della varianza dato da:

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_X)^2 \qquad [3.20]$$

sia invece uno stimatore non distorto, il più usato nella pratica corrente.

Per concludere, campionate *N* realizzazioni x_k della variabile stocastica *X*, l'uso degli stimatori consente di ottenere *una* stima dei parametri statistici di interesse. Concentriamo l'attenzione sul valore atteso di *X* (per gli altri momenti valgono le medesime considerazioni). La variabile *X* possiede sicuramente un valor medio *vero* μ_X che però non è noto. Il campionamento di *N* sue realizzazioni consente di ottenerne una stima che, però, dipende sia dall'aver realizzato un campionamento che produce *N* realizzazioni, sia dalle specifiche *N* realizzazioni ottenute in quel campionamento. Ripetendo il campionamento *M* volte, la stima del valor medio di quella variabile generalmente varierà. Quindi, la stima è di fatto la realizzazione di una variabile stocastica che rappresenta il campionamento di *N* realizzazioni della variabile *X*. Solo quando la numerosità del campione tende all'infinito, stima e valore vero del valore atteso coincidono. Perciò, mentre μ_X è una quantità deterministica, ogni sua stima ha caratteristiche stocastiche. Qui non tratteremo l'importante problematica dell'incertezza della stima: in von Storch e Zwiers (1999) ne è data un'eccellente trattazione. Presenteremo solo nel Cap. 12 (Vol. 2) alcuni di questi concetti trattando il problema della misura delle variabili meteorologiche.

3.1.1.8 La dipendenza tra variabili stocastiche

Fin qui si è considerata una variabile stocastica isolata, campionata in un punto dello spazio e ad un certo istante e questa situazione ricorda molto quella in cui ci si trova nel realizzare una misura. Spesso, però, si devono trattare due o più variabili stocastiche campionate contemporaneamente, per esempio le cui tre componenti cartesiane del vettore vento che sono un ottimo esempio di *variabili stocastiche congiunte* (*joint random variables*) normalmente misurate contemporaneamente. L'importante di questa situazione è il fatto che tra le variabili ci può essere o meno *un grado di dipendenza reciproca* e che tale dipendenza deve essere in qualche modo formalizzata e quantificata. Tra l'altro, il modello fluidodinamico dell'atmosfera fornisce delle relazioni che mostrano l'influenza reciproca tra variabili meteorologiche e ciò garantisce che tra di esse ci deve essere una mutua dipendenza. Per semplificare, qui di seguito tratteremo prevalentemente il caso di due variabili congiunte (per esempio la componente trasversale *v* e la componente verticale *w* del vento). L'estensione al caso a più variabili è immediata.

Lo spazio delle fasi

Per due variabili stocastiche *V* e *W* (con realizzazioni istantanee, rispettivamente, *v* e *w*) lo spazio delle fasi è una porzione di piano delimitato, in linea di principio, da valori massimi e minimi ammessi dalla fisica del problema per le due variabili considerate. Nel caso in esame, lo spazio delle fasi, a priori, potrebbe essere l'intero piano anche se, eseguendo un esperimento ideale che fornisce ogni volta una coppia di realizzazioni (*v*,*w*), si ottiene, come si vede nella **Fig. 3.3**, uno

scatter-plot che è sostanzialmente un'ellisse con semiasse maggiore di circa 4 $m \cdot s^{-1}$ e semiasse minore di circa 2 $m \cdot s^{-1}$. Nel caso più generale in cui le variabili congiunte siano più di due, il relativo spazio delle fasi avrà dimensione pari al numero delle variabili.

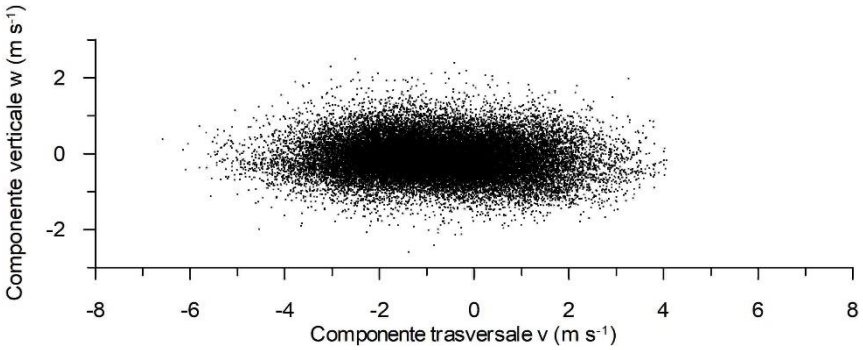


Fig. 3.3: spazio delle fasi della componente trasversale v e verticale w del vento ottenuto da un esperimento reale nel PBL convettivo (36000 coppie di realizzazioni)

La densità di probabilità e la cumulata

La *CFD* delle due variabili stocastiche congiunte *V* e *W* è definita come la probabilità che la coppia di realizzazioni *v* (della variabile *V*) e *w* (della variabile *W*) siano contemporaneamente inferiori rispettivamente ad un valore *a* e ad un valore *b*; in sintesi:

$$F_{VW}(a,b) = P[v < a, w < b] \qquad [3.21a]$$

Chiaramente F_{VW} è una funzione non decrescente di ciascuno dei propri argomenti, cioè:

$$F_{VW}(a + \delta a, b + \delta b) \geq F_{VW}(a,b) \qquad [3.21b]$$

L'uso della cumulata nel caso multivariato è abbastanza scomodo e raro e si preferisce riferirsi alla *PDF*. La definizione di *densità di probabilità congiunta* $p_{VW}(v,w)$ è la seguente:

$$F_{VW}(a,b) = \lim_{\substack{\Delta v \to 0 \\ \Delta w \to 0}} \left[\frac{P[v < V \leq v + \Delta v \;\; AND \;\; w < W \leq w + \Delta w]}{\Delta v \cdot \Delta w} \right] \qquad [3.22]$$

da cui seguono alcune conseguenze importanti:

- la densità di probabilità congiunta è positiva, visto che la *CFD* è non decrescente;
- anche per la *PDF* congiunta vale la relazione di normalizzazione, cioè:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(v,w) \cdot dv \cdot dw = 1 \qquad [3.23a]$$

- dalla densità di probabilità congiunta è possibile ottenere le densità di probabilità delle variabili stocastiche singole con le relazioni seguenti:

$$p_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} p(v,w) \cdot dw \qquad p_W(v) = \int_{-\infty}^{\infty} p(v,w) \cdot dv \qquad [3.23b]$$

- tra la *CFD* e la *PDF* congiunta esiste la seguente relazione, se la *PDF* è integrabile:

$$F_{VW}[v,w] = \int_{-\infty}^{v} \int_{-\infty}^{w} p(\xi,\eta) \cdot dw \qquad [3.23c]$$

- tra la *PDF* e la *CFD* congiunta esiste la seguente relazione differenziale, nell'ipotesi che

la *CFD* sia differenziabile:

$$\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{\partial F_{VW}[v,w]}{\partial v}\right] = p(v,w) \qquad [3.23d]$$

- vale poi la relazione seguente:

$$P[v_{1a} \le v < v_{2a}; w_{1b} \le w < w_{2b}] = \int_{v_{1a}}^{v_{2a}} \int_{w_{1b}}^{w_{2b}} p(v,w) \cdot dv \cdot dw = \qquad [3.23e]$$

Chiaramente, non è possibile, in genere, ottenere analiticamente la funzione di densità di probabilità congiunta; tuttavia, la si può costruire in maniera campionaria in analogia a quanto detto trattando il caso monovariato. Se consideriamo l'esempio delle due variabili *V* e *W* (componente trasversale e verticale del vento), dalle realizzazioni mostrate nella **Fig. 3.3** è possibile ottenere la *PDF* campionaria relativa che è la superficie mostrata nella **Fig. 3.4.**

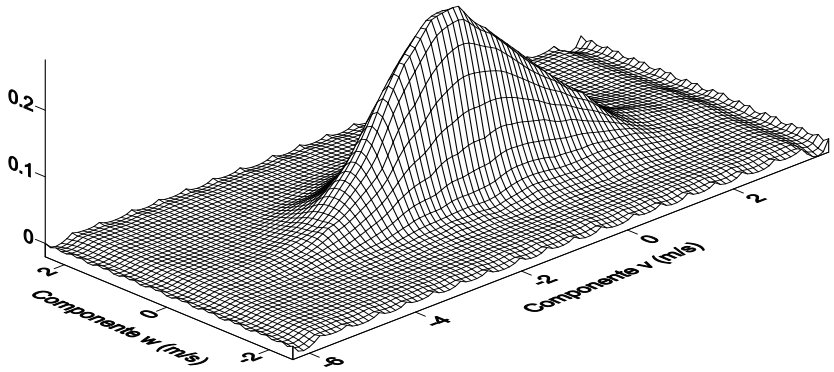


Fig. 3.4: densità di probabilità congiunta campionaria delle realizzazioni della componente trasversale e verticale del vento di Fig. 3.3

Una situazione importante è quella in cui:

$$p(v,w) = p(v) \cdot p(w) \qquad [3.24a]$$

che si ha quando le due variabili non dipendono in alcun modo una dall'altra (in sostanza non sono congiunte) e quindi sono ***statisticamente indipendenti***. In questo caso una relazione analoga vale anche per le *CFD*:

$$F_{VW}(v,w) = F_V(v) \cdot F_W(w) \qquad [3.24b]$$

L'estensione di questi ragionamenti al caso di tre o più variabili è sostanzialmente immediata.

La Covarianza e il Coefficiente di Correlazione

Anche per le variabili congiunte si possono definire i momenti di vario ordine, ma la loro definizione matematica è decisamente complessa. Va comunque detto che anche nel caso di *N* variabili congiunte, l'uso dei momenti (che sono infiniti) al posto della densità di probabilità non comporta alcuna perdita di completezza nella descrizione statistica. Tuttavia, come già detto, nei casi pratici non sono mai noti tutti i momenti e quindi si considerano solo alcuni momenti di ordine inferiore: ciò, naturalmente, non fornisce una descrizione univoca della distribuzione, ma ne descrive solo alcune particolari proprietà.

Operativamente, concentriamo ora la nostra attenzione sul più semplice (e più utile)

momento centrale del secondo ordine, la *covarianza*. Date due variabili stocastiche con realizzazioni x e y, essa è definita come:

$$C_{xy} = E[(x-\mu_X)(y-\mu_Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)\,p(x,y)\cdot dxdy \qquad [3.25a]$$

Dalla definizione si nota che se le due variabili stocastiche coincidono, $C_{xx} = \sigma_x^2$. Esiste un'importante relazione (il *Teorema della Covarianza*) tra la covarianza delle due variabili stocastiche e le rispettive deviazioni standard. Tale relazione afferma che:

$$\left|C_{xy}\right| \leq \sigma_X \sigma_Y \qquad [3.25b]$$

cioè che la covarianza, in modulo, non può mai essere superiore al prodotto delle deviazioni standard delle due variabili considerate.

Dal punto di vista operativo, come già fatto per il valore atteso e per la varianza di una variabile stocastica, è necessario individuare uno *stimatore non distorto* anche per la covarianza. Nel caso in cui da un esperimento ideale si ottengano N coppie di realizzazioni istantanee (x_i,y_i), per prima cosa è indispensabile stimare il valor medio delle due variabili coinvolte nella covarianza. Fatto ciò, lo stimatore non distorto cercato risulta essere dato dalla relazione:

$$\widehat{C_{xy}} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y) \qquad [3.25c]$$

Ora si hanno tutti gli elementi per quantificare il *grado di parentela* tra le due variabili. Essa è ovviamente data dalla covarianza tra le variabili, anche se questo indicatore è scomodo, visto che possiede come dimensioni il prodotto delle dimensioni delle due variabili. Per semplificare e quindi ottenere un indicatore adimensionale, è sufficiente dividere la covarianza per il prodotto delle deviazioni standard delle variabili ottenendo il *coefficiente di correlazione*:

$$\rho_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_X \sigma_Y} \qquad [3.26]$$

positivo quando la fluttuazione positiva (negativa) di una variabile è preferenzialmente associata ad una fluttuazione positiva (negativa) dell'altra e negativo viceversa. In generale, per come è definito, vale la relazione: $-1 \leq \rho_{xy} \leq +1$, detta *disequazione di Cauchy-Schwartz*. Se ρ_{xy} è zero, le due variabili sono *incorrelate*. Viceversa, se ρ_{xy} è +1 le due variabili sono *positivamente correlate* e se è pari a -1 lo sono *negativamente*. In generale, due variabili statisticamente indipendenti sono incorrelate, ma non è vero in generale il viceversa. L'intercambiabilità tra il termine incorrelato ed il termine statisticamente indipendente è possibile solo per variabili stocastiche con distribuzione Gaussiana.

3.1.1.9 Il teorema del Limite Centrale

Immaginiamo di condurre un esperimento *un po' meno ideale* di quanto ipotizzato in precedenza, consistente nel misurare una variabile meteorologica che ha spiccate caratteristiche stocastiche. Ad ogni esperimento essa fornirà una realizzazione e da tutte le realizzazioni disponibili si determinerà la funzione di densità di probabilità della variabile. Tuttavia, l'esperimento non è completamente ideale: lo strumento usato viene alimentato con una tensione elettrica che presenta fluttuazioni stocastiche attorno alla media (la tensione non è completamente stabilizzata) ed il risultato di ciò è che ad ogni realizzazione si sovrappone al segnale vero un *rumore stocastico* con *PDF* differente da quella della variabile di misura. Inoltre, il basamento su cui è posto lo strumento potrebbe vibrare stocasticamente attorno al punto di misura introducendo in essa ulteriore rumore caratterizzato da una *PDF* ancora differente. Se, poi, si indagasse ulteriormente, si individuerebbero altre fonti di rumore difficili da definire e quantificare. In pratica, tutti questi rumori, numerosissimi, difficilmente identificabili e con differenti *PDF*, si verranno a sovrapporre alla

misura. Ciò che alla fine otterremmo in questo esperimento *un po' meno ideale* è che invece di determinare la variabile stocastica *X* (come vorremmo), otterremmo una nuova variabile stocastica *Y* le cui realizzazioni sono date da:

$$y_i = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i \qquad [3.27a]$$

dove i coefficienti a_i sono numeri reali incogniti ed una delle *N* realizzazioni è quella della variabile *X* mentre le altre *N*-1 sono i rumori sovrapposti. A questo punto il valore atteso e la varianza del segnale perturbato *Y* saranno pari a:

$$\mu_Y = E[y_i] = E\left[\sum_{i=1}^{N} a_i x_i\right] = \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot E[x_i] = \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot \mu_i \qquad [3.27b]$$

$$\sigma_Y^2 = E[(y_i - \mu_Y)^2] = E\left[\sum_{i=1}^{N} a_i (x_i - \mu_i)^2\right] = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 \cdot \sigma_i^2 \qquad [3.27c]$$

Il valor medio della variabile misurata è pari quindi alla media pesata del valor medio della variabile vera e del valor medio dei vari rumori sovrapposti, mentre la varianza del valore misurato è la media delle varianze pesate col quadrato dei pesi con cui segnale vero e rumore si compongono nel segnale misurato. Tutto ciò è stato possibile grazie al fatto che la variabile stocastica misurata ed i rumori sovrapposti erano mutuamente indipendenti.

A fronte di una situazione come questa, cui si possono ricondurre molte altre situazioni reali, anche se apparentemente molto differenti, esiste il *Teorema del Limite Centrale* che consente di aggirare le evidenti ed apparentemente insormontabili difficoltà. In effetti, il *Teorema del Limite Centrale* afferma che, in condizioni molto generali, *la somma di N variabili stocastiche al tendere di N all'infinito è distribuita secondo una PDF Gaussiana (normale) con media μ_Y e varianza σ^2_Y*. Da qui la grande importanza teorica e pratica della distribuzione Gaussiana.

3.1.1.10 La distribuzione Gaussiana multivariata

Tra tutte le possibili *PDF* relative alle variabili congiunte, quella Gaussiana è sicuramente la più importante. Per semplicità consideriamo prima il caso di due sole variabili stocastiche *X* e *Y* con realizzazioni (*x*,*y*) a media nulla, con identica varianza e coefficiente di correlazione ρ. La loro funzione di densità di probabilità Gaussiana congiunta è definita da:

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot exp\left(-\frac{[x^2 - 2\rho xy + y^2]}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right) \qquad [3.28a]$$

Se poi il coefficiente di correlazione è nullo (le due variabili *X* e *Y* sono incorrelate), la (3.36a) si riduce a:

$$p(x,y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) = p(x) \cdot p(y) \qquad [3.28b]$$

cioè, oltre che incorrelate, le due variabili risultano anche statisticamente indipendenti. Vedremo immediatamente che questa proprietà è vera nel caso generale multivariato.

Il caso *N*-dimensionale (multivariato) è formalmente più complesso. Si considerino *N* variabili stocastiche congiunte con realizzazioni $x_1, x_2, .., x_N$ campionate contemporaneamente durante un esperimento ideale. Per esse, le medie e le deviazioni standard siano rispettivamente μ_1, μ_2, .., μ_N e σ_1, σ_2,.., σ_N. Esprimere la reciproca interdipendenza tra le variabili non è immediato e non è possibile impiegare un unico indicatore statistico. È possibile, invece, costruire la covarianza tra coppie di variabili. A conti fatti, combinando tra loro le *N* variabili, sono state ottenute (N^2 - *N*)/2 covarianze distinte tra le coppie di variabili. È comodo inglobare ordinatamente in un'unica matrice tutte le varianze e le covarianze di un caso multivariato costituito da *N* variabili

congiunte, matrice nota come *Matrice di Covarianza* **C** e definita come:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix} \qquad [3.29a]$$

Il generico termine C_{ij} è la covarianza tra le variabili X_i e X_j e i termini C_{ii} sono la varianza di X_i. La matrice **C** è simmetrica ed i suoi termini indipendenti per un caso multivariato *N*-dimensionale sono $(N^2 + N)/2$. La distribuzione congiunta di queste *N* variabili stocastiche segue una *distribuzione Gaussiana N-dimensionale* se la *PDF* associata è data da:

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\boldsymbol{C}|^{1/2}} exp\left[(-1/2\,|\boldsymbol{C}|)\sum_{i,j=1}^{N}\left|\boldsymbol{C}_{ij}\right| \cdot (x_i - \mu_i) \cdot \left(x_j - \mu_j\right)\right] \qquad [3.29b]$$

dove $|\mathbf{C}|$ è il determinante della matrice di covarianza, mentre $|\mathbf{C}_{ij}|$ è il cofattore di C_{ij} nel determinante $|\mathbf{C}|$, definito come quel determinante di ordine *N*-1 formato omettendo la *i*-esima riga e la *j*-esima colonna di **C** moltiplicato per $(-1)^{i+j}$. A volte è più comodo operare in termini totalmente matriciali. In questo caso, una volta definito il vettore delle *realizzazioni congiunte* **u** ed il *vettore delle medie* **μ**, entrambi vettori colonna *N*-dimensionali:

$$G = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix}$$

la densità di probabilità congiunta Gaussiana è data dalla relazione:

$$p(\boldsymbol{u}) = [(2\pi)^N det(\boldsymbol{C})]^{-1/2} exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\mu})\right] \qquad [3.29c]$$

3.1.2 I PROCESSI STOCASTICI

Fin qui abbiamo considerato una variabile stocastica in un punto dello spazio e ad un istante *t* ed abbiamo individuato due modi alternativi per descriverne le caratteristiche statistiche. Il primo metodo è costituito dalla definizione della funzione di densità di probabilità (o della sua cumulata) ed è decisamente potente per trattare i problemi dal punto di vista teorico. Il secondo metodo è costituito dalla definizione degli infiniti momenti. Anche se meno allettante teoricamente, è operativamente l'unico utilizzabile in pratica, soprattutto avendo a disposizione gli stimatori degli stessi che ci consentono di ottenerne una buona stima a partire dalle realizzazioni della variabile stocastica. Come visto, i due metodi sono del tutto equivalenti. Avendo ipotizzato che ogni generica variabile meteorologica possa essere assimilata ad una variabile stocastica, di fatto abbiamo presentato gli strumenti statistici necessari alla sua caratterizzazione. Se ci riflettiamo, di fatto abbiamo cercato di descrivere statisticamente il processo di misura e la sua intrinseca aleatorietà e su questo argomento torneremo al Cap. 10 e al Cap.12. Sempre considerando un ben preciso punto dello spazio ed un istante temporale, si è pure affrontato il problema della interdipendenza tra variabili differenti (per es. tra le componenti cartesiane del vento, tra la componente verticale del vento e la temperatura, ecc.), interdipendenza che inevitabilmente deve esistere, visto quanto ci hanno mostrato le leggi della Fluidodinamica cui tali variabili (stocastiche o meno) devono inevitabilmente ubbidire. Si è giunti, anche in questo caso, ad una descrizione statistica basata sulle densità di probabilità congiunte e, in alternativa, sui loro momenti. Non abbiamo fatto molta strada, comunque. Infatti, tutta la trattazione è rimasta legata ad un ben preciso punto dello spazio-tempo, mentre la nostra aspirazione è quella di descrivere l'*evoluzione nello spazio e nel tempo* dei fenomeni atmosferici, cioè di descrivere statisticamente la stessa fenomenologia trattata dal modello Fluidodinamico del Cap. 2.

3.1.2.1 I processi stocastici: concetti di base

Consideriamo una variabile stocastica *X* in un punto dello spazio (per esempio la temperatura dell'aria nei pressi del suolo) ed ipotizziamo di realizzare un esperimento ideale che la registri in continuo ad ogni istante temporale da -∞ a +∞. In pratica, con questo esperimento misuriamo l'andamento nel tempo della variabile. Il risultato di questo esperimento è un *segnale*, cioè una funzione $x_k(t)$, dove il pedice *k* sta ad indicare che il segnale ottenuto non è l'andamento nel tempo della variabile stocastica, ma la sua realizzazione *k-esima*. Di tale segnale non possiamo dire molto in generale, ma nel caso di una variabile meteorologica misurata nel *PBL* notiamo sperimentalmente che tale segnale è continuo, presumibilmente differenziabile, limitato ed altamente irregolare. Ciò che abbiamo ottenuto è *una delle possibili realizzazioni di una variabile stocastica che varia nel tempo,* cioè *di un processo stocastico.* Conducendo infinite osservazioni nelle stesse condizioni otterremo, a priori, infinite realizzazioni non coincidenti che, complessivamente, costituiscono l'insieme di tutte le possibili realizzazioni del processo stocastico, realizzazioni che ora non sono più valori numerici, ma funzioni del tempo. Un esempio visivo di ciò è riportato nella **Fig. 3.5**.

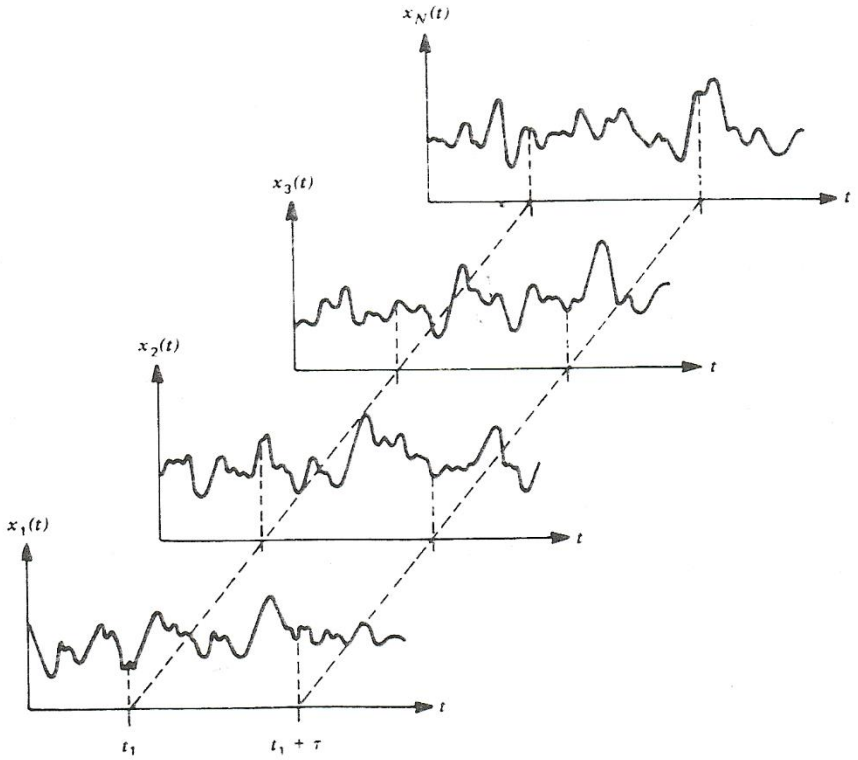


Fig. 3.5: esempio di realizzazioni di un processo stocastico (Bendat e Persol, 1986)

Come possiamo caratterizzare un processo stocastico? In pratica, un processo stocastico è una entità astratta che rappresenta una variabile in un punto di un sistema fisico e che, ad ogni istante, fornisce una realizzazione. Quindi un processo stocastico, campionato in un intervallo (finito o infinito) di tempo fornirà come realizzazione una funzione reale variabile nel tempo, estratta da un insieme costituito da tutte le possibili realizzazioni compatibili con quel processo e con quel punto del dominio di indagine.

Un primo metodo per caratterizzare un processo stocastico, quello più naturale, si basa sulla probabilità che un processo stocastico produca come realizzazione un ben preciso *segnale* (cioè una funzione del tempo). Consideriamo una sequenza temporale $t_1, t_2, .. , t_N$ crescente (questa sequenza sarà infinita e la distanza tra un istante e l'altro potrà essere piccola a piacere). L'esperimento ideale condotto associa ad ognuno di questi istanti un ben preciso valore di *X*, per esempio

x_1, x_2, .. , x_N. È *formalmente* possibile definire una *funzione di densità di probabilità* di questa realizzazione nel modo seguente:

$$p_{t_1,t_2,\cdots,t_N}(\boldsymbol{x})dx_1 \cdots dx_N = P[x_1 < x(t_1) < x_1 + dx_1; \cdots, x_N < x(t_N) < x_N + dx_N] \qquad [3.30]$$

Quindi la densità di probabilità è, grossolanamente, la probabilità che il processo *X* presenti al tempo t_1 una realizzazione compresa tra x_1 e x_1+dx_1 e contemporaneamente al tempo t_2 una realizzazione compresa tra x_2 e x_2+dx_2 e così via per tutti gli altri istanti (infiniti) della sequenza temporale, il tutto diviso per il prodotto dell'ampiezza di ciascun intervallo attorno a cui è permesso variare la singola realizzazione (infinitesimo). È anche possibile definire la relativa cumulata. La definizione e la stima di questa pletora di densità di probabilità è un'impresa disperata e ricorreremo a questo metodo descrittivo solo quando ci saremo costretti. Si rimanda chi fosse interessato a maggiori dettagli sull'argomento a Monin e Yaglom (2007a). Comunque, l'esistenza della densità di probabilità congiunta (3.30) garantisce la possibilità di definire il valore atteso (valor medio) di un processo stocastico, cioè un ipotetico processo che, ad ogni istante, possiede un valore pari al valore atteso in quell'istante per il processo stesso. In pratica, se disponessimo di *N* realizzazioni di un processo stocastico, il suo valor medio potrebbe essere stimato come media aritmetica dei valori assunti dalle *N* realizzazioni in ogni istante considerato. L'esistenza delle densità congiunta garantisce anche la possibilità di definire correttamente i momenti che, in pratica, possono essere stimati dalle realizzazioni del processo impiegando, istante per istante, gli stimatori già introdotti. Come nel caso di una variabile stocastica in un punto dello spazio-tempo, anche in questo caso il metodo operativamente più percorribile è quello dei momenti.

Valore atteso

Si considerino due processi stocastici *X*(t) e *Y*(t). La prima quantità statistica di interesse è il *valore atteso di ciascun processo* a ciascun istante *t*, dato come sempre da:

$$\mu_X(t) = E[x(t)] \qquad \mu_Y(t) = E[y(t)] \qquad [3.31a]$$

che, come detto, può essere stimato in modo non distorto impiegando gli stimatori campionari operanti sui valori assunti dalle singole realizzazioni del processo ad ogni istante temporale. In generale, queste medie variano al variare dell'istante temporale considerato e quindi:

$$\mu_X(t_1) \neq \mu_X(t_2) \qquad \mu_Y(t_1) \neq \mu_Y(t_2) \qquad [3.31b]$$

In sostanza, il valore atteso, pur essendo sempre una entità deterministica, non è più un valore ben preciso, bensì una funzione del tempo.

Funzioni di Covarianza

Si può estendere e generalizzare il concetto di covarianza considerando due istanti temporali arbitrari $t_1 = t$ e $t_2 = t + \tau$. Si possono così definire le *Funzioni di Covarianza* seguenti:

$$\begin{aligned} C_{xx}(t, t+\tau) &= E\left[\left(x(t) - \mu_X(t)\right) \cdot \left(x(t+\tau) - \mu_X(t+\tau)\right)\right] \\ C_{yy}(t, t+\tau) &= E\left[\left(y(t) - \mu_Y(t)\right) \cdot \left(y(t+\tau) - \mu_Y(t+\tau)\right)\right] \\ C_{xy}(t, t+\tau) &= E\left[\left(x(t) - \mu_X(t)\right) \cdot \left(y(t+\tau) - \mu_Y(t+\tau)\right)\right] \end{aligned} \qquad [3.32]$$

La loro formulazione teorica implica la conoscenza della funzione di densità congiunta, anche se la loro stima non distorta può essere realizzata impiegando, istante per istante, lo stimatore per la covarianza introdotto in precedenza e che opera sulle realizzazioni del processo. In generale queste quantità saranno differenti per differenti combinazioni di t_1 e t_2 o, che è lo stesso, per differenti *t* e τ. In sostanza, le funzioni di covarianza sono funzioni a due variabili: la prima è l'istante di tempo considerato e la seconda è la distanza temporale considerata (*time lag*) τ. Si noti che non c'è, a priori, alcuna ragione perché C_{xy} sia uguale a C_{yx}. Inoltre, se τ = 0 e se si considera un istante *t* qualsiasi, C_{xx} e C_{yy} altro non sono che la varianza delle due variabili stocastiche all'istante *t* e che C_{xy} (questa volta uguale a C_{yx}) è la covarianza al tempo *t* come definita precedentemente.

3.1.2.2 I processi stocastici stazionari: le Funzioni di Covarianza e di Correlazione

Il *PBL* evolve nel tempo e così anche le variabili che lo descrivono. Se, come esempio, consideriamo la temperatura dell'aria, è vero che essa varia durante la giornata, ma se concentriamo l'attenzione, notiamo che questa variazione la si può vedere come la sovrapposizione di due tipi differenti di variazioni: una variazione *lenta* giornaliera e stagionale che segue l'andamento della radiazione solare (il periodo è dell'ordine del giorno) cui si sovrappongono variazioni *rapide* ed apparentemente casuali che hanno periodi vari, comunque dell'ordine dei minuti o meno dovuti alla turbolenza. Se consideriamo una sola ora, le variazioni lente saranno impercettibili se confrontate con le variazioni casuali dovute alla turbolenza, per cui, alla scala dell'ora, possiamo semplificarci la vita ipotizzando che il processo stocastico che rappresenta la temperatura dell'aria in un punto sia di fatto non statisticamente variabile nel tempo, nel senso che se suddividiamo il segnale di temperatura campionato nell'ora in sotto-intervalli vediamo che le caratteristiche statistiche determinate nei vari sotto-intervalli restano pressoché costanti. Possiamo quindi considerare tale *processo* di fatto *statisticamente stazionario*. Ciò ci autorizza a fissare l'attenzione sulla situazione del tutto generale in cui due processi stocastici *X* e *Y* presentino valori attesi indipendenti da *t* e covarianze che non dipendono da *t* ma solo da τ. Processi di questo tipo sono detti *debolmente stazionari* (*weakly stationary*). In pratica questa condizione è relativamente facile da dimostrare empiricamente. Se invece tutte le possibili distribuzioni di probabilità che coinvolgono le due variabili sono indipendenti da *t*, i due processi si dicono *fortemente stazionari* (*strongly stationary*), cosa ardua da dimostrare anche empiricamente, ma, per fortuna, se i processi sono Gaussiani, i due tipi di stazionarietà coincidono, visto che la distribuzione Gaussiana è caratterizzata completamente solo dai momenti fino al secondo ordine.

Al punto precedente sono state introdotte le *funzioni di covarianza* che, nel caso di processi stazionari (anche debolmente), non dipendono da *t* ma solo dal *time-lag* τ. Normalmente, dati due processi stazionari *X*(*t*) e *Y*(*t*), si definisce propriamente *Funzione di Covarianza* (o *Cross-Covarianza*) la funzione:

$$C_{xy}(\tau) = E[(x(t) - \mu_X) \cdot (y(t+\tau) - \mu_Y)\,] \qquad [3.33a]$$

mentre:

$$\begin{aligned} C_{xx}(\tau) &= E[(x(t) - \mu_X) \cdot (x(t+\tau) - \mu_X)\,] \\ C_{yy}(\tau) &= E[(y(t) - \mu_Y) \cdot (y(t+\tau) - \mu_Y)\,] \end{aligned} \qquad [3.33b]$$

sono le *Funzioni di Autocovarianza*, cioè i momenti secondi centrali calcolati in corrispondenza di ogni *time-lag*. Se si considerano i momenti secondi non centrali, è possibile ottenere:

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= E[x(t) \cdot x(t+\tau)\,] \\ R_{yy}(\tau) &= E[y(t) \cdot y(t+\tau)\,] \end{aligned} \qquad [3.34a]$$

che prendono il nome di *Funzioni di Auto-correlazione*, mentre:

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t) \cdot y(t+\tau)\,] \qquad [3.34b]$$

prende il nome di *Funzione di Cross-correlazione*. Ovviamente le funzioni di covarianza coincidono con le funzioni di correlazione quando i due processi stocastici stazionari hanno entrambi media nulla, come nel caso in cui si considerano le fluttuazioni. Comunque, la normale parentela esistente tra loro è data dalle relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} C_{xx}(\tau) &= R_{xx}(\tau) - \mu_X^2 \\ C_{yy}(\tau) &= yy(\tau) - \mu_Y^2 \\ C_{xy}(\tau) &= R_{xy}(\tau) - \mu_X \mu_Y \end{aligned} \qquad [3.34c]$$

Nel caso di processi (debolmente) stazionari si possono fare (e dimostrare) alcune osservazioni:

- l'ipotesi di stazionarietà comporta che le funzioni di *Auto-correlazione* R_{xx} e R_{yy} siano funzioni pari, cioè $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$;

- le funzioni di *Auto-correlazione* sono funzioni definite e non negative e sono continue in τ se sono continue all'origine (lo si può dimostrare);

- la funzione di *Cross-correlazione* è una funzione continua in τ se le *Auto-correlazioni* corrispondenti sono continue all'origine (lo si può dimostrare). Inoltre, la funzione di *Cross-correlazione* non è né dispari né pari. Dato che i risultati sono invarianti rispetto ad una traslazione temporale, se si sostituisce t con $t + \tau$, si ha che $R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau)$.

L'introduzione delle funzioni di covarianza e di correlazione rappresenta un importante passo in avanti nella descrizione statistica del *PBL*. Una volta stabilito un insieme di processi stocastici (che, per esempio, rappresentano altrettante variabili meteorologiche), la conoscenza delle funzioni di Covarianza e di Auto-covarianza in un punto dello spazio e ad un ben preciso istante di tempo consente di definire in qualche modo quale può essere il valore atteso delle variabili negli istanti successivi o precedenti e la relativa correlazione. Se poi tali variabili sono stazionarie, le funzioni di covarianza e di correlazione forniscono una sorta di *legge universale* su come il fenomeno fisico evolverà nel tempo.

Esercizio 3.3

Determinare la funzione di autocorrelazione della combinazione lineare di due variabili stocastiche.
Siano X e Y due variabili stocastiche e sia Z un'altra variabile stocastica combinazione lineare delle due precedenti con realizzazione:

$$z = ax(t) + by(t)$$

Si vede immediatamente sviluppando i conti che:

$$R_{zz}(\tau) = a^2 R_{xx}(\tau) + b^2 R_{yy}(\tau) + ab \cdot \left[R_{xx}(\tau) + R_{yy}(\tau)\right]$$

Sia la Funzione di Covarianza che le Funzioni di Correlazione sono dimensionali e quindi scomode da maneggiare. Per questo è stata introdotto la *Funzione di Cross-Correlazione Normalizzata*, completamente adimensionale, che è data dalla relazione seguente:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{C_{xx}(0) \cdot C_{yy}(0)} = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \qquad [3.35a]$$

Va detto che spesso, per brevità, nella Letteratura si utilizza il termine di *cross-correlazione* per indicare in realtà la c*ross-correlazione normalizzata*, ingenerando una certa confusione che può essere evitata analizzando il contesto in cui si usa questa variabile e verificandone le dimensioni: se ciò che viene indicato col termine di cross-correlazione è una grandezza adimensionale, allora si sta considerando in realtà una cross-correlazione normalizzata. È immediato verificare che $\rho_{xy}(\tau)$ varia tra -1 (perfetta correlazione negativa) e +1 (perfetta correlazione positiva) e, se i due processi stocastici sono a media nulla, essa diventa:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \qquad [3.35b]$$

La funzione di cross-correlazione normalizzata misura il grado di dipendenza lineare tra un processo stocastico $X(t)$ al tempo t ed un processo stocastico $Y(t)$ dopo un *time-lag* τ.

Le evidenze sperimentali, sia in laboratorio che in campo, mostrano come le funzioni di correlazione, normalizzata o meno, relative alle fluttuazioni delle variabili meteorologiche nel *PBL* presentino un andamento caratteristico (Monin e Yaglom 2007a). In effetti, se si prende a riferimento la funzione di auto-correlazione normalizzata $\rho(\tau)$ delle fluttuazioni di una generica variabile, si nota come essa presenti il massimo per *time-lag* nullo (dove vale 1), mentre tende a zero rapidamente col tendere all'infinito di $|\tau|$. Questo fatto definisce un'importante proprietà

delle funzioni di correlazione (auto o cross, normalizzate o meno) che le ordinarie funzioni di correlazione, generalmente parlando, non possiedono. Basandoci su tale proprietà, è immediato verificare l'esistenza dell'integrale della funzione di auto-correlazione normalizzata rispetto al *time-lag* per valori di quest'ultimo da 0 all'infinito. Quindi, la grandezza T_{xx} definita come:

$$T_{xx} = \int_0^{\infty} \rho_{xy}(\tau) \cdot d\tau \qquad [3.36]$$

ha le dimensioni di un tempo, è chiamato *Tempo Euleriano Caratteristico Integrale di Scala* e rappresenta l'intervallo di tempo necessario al processo stocastico $X(t)$ per perdere la correlazione con il valore posseduto all'istante iniziale. Ovviamente, è possibile definire tempi caratteristici di scala per tutte le variabili meteorologiche ed anche per loro combinazioni.

3.1.2.3 I processi stocastici stazionari ergodici

Si considerino *due processi debolmente stazionari* $X(t)$ e $Y(t)$. Essi sono *debolmente ergodici* se i loro valori medi e le loro covarianze possono essere calcolate sostituendo all'operatore Valore Atteso l'operatore Media Temporale ed operando su una coppia qualsiasi di realizzazioni dei due processi. In questo modo, la struttura statistica dei due processi può essere determinata molto facilmente da una coppia di realizzazioni senza dover raccogliere ulteriori informazioni. Se le variabili meteorologiche fossero ergodiche, se ne potrebbe conoscere la struttura statistica semplicemente raccogliendo le misure nel tempo, che poi è l'unica cosa che è possibile fare in pratica.

Definizioni

Per essere più precisi, considerando le due realizzazioni $x_k(t)$ e $y_k(t)$ dei processi $X(t)$ e $Y(t)$, la conseguenza della loro stazionarietà è che il valore atteso è sostituto dalla media temporale realizzata su un intervallo di tempo che parte da zero e si estende ad un tempo T grande a piacere:

$$\mu_x(k) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) \cdot dt \qquad \mu_y(k) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T y_k(t) \cdot dt \qquad [3.37a]$$

Naturalmente i valori medi non dipendono dal tempo, visto che i due processi sono stazionari, ma, in generale, possono dipendere dalle particolari realizzazioni considerate ed è per questo che hanno associato l'indice k ad indicare la realizzazione k-esima. In modo analogo si può operare con le covarianze (ed anche con le cross-correlazioni), definite dalle espressioni:

$$C_{xy}(\tau,k) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x_k(t) - \mu_x(k)] \cdot [y_k(t+\tau) - \mu_y(k)] \cdot dt = R_{xy}(\tau,k) - \mu_x(k) \cdot \mu_y(k) \qquad [3.37b]$$

$$C_{xx}(\tau,k) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x_k(t) - \mu_x(k)] \cdot [x_k(t+\tau) - \mu_x(k)] \cdot dt = R_{xx}(\tau,k) - \mu_x^2(k) \qquad [3.37c]$$

$$C_{yy}(\tau,k) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [y_k(t) - \mu_y(k)] \cdot [x_k(t+\tau) - \mu_x(k)] \cdot dt = R_{yy}(\tau,k) - \mu_y^2(k) \qquad [3.37d]$$

Questi risultati evidenziano come, almeno in linea di principio, questi momenti dipendano dalla particolare coppia di realizzazioni considerate. *Se, invece*, si ha che *per qualunque coppia di realizzazioni considerate vale*:

$$\mu_x(k) = \mu_x \qquad \mu_y(k) = \mu_y \qquad [3.38]$$

$$C_{xx}(k) = C_{xx} \qquad C_{yy}(k) = C_{yy} \qquad C_{xy}(k) = C_{xy}$$

cioè se i momenti statistici non dipendono dalla particolare realizzazione considerata, i *due processi sono debolmente ergodici*. Se poi ciò accade per *tutti i momenti*, allora i due processi sono detti *fortemente ergodici*. Processi fortemente ergodici sono anche debolmente ergodici, ma non è vero in generale il viceversa, tranne nel caso in cui i due processi siano Gaussiani.

Per due processi generici ergodici (e stazionari), le funzioni di auto-correlazione (e anche quelle di auto-covarianza) dipendono esclusivamente dal *time-lag* e sono definite come:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot x(t+\tau) \cdot dt \qquad R_{yy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \cdot y(t+\tau) \cdot dt$$
$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot y(t+\tau) \cdot dt \qquad [3.39a]$$

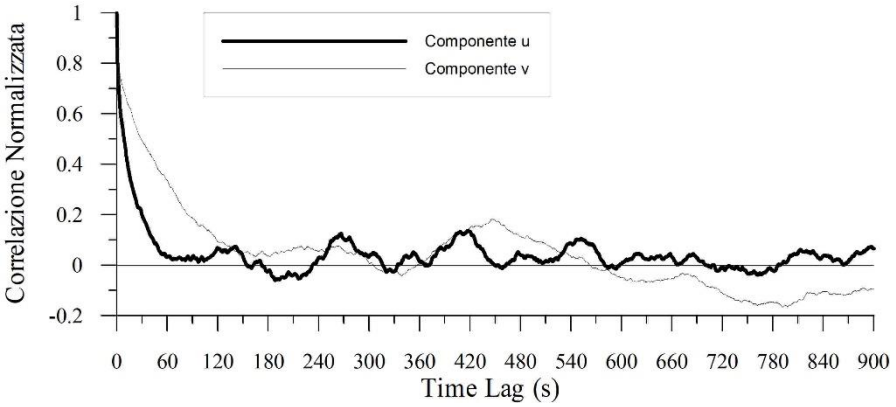


Fig. 3.6: funzione di autocorrelazione normalizzata delle componenti streamline e trasversale del vento misurato presso la superficie in condizioni convettive

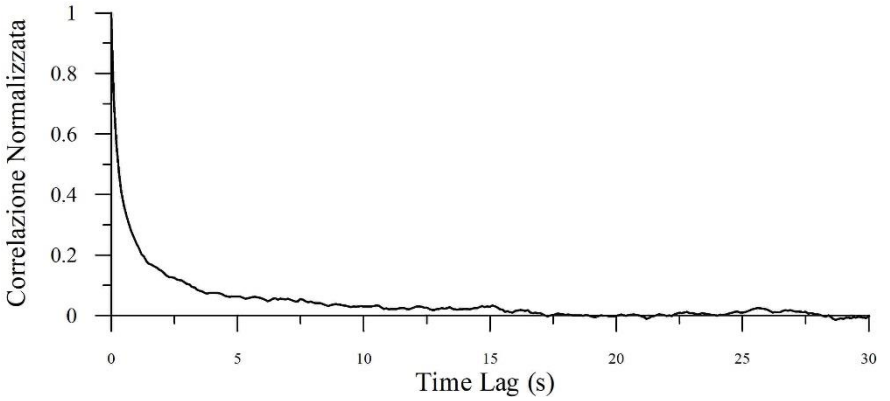


Fig. 3.7: funzione di autocorrelazione normalizzata delle componenti verticale del vento misurato presso la superficie in condizioni convettive

In generale non si può asserire alcunché sulla forma funzionale delle funzioni di correlazione normalizzata o meno. Come già anticipato, nel caso delle variabili che descrivono la turbolenza atmosferica, l'evidenza sperimentale è che la funzione di auto-correlazione normalizzata presenta un andamento tipico: ha un valore unitario a *time-lag* nullo, diminuendo in modo pressoché esponenziale con l'aumentare dello stesso. Come esempio, si considerino le tre componenti del vento rilevate presso il suolo durante una tipica situazione convettiva. Nella **Fig. 3.6** è riportato l'andamento della funzione di *auto-correlazione* sia della componente *streamline* (*u*) che della

componente trasversale (v) del vento. Si vede immediatamente come l'andamento delle due auto-correlazioni presenti la tipica rapida diminuzione, solo che la *velocità* di questa diminuzione è notevolmente differente per le due componenti. Se poi, per completare il quadro, consideriamo anche la componente verticale del vento, otteniamo quanto riportato nella **Fig. 3.7** che presenta un andamento analogo, ma con una rapidità di diminuzione di molto superiore. Se un processo $X(t)$ presenta un andamento della Funzione di Auto-correlazione come quello illustrato nelle figure precedenti significa che tale processo *perde* progressivamente *memoria di sé stesso* durante l'evolvere del tempo. Questa perdita di memoria è in genere sufficientemente rapida da far convergere ad un tempo caratteristico T_x (*Tempo Caratteristico Euleriano Integrale di Scala; Integral Timescale*) l'integrale della funzione di auto-correlazione normalizzata (3.36). Come detto, T_x rappresenta l'intervallo di tempo necessario al processo per perdere memoria del proprio stato iniziale. Le tre componenti del vento, da quanto visto nelle figure, perdono memoria del proprio stato molto rapidamente, proporzionalmente ai rispettivi tempi di scala. Non sarà sfuggito il fatto che gli andamenti delle funzioni di auto-correlazione, riportati nelle figure, presentano alcune particolarità: seguono il tipico andamento decrescente, approssimativamente esponenziale, per *time-lag* abbastanza bassi, mentre a *time-lag* sufficientemente elevati presentano oscillazioni attorno allo zero ed è proprio questo comportamento oscillatorio che rende critico il calcolo dell'integrale della (3.36). Se si considera la componente verticale (**Fig. 3.7**) queste oscillazioni sono di piccola entità, probabilmente associate agli inevitabili *rumori* dovuti alla misura che contaminano il segnale. Per quanto riguarda, invece, le componenti orizzontali (**Fig. 3.6**), si nota come le oscillazioni attorno allo zero siano inferiori per la componente *stream-line* piuttosto che per la componente trasversale. Quale sia la natura di tali oscillazioni non è completamente chiaro; ad esse contribuiscono i rumori derivanti dalla misura, ma anche fenomeni meteorologici differenti, non necessariamente legati alla turbolenza come i moti submeso che incontreremo al Cap. 8. Nelle considerazioni pratiche e quando si studia la turbolenza si ignorano i *time-lag* lunghi (e le oscillazioni relative) e si approssima la funzione di auto-correlazione con un'esponenziale del tipo:

$$\rho_{xx}(\tau) = exp[-\tau/T_x] \qquad [3.39b]$$

il cui integrale è appunto T_x. In questo caso (Kaimal e Finnigan, 1994) è semplice individuare T_x da una funzione di autocorrelazione ottenuta da misure atmosferiche, anche se contaminate dalle oscillazioni a lunghi *time-lag*: basta individuare il *time-lag* per cui $\rho_{xx} = 1/e \approx 0.37$. Nei casi riportati nelle due figure precedenti, si ha $T_{uu} = 14$ s, $T_{vv} = 52$ s e $T_{ww} = 0.5$ s. Quindi è la componente trasversale del vento a perdere meno rapidamente la memoria e ciò lo si nota nelle oscillazioni orizzontali dei pennacchi di fumo (*meandering*) visibili durante le condizioni stabili.

Stima campionaria

La determinazione dei momenti caratteristici di un processo ergodico viene realizzata impiegando gli stimatori campionari descritti in precedenza su una singola realizzazione del processo. Di fatto esistono due possibilità di stima campionaria: una possibilità continua ed una discreta.

Nel primo caso si ipotizzi di essere in grado di campionare *in maniera continua* processi stocastici con realizzazioni $x(t)$ ed $y(t)$ da un istante iniziale $t = 0$ al tempo T. Questa modalità è stata la più utilizzata in passato quando, durante le campagne sperimentali micrometeorologiche, i segnali elettrici analogici prodotti dai sensori venivano direttamente registrati su nastro magnetico. In questo caso, la stima campionaria per i valori medi è data, ovviamente, da:

$$\mu_x = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt \qquad \mu_y = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt \qquad [3.40a]$$

mentre la stima per la covarianza è data da:

$$\overline{xy} = \frac{1}{T}\int_0^T (x(t) - \mu_x)\cdot\big(y(t) - \mu_y\big)\,dt \qquad [3.40b]$$

da cui è facile ottenere lo stimatore per le varianze. Gli integrali presenti in queste relazioni

venivano spesso ottenuti in maniera *Hardware* utilizzando appositi circuiti elettrici. La funzioni di cross-covarianza a vari *time lag* (positivi) si ottengono poi dallo stimatore seguente:

$$C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^T (x(t) - \mu_x) \cdot \big(y(t+\tau) - \mu_y\big)\, dt \qquad [3.40c]$$

da cui è immediato ricavare lo stimatore per le funzioni di auto-covarianza. Infine, lo stimatore per la funzione di cross-correlazione (da cui è immediato ottenere l'analogo stimatore per le auto-correlazioni) è il seguente:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^T x(t) \cdot y(t+\tau)\, dt \qquad [3.40d]$$

Nei moderni apparati di misura è raro disporre di campionamenti continui; infatti, come si vedrà al Cap. 10, nella maggior parte dei casi si ha a che fare con un *campionamento discreto*. Ciò significa che nell'intervallo di osservazione, da un certo istante iniziale al tempo *T*, le realizzazioni $x(t)$ e $y(t)$ vengono campionate ad *N* istanti discreti 0, t_1, t_2, … , t_N fornendo in corrispondenza le coppie di valori (x_i, y_i). In genere gli istanti sono equispaziati ($t_i - t_{i-1} = \Delta t$) e $t_N = N\Delta t = T$ e quindi le stime campionarie dei valori medi sono:

$$\mu_x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \mu_y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \qquad [3.41a]$$

mentre la stima campionaria della covarianza (da cui si deduce quella delle varianze) è:

$$\overline{xy} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu_x) \cdot \big(y_i - \mu_y\big) \qquad [3.41b]$$

Per il calcolo delle funzioni di covarianza e di correlazione vanno fatte alcune osservazioni. In primo luogo, il *time-lag* non potrà essere qualsiasi, ma dovrà valere solo multipli interi del passo di acquisizione temporale Δt e quindi il *time-lag* non potrà che essere $\tau = n \cdot \Delta t$, dove il numero intero *n* sarà non negativo ed inferiore ad *N*. Quindi, lo stimatore della Funzione di Cross-covarianza, nell'ipotesi in cui la numerosità del campione sia molto elevata, è il seguente:

$$C_{xy}(n\Delta t) = \frac{1}{N-n}\sum_{i=1}^{N-n} (x_i - \mu_x) \cdot \big(y_{i+n} - \mu_y\big) \qquad [3.41c]$$

È immediato ottenere gli analoghi stimatori per le funzioni di auto-covarianza e di correlazione. Inoltre, sempre nel caso in cui la numerosità del campione è molto elevata, la Funzione di Auto-correlazione Normalizzata può essere dedotta dallo stimatore:

$$\rho_{xx}(n\Delta t) = \frac{1}{(N-n)\cdot \sigma_x^2}\sum_{i=1}^{N-n} (x_i - \mu_x) \cdot \big(x_{i+n} - \mu_y\big) \qquad [3.41d]$$

Un'osservazione da fare riguarda il fatto che l'accuratezza dello stimatore delle Funzioni di Correlazione normalizzate o meno dipende dal *time-lag*. Infatti, maggiore è il *time-lag*, minore è il numero di campioni che concorrono alla stima diminuendone inevitabilmente l'accuratezza. Come osservato da Stull (1989), perché sia possibile garantire una ragionevole accuratezza di stima è necessario che $n \leq N/2$.

Da ultimo, conviene introdurre un ulteriore indicatore statistico noto come <u>*Funzione di Struttura del secondo ordine*</u> (normalmente denominata semplicemente come Funzione di Struttura), formalmente molto simile alla covarianza ma molto utilizzato soprattutto nell'analisi spaziale e spettrale. Mentre la funzione di covarianza considera il prodotto delle fluttuazioni di una variabile ad un dato *time-lag*, la funzione di struttura considera le differenze tra i valori di una variabile ad un dato *time-lag*. Se consideriamo un processo stocastico *A* con *N* realizzazioni A_k agli istanti t_k, $k = 1, 2, .., N$, la Funzione di Struttura del Secondo Ordine viene definita come:

$$D_{AA}(n\Delta t) = \frac{1}{(N-n)} \sum_{i=1}^{N-n} (A_k - A_{k+n})^2 \qquad [3.42]$$

Dato che tale indicatore considera le differenze tra due valori della stessa variabile, le sue dimensioni sono quelle della varianza della variabile considerata. Se si considerano gli stessi dati usati per ottenere le **Figg. 3.6** e **3.7**, la stima delle funzioni di struttura per le tre componenti del vento in condizioni di convettività sono quelle riportate nella **Fig. 3.8**.

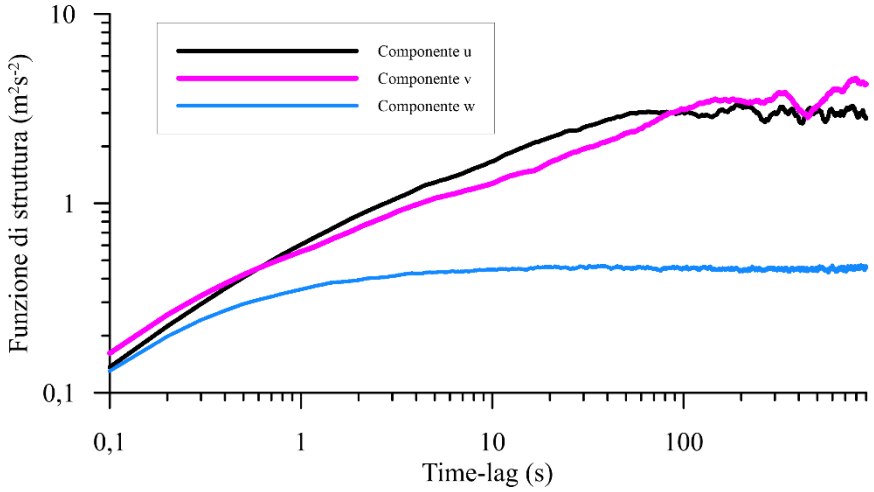


Fig. 3.8: funzione di struttura del secondo ordine delle componenti verticale del vento misurato presso la superficie in condizioni convettive (stessi dati delle Figg. 3.6 e 3.7)

Come si nota l'andamento è simile per le tre componenti del vento: dopo una crescita sostanzialmente descritta da una legge di potenza (lineare in un diagramma *log-log*), le funzioni di struttura del secondo ordine tendono a livellarsi. Come si vedrà successivamente, è proprio la prima fase di crescita della funzione di struttura che fornirà le informazioni più importanti.

3.1.3 I CAMPI STOCASTICI

Prima di iniziare la trattazione dei campi stocastici è opportuno premettere una constatazione *filosofica*. Una variabile stocastica è un'entità astratta che, se *interrogata* (mediante un processo di campionamento, astrazione di una misura puntuale ed occasionale), fornisce una *risposta* sotto la forma di una sua *realizzazione*. La variabile stocastica, quindi, rappresenta una visione puntuale (nello spazio e nel tempo) di un fenomeno, isolandolo dal contesto. Se poi si fa evolvere il concetto di variabile stocastica a *processo stocastico*, aumentiamo di un grado di libertà la nostra visione del fenomeno, introducendo il *tempo* come variabile indipendente. La nostra visione del fenomeno migliora perché, pur rimanendo ancorati ad un punto dello spazio, possiamo studiare statisticamente l'evoluzione del fenomeno nel tempo ed anche l'evoluzione congiunta di variabili meteorologiche differenti. L'elemento essenziale presente nella descrizione dei processi stocastici è quindi il *tempo*. Quando, infine, il concetto astratto di variabile stocastica evolve nel senso di considerare quanto succede in ogni punto del dominio di studio, si giunge al concetto di *campo stocastico* nella cui descrizione, come vedremo, è essenziale la variabile indipendente (vettoriale) *spazio*. Quindi lo spazio è l'elemento principale che caratterizza la descrizione dei campi stocastici, anche se è evidente che la variabilità spaziale è sempre accompagnata da una variabilità temporale che comunque si cercherà di descrivere. Queste osservazioni saranno importanti per comprendere come, nell'analisi nel dominio delle frequenze, quando vengono trattati i processi stocastici ci si riferisce sempre ad un'analisi che cerca di individuare armoniche temporali

soggiacenti al segnale, mentre quando tale analisi viene applicata ai campi stocastici, le armoniche di interesse sono quelle spaziali. Ovviamente ci deve essere un legame tra le due visioni, anche perché se in un laboratorio di Fluidodinamica è tecnicamente indifferente misurare nello spazio e/o nel tempo con accuratezza, quando si deve studiare la turbolenza nel *PBL* è inevitabile privilegiare misure protratte nel tempo ma localizzate in pochi punti dello spazio, visto che ad oggi le metodologie per misurare (campionare, quindi) un campo sono estremamente limitate, costose e di notevole complessità logistica.

Premesso ciò, per semplicità espositiva nel seguito si farà riferimento prevalentemente al solo campo di moto, caratterizzato dal vettore stocastico velocità **U**(**x**,t). Tale vettore altro non è che l'insieme di ∞^3 processi stocastici vettoriali (tanti quanti sono i punti **x,** vettore posizione, di un dominio spaziale di interesse) le cui componenti (anch'esse processi stocastici) sono le tre componenti cartesiane $U_i(t)$, i = 1, 2, 3 del vettore velocità. Ricordiamo che il campo stocastico e le sue componenti sono un'entità astratta che, una volta campionata, fornisce una realizzazione che indicheremo col simbolo **V**.

3.1.3.1 Le statistiche one-point

Formalmente è immediato definire una probabilità cumulata congiunta *CFD mono-punto* (*one-point*) per il campo **U**(**x**,t) come la probabilità che in quel punto dello spazio e a quell'istante le realizzazioni V_i delle tre componenti del moto siano contemporaneamente inferiori a valori specifici dati v_i (i = 1,2,3), cioè che:

$$F(\boldsymbol{v};\boldsymbol{x},t) = P\{V_i(\boldsymbol{x},t) < v_i, i = 1,2,3\} \qquad [3.43a]$$

e quindi, nell'ipotesi di completa differenziabilità della funzione F, la densità di probabilità congiunta *PDF* può essere sinteticamente definita come:

$$p(\boldsymbol{v};\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial^3 F(\boldsymbol{v};\boldsymbol{x},t)}{\partial v_1 \partial v_2 \partial v_3} \qquad [3.43b]$$

La funzione $p(\cdot,\cdot,\cdot)$ è dunque una densità rispetto alle variabili dello spazio delle fasi ed è una funzione dello spazio e del tempo. In ognuno degli ∞^3 punti dello spazio e negli infiniti istanti che potrebbero essere considerati, essa caratterizza il vettore velocità, ma non contiene alcun tipo di informazione su quanto accade a due o più punti diversi dello spazio e/o a due o più istanti temporali diversi. Se invece di limitarci a considerare il solo campo di moto, considerassimo i campi di tutte le variabili che caratterizzano lo stato del *PBL*, potremmo costruire una *CDF* e una *PDF* decisamente più generale, ma sicuramente più complicata e ben più difficile da ottenere anche in maniera campionaria. Oltre a ciò, è possibile definire altre densità di probabilità che descrivono o la singola variabile (una delle componenti della velocità del fluido, la temperatura, la pressione, ecc.) o la densità congiunta tra due di queste quantità, per esempio due delle componenti della velocità. In Monin e Yaglom (2007a) è descritto come tutta questa sequenza infinita di densità di probabilità sia interconnessa, anche se ciò non è essenziale per gli scopi che ci prefiggiamo.

Ritornando al campo di moto, è immediato definire il *campo di moto medio* come quel campo ottenuto applicando l'operatore di valore atteso al campo vettoriale **U**(**x**,t):

$$\overline{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x},t) = \iiint \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t) \cdot p(\boldsymbol{V};\boldsymbol{x},t) \cdot dV_1 dV_2 dV_3 \qquad [3.44a]$$

Il campo medio così ottenuto è un campo deterministico e come tale potrà e dovrà essere trattato. In modo analogo si può procedere per individuare il campo medio di temperatura, di pressione, di densità e delle altre variabili che caratterizzano il *PBL*.

Definito il campo medio, è immediato definire il campo delle *fluttuazioni* che è un campo stocastico e che, nel caso del campo di moto, è anche un campo vettoriale. Esso è dato da:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t) - \overline{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x},t) \qquad [3.44b]$$

Essendo il campo medio un'entità deterministica, è naturale che la nostra attenzione sia rivolta prevalentemente al campo delle fluttuazioni e alle sue caratteristiche stocastiche di cui una sola è nota: *il campo delle fluttuazioni ha media nulla per costruzione*. Inoltre, è immediato definire il campo delle *varianze-covarianze one-point/one-time*. Infatti, limitandoci alle sole fluttuazioni delle componenti del moto ed indicando con $p(u_i, u_j)$ la densità di probabilità congiunta di due qualsiasi delle componenti, la generica covarianza tra esse è data dalla relazione integrale:

$$\overline{u_i u_j} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_i(\boldsymbol{x}, t) \cdot u_j(\boldsymbol{x}, t) \cdot p(u_i, u_j) \cdot du_i du_j \qquad [3.45]$$

La varianza delle varie componenti della velocità del fluido o di altre variabili scalari, così come la covarianza tra componenti del vento e variabili scalari o tra variabili scalari, è facilmente riconducibile alla relazione (3.45).

In generale, non è possibile dire molto sulla struttura analitica dei campi stocastici ed ancor meno per i campi delle fluttuazioni, tuttavia l'evidenza sperimentale maturata in decenni di osservazione del *PBL* ci fa concludere che il ritenerli continui e differenziabili nello spazio e nel tempo è un'ottima ipotesi di lavoro. Se si considera, per semplicità, una variabile scalare T (o una delle componenti cartesiane della velocità del fluido), la derivata spaziale (rispetto ad una coordinata x) può essere espressa come:

$$\frac{dT}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{T(x + \Delta x) - T(x)}{\Delta x} \qquad [3.46a]$$

e dell'esistenza di tale limite abbiamo la conferma dall'esperienza. Calcolando il valor medio della relazione precedente, grazie anche all'integrabilità supposta del campo, si ha che:

$$\frac{\overline{dT}}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overline{T(x + \Delta x) - T(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\bar{T}(x + \Delta x) - \bar{T}(x)}{\Delta x} = \frac{d\bar{T}}{dx} \qquad [3.46b]$$

cosa che ci porta a dire che gli operatori valor medio e derivata commutano tra loro. Analoghe considerazioni possono essere fatte anche per la derivazione temporale, indipendentemente dal fatto che i campi stocastici siano scalari o vettoriali.

3.1.3.2 Le statistiche N-point

Per una descrizione completa dei campi stocastici o delle rispettive fluttuazioni le statistiche *one-point* non sono sufficienti. Bisogna infatti considerare anche i legami che intercorrono tra variabili in punti diversi dello spazio e ad istanti differenti. In linea del tutto teorica è possibile definire *PDF N-point* come semplici estensioni di quanto fatto in precedenza. In particolare, siano $\{\mathbf{x}^{(n)}, t^{(n)}, n = 1, 2, \ldots, N\}$ un insieme di posizioni e tempi. La definizione di una *PDF* relativa, per esempio, al vettore velocità del fluido sarà:

$$p_N\left(\boldsymbol{V}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(1)}, t^{(1)}; \boldsymbol{V}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, t^{(2)}; \cdots; \boldsymbol{V}^{(N)}, \boldsymbol{x}^{(N)}, t^{(N)}\right)$$

che rappresenta la densità di probabilità di avere $\mathbf{V}^{(1)}$ al punto $\mathbf{x}^{(1)}$ al tempo $t^{(1)}$ e contemporaneamente $\mathbf{V}^{(2)}$ al punto $\mathbf{x}^{(2)}$ al tempo $t^{(2)}$ e così via. È evidente che la determinazione pratica di questa sequela di *PDF* e di tutto ciò che logicamente ne deriva è un'impresa titanica, di fatto impossibile.

La più semplice statistica contenente informazioni sulla struttura spaziale di un campo stocastico, soprattutto se tale campo è una fluttuazione, è costituita dalla *correlazione two-point/one-time* tra due componenti cartesiane di una variabile vettoriale, definita come:

$$R_{ij}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{x}, t) = \overline{u_i(\boldsymbol{x}, t) \cdot u_j(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}, t)} \qquad [3.47a]$$

dove $\boldsymbol{r}$ è il vettore spostamento spaziale. La *correlazione two-point* non è un vettore, ma un *tensore del secondo ordine*. Infatti, può essere rappresentata da una matrice quadrata che, nel caso del campo di moto, è una matrice 3x3, dove gli indici i e j possono assumere solo valori 1, 2, 3 (col pedice 1 si indica tutto ciò che è diretto secondo l'asse x, col pedice 2 secondo l'asse y e 3

secondo l'asse *z*) ed il vettore spostamento **r**, nelle tre orientazioni cartesiane, avrà componenti r_j con $j = 1, 2, 3$. Naturalmente si possono ricavare le correlazioni tra variabili differenti e l'auto-correlazione di una generica variabile. La relazione (3.47a) indica poi come le funzioni di correlazione dipendano non solo dal punto considerato, ma anche dallo spostamento effettuato, oltre che dall'istante in cui si opera. Da queste funzioni si possono trarre notevoli informazioni; in particolare si può considerare la funzione di auto-correlazione in una particolare direzione (per esempio lungo $x_1 = x$) e definire una ***Lunghezza Integrale di Scala*** in quella direzione, che rappresenta di fatto la dimensione spaziale tipica in quella direzione del fenomeno considerato:

$$L_{11}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{R_{11}(0, \boldsymbol{x}, t)} \int_0^{\infty} R_{11}(\boldsymbol{e_1} \cdot \boldsymbol{r}, \boldsymbol{x}, t) \cdot dr \qquad [3.47b]$$

dove $\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{r}$ è la proiezione del vettore **r** nella direzione x_1.

Un'altra statistica *two-point one-time*, all'apparenza molto simile alla correlazione, è la *Funzione di Struttura* D_{ij}, introdotta dai fluidodinamici russi e che useremo spesso al Cap. 4, basata sulla differenza tra le componenti del moto u_i e u_j nei due punti $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x} + \mathbf{r}$ lungo la generica direzione **r**. In pratica, essa è definita come:

$$D_{ij}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, t) = \overline{[u_i(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}, t) - u_i(\boldsymbol{x}, t)] \cdot [u_j(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}, t) - u_j(\boldsymbol{x}, t)]} \qquad [3.47a]$$

Come si nota immediatamente, anche la Funzione di Struttura è un'entità tensoriale.

3.1.3.3 La stazionarietà statistica, l'omogeneità e l'isotropia

In certi casi i campi stocastici presentano caratteristiche particolari che consentono decisive semplificazioni. Innanzitutto, un *campo stocastico* è ***statisticamente stazionario*** se tutte le statistiche (cioè i vari momenti) sono invarianti rispetto ad una traslazione temporale cioè la densità di probabilità non cambia se al posto del punto $(\boldsymbol{x}^{(n)}, t^{(n)})$ si sostituisce il punto $(\boldsymbol{x}^{(n)}, t^{(n)}+T)$, dove *T* è una traslazione temporale e ciò per ogni punto dello spazio. Questa è una notevole proprietà del campo che ci consente di ignorare il tempo come variabile. Se si fa riferimento a tempi relativamente piccoli rispetto alle tipiche variazioni *lente* delle variabili del *PBL*, i campi di interesse micrometeorologico possono essere considerati statisticamente stazionari. Per un campo statisticamente stazionario le Funzioni di Correlazione e la Funzione di Struttura non dipendono dal tempo.

In modo analogo, un campo stocastico si dice ***omogeneo*** se tutte le sue statistiche sono invarianti rispetto ad una traslazione spaziale. In pratica, ciò significa che la *PDF* non cambia se al posto del punto $(\boldsymbol{x}^{(n)}, t^{(n)})$ si sostituisce il punto $(\boldsymbol{x}^{(n)}+\mathbf{X}, t^{(n)})$, dove $\boldsymbol{X}$ è una traslazione spaziale. Un'omogeneità completa per il campo di moto comporta anche l'omogeneità del campo medio che risulterebbe uguale in ogni punto dello spazio. Se ciò avviene, con un opportuno cambio di scala, tale campo medio può essere considerato nullo. Questa situazione è ben poco probabile in un fluido geofisico come l'atmosfera dove sono evidenti i gradienti, soprattutto verticali, del campo di moto medio. Si pensi, per esempio, alla necessità che sia soddisfatta la *no-slip condition*. Si può però considerare l'omogeneità dei campi delle fluttuazioni e, in questo caso meno restrittivo, l'accordo con le evidenze sperimentali è decisamente migliore. Inoltre, anche se un campo non è completamente omogeneo, lo si può considerare tale solo in alcune direzioni. Per esempio, se si considera una porzione limitata di *PBL*, spesso si riscontra una buona omogeneità orizzontale. Nel caso di un campo statisticamente omogeneo e stazionario, la Funzione di Correlazione e le Funzioni di Struttura dipendono esclusivamente dallo spostamento spaziale ed è facile dimostrare, poi, che le funzioni di correlazione sono funzioni pari, cioè $R_{ij}(\mathbf{r}) = R_{ij}(-\mathbf{r})$.

Un campo stocastico statisticamente omogeneo è, per definizione, invariante rispetto ad una qualsiasi traslazione. Se è invariante anche rispetto ad ogni rotazione e riflessione degli assi coordinati, allora tale campo si dice ***isotropo***. I campi meteorologici all'osservazione si presentano sicuramente lontani dal presentare una tale proprietà; tuttavia, vedremo che quando la scala spaziale cui facciamo riferimento risulta molto ristretta si può notare una buona *isotropia locale*.

3.1.3.4 Alcune considerazioni sui campi isotropi

A conclusione della breve descrizione sui campi stocastici (che occupa un immenso spazio nei libri di Fluidodinamica Statistica, come per esempio quelli di Monin e Yaglom 2007a,b), presentiamo qui di seguito alcune utili considerazioni. Senza limitare la generalità della trattazione, per semplicità (e per importanza) consideriamo solo il *campo del moto* dell'aria **U**(**x**,t). Supponiamo, inoltre, che tale campo sia *stazionario* (almeno in un certo orizzonte temporale) e *statisticamente omogeneo e isotropo*. Ciò comporta che, con un opportuno cambio di scala (sottraendo, in pratica, il valor medio) al posto del campo **U**(**x**,t) possiamo considerare il campo delle fluttuazioni relative **u**(**x**,t); in questo modo le funzioni di covarianza e di correlazione coincidono e, quindi, senza perdita di generalità, potremo considerare solo queste ultime.

Statistiche one-point

Si considerino, in primo luogo, le statistiche *one-point* in una situazione di turbolenza omogenea e, stabilito un sistema di assi cartesiani ortogonali nel punto $P(x_1, x_2, x_3)$, le fluttuazioni della velocità del fluido siano u_1, u_2 e u_3. Se ora ruotiamo tale sistema di riferimento attorno all'asse x_3 di un angolo pari a $\pi/2$, il vettore fluttuazione della velocità nel nuovo sistema di riferimento avrà componenti v_1, v_2 e v_3. Le componenti u_i e v_i saranno tra loro legate dalle relazioni:

$$u_1 = -v_2 \quad u_2 = v_1 \quad u_3 = v_3$$

La lunghezza del vettore fluttuazione non cambia, ovviamente, con la rotazione degli assi, qualunque essa sia, e ciò comporta che:

$$\overline{u_1^2} = \overline{v_2^2}$$

mentre la covarianza tra le componenti 1 e 2 diventa:

$$\overline{u_1 u_2} = -\overline{v_1 v_2}$$

Se, però, la turbolenza è isotropa, ogni statistica *one-point* dovrà permanere immutata a fronte di rotazioni e riflessioni degli assi di riferimento e quindi perché ciò accada bisogna che:

$$\overline{u_i u_j} = \delta_{ij}\overline{u^2} \qquad [3.48a]$$

Ciò significa che:

- tutti i momenti *one-point* del secondo ordine con $i \neq j$ sono tutti nulli;
- tutti i momenti del secondo ordine con $i = j$ sono uguali, cioè $\overline{u_i u_i} = \overline{u_i^2} = \overline{u^2}$;
- dato che la somma di questi ultimi è pari a due volte l'energia cinetica turbolenta E (che, come vedremo meglio nel seguito, è la semisomma delle varianze delle componenti del moto), si ha che per un generico momento del secondo ordine *one-point* vale la relazione:

$$\overline{u_i u_j} = \delta_{ij}\frac{2E}{3} \qquad [3.48b]$$

Ritorniamo, ora, al campo delle fluttuazioni nel sistema di riferimento originario e ruotiamo quest'ultimo di un angolo π attorno ad x_3. Si avrà che le nuove componenti v_i saranno legate alle componenti u_i dalle relazioni seguenti:

$$u_1 = -v_1 \quad u_2 = -v_2 \quad u_3 = v_3$$

È immediato vedere che in una situazione isotropa tutti i momenti del terzo ordine sono necessariamente nulli.

Statistiche two-point

Uno dei principali indicatori statistici del campo di moto è la funzione di correlazione spaziale che descrive la correlazione esistente tra la componente u_i, relativa al punto $\mathbf{x}_1$, e la componente u_j, relativa al punto $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{r}$ dove $\mathbf{r}$ è un vettore spostamento. In generale al tempo t:

$$R_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r},t) = \overline{u_i(\boldsymbol{x},t)\cdot u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t)} \qquad [3.49a]$$

Se, però, il campo è *statisticamente stazionario*, verrà meno la dipendenza dal tempo e se tale campo risultasse anche *omogeneo* verrebbe meno anche la dipendenza dallo specifico punto **x** dello spazio, per cui:

$$R_{ij}(\boldsymbol{r}) = \overline{u_i(\boldsymbol{x})\cdot u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})} \qquad [3.49b]$$

È immediato constatare che R_{ij} è un tensore di 9 elementi che, nel caso di omogeneità spaziale, presenta solo 6 componenti indipendenti. R_{ij} è, quindi, rappresentabile come una matrice simmetrica i cui elementi diagonali sono le autocorrelazioni.

Il quadro si semplifica notevolmente quando il campo, oltre ad essere stazionario ed omogeneo, è anche *isotropo* (almeno localmente). Monin e Yaglom (2007b, pag. 35) hanno sviluppato nel dettaglio l'argomento, giungendo alle seguenti considerazioni di primario interesse:

- essendo il campo omogeneo, il tensore di correlazione R_{ij} non dipenderà dal vettore distanza **r**, ma dal suo modulo $r = |\mathbf{r}|$;
- ovviamente il tensore è simmetrico e delle 9 componenti, solo 6 possono essere considerate diverse da zero e 3 di esse sono gli elementi diagonali (cioè le autocorrelazioni);
- se il campo è isotropo, di questi 6 elementi solo quelli diagonali R_{11}, R_{22} e R_{33} sono diversi da zero. R_{11} è la correlazione di u_1 lungo la direzione media del vento x; in generale la si indica come ***correlazione longitudinale*** $\boldsymbol{R_{LL}}$ ed è definita come:

$$R_{LL}(r) = \overline{u_1(x)\cdot u_1(x+r)} = \overline{u_L(x)\cdot u_L(x+r)} \qquad [3.49c]$$

Come si nota, le quantità x e r nella relazione precedente ora sono scalari e non vettori. R_{22} è la correlazione, sempre lungo l'asse x della componente u_2 del moto. È nota come la ***correlazione trasversale del moto*** $\boldsymbol{R_{NN}}$ ed è definita come:

$$R_{NN}(r) = \overline{u_2(x)\cdot u_2(x+r)} = \overline{u_N(x)\cdot u_N(x+r)} \qquad [3.49d]$$

R_{33} è la correlazione, sempre lungo l'asse x della componente verticale u_3 del moto ed è indicata come ***correlazione verticale***. Per l'isotropia del campo si ha che:

$$R_{33}(r) = R_{NN}(r) \qquad [3.49e]$$

Nella **Fig. 3.9** è schematizzata la geometria considerata.

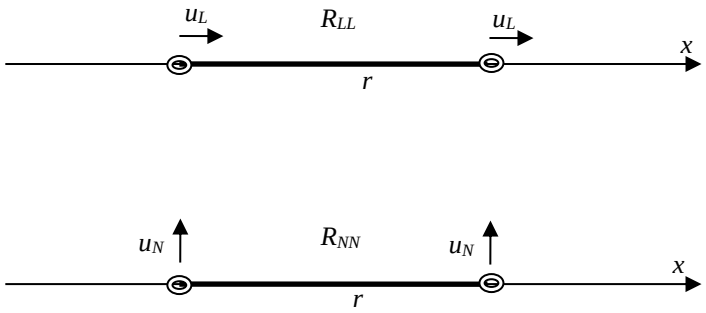


Fig. 3.9: geometria utilizzata per la definizione delle correlazioni longitudinali e trasversali

È interessante considerare un campo di moto <u>*solenoidale*</u>, cioè a divergenza nulla. Anche se questa non è la situazione più generale, tuttavia spesso nella trattazione teorica della turbolenza si assume questa ipotesi. Dato che è sempre possibile definire e costruire un <u>campo medio</u>, consideriamo esclusivamente le sue <u>*fluttuazioni*</u>. Vedremo al Cap. 4 che in un campo solenoidale anche la divergenza delle fluttuazioni è nulla. Ipotizziamo, inoltre per comodità, che il campo sia anche stazionario e quindi che il valore delle fluttuazioni u_i non dipenda dal tempo. Le funzioni

di correlazione di u_1 con le altre componenti in un punto **x** saranno definite come:

$$R_{11} = \overline{u_1(\boldsymbol{x}) \cdot u_1(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})} \qquad R_{12} = \overline{u_1(\boldsymbol{x}) \cdot u_2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})} \qquad R_{13} = \overline{u_1(\boldsymbol{x}) \cdot u_3(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})}$$

Di queste tre correlazioni solo R_{11} è diversa da zero, per quanto detto in precedenza. Questa proprietà la sfrutteremo tra un po'. Consideriamo ora $R_{12}(\mathbf{r})$. Se **r** è piccolo, possiamo sviluppare in serie di Taylor $u_2(\mathbf{x}+\mathbf{r})$ e, arrestando la serie al termine delle derivate prime, si ha che:

$$u_2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) \cong u_2(\boldsymbol{x}) + r_1 \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{x}} + r_2 \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right|_{\boldsymbol{x}} + r_3 \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right|_{\boldsymbol{x}} \qquad [3.50a]$$

Dato che:

$$R_{12} = \overline{u_1(\boldsymbol{x}) \left[u_2(\boldsymbol{x}) + r_1 \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{x}} + r_2 \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right|_{\boldsymbol{x}} + r_3 \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right|_{\boldsymbol{x}} \right]} \qquad [3.50b]$$

si ottiene:

$$\frac{\partial R_{12}}{\partial r_2} = \overline{u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x}} \qquad [3.50c]$$

Relazioni analoghe si ottengono immediatamente per R_{11} e per R_{13}. Se ora sommiamo tra loro le tre derivate delle funzioni di correlazioni R_{1j}, otteniamo:

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial R_{1j}}{\partial r_j} = \overline{u_1 \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right]} = \overline{u_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} \qquad [3.50d]$$

Ma dato che il campo è solenoidale:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \qquad [3.50e]$$

e quindi:

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial R_{1j}}{\partial r_j} = 0 \qquad [3.50f]$$

Tuttavia, delle tre correlazioni R_{1j}, solo R_{11} è diversa da zero e quindi:

$$\frac{\partial R_{1j}}{\partial r_j} = 0 \qquad [3.50f]$$

È ora facile verificare che vale la relazione generale:

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial r_j} = 0 \qquad [3.51a]$$

Se però il campo è omogeneo, la coppia di punti **x** e **x**+**r** è equivalente alla coppia di punti **x**-**r** e **x** e quindi è immediato dimostrare che vale la relazione:

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial r_j} = \frac{\partial R_{ij}}{\partial r_i} = 0 \qquad [3.51b]$$

La correlazione tra due componenti u_i e u_j in due punti qualsiasi dello spazio, separati dalla distanza **r** (con componenti cartesiane r_j) e di modulo r, deve avere una forma analitica tale da presentare l'invarianza rispetto a rotazioni e riflessioni del sistema di coordinate e perché ciò sia vero bisogna che il tensore di correlazione sia espresso come (Monin e Yaglom, 2007b):

$$R_{ij}(\boldsymbol{r}) = \alpha(r) \cdot r_i r_j + \beta(r) \cdot \delta_{ij} \qquad [3.52a]$$

dove $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\alpha(r)$ e $\beta(r)$ sono generiche funzioni del modulo del vettore distanza. Che questa espressione sia isotropa lo si vede immediatamente e per poterla sfruttare meglio, ruotiamo il sistema di riferimento in modo che l'asse x_1 sia parallelo a **r**. La relazione

generica (3.52a) deve dar conto sia di R_{LL} che R_{NN}. In effetti se consideriamo R_{LL}, vediamo che:

$$R_{LL}(\boldsymbol{r}) = \alpha(r) \cdot r^2 + \beta(r) \qquad [3.52b]$$

visto che $r_1 r_1 = r^2$. Considerando, invece, R_{NN}, dato che $r_2 r_2 = 0$, si ha che:

$$R_{NN}(\boldsymbol{r}) = \beta(r) \qquad [3.52c]$$

quindi la relazione generale che esprime R_{ij} in termini di R_{LL} e R_{NN} è la seguente:

$$R_{ij}(\boldsymbol{r}) = [R_{LL}(r) - R_{NN}(r)] \cdot \frac{r_i r_j}{r^2} + R_{NN}(r) \cdot \delta_{ij} \qquad [3.53a]$$

È facile dimostrare che se $r = 0$, si ha che:

$$R_{LL}(0) = R_{NN}(0) = R_{33}(0) = \frac{1}{3}\overline{u^2(x)} \qquad [3.53b]$$

Se il campo (delle fluttuazioni), oltre ad essere stazionario, omogeneo ed isotropo, è anche *solenoidale*, è possibile individuare una relazione che lega R_{NN} a R_{LL} (Wingaard, 2010) che, senza entrare nei dettagli, risulta essere:

$$R_{NN}(r) = R_{LL}(r) + \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r} R_{LL}(r) \qquad [3.54]$$

Una volta note le funzioni di autocorrelazione R_{LL} e R_{NN}, è possibile definire le rispettive *lunghezze integrali di scala* L_{11} e L_{22}. In particolare, si ha che:

$$L_{11} = \frac{1}{R_{LL}(0)} \int_0^\infty R_{LL}(r) \cdot dr \qquad [3.55]$$

ed una relazione analoga vale per L_{22}. In condizioni di isotropia si ha che $L_{22} = ½\, L_{11}$.

Come già detto, un ulteriore indicatore delle proprietà statistiche di un campo è la *Funzione di Struttura del secondo ordine* (che è un tensore) definita come:

$$D_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}, t) = \overline{[u_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}, t) - u_i(\boldsymbol{x}, t)] \cdot [u_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}, t) - u_j(\boldsymbol{x}, t)]} \qquad [3.56a]$$

strutturalmente molto simile al tensore di correlazione. Quando il campo è stazionario, omogeneo ed isotropo, viene meno la dipendenza dal tempo t e dal punto **x**, mentre resta la dipendenza dal vettore di separazione **r**. In condizioni di isotropia (Pope, 2003):

- la dipendenza da **r** si perde, sostituita dalla dipendenza dal suo modulo r;
- delle 9 componenti del tensore, 6 risultano nulle per l'isotropia e le uniche componenti non nulle sono quelle diagonali D_{11}, D_{22}, D_{33};
- diventano importanti due funzioni di struttura particolari, entrambe determinate lungo la direzione x (del moto medio) e per le quali valgono le considerazioni di **Fig. 3.9**, cioè la *funzione di struttura longitudinale* $D_{LL} = D_{11}$ definita come:

  $$D_{LL}(r) = \overline{[u_L(x + r) - u_L(x)]^2} \qquad [3.56b]$$

  la *funzione di struttura trasversale* $D_{NN} = D_{22} = D_{33}$, definita come:

  $$D_{NN}(r) = \overline{[u_N(x + r) - u_N(x)]^2} \qquad [3.56c]$$

- ragionamenti sostanzialmente analoghi a quelli fatti in precedenza per il tensore di correlazione portano a dire che anche il tensore della funzione di struttura D_{ij} può essere espresso in funzione di D_{LL} e D_{NN} mediante la relazione seguente, analoga alla (3.53a):

  $$D_{ij}(r) = [D_{LL}(r) - D_{NN}(r)] \cdot \frac{r_i r_j}{r^2} + D_{NN}(r) \cdot \delta_{ij} \qquad [3.56d]$$

  Prima di procedere è interessante notare come sia possibile esprimere il tensore di

struttura in funzione del tensore di correlazione. In effetti si ha che:

$$D_{ij}(r) = \overline{[u_\iota(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) - u_\iota(\boldsymbol{x})] \cdot [u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})u_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}) - u_j(\boldsymbol{x})]} = \overline{u_\iota(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) \cdot u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})} + \overline{u_\iota(\boldsymbol{x}) \cdot u_j(\boldsymbol{x})} - \overline{u_\iota(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) \cdot u_j(\boldsymbol{x})} - \overline{u_\iota(\boldsymbol{x}) \cdot u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})} \quad [3.56e]$$

I primi due termini di destra sono statistiche *one-point* che, per l'omogeneità del campo di moto, sono uguali e pari a $R_{ij}(0)$, mentre il terzo termine è $R_{ij}(\mathbf{r})$ ed il quarto è $R_{ij}(-\mathbf{r})$. Quindi si ha che:

$$D_{ij}(r) = 2R_{ij}(0) - R_{ij}(\boldsymbol{r}) - R_{ij}(-\boldsymbol{r}) \quad [3.56f]$$

Quando, poi, il campo oltre che essere isotropo è anche solenoidale, D_{NN} è univocamente legata a D_{LL} (che si suppone derivabile) in accordo alla relazione:

$$D_{NN}(r) = D_{LL}(r) + \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r} D_{LL}(r) \quad [3.56g]$$

cui si giunge ricordando la (3.56e) ed applicando le proprietà del campo solenoidale.

3.1.4 IL MODELLO DI REYNOLDS

L'irregolarità caratteristica della turbolenza del *PBL*, che deriva dalle non linearità delle relazioni fluidodinamiche che descrivono lo stato dell'atmosfera, ci ha indotto ad esplorare la possibilità di descrivere i fenomeni atmosferici con un modello stocastico. Nei punti precedenti abbiamo sviluppato l'argomento in maniera del tutto generale, giungendo alla conclusione che le strade percorribili sono due. Da un lato si potrebbe costruire un modello basato sulle funzioni di densità di probabilità relative ai vari campi stocastici descrittori dell'atmosfera, dall'altro, senza perdere informazioni, si potrebbe ottenere lo stesso risultato impiegando i momenti statistici. Anche se sono stati effettivamente sviluppati modelli basati esclusivamente sulle densità di probabilità (Pope, 2003), ad oggi l'applicazione di tale tecnica non è una consuetudine consolidata nel campo della Meteorologia e della Micrometeorologia. D'altro canto, appare comunque un'impresa titanica senza soluzione cercare di conoscere e stimare tutti i tipi di momenti di tutti gli ordini, per tutti i punti dello spazio-tempo e per tutte le variabili responsabili della turbolenza del *PBL*, cosa completamente equivalente alla descrizione statistica realizzata mediante le funzioni di densità di probabilità congiunte o meno. Parrebbe, quindi, di essere giunti in un vicolo cieco!

In realtà, l'introduzione di un modello basato sui momenti centrali al posto delle funzioni di densità di probabilità ci può portare ad alcune interessanti e promettenti considerazioni di interesse pratico. È un dato di fatto che le variabili istantanee che descrivono il *PBL devono* rispettare le leggi di conservazione su cui si basa il Modello Fluidodinamico, nonostante abbiano marcate caratteristiche caotiche. D'altro canto, va ricordato che tali leggi si presentano in *forma prognostica*, cioè in un dato istante esse legano il *tasso di variazione temporale* di una generica variabile alla *variazione spaziale* di un sottoinsieme delle variabili rilevanti nell'istante considerato. L'idea operativa che nasce da queste constatazioni è quella di lasciare alle leggi della Fluidodinamica la descrizione delle variazioni, nel tempo e nello spazio, non tanto delle variabili meteorologiche, quanto piuttosto dei relativi indicatori statistici (cioè dei momenti). La seconda considerazione che si può fare è che è pensabile (e sperabile) che i momenti realmente coinvolti nella descrizione della turbolenza siano pochi e quindi, di tutta la infinità di momenti che a rigore sarebbero necessari, ci si possa limitare a considerarne un numero esiguo. Non bisogna dimenticare, però, che una cosa è certa: la realtà fisica dei campi meteorologici istantanei, base oggettiva del modello istantaneo del *PBL* esposto al Cap. 2, deve essere ora sostituita da una visione astratta che vede ognuno di questi campi come altrettanti campi stocastici, quindi del tutto astratti. Naturalmente i campi meteorologici non sono veramente stocastici ma, ai fini operativi, non possiamo fare altro che ritenerli tali invocando, per ora in maniera indiscriminata, l'ipotesi di ergodicità. Da questo momento in poi, la realtà cui faremo riferimento è di fatto una realtà matematica astratta che, di volta in volta, cercheremo di legare, anche se con difficoltà, alla realtà fisica.

Queste due considerazioni rendono ora il panorama decisamente più ottimistico! Tuttavia, dobbiamo ancora superare una difficoltà che deriva dal fatto che i momenti centrali, pur essendo dei candidati ideali per la trattazione statistica delle variabili meteorologiche, dipendono in maniera imprescindibile dalla *definizione di media*, che a questo punto diventa il problema cruciale. Fin qui abbiamo sempre adottato come concetto di media il Valore Atteso statistico, concetto univoco e non ambiguo, ma di impossibile applicazione pratica. Infatti, sarebbe ben poco utile un modello di *PBL* che non potesse essere confrontato con misure ottenute in campo, che possono solo adottare o la media temporale o la media spaziale. È quindi necessario individuare una soluzione operativa al problema.

3.1.4.1 L'ipotesi di Reynolds e la definizione di media

È un'evidenza sperimentale il fatto che i diversi campi meteorologici che descrivono lo stato del *PBL* variano nello spazio e nel tempo e che la loro variazione appare come la sovrapposizione di fluttuazioni con evidenti caratteristiche caotiche a variazioni sostanzialmente regolari e, all'apparenza, deterministiche. E questo è ciò che il mondo fisico reale ci mostra. Per poter operare, abbiamo dovuto *modellizzare* questa realtà fisica ipotizzando che tutti i campi meteorologici fossero campi stocastici, costruendo così una realtà astratta parallela e di comodo. Questa visione stocastica, che di volta in volta dovremo confrontare con la realtà fisica delle cose, vede come elementi essenziali i momenti dei diversi campi e, per la loro definizione (e anche per la loro stima), è indispensabile definire in modo opportuno cosa si intende per *media* e perciò, in ultima analisi, come un segnale rilevato in un punto sia scomponibile in un valor *medio* e in *una fluttuazione.* A questo punto è indispensabile formulare nella sua essenza il *modello di Reynolds* universalmente adottato in Fluidodinamica:

1. lo stato del *PBL* è quello tipico di un fluido viscoso turbolento in cui le variabili fisiche che lo caratterizzano presentano evoluzioni prevedibili e di chiaro aspetto deterministico a cui si sovrappone un *rumore* tipicamente stocastico e disordinato. Il problema nella realtà fisica è stabilire cosa è deterministico e cosa non lo è, in sostanza cosa è turbolenza e cosa è movimento ordinato delle masse d'aria. Normalmente si ipotizza che i movimenti deterministici dell'aria siano costituiti dai movimenti a mesoscala che hanno tempi di scala superiori all'ora, e dalle oscillazioni ondose (onde di gravità, ecc. presenti nelle situazioni stabili) o pseudo-ondose come i moti submeso che hanno tempi di scala dell'ordine di decine di minuti. La differenza tra il segnale rilevato in un punto e i moti deterministici in quel punto è il segnale turbolento;

1. è quindi *logico supporre* che questa possa essere una chiave interpretativa promettente e fu proprio questo il modo con cui Osborne Reynolds (1894) affrontò lo studio della turbolenza dei fluidi in generale e del *PBL* in particolare, formulando un'*ipotesi di lavoro* secondo cui il valore di una variabile *U* in un punto dello spazio *x* al tempo *t* è scomponibile in un valor medio $\overline{U}$ ed una fluttuazione u':

$$U(x,t) = \overline{U}(x,t) + u'(x,t) \qquad [3.57]$$

Il valore medio della variabile dipenderebbe quindi dal punto di osservazione ma anche dall'istante considerato. Se nel mondo stocastico astratto la cosa è del tutto naturale, nel mondo reale questa asserzione non è banale. Operativamente, siamo abituati a porci in un punto dello spazio e raccogliere in una data finestra temporale di ampiezza *T* un segnale meteorologico. Fatto ciò, operativamente le possibilità che abbiamo sono sostanzialmente due. La prima è ritenere che il valor medio di *U* sia la media aritmetica del segnale nella finestra temporale e ciò comporta che il segnale medio sia un segnale a gradini (un valore costante per ogni periodo *T*), quindi discontinuo ma non derivabile. La seconda è estrarre dal segnale con metodi di *fitting* una funzione che rappresenti *in modo ottimale* le oscillazioni *lente* (per esempio eseguendo un *fitting lineare*, una media mobile o altri tipi di

filtering) e ritenere che questa funzione sia la media. In questo caso, la media varia nel tempo anche se non è certo che la funzione che la rappresenta sia ovunque derivabile. Si vede quindi come ciò che è del tutto *semplice e naturale* nel mondo astratto dell'approssimazione stocastica, non lo sia nella realtà fisica. Per ora e per semplicità ipotizziamo che sia applicabile l'ipotesi di ergodicità e di stazionarietà del segnale: in questo caso il valor medio è una costante. Rimandiamo al Cap. 13 ulteriori considerazioni in proposito.

2. le relazioni differenziali di conservazione che costituiscono il modello fluidodinamico del *PBL* (Cap. 2) dovranno essere riscritte tenendo conto di questa scomposizione. Ovviamente, per fare ciò è necessario adottare una definizione di media che abbia come requisito principale quello di ottenere equazioni sufficientemente semplici per i valori medi, una volta introdotta l'ipotesi di Reynolds nel modello Fluidodinamico.

3. Reynolds postulò che, date una costante *a* e due variabili *U* e *V*, la media adottata nella (3.57) dovesse avere le proprietà seguenti (note come <u>*Condizioni di Reynolds*</u>) (Monin e Yaglom, 2007a):

$$\overline{U+V} = \overline{U} + \overline{V} \qquad [3.58a]$$

$$\overline{aU} = a\overline{U} \qquad [3.58b]$$

$$\overline{a} = a \qquad [3.58c]$$

$$\overline{\frac{\partial U}{\partial x_i}} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_i} \qquad [3.58d]$$

$$\overline{\overline{U}V} = \overline{U} \cdot \overline{V} \qquad [3.58e]$$

Le prime quattro condizioni sono soddisfatte da molte definizioni differenti di media (per esempio la media spaziale e la media temporale). Più complessa è la condizione (3.58e); essa a rigore non è soddisfatta né dalla media spaziale né dalla media temporale, mentre è soddisfatta dalla definizione di valore atteso statistico (media d'insieme).

Sembra quindi che le condizioni di Reynolds inducano ad adottare la *media di insieme*, ma è realistico impiegare tale definizione nella pratica? Se il *PBL* fosse un laboratorio, non ci sarebbero problemi: potremmo ripetere l'esperimento tutte le volte che lo volessimo e potremmo stimare agevolmente in maniera campionaria la media d'insieme di ogni variabile. Ma il *PBL* non è un laboratorio e la situazione che osserviamo in un dato istante non si ripeterà mai più, quindi, anche se la scelta della media di insieme è teoricamente ottimale, in pratica essa non è praticabile. Al contrario, le misure che è realistico utilizzare nel *PBL* allo stato attuale della tecnologia sono costituite prevalentemente da misure realizzate in un dato punto dello spazio (prevalentemente nei pressi del suolo) protratte nel tempo e quindi risulta semplice definire una *media temporale*:

$$\overline{U} = \frac{1}{T}\int_0^T U(t)dt \qquad [3.59]$$

dove *T* è il <u>tempo di mediazione</u>. Questo tipo di media, costante nel periodo di osservazione *T*, è realisticamente realizzabile nella pratica, ma non rispetta tutte le condizioni di Reynolds. L'obiettivo che abbiamo di fronte è *stendere un ponte* tra le due definizioni di media, la seconda operativamente semplice da realizzare, la prima fondamentale nella descrizione teorica del *PBL*. Per fare ciò è necessario fare alcune osservazioni, riassumendo quanto già detto in precedenza:

- la *turbolenza è stazionaria* se le proprietà statistiche del sistema sono indipendenti dal tempo e ciò implica quindi l'invarianza statistica rispetto ad una generica traslazione temporale. Le caratteristiche della turbolenza nel *PBL* sono generalmente *non stazionarie*, soprattutto perché la principale forzante del sistema è il sole, col suo caratteristico ciclo giornaliero. L'ipotesi di stazionarietà per funzioni casuali non stazionarie quali sono le variabili meteorologiche del *PBL* è talvolta accettabile se si considerano intervalli

temporali di breve durata (inferiori all'ora) durante i quali i cambiamenti sembrano avvenire per stati quasi stazionari;

- la *turbolenza è omogenea* se il campo è statisticamente invariante rispetto alla traslazione degli assi coordinati nello spazio. Se si considerano domini di dimensioni limitate in cui siano assenti disturbi orografici ed in cui il suolo sia morfologicamente omogeneo, l'assunzione di turbolenza omogenea può essere un'approssimazione accettabile della realtà;

- la *turbolenza è isotropa* se il campo è indipendente dalla traslazione, rotazione e riflessione degli assi coordinati.

Nel caso in cui la turbolenza abbia tutte queste caratteristiche, allora si è in condizioni di *ergodicità* ed in questo caso la *media temporale* ***è*** *equivalente alla media di insieme*. Anche se la turbolenza del *PBL* è ben lontana dalla condizione di ergodicità, tuttavia operativamente non si può fare altro che usare la media temporale al posto della media d'insieme ogni volta che vengono applicate nella pratica le equazioni base che descrivono l'evoluzione del *PBL*. Questo è evidentemente un'approssimazione molto forte, tuttavia inevitabile.

A supporto di questa ipotesi, all'apparenza abbastanza brutale, si possono fare ulteriori considerazioni sulla scorta di quanto indicato da Monin e Yaglom (2007a). Invece di ritenere un generico segnale meteorologico un insieme caotico di valori, è possibile anche pensarlo come il risultato *della sovrapposizione di una moltitudine di segnali armonici (seni e coseni) con periodi differenti.* Questa affermazione non è del tutto corretta e nella seconda parte di questo capitolo affronteremo il mondo del dominio delle frequenze in modo più rigoroso; per il momento queste idee *fenomenologiche* possono essere sufficienti allo scopo. Secondo questo modo di vedere, che definiremo *armonico*, campionando in un punto dello spazio con un sensore ideale possiamo immaginare che passino attraverso il nostro sensore schiere di vortici equispaziati e che ogni schiera regolare di vortici possegga una ben precisa dimensione (per fissare le idee, immaginiamo vortici sferici con diametro variabile da vortice a vortice). Dato che le diverse schiere di vortici passeranno contemporaneamente, il sensore vedrà un segnale somma di tante sinusoidi quanti sono i vortici di ampiezza proporzionale alla dimensione tipica di ciascuna schiera. L'individuazione nel segnale del contributo dei diversi vortici (cioè l'analisi spettrale del segnale), risponde molto semplicemente alla domanda: *quanto pesano le differenti armoniche nel perturbare il segnale rispetto al suo valor medio?* Per rispondere a questa domanda, come vedremo, è sufficiente individuare le varie armoniche e quantificarne l'ampiezza. Senza entrare nei dettagli, un buon indicatore di questo *peso* è la *densità spettrale* che, in prima approssimazione, può essere definita come il quadrato dell'ampiezza delle singole armoniche, ciascuna differente in frequenza. Se si grafica tale indicatore rispetto alla frequenza caratteristica si ottiene lo spettro della variabile campionata. Questa analisi può essere applicata ai vari segnali meteorologici rilevati nei pressi del suolo: se la variabile considerata è la velocità orizzontale del vento e se si considera un tempo di osservazione abbastanza lungo, lo spettro che si ottiene quando sono assenti fenomeni ondosi o moti submeso è simile a quanto raffigurato nella **Fig. 3.10** in cui l'ordinata rappresenta la porzione di energia associata ad un vortice di una particolare dimensione, mentre in ascissa è riportata la dimensione del vortice stesso in termini di frequenza. I vortici più piccoli hanno periodi più corti, mentre i picchi nello spettro mostrano quali vortici contribuiscono di più all'energia complessiva *vista* in un punto *P*. Il picco più a sinistra, con periodo di circa 100 ore, si riferisce a variazioni di velocità del vento associate al passaggio di fronti, mentre l'altro picco, posto attorno alle 24 ore, mostra l'aumento giornaliero della velocità del vento e la sua diminuzione notturna. Il picco più a destra è dunque quello più interessante; esso deriva dai vortici a microscala della durata variabile tra 10 secondi e 10 minuti, dovuti alla turbolenza del *PBL* ed individuabili anche negli andamenti mostrati nella **Fig. 2.11**. Sempre analizzando il picco più a destra, si nota come i vortici più grandi siano anche i più intensi. Dalla figura emerge, poi, una circostanza singolare: sono visibili variazioni nella velocità del vento o dell'ordine di alcune ore (derivanti dai moti a mesoscala) o dell'ordine dei minuti e dei secondi (dovuti alla turbolenza). Non si notano significative variazioni con periodi intermedi. Questo fenomeno è noto col termine *spectral gap*. In figura lo *spectral gap* è

molto evidente ed è la valle tra i due picchi. Non era quindi arbitrario definire il *PBL* come *quella porzione di troposfera che risponde alle forzanti su una scala temporale dell'ordine dell'ora* (Stull, 1988)**;** implicito è il fatto che la turbolenza sia la principale forza motrice agente nel *PBL*. Lo *spectral gap* è quindi un mezzo per separare le influenze turbolente sul *PBL* da quelle influenze che turbolente non sono e la sua presenza consente di individuare un periodo di mediazione da adottare nella stima della media e degli altri momenti di interesse valutabile attorno ai 15÷60 minuti. Adottando una scala temporale dell'ordine dell'ora (Monin e Yaglom, 2007a) l'ipotesi di ergodicità risulta meno arbitraria e la sostituzione della media temporale alla media d'insieme decisamente più realistica.

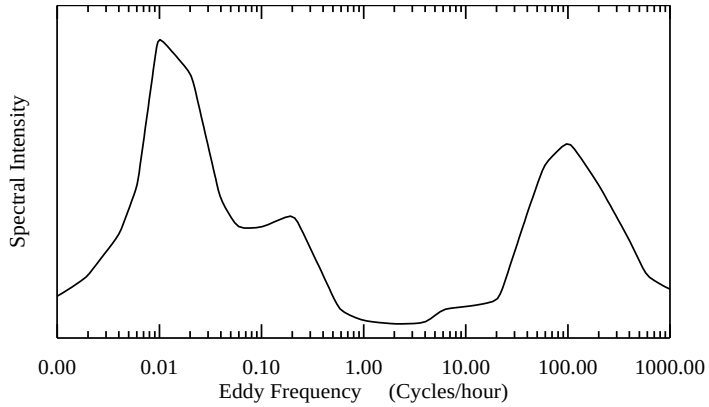


Fig.3.10: spettro della velocità del vento al suolo (Stull, 1988)

La presenza dello *spectral gap* è sostanzialmente ben verificata quando sono assenti fenomeni ondosi o pseudo-ondosi, in sostanza quando si trattano situazioni diurne e convettive. Nelle situazioni notturne stabili spesso lo *spectral gap* è poco visibile o addirittura assente proprio per la perturbazione dei segnali meteorologici da parte dei moti non turbolenti. Ritorneremo a parlare di ciò nel Cap. 13. Per ora, per semplicità, ipotizziamo l'esistenza dello *spectral gap* che ci consente una chiara separazione tra ciò che è turbolenza da ciò che non lo è

Da un punto di vista modellistico, nel Cap. 5 riscriveremo tutte le equazioni di conservazione della Fluidodinamica scomponendo ogni variabile presente in valor medio e fluttuazioni. Fatto ciò, otterremo una serie di equazioni differenziali alle derivate parziali relative al valor medio e ai principali momenti centrali. Troveremo una bella sorpresa facendo ciò, ma per il momento non ne parliamo. Questo sistema di equazioni differenziali potrà essere risolto (come vedremo non in maniera analitica, ma in maniera numerica) ottenendo l'evoluzione temporale dei campi di tutte le variabili di interesse. In teoria potremmo fare tutto ciò senza preoccuparci minimamente del fatto che alla base di tutto lo sviluppo sta la media d'insieme. Il problema si presenta quando confrontiamo i risultati ottenuti dal modello con le misure realizzate campionando le variabili in campo. E qui, l'ipotesi di ergodicità ci consente di confrontare senza troppo timore le previsioni modellistiche con le misure.

3.1.4.2 L'ipotesi di Taylor o del congelamento della turbolenza

La descrizione del *PBL* richiede la conoscenza della distribuzione spazio-temporale dei vortici presenti per determinare le densità di probabilità congiunte o, alternativamente, i momenti centrali corrispondenti. Sfortunatamente, allo stato attuale della tecnologia, è praticamente impossibile *fotografare* nello spazio e nel tempo la struttura turbolenta del *PBL*. Di fatto è più difficile misurare ad un certo istante le caratteristiche di una porzione anche limitata del *PBL* piuttosto che fare misure protratte nel tempo in un punto preciso dello spazio. Se, per esempio, si installa una torre meteorologica dotata a varie quote di un anemometro e di un termometro e si collegano tutti questi sensori ad un sistema di acquisizione dati, si è in grado di *fotografare*, in quella ristretta porzione di spazio, l'andamento temporale delle variabili meteorologiche rilevate (in questo caso vento e

temperatura). La tecnologia disponibile è tale che l'intervallo temporale tra una misura e la successiva può essere ridotto a frazioni di secondo con costi e sforzi organizzativi, nel complesso, accettabili. Il passo verso una descrizione spaziale risulta possibile solo nel senso di un incremento dei punti di misura, fino a ricondursi ad un reticolo tridimensionale di postazioni di misura sufficientemente fitto. Il limite a ciò è l'aumento esponenziale dei costi e dei problemi organizzativi e logistici. L'introduzione attuale di *sensori remote sensing* come il *RADAR* per la misura della pioggia e del vento radiale, il *SODAR* e il *LIDAR* per la misura del vettore vento ed il *RASS* per la misura della temperatura, pur avendo indotto sensibili miglioramenti in questa problematica, non ha comunque risolto tutte le difficoltà. Da sempre l'impossibilità di misurare ha prodotto, per reazione, un notevole sforzo intellettuale volto alla costruzione di modelli o allo sviluppo di teorie con cui aggirare le difficoltà sperimentali stesse. Proprio in tale direzione deve essere inquadrato il lavoro di *G.I. Taylor* che, nel 1938, formulò la celebre *ipotesi di congelamento della turbolenza*, secondo cui *la turbolenza dei vari vortici poteva essere considerata congelata durante il loro transito nelle vicinanze di un sensore*. Così era possibile impiegare la velocità media del vento per trasformare la variazione temporale della turbolenza in una corrispondente variazione spaziale. Tale ipotesi non è vera in generale, ma lo diventa in tutti quei casi in cui i vortici turbolenti evolvono con una scala temporale maggiore del tempo da loro impiegato nel transitare per il sensore (Powell e Elderkin, 1974). Anche se questa ipotesi ha una giustificazione teorica sulla base delle equazioni che svilupperemo nel Cap. 5, qui cerchiamo di presentarla in un a maniera decisamente *naturale.*

Se un vortice di dimensione caratteristica λ è trasportato dal vento medio orizzontale U, il tempo che intercorre tra l'istante in cui il sensore inizia a sentire il vortice e l'istante in cui ciò si esaurisce sarà P, legato al modulo della velocità del vento ed alla dimensione caratteristica del vortice dalla relazione:

$$P = \lambda / U \qquad [3.60a]$$

In concreto, si consideri la temperatura come variabile caratteristica del vortice. Durante il suo transito nei pressi del termometro, si noterà una sua variazione misurata dal termometro. Si ipotizzi che la dimensione caratteristica del vortice sia λ = 100 m e che, nel momento in cui il vortice lambisce il termometro, la temperatura misurata sia 10°C, mentre quando il vortice lascia il termometro la temperatura sia di 5°C, evidenziando una variazione di temperatura di -5°C. Se U è pari a 10 m/s, in 10 s tutto il vortice è passato per il termometro e, se non ha subito evoluzioni e distorsioni, la variazione di temperatura misurata coincide col gradiente termico del vortice. Quindi, localmente si è avuta la variazione temporale di temperatura di $\partial T/\partial t$ = -0.5 K·s^{-1} per il passaggio del vortice caratterizzato da un gradiente termico spaziale pari a $\partial T/\partial x$ = 5 K/100 m = 0.05 K·m^{-1}, dove x è misurata parallelamente alla direzione del vento medio. È quindi:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -U \frac{\partial T}{\partial x} \qquad [3.60b]$$

che esprime analiticamente l'ipotesi di Taylor per la temperatura, in termini monodimensionali però. In termini tridimensionali, per una generica variabile meteorologica ξ, la formulazione generale dell'ipotesi di Taylor è la seguente (la dimostreremo al Cap. 5):

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -V_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + -V_y \frac{\partial \xi}{\partial y} + -V_z \frac{\partial \xi}{\partial z} \qquad [3.60c]$$

dove V_x, V_y e V_z sono le tre componenti cartesiane medie del moto. Come si può notare, le relazioni (3.60b e c) rappresentano una pura avvezione dello scalare T (o ξ). L'ipotesi di Taylor può essere ritenuta valida quando si è sicuri che il vortice non subisce cambiamenti significativi nel transito per il sensore e quindi quando l'intensità della turbolenza è piccola rispetto alla velocità del vento. Quantitativamente, essa risulta valida quando $\sigma_U / U < 0.5$, dove σ_U è la deviazione standard della velocità del vento (Stull, 1988). L'ipotesi di Taylor, per la sua notevole importanza pratica, è stata oggetto di molti studi teorici e di numerose verifiche sperimentali che ne hanno sostanzialmente confermato la validità, almeno se l'intensità di turbolenza risulta inferiore a 0.5.

Ulteriori interessanti dettagli in proposito si possono trovare in Wyngaard e Clifford (1977) e Koeltzsch (1999).

La relazione (3.60b) probabilmente non evidenzia a sufficienza la *potenza applicativa* dell'Ipotesi di Taylor; pertanto, è opportuno completare quanto detto con una formulazione meno rigorosa, ma più orientata alle applicazioni pratiche. Si consideri quindi una serie di temperature T_i (i = 1, 2,..., N) rilevate in un punto del *PBL* vicino al suolo x_k agli istanti t_i (i = 1,2,..., N) equidistanti nel tempo ($\Delta t = t_{i+1} - t_i$ = costante per ogni i). Si ipotizzi, inoltre, che durante la misura la velocità media del vento sia pari a U e che siano soddisfatte le condizioni di applicabilità dell'Ipotesi di Taylor. Per essere concreti, nella **Fig. 3.11** viene riportato un esempio tipico di una serie temporale di temperature rilevate con una frequenza di campionamento di 10 Hz durante una situazione convettiva con velocità media del vento di 5.7 $m \cdot s^{-1}$. Come si può vedere, nel segnale di temperatura sono evidenti le caratteristiche rampe tipiche delle situazioni convettive.

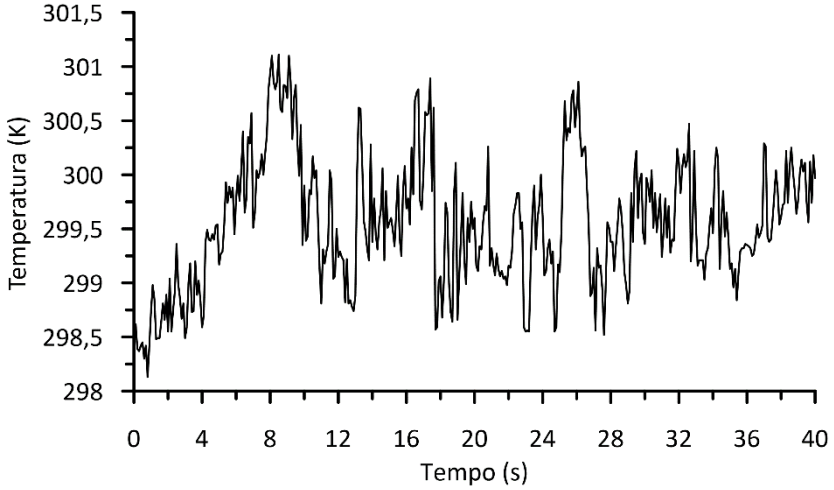


Fig. 3.11: andamento nel tempo della temperatura in una situazione convettiva

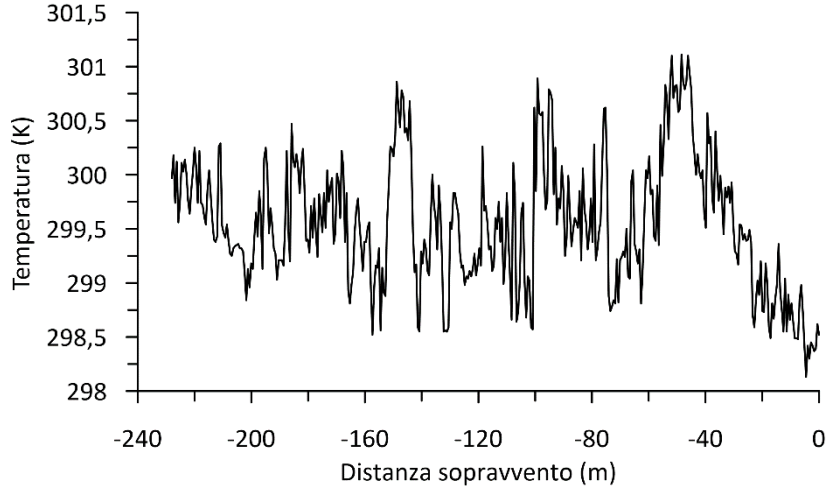


Fig. 3.12: trasformazione della struttura termica di Fig. 3.11 operata dall'ipotesi di Taylor

Discretizzando alle differenze finite (nello spazio e nel tempo) la relazione (3.60b) si ottiene:

$$\frac{T_k^{i+1} - T_k^i}{\Delta t} = -U \frac{T_k^i - T_{k-1}^i}{x_k - x_{k-1}} \qquad [3.60d]$$

cioè:

$$T_k^{i+1} = T_k^i - \frac{U \cdot \Delta t}{x_k - x_{k-1}} \left(T_k^i - T_{k-1}^i\right) \quad [3.60e]$$

Questa relazione afferma che all'istante t_{i+1} nella posizione x_k (dove è posto lo strumento di misura) verrà misurata una temperatura pari a quella che si sarebbe potuta misurare nella posizione x_{k-1} all'istante t_i se tra x_k e x_{k-1} vale la relazione:

$$x_k = x_{k-1} + U \cdot \Delta t \quad [3.60f]$$

quindi ad una distanza *sopravvento* alla postazione pari a $U \cdot \Delta t$. Nel caso specifico l'andamento di temperatura rilevato dal termometro rappresentato nella figura **Fig. 3.11** comporta, per l'ipotesi di Taylor che la struttura termica sopravvento sia quella riportata nella **Fig. 3.12**. È facile rendersi conto che se si facesse transitare la struttura termica di questa figura senza deformarla (*congelata*, quindi) alla velocità media del vento attraverso il punto di misura, ciò che verrebbe rilevato è effettivamente quanto mostrato nella **Fig. 3.12**.

In precedenza, abbiamo introdotto le funzioni di covarianza, di correlazione e le funzioni di struttura come indicatori statistici della struttura *spaziale* dei campi stocastici per la cui determinazione campionaria è necessario disporre di misure in punti differenti dello spazio, cosa non sempre possibile o semplice. L'ipotesi di Taylor, però, consente di aggirare il problema. Limitandoci per brevità alla sola funzione di struttura (per le funzioni di covarianza e di correlazione il ragionamento è analogo), l'uso dell'ipotesi di Taylor consente di ottenere funzioni di struttura *streamline* anche disponendo di misure in un solo punto dello spazio. Infatti, se il vento medio è U, per l'ipotesi di Taylor due misure *separate nel tempo* di $j\,\Delta t$ (*time-lag*), risulterebbero *separate nello spazio* (in direzione *streamline*) di $\Delta x = U \cdot j\Delta t$ e quindi la funzione di struttura *streamline* di una generica variabile A campionata a N istanti discreti può essere stimata come:

$$D_{AA}(U \cdot j\Delta t) = \frac{1}{N-j} \sum_{k=1}^{N-j} \left[A_k - A_{k+j}\right]^2 \quad [3.60g]$$

3.1.4.3 L'Energia Cinetica Turbolenta

Per ogni particella d'aria dotata di velocità propria è definibile *l'energia cinetica* corrispondente che, *se ci si riferisce ad una massa unitaria*, è pari a:

$$e = \frac{1}{2} \cdot [u^2 + v^2 + w^2] \quad [3.61a]$$

dove le componenti del vento considerate sono le *componenti cartesiane istantanee*. Se si considera un intervallo di tempo di osservazione, è definibile *un'energia cinetica media* come:

$$\bar{e} = \frac{1}{2} \cdot \overline{[u^2 + v^2 + w^2]} \quad [3.61b]$$

Ricordando che le componenti istantanee del vento sono il risultato della somma di una componente media (nell'intervallo di mediazione considerato) e di un termine fluttuante (variabile nell'intervallo di mediazione, ma a media nulla), si ha che:

$$\bar{e} = \frac{1}{2} \cdot \left\{[\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2] + \left[\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right]\right\} \quad [3.61c]$$

Il primo dei due addendi è l'*Energia Cinetica Media* della particella, proprietà derivante dal moto medio della particella stessa, mentre il secondo addendo:

$$TKE = E = \frac{1}{2} \cdot \left[\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right] \quad [3.61d]$$

prende il nome di *Energia Cinetica Turbolenta* (*Turbulent Kinetic Energy, TKE*) e rappresenta l'energia cinetica che la particella possiede a causa delle fluttuazioni turbolente caratteristiche del *PBL*. Questa grandezza, come si vedrà poi, riveste una notevole importanza nella modellizzazione

matematica del *PBL*. Va rilevato come i tre addendi nella (3.61d) sono le varianze delle tre componenti del vento. Nella **Fig. 3.13** è presentato un tipico andamento diurno della *TKE* rilevata nei pressi del suolo. Da essa si nota come i valori maggiori di *TKE* si abbiano nelle ore a maggior soleggiamento e con maggior velocità del vento. Durante il giorno, il galleggiamento accelera le particelle di aria nella parte centrale del *ML*, quindi la varianza della componente verticale del vento risulta un contributo importante per la *TKE*. In queste situazioni il profilo verticale di *TKE* decresce lentamente con la quota sino all'*entrainment*, dove si ha una brusca diminuzione di *TKE* che tende ad annullarsi tanto più quanto ci si innalza nell'atmosfera libera. Con cielo nuvoloso, invece, il riscaldamento del suolo è limitato e la turbolenza è generata prevalentemente dallo *shear* e dall'attrito superficiale dovuto agli ostacoli del terreno. Quindi i termini più importanti per la *TKE* sono dovuti alle componenti orizzontali del vento. Anche in questo caso la *TKE* decresce con la quota, ma più velocemente, sino a cadere bruscamente in corrispondenza della base delle nuvole. Durante la notte la stabilità sopprime la *TKE* causando una sua rapida diminuzione con la quota: anche in questo caso la poca turbolenza è generata al suolo dallo *shear* del vento

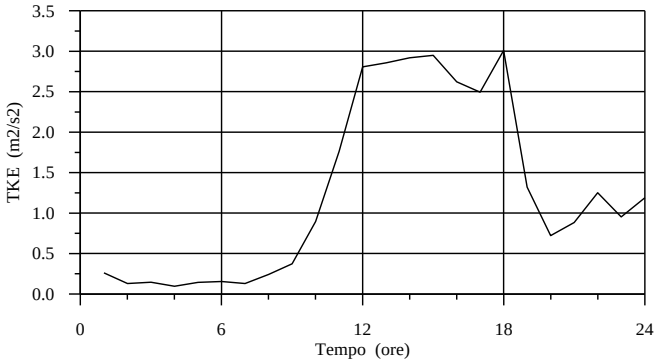


Fig. 3.13: evoluzione diurna dell'energia cinetica turbolenta (Sozzi e al, 2002).

L'energia cinetica turbolenta varia nel tempo, come si vedrà al Cap. 5, in accordo con una opportuna legge prognostica. È però importante fin da subito fare alcuni commenti in proposito. Il tasso di variazione di energia cinetica turbolenta in un generico istante ed in un punto qualsiasi del *PBL* deriva dalla somma algebrica di alcuni termini:

- un termine di produzione meccanica legato agli stress di Reynolds (di cui si parlerà successivamente) ed allo *shear* del vento,
- un termine di trasporto turbolento,
- un termine dovuto al gradiente delle fluttuazioni di pressione, che si incarica di ridistribuire la TKE totale tra le componenti orizzontali (proporzionali alle varianze delle componenti orizzontali del moto) e la componente verticale proporzionale alla varianza della componente verticale del moto,
- un termine dovuto al galleggiamento, che è una sorgente di TKE positiva nelle situazioni convettive e negativa nelle situazioni stabili,
- un termine che rappresenta la dissipazione viscosa di energia cinetica in calore.

Quest'ultimo termine, denominato Tasso Medio di Dissipazione dell'Energia Cinetica Turbolenta ed indicato col simbolo ε, riveste un ruolo estremamente rilevante nello studio del *PBL*.

3.1.4.4 I Flussi Cinematici ed i Flussi Turbolenti

Il moto dell'aria nel *PBL* (sia in orizzontale che in verticale) fa sì che in un punto $P(x,y,z)$ e al tempo t si vengano a stabilire dei flussi di quantità di moto, di calore, di vapor d'acqua e di specie chimiche che non derivano solo dal moto medio dell'aria ma anche dai moti turbolenti.

Consideriamo inizialmente il flusso di calore. Se in *P(x,y,z)* evidenziamo una superficie infinitesima *dS* con la normale diretta lungo *x*, il calore che l'attraversa nell'intervallo di tempo infinitesimo *dt* dipende dalla temperatura potenziale θ posseduta dall'aria in *P* e dal valore della componente *u* del vento nel punto *P* e nell'istante considerato secondo la relazione:

$$dQ = \rho C_p \cdot \theta \cdot u \cdot dS \cdot dt \qquad [3.62]$$

quindi il *flusso istantaneo di calore* nella direzione *x* nel punto *P* all'istante *t* risulta pari a:

$$Q_x(P,t) = \rho C_p \cdot u \cdot \theta \qquad [3.63a]$$

Analogamente si ottengono le relazioni seguenti per i flussi istantanei nelle direzioni *y* e *z*:

$$Q_y(P,t) = \rho C_p \cdot v \cdot \theta \qquad [3.63b]$$

$$Q_z(P,t) = \rho C_p \cdot w \cdot \theta \qquad [3.63c]$$

Il *flusso di calore istantaneo* è quindi una *quantità vettoriale* che, in *P* ed al tempo *t* è pari a:

$$Q(P,t) = \left[Q_x, Q_y, Q_z\right]^T = \left[\rho C_p u\theta, \rho C_p v\theta, \rho C_p w\theta\right]^T \qquad [3.63d]$$

Il flusso di calore istantaneo è di ben poca utilità, dato che varia in modo pressoché casuale col variare nel tempo delle tre componenti del vento e della temperatura potenziale. D'interesse molto maggiore è invece il *flusso di calore medio* in un intervallo temporale τ, anch'esso un vettore, e per ottenerne le tre componenti cartesiane si può considerare ancora una volta la superficie infinitesima *dS* orientata lungo l'asse *x* da cui passa il flusso di calore istantaneo dato dalla (3.63a). Se si considerano due istanti successivi t_1 e $t_2 = t_1 + \tau$, il valor medio di Q_x sarà:

$$\overline{Q_x}(P) = \frac{\rho C_p}{\tau} \int_t^{t+\tau} u(t)\theta(t) \cdot dt \qquad [3.64a]$$

Adottando l'ipotesi di Reynolds, ipotizzando che la velocità del vento e la temperatura potenziale siano dati dalla somma di un valor medio e di una fluttuazione stocastica e ricordando che il valor medio delle fluttuazioni è nullo, la relazione precedente si trasforma nel modo seguente:

$$\overline{Q_x}(P) = \overline{Q_{x_cin}}(P) + \overline{Q_{x_turb}}(P) = \rho C_p \bar{u} \cdot \bar{\theta} + \rho C_p \overline{u'\theta'} \qquad [3.64b]$$

quindi la componente media lungo *x* del flusso di calore nel punto *P* è la somma di due termini:

- $\overline{Q_{x_cin}}$, che è il *flusso cinematico di calore* dovuto al trasporto medio in direzione *x* operato dal moto medio delle masse d'aria,
- $\overline{Q_{x_turb}}$ che è il *flusso turbolento di calore* causato dai moti turbolenti.

Sorprendentemente, si nota che, *in assenza* di un movimento medio delle masse d'aria lungo la direzione *x*, la sola turbolenza è comunque in grado di trasferire calore. Analogamente, considerando sia la direzione *y* che la *z*, si ha che:

$$\overline{Q_y}(P) = \overline{Q_{y_cin}}(P) + \overline{Q_{y_turb}}(P) = \rho C_p \bar{v} \cdot \bar{\theta} + \rho C_p \overline{v'\theta'} \qquad [3.64c]$$

$$\overline{Q_z}(P) = \overline{Q_{z_cin}}(P) + \overline{Q_{z_turb}}(P) = \rho C_p \bar{w} \cdot \bar{\theta} + \rho C_p \overline{w'\theta'} \qquad [3.64d]$$

Nel caso particolare del flusso verticale di calore ($\overline{Q_z}$), se il terreno è piatto e se si considera un punto *P* molto vicino al suolo (nel *SL*, in particolare), la componente verticale media del vento è nulla e quindi il flusso medio verticale di calore coincide col flusso turbolento. È questo flusso di calore che trasferisce al *PBL* la radiazione solare assorbita dal suolo durante le ore diurne. Quindi, il flusso verticale di calore sensibile, responsabile della generazione e dell'evoluzione degli enormi vortici che spazzano l'intero *PBL*, è esclusivamente di origine turbolenta! Dato che questa circolazione di vortici è l'elemento vitale di tutto il *PBL*, risulta evidente come la turbolenza sia

il meccanismo principale presente nel *PBL* e quindi anche il meccanismo più efficace di rimescolamento degli inquinanti in esso introdotti. Questo flusso turbolento (positivo se è un termine di sorgente) è positivo durante le ore diurne, quando la temperatura potenziale nel *SL* decresce con la quota, e negativo nelle ore notturne quando il profilo cresce con la quota. Per rendersi conto di ciò è utile impiegare il seguente schema concettuale (Stull, 1988). Si consideri un piccolo strato orizzontale di aria del *SL* tra le quote z_1 e z_2 ($z_1 > z_2$) in una situazione convettiva. In tale strato saranno attivi una miriade di *eddies* (vortici) che in continuazione sposteranno particelle da un livello all'altro. Consideriamo la **Fig. 3.14** dove è mostrato il classico profilo di temperatura potenziale media in una situazione convettiva, continuamente decrescente con la quota. Ipotizziamo che la **particella 1** faccia parte di un vortice turbolento che la porta molto rapidamente (in pratica in maniera adiabatica) dal livello z_1 al livello inferiore z_2 e ciò perché ad essa è applicata una fluttuazione w' di velocità verticale che, ovviamente, è negativa.

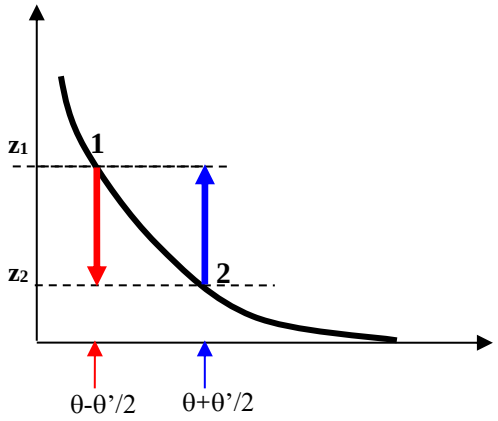


Fig. 3.14: vortice turbolento in una condizione convettiva

La particella inizialmente stava alla temperatura potenziale $\theta - \theta'/2$. Una volta raggiunto il livello inferiore z_2, essa si mescola alle altre particelle del livello che però si trovano alla temperatura potenziale $\theta + \theta'/2$, trasferendo ad esse la quantità di calore (per unità di massa) $Q_1 = -\rho C_p w'\theta'$. Ma la particella ha subito un movimento discendente, quindi $w' < 0$, e si è mischiata con particelle più calde ($-\theta' < 0$), quindi in totale la **particella 1** nel suo moto turbolento ha prodotto un flusso di calore nello strato $z_2 \div z_1$ positivo, cioè diretto verso l'alto. Se la particella 1 ha raggiunto z_1 un'altra particella (la **particella 2**) dovrà andarsene da questo livello per problemi di conservazione della massa e tale particella, anch'essa catturata dal vortice turbolento, passerà da z_2 a z_1 con velocità $w' > 0$ (la particella sta salendo). Essa raggiungerà il livello z_1 con un eccesso di temperatura potenziale e miscelandosi con le altre particelle a z_1 produrrà un flusso di calore nello strato pari a $Q_2 = \rho C_p w'\theta$ dove, questa volta, $w' > 0$ ma anche $\Delta\theta = \theta' > 0$. Quindi anche questa particella ascendente del vortice trasporta calore positivo da z_2 a z_1. Abbiamo considerato solo 2 distinte particelle di un *eddy*, ma questo ragionamento lo si può fare per ogni particella di ogni *eddy* presente tra z_1 e z_2. Il flusso totale nello strato $z_1 \div z_2$ sarà quindi sempre positivo in situazioni convettive e ciò spiega la positività della covarianza $\overline{w'\theta'}$ nelle situazioni convettive. Lo stesso ragionamento fatto però in situazioni stabili, quando il profilo verticale di temperatura potenziale cresce monotonicamente con la quota, porta a dire che nelle situazioni stabili il flusso turbolento verticale di calore sensibile è negativo.

Considerazioni analoghe si possono fare per il vapor d'acqua. Se lo si esprime in termini di umidità assoluta a, ancora una volta per l'ipotesi di Reynolds e seguendo la stessa metodologia, si giunge facilmente alla determinazione del *flusso medio di vapor d'acqua* nel punto P:

$$\overline{F_{H_2O}}(P) = \left[\overline{F_{H_2Ox}}, \overline{F_{H_2Oy}}, \overline{F_{H_2Oz}}\right]^T \qquad [3.65a]$$

dove:

$$\overline{F_{H_2Ox}}(P) = \overline{F_{H_2Ox_cin}}(P) + \overline{F_{H_2Ox_turb}}(P) = \bar{a} \cdot \bar{u} + \overline{a'u'} \qquad [3.65b]$$

$$\overline{F_{H_2Oy}}(P) = \overline{F_{H_2Oy_cin}}(P) + \overline{F_{H_2Oy_turb}}(P) = \bar{a} \cdot \bar{v} + \overline{a'v'} \quad [3.65c]$$

$$\overline{F_{H_2Oz}}(P) = \overline{F_{H_2Oz_cin}}(P) + \overline{F_{H_2Oz_turb}}(P) = \bar{a} \cdot \bar{w} + \overline{a'w'} \quad [3.65d]$$

Anche in questo caso, se il punto di osservazione sta nel *SL* ed il terreno è piatto, il flusso cinematico verticale di vapor d'acqua è praticamente nullo e quindi l'intero flusso verticale di umidità (l'*evapotraspirazione* del suolo) è totalmente dovuto alla turbolenza. Naturalmente, perché sia presente del vapor d'acqua in aria è necessario che venga speso del calore di evaporazione. Se ci limitiamo a considerarne il solo flusso verticale, ad esso sarà associato un *flusso verticale di calore latente* che, indicando con λ il calore latente di vaporizzazione, sarà pari a:

$$\overline{Q_{Lz}}(P) = \overline{Q_{Lz_cin}}(P) + \overline{Q_{Lz_turb}}(P) = \lambda \cdot \bar{a} \cdot \bar{w} + \lambda \cdot \overline{a'w'} \quad [3.65e]$$

Nel *SL* e con terreno piatto, la componente cinematica del flusso latente verticale è nulla e tutto il flusso di calore latente verticale è dovuto al solo effetto della turbolenza.

Se si considera poi la concentrazione *c* di una grandezza scalare, per esempio la concentrazione in aria di una specie chimica, il suo flusso, analogamente al caso del vapor d'acqua, è:

$$\bar{F}_c(P) = \left[\overline{F_{cx}}, \bar{F}_y, \overline{F_{cz}}\right]^T \quad [3.66a]$$

dove:

$$\overline{F_{cx}}(P) = \overline{F_{cx_cin}}(P) + \overline{F_{cx_turb}}(P) = \bar{c} \cdot \bar{u} + \overline{c'u'} \quad [3.66b]$$

$$\overline{F_{cy}}(P) = \overline{F_{cy_cin}}(P) + \overline{F_{cy_turb}}(P) = \bar{c} \cdot \bar{v} + \overline{c'v'} \quad [3.66c]$$

$$\overline{F_{cz}}(P) = \overline{F_{cz_cin}}(P) + \overline{F_{cz_turb}}(P) = \bar{c} \cdot \bar{w} + \overline{c'w'} \quad [3.66d]$$

Da quanto detto si nota come la *parte turbolenta del flusso di uno scalare* in una delle direzioni cardinali sia *proporzionale* alla *covarianza* della variabile considerata con la componente del vento lungo la direzione cardinale stessa. Ciò sta a significare che il vettore delle covarianze tra uno scalare *c* (temperatura, umidità o sostanze chimiche, ed il vento) coincide, a meno di una costante di proporzionalità, col vettore dei flussi turbolenti medi. Se il punto *P* in cui si determina il flusso si trova entro il *SL* ed il terreno è piatto, risultano di estrema importanza nello studio del *PBL* i flussi seguenti:

- il flusso verticale di calore H_0, normalmente indicato come Flusso Turbolento di Calore Sensibile, definito come:
$$H_0 = \rho C_p \overline{w'\theta'} \quad [3.67a]$$
- il Flusso di Galleggiamento H_{0v}, definito come:
$$H_0 = \rho C_p \overline{w'\theta_v'} \quad [3.67b]$$
- il Flusso Turbolento di Calore Latente H_E, dato da:
$$H_E = \lambda \overline{w'a'} \quad [3.67c]$$
- l'Evapotraspirazione *E*, data da:
$$E = \overline{w'a'} \quad [3.67d]$$
- il Flusso Turbolento di un generico scalare *c*, F_c dato da:
$$F_c = \overline{w'c'} \quad [3.67e]$$

Un'altra proprietà importante è la *quantità di moto* di una generica particella d'aria in movimento, entità vettoriale che, nel caso di una particella a volume unitario, è pari a:

$$\boldsymbol{p} = \left[p_x, p_y, p_z\right]^T = [\rho u, \rho v, \rho w]^T \quad [3.68]$$

dove ρ è la densità dell'aria e *u*, *v* e *w* sono valori istantanei di velocità. Il vettore **p** nel punto *P* è quindi istantaneo e varia irregolarmente nel tempo per la turbolenza del *PBL*. Non è immediato definire il flusso istantaneo di quantità di moto in un punto *P* ad un istante *t*. Consideriamo inizialmente una superficie infinitesima *dS* con normale parallela all'asse delle *x*. Attraverso tale superficie sono definibili tre *flussi istantanei di quantità di moto*: il flusso di p_x, p_y e p_z, cioè:

$$F_{px}^{x} = \rho \cdot u \cdot u \qquad F_{py}^{x} = \rho \cdot v \cdot u \qquad F_{pz}^{x} = \rho \cdot w \cdot u \qquad [3.69a]$$

Mentre nel caso del flusso di una variabile scalare in *P* lungo la direzione *x* il flusso era uno scalare, nel caso della quantità di moto il *flusso è un vettore*. Analoghe considerazioni possono essere fatte per il flusso di quantità di moto nella direzione *y* e *z* ed in entrambi i casi si giunge alla conclusione che questi flussi direzionali sono entità vettoriali. Pertanto, il *flusso istantaneo* in *P* all'istante *t* è un *tensore* così definito:

$$\boldsymbol{F_p} = \left[\boldsymbol{F_p^x}, \boldsymbol{F_p^x}, \boldsymbol{F_p^x}\right]^T = \rho \cdot \begin{bmatrix} uu & vu & wu \\ uv & vv & wv \\ uw & vw & ww \end{bmatrix} \qquad [3.69b]$$

dove $\mathbf{F_p}^x = (F_{px}{}^x, F_{py}{}^x, F_{pz}{}^x)^T$ ed in modo analogo sono definiti i vettori $\mathbf{F_p}^y$ e $\mathbf{F_p}^z$. Finora si è considerato il *Flusso Istantaneo di Quantità di Moto*, ma, in generale, si è interessati al *Flusso Medio di Quantità di Moto*. Seguendo la stessa metodologia adottata per gli scalari, è facile ottenere l'espressione seguente:

$$\overline{\boldsymbol{F_p}} = \rho \cdot \begin{bmatrix} \bar{u}\bar{u} & \bar{v}\bar{u} & \bar{w}\bar{u} \\ \bar{u}\bar{v} & \bar{v}\bar{v} & \bar{w}\bar{v} \\ \bar{u}\bar{w} & \bar{v}\bar{w} & \bar{w}\bar{w} \end{bmatrix} + \rho \cdot \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{v'u'} & \overline{w'u'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'v'} & \overline{w'v'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix} \qquad [3.69c]$$

in cui il primo termine di destra rappresenta il <u>*Flusso Cinematico della Quantità di Moto*</u> ed il secondo il <u>*Flusso Turbolento di Quantità di Moto*</u>. È ora possibile fare alcune considerazioni:

- il *Flusso Turbolento Medio di Quantità di Moto*, a meno di una costante di proporzionalità pari alla densità dell'aria, coincide con la *Matrice di Varianza-Covarianza* delle tre componenti del vento;

- è possibile dimostrare che quando il moto è turbolento al *tensore degli sforzi viscosi* si <u>sovrappone</u> un'altra causa di deformazione delle particelle d'aria, derivante dai moti turbolenti. Ciò è riassunto nel tensore degli sforzi turbolenti, normalmente indicato come *tensore degli <u>Sforzi di Reynolds</u>* che è dato da:

  $$\boldsymbol{\tau}_{Reynolds} = -\rho \cdot \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{v'u'} & \overline{w'u'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'v'} & \overline{w'v'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix} \qquad [3.70a]$$

  che, a parte il segno, è il *Flusso Turbolento di Quantità di Moto*. In particolare, detto **τ** il tensore degli sforzi di Reynolds, si ha che $F_p = -\boldsymbol{\tau}$;

- se si considera un punto *P* nel *SL* ed un terreno piatto, lo *Sforzo Verticale di Taglio* si riduce alle due sole componenti $\tau_{xz} = -\rho\overline{u'w'}$ e $\tau_{yz} = -\rho\overline{v'w'}$ ed il suo modulo è pari a:

  $$\left|\boldsymbol{\tau}_{Reynolds}\right| = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} \qquad [3.70b]$$

  Storicamente è stata definita una *velocità di scala* u_*, nota come *friction velocity*:

  $$u_*^2 = \sqrt{\overline{u'w'^2} + \overline{v'w'^2}} \qquad [3.70c]$$

  da cui si ha ovviamente che:

  $$\left|\boldsymbol{\tau}_{Reynolds}\right| = \rho \cdot u_*^2 \qquad [3.70b]$$

È relativamente facile mostrare, adottando il medesimo schema concettuale utilizzato per determinare il segno di H_0, che le covarianze tra le componenti orizzontali del moto e la componente verticale sono grandezze negative e ciò perché il profilo verticale del vento è sempre crescente con la quota nel *SL* in condizioni stazionarie ed omogenee.

Infine, riprendendo in considerazione il Flusso Turbolento di Calore Sensibile H_0 (o il Flusso di Galleggiamento H_{0v}), durante una *giornata non perturbata* (senza temporali, pioggia, ecc.), tale variabile presenta delle situazioni tipiche:

- nelle situazioni convettive, cioè nelle ore diurne soleggiate, quando l'apporto di energia solare garantisce il trasferimento al *PBL* dell'energia necessaria per la generazione dei vortici convettivi di grandi dimensioni, è necessario che $H_0 > 0$ (ed anche H_{0v}). Quindi $\overline{w'\theta'} > 0$ e $\overline{w'\theta_v'} > 0$.

- nelle situazioni stabili, cioè in ore notturne poco ventose, H_0 e H_{0v} sono negativi e ciò implica che $\overline{w'\theta'} < 0$ e $\overline{w'\theta_v'} < 0$. La turbolenza è quindi solamente di origine meccanica con vortici di dimensione estremamente limitata.

- nelle situazioni adiabatiche, corrispondenti alla transizione da situazioni convettive a situazioni stabili (e viceversa) o a ore con velocità del vento elevate, $H_0 = H_{0v} = 0$ e quindi $\overline{w'\theta'} = 0$ e $\overline{w'\theta_v'} = 0$.

Quindi la convettività è attiva solo in presenza di un adeguato apporto energetico solare, mentre la turbolenza meccanica è sempre presente e costituisce l'unico contributo nelle situazioni adiabatiche e stabili.

3.1.4.5 I parametri caratteristici della turbolenza atmosferica

Conviene ora riassumere gli elementi essenziali fin qui esposti. Di tutti i parametri statistici che possono essere ottenuti dalle fluttuazioni delle variabili meteorologiche nel *PBL*, i momenti centrali del secondo ordine in cui sono presenti le componenti del vento sono i più importanti, visto che ad essi è attribuito il compito di *trasportare* le principali proprietà del fluido. Alle varianze delle tre componenti del vento è attribuito il compito di trasportare attraverso il *PBL* una porzione di energia, quella che deriva dai movimenti turbolenti delle masse d'aria e che si somma alla porzione di energia cinetica derivante dal moto medio delle masse d'aria. Alle covarianze (in cui è presente una delle componenti del vento) è attribuito, invece, il significato di flusso di una particolare proprietà (temperatura, umidità, quantità di moto, concentrazione di sostanze passive) dovuto al movimento turbolento ed irregolare dell'aria nel *PBL*. Di fatto questi flussi sono le *forzanti del PBL* che ne alimentano la turbolenza. In particolare:

- il *parametro che descrive la forzante convettiva* del *PBL* è sicuramente il *Flusso Turbolento di Calore Sensibile* definito come $H_0 = \rho C_p \overline{w'\theta'}$.

- il parametro che descrive lo scambio di vapor d'acqua tra il suolo ed il *PBL* è *il Flusso Turbolento di Calore Latente* H_E , dato da $H_E = \lambda \overline{w'a'}$.

- la *turbolenza meccanica*, dovuta allo *shear* del vento, è parametrizzata dalla *friction velocity* u_* (*velocità di scala del SL*), definita come $u_* = \left[\overline{u'w'}^2 + \overline{v'w'}^2\right]^{0.25}$.

Questi parametri sono necessari e sufficienti per descrivere completamente le forzanti convettiva e meccanica del *SL*; tuttavia, è consuetudine definire altri parametri caratteristici:

- la *temperatura di scala* T_*: dato che il rapporto tra H_{0v} e ρC_p ha le dimensioni di una temperatura, si è definita una temperatura di scala come:

$$T_* = -\overline{w'\theta'}/u_* \qquad [3.71a]$$

- l'*umidità di scala* q_**:* tale parametro viene definito nel modo seguente:

$$q_* = -\overline{w'a'}/u_* \qquad [3.71b]$$

- la *lunghezza di Monin–Obukhov* *L*: essa è stata introdotta dai due ricercatori russi per definire una *lunghezza di scala* per il *SL*. Essa è definita come:

$$L = -\frac{\bar{T}}{kg} \cdot \frac{u_*^3}{\overline{w'\theta'}} \qquad [3.71c]$$

  dove *T* è la temperatura media del *SL*, *g* è l'accelerazione di gravità e *k* è la costante di von Karman (pari a 0.4). *L*, in valore assoluto, è la quota in corrispondenza della quale si ha il bilancio tra la turbolenza meccanica e la turbolenza termica e quindi tale valore è in pratica dello stesso ordine dell'estensione verticale della *SL*. È interessante osservare come le situazioni convettive siano caratterizzate da valori di *L* negativi, mentre le situazioni stabili da un valore positivo. È poi immediato verificare che in modulo *L* aumenta all'avvicinarsi dell'adiabaticità, tendendo a $+\infty$ se l'avvicinamento avviene da situazioni stabili e a $-\infty$ se da situazioni convettive. Questo bizzarro comportamento di *L* ne fa un parametro scomodo per gli usi pratici; come si vedrà nel seguito, verrà estesamente utilizzato il parametro *1/L* o meglio ancora *z/L* (*z* è la quota di misura) che non presenta questi problemi.

Riassumendo quanto si è detto, risulta che:

- la velocità di frizione u_* è sempre positiva, e ciò è la diretta conseguenza del fatto che la turbolenza meccanica è sempre presente e deriva dallo *shear* del vento,
- nelle situazioni convettive, $H_{0v} > 0$ e $L < 0$,
- nelle situazioni stabili, $H_{0v} < 0$ e $L > 0$,
- nelle situazioni adiabatiche $H_{0v} = 0$ e $|L| = \infty$.

Questi sono i parametri caratteristici della turbolenza entro il *SL*. Ad essi si devono affiancare altri parametri che completano il quadro della turbolenza dell'intero *PBL*, soprattutto del *PBL* convettivo. Infatti, nelle situazioni convettive, quando nel *SL* H_0 è positivo, il galleggiamento (*buoyancy*) subito dei vortici turbolenti è pari a g/*T* e la *lunghezza di scala dell'intero PBL* è la sua estensione verticale z_i, è possibile definire una nuova velocità di scala, nota come la *velocità convettiva di scala* w_* e data da:

$$w_* = \left(\frac{g}{T} \cdot \overline{w'\theta'} \cdot z_i\right)^{1/3} \qquad [3.71d]$$

cui si può attribuire il significato di velocità ascensionale caratteristica degli *eddy* entro il *ML* ed è posta convenzionalmente a zero nelle situazioni non convettive. Questa velocità è normalmente piuttosto rilevante; in effetti, in una tipica situazione convettiva con $T = 300$ K, $H_{0v} = 150$ W·m^{-2} e $z_i = 1000$ m, w_* è pari a 2.6 m·s^{-2}. Quindi un vortice che si forma al suolo impiega un tempo pari a circa 10 minuti per raggiungere la sommità del *PBL*! Questa considerazione rafforza ulteriormente la scelta di un periodo di mediazione di 15÷60 minuti per le variabili meteorologiche.

Per un *PBL* stabile la velocità di scala caratteristica è solo la *friction velocity* e come scala spaziale caratteristica può essere considerata solo la sua estensione verticale h_m.

3.2 ANALISI NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

Fin qui è stato presentato l'apparato statistico con cui trattare i campi meteorologici nell'ipotesi che essi siano descrivibili come campi del tutto stocastici. Questo apparato statistico verrà impiegato nel Cap. 5 e vedremo che ci condurrà ad una riformulazione più trattabile del problema fluidodinamico. In effetti giungeremo ad una struttura matematica che consentirà di simulare e prevedere lo stato e l'evoluzione dell'atmosfera in generale e del *PBL* in particolare. In questa seconda parte del capitolo ci faremo invece guidare dalle misure, ormai molto numerose, che vengono realizzate nel *PBL* ed in laboratorio. Mentre le misure in campo tuttora soffrono del fatto che i punti di misura sono necessariamente poco numerosi, prevalentemente localizzati nei pressi del suolo ed inevitabilmente limitati all'analisi di serie temporali, gli esperimenti fisici in laboratorio offrono molti più elementi su cui riflettere. Possono essere ripetuti, le condizioni sperimentali possono essere accuratamente controllate e le misure possono essere sia spaziali che temporali. Un esempio splendido in questo senso è dato dal lavoro di quasi un decennio di Willis e Deardorff (1974, 1976a, 1976b, 1978, 1981, 1983, 1987) che hanno esplorato in laboratorio i segreti del *PBL* e della dispersione degli inquinanti in aria e che hanno prodotto la maggior parte delle informazioni che ancora oggi usiamo e che faticosamente ricaviamo nelle attività sperimentali in campo. Ciò che emerge dalla lettura di queste misure è la struttura intricata presentata dagli andamenti spaziali e temporali delle variabili meteorologiche in condizioni di turbolenza e ciò appare ad un primo sguardo una sfida a qualsiasi tipo di analisi.

Ad una lettura più attenta delle misure e soprattutto degli esperimenti in laboratorio, ciò che si nota è un modello concettuale, totalmente congruente col modello stocastico presentato in precedenza. Secondo questo nuovo modello concettuale, deducibile immediatamente dagli esperimenti, l'aria dell'intero *PBL* è costituita da un insieme di strutture coerenti o parzialmente coerenti di varie dimensioni ed in continua evoluzione nello spazio e nel tempo. Ogni struttura di questo tipo viene chiamata *vortice* (*eddy*). Essa si genera, come visto, sia per effetti convettivi che per effetti meccanici, viene trascinata dal moto medio delle masse d'aria ed evolve in continuazione. Kolmogorov ha studiato questo modello giungendo a formulare una celebre ipotesi che sarà l'argomento principale del prossimo Capitolo e che sta alla base della teoria della turbolenza atmosferica. Anticipando sinteticamente ciò, si può dire che i vortici nascono di dimensioni più o meno ragguardevoli (in pratica dello stesso ordine di grandezza dell'estensione verticale del *PBL*), quasi sempre a struttura asimmetrica e polarizzata direzionalmente dal moto medio delle masse d'aria, ed evolvono disgregandosi progressivamente in vortici di dimensione sempre più piccole fino a scomparire. Ognuna di queste strutture porta con sé dell'energia che progressivamente trasferisce ai vortici figli di dimensioni inferiori, fino a che questa energia viene totalmente dissipata in calore. Se ci ponessimo con un anemometro in un punto qualsiasi del *PBL* (o in un punto qualsiasi della struttura sperimentale di Willis e Deardorff), ciò che rileveremmo è un segnale delle tre componenti della velocità dell'aria estremamente irregolare e tormentato. Ad *occhio* però non ci sfugge il comportamento medio del segnale (il moto medio delle masse d'aria) e non ci sfugge neppure il fatto che le irregolarità, se viste con maggior attenzione, presentano caratteristiche approssimativamente periodiche. Ciò che ci proponiamo in questa seconda parte del Capitolo è mettere a punto delle tecniche matematico-statistiche in grado di far emergere dal caos i vortici turbolenti e l'energia ad essi associata.

Molte sono le tecniche matematiche che possono candidarsi a tale scopo. La tecnica delle Wavelets potrebbe essere la più indicata, ma ad oggi non è immediato un suo utilizzo estensivo nell'ambito della turbolenza atmosferica. La trasformata di Laplace potrebbe essere un altro buon candidato, ma il fatto che essa sia decisamente più parente dei fenomeni impulsivi che di quelli periodici la esclude di fatto dal gioco. La *gloriosa* analisi di Fourier pare decisamente lo strumento più indicato allo scopo, vista la sua versatilità intrinseca e la sua dichiarata vocazione alla descrizione di fenomeni periodici o quasi periodici. Per questo sarà proprio l'analisi di Fourier il tema che svilupperemo e che applicheremo nei capitoli successivi.

Ma che tipo di analisi dobbiamo fare? Un'analisi delle serie temporali, cioè lo studio dei processi stocastici che rappresentano l'andamento nel tempo di una variabile meteorologica in un

punto dello spazio o un'analisi dei campi stocastici, il vero tema della nostra ricerca? In linea teorica, non ci sono dubbi: l'analisi da fare è quella dei campi, quindi un'*analisi nello spazio*. Ci arriveremo, ma le complicazioni formali sono numerose e la possibilità di avere riscontri sperimentali in campo è veramente scarsa al livello attuale della tecnologia. D'altro canto, un'*analisi nel tempo* è decisamente più semplice, si fonda su una solida base dell'analisi dei segnali ed ha riscontri sperimentali in campo numerosi e facilmente trattabili. Che fare?

Nel primo insieme di paragrafi che seguono verranno presentate le nozioni fondamentali della Trasformata di Fourier e della sua applicazione concreta al problema della turbolenza atmosferica in generale e alla sua applicazione ai segnali meteorologici in particolare. Oltre a ciò, si impiegherà l'ipotesi di Taylor per trasformare ciò che l'analisi di Fourier ottiene trattando i segnali meteorologici variabili nel tempo in indicazioni su ciò che ha luogo nella direzione *streamline* (sottovento). Infine, si tratterà il problema generale dell'analisi di Fourier nello spazio tridimensionale, evidenziando il legame esistente tra ciò che si ottiene da questa analisi e quanto si ottiene dall'analisi nel tempo combinata con l'ipotesi di Taylor. L'esposizione è abbastanza elementare e non completamente rigorosa, per limitarne le difficoltà.

3.2.1 L'ANALISI SPETTRALE DI PROCESSI E CAMPI STOCASTICI

Poniamoci in un punto del *PBL* e consideriamo le variabili meteorologiche in questo punto. Esse possono essere descritte come processi stocastici che possiamo ritenere stazionari, se considerati in un opportuno orizzonte temporale. Una volta effettuato un campionamento, si otterranno degli andamenti temporali, ovviamente relativi al punto considerato. L'obiettivo che ci si pone è quello di isolare le differenti scale di moto sulla base delle realizzazioni disponibili. La trattazione che segue è decisamente poco rigorosa, ma sufficiente per i nostri scopi. Per una trattazione più rigorosa si rimanda a Monin e Yaglom (2007b) e a Pope (2003).

3.2.1.1 Concetti di base

Definizioni

Si consideri un processo stocastico stazionario ed ergodico $U(t)$ con realizzazione $u(t)$, per esempio una delle componenti del vento, e con valor medio noto. La condizione di ergodicità, poi, garantisce che l'analisi nel tempo di una realizzazione equivale all'analisi dell'insieme di tutte le possibili realizzazioni del processo. La conoscenza del valor medio, costante nel tempo per la stazionarietà del processo, consente inoltre di individuare l'andamento della fluttuazione $u'(t)$, anch'essa un processo stocastico stazionario ed ergodico. Nel seguito, senza perdere in generalità, si assumerà sempre che i processi stocastici considerati siano a media nulla.

Si supponga, inoltre, di conoscere la relativa funzione di auto-correlazione $R_{uu}(\tau)$ che dipende solo dal *time-lag* τ. Dato, poi, che si sta considerando la fluttuazione attorno al valor medio, la *funzione di auto-correlazione* coincide con la funzione di auto-covarianza. Anche se a priori non si può dire nulla sulle caratteristiche analitiche di tale funzione, l'evidenza sperimentale ci assicura che essa, oltre che essere simmetrica e pari, presenta una rapida diminuzione con l'aumentare del *time-lag*. Come noto essa è definita come:

$$R_{uu}(\tau) = E[u'(t) \cdot u'(t+\tau)] \qquad [3.72a]$$

e, quando $\tau = 0$, si ha che:

$$R_{uu}(\tau) = \sigma_u^2 \qquad [3.72b]$$

Inoltre, se si considera la funzione di autocorrelazione normalizzata $\rho_{uu}(\tau) = R_{uu}(\tau)/\sigma^2_u$ e se esiste l'integrale:

$$T_{Eu} = \int_0^\infty \rho_{uu}(\tau) \cdot d\tau \qquad [3.72c]$$

allora T_{Eu} è il *Tempo Euleriano Caratteristico di Scala* del processo stocastico. Se la variabile, poi, è una delle componenti del vento, allora $R_{uu}(0)$ è due volte l'energia cinetica turbolenta specifica associata alla componente considerata. Ipotizziamo, inoltre, che:

$$\int_0^\infty |R_{uu}(\tau)| \cdot d\tau < \infty \qquad [3.72d]$$

cosa sempre vera in pratica per un andamento temporale di lunghezza finita. In questo caso è possibile definire la *Trasformata di Fourier* della funzione di Auto-correlazione come:

$$S_{uu}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} \cdot d\tau \qquad [3.73a]$$

dove f è la frequenza (Hz) e j l'unità immaginaria. Da questa relazione è possibile riottenere la funzione di autocorrelazione mediante l'*Anti-Trasformata di Fourier* definita come:

$$R_{uu}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{uu}(f) \cdot e^{j2\pi f\tau} \cdot df \qquad [3.73b]$$

Le due relazioni (3.73) prendono il nome di *Relazioni di Wiener-Khinchine* e la funzione $S_{uu}(f)$ è nota come *Densità Spettrale Two-Sided* o *Spettro*.

Queste relazioni suggeriscono un nuovo modo di descrivere un processo stocastico. Il processo stocastico considerato nel dominio del tempo condensa le proprie auto-dipendenze nella funzione di auto-correlazione (coincidente con l'auto-covarianza quando il processo ha media nulla) che stabilisce ai diversi valori di *time-lag* τ il grado di auto-dipendenza e quindi di *memoria* del processo. Questa descrizione, comunque completa, non è molto espressiva. Se consideriamo, invece, la (3.73b) vediamo come questo grado di auto-correlazione del processo (la funzione di auto-correlazione, appunto) può essere vista come la sovrapposizione di infiniti segnali periodici complessi (*armoniche*), ciascuno a differente frequenza f e ciascuno *pesato* dai pesi dati dalla (3.73a) facendo così emergere le varie scale temporali che lo influenzano. Quando il *time-lag* diventa nullo, allora:

$$R_{uu}(0) = \sigma_u^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{uu}(f) \cdot df \qquad [3.73c]$$

Se la variabile considerata è una delle componenti del vento, è immediato vedere che il peso con cui tale segnale è scomposto in armoniche rappresenta il doppio dell'energia cinetica turbolenta attribuibile alla singola armonica ed alla componente del moto considerata.

Prima di procedere, è indispensabile ricordare che coesistono nella letteratura scientifica molte convenzioni con cui trasformare ed antitrasformare il segnale. Quella qui presentata, basata sulla frequenza f, è la convenzione maggiormente adottata in matematica e nell'analisi dei segnali, mentre nei testi di Fluidodinamica vengono usate molte altre convenzioni, prevalentemente basate sulla *frequenza angolare* $\omega = 2\pi f$. Tra tutte queste, quella più comune (Monin e Yaglom, 2007b; Pope, 2003) è la seguente:

$$\Phi_{uu}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau \qquad [3.74a]$$

$$R_{uu}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{uu}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} \cdot d\omega \qquad [3.74b]$$

Dato che spesso è conveniente ragionare in termini di frequenza angolare piuttosto che in termini di frequenza f, è necessario stabilire delle regole per passare da una rappresentazione all'altra. Per

fare ciò, si osservi che, perché ci sia congruenza tra le due convenzioni, bisogna che le (3.73b) e (3.74b) siano uguali, cioè che le espressioni che entrambe le rappresentazioni forniscono per la funzione di autocorrelazione coincidano. Perché ciò sia vero è necessario che:

$$R_{uu}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{uu}(f) \cdot e^{j2\pi\tau} \cdot df = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{uu}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} \cdot d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot \Phi_{uu}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} \cdot df \quad [3.75a]$$

e quindi:

$$S_{uu}(f) = 2\pi \cdot \Phi_{uu}(\omega) \quad [3.75b]$$

L'impiego della frequenza angolare consente una maggiore compattezza di scrittura, anche se l'uso della frequenza *f* è molto più comodo quando si debbano analizzare le misure.

La funzione di Autocorrelazione di un processo stocastico reale è una funzione reale e pari e da questa proprietà seguono delle importanti conseguenze. In primo luogo, ricordando la Relazione di Eulero per i numeri complessi secondo cui $e^{j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) + j\sin(\omega\tau)$, la (3.74a) che definisce la densità spettrale può essere riscritta come:

$$\Phi_{uu}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau) \cdot [\cos\omega\tau + j\sin\omega\tau] \cdot d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau) \cdot \cos\omega\tau \cdot d\tau + j\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau) \cdot \sin\omega\tau \cdot d\tau \quad [3.76a]$$

È facile mostrare come l'ultimo addendo sia nullo, pertanto alla fine si ha che:

$$\Phi_{uu}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau) \cdot \cos\omega\tau \cdot d\tau \quad [3.76b]$$

Se ora, invece, consideriamo la relazione (3.74b), con gli stessi ragionamenti si giunge a dire che:

$$R_{uu}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{uu}(\omega) \cdot (\cos\omega\tau + j\sin\omega\tau) \cdot d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{uu}(\omega) \cdot \cos\omega\tau \cdot d\omega \quad [3.76c]$$

Ma, visto che sia la densità spettrale che la funzione di Autocorrelazione sono funzioni pari:

$$R_{uu}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{uu}(\omega) \cdot \cos\omega\tau \cdot d\omega = 2\int_{0}^{\infty} \Phi_{uu}(\omega) \cdot \cos\omega\tau \cdot d\omega \quad [3.76d]$$

Queste relazioni rappresentano una versione, decisamente più semplice, delle relazioni di Wiener-Khinchine per una funzione di autocorrelazione reale e pari e suggeriscono una più comoda alternativa all'utilizzo della densità spettrale *Two-Sided*. Infatti, si può definire una ***Densità Spettrale One-Sided*** come:

$$G_{uu}(f) = 2S_{uu}(f) = 4\int_{0}^{\infty} R_{uu}(\tau) \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot d\tau = 4\pi \cdot \Phi_{uu}(\omega) \quad [3.77a]$$

e quindi:

$$R_{uu}(\tau) = \int_{0}^{\infty} G_{uu}(f) \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot df \quad [3.77b]$$

Se si opera in frequenza angolare, le relazioni equivalenti alle precedenti sono:

$$E_{uu}(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} R_{uu}(\tau) \cdot \cos(\omega\tau) \cdot d\tau \quad [3.77c]$$

$$R_{uu}(\tau)E(\omega) = \int_0^\infty E_{uu}(\omega) \cdot \cos(\omega\tau) \cdot d\omega \qquad [3.77d]$$

$$E_{uu}(\omega) = 2\Phi_{uu}(\omega) \qquad [3.77e]$$

Per concludere, consideriamo ora cosa succede ponendo $f = 0$. In questo caso, dalle relazioni precedenti si avrebbe che:

$$G_{uu}(0) = 4\int_0^\infty R_{uu}(\tau) \cdot d\tau = 4\sigma_u^2 T_{uu} \qquad [3.77f]$$

cioè:

$$T_{uu} = \frac{G_{uu}(0)}{4\sigma_u^2} \qquad [3.77g]$$

relazione che lega la varianza del segnale (di semplice determinazione) ed il valore della densità spettrale a frequenza nulla (che si può dedurre estrapolando alla frequenza zero la densità spettrale *One-Sided*) al *Tempo Euleriano Caratteristico di Scala* (che, nonostante la definizione, risulta di difficile determinazione).

In **Appendice 4** viene presentata sinteticamente la Teoria della Trasformata di Fourier, mentre in **Fig. 3.15** viene riportato un esempio di Densità Spettrale *One-Sided* per la componente longitudinale del vettore vento.

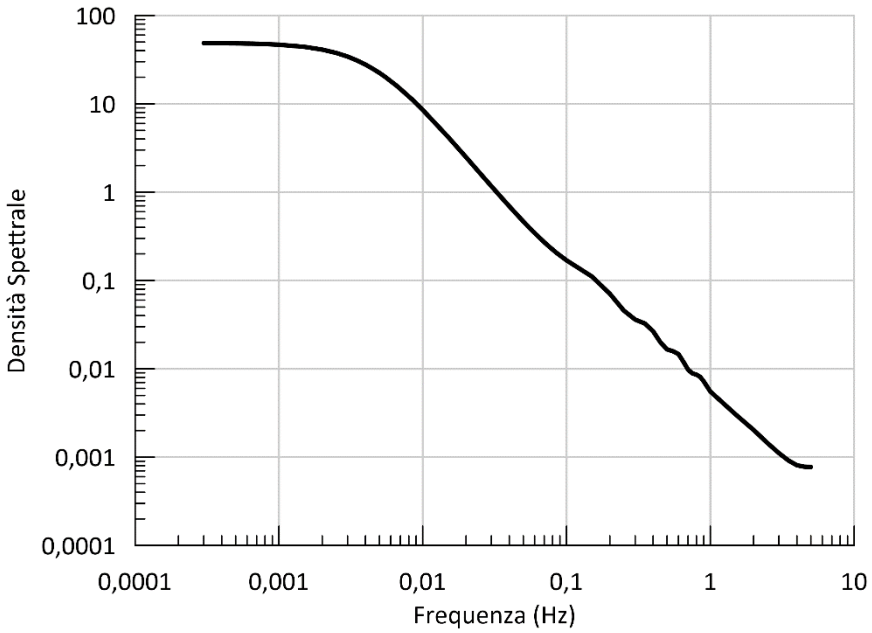


Fig. 3.15: esempio di spettro one-sided della componente longitudinale del vento

È utile ora fare alcuni commenti su come essa possa essere rappresentata graficamente. In primo luogo, si nota come la varianza di una generica variabile *x* possa essere espressa in termini spettrali dalla relazione seguente:

$$\sigma_x^2 = \int_0^\infty G_{xx}(f) \cdot df = \int_0^\infty f \cdot G_{xx}(f) \cdot d(\ln f) \qquad [3.78]$$

Quindi l'area sotto la funzione $G_{xx}(f)$ in un diagramma lineare in f è uguale all'area sotto la funzione $f \cdot G_{xx}(f)$ in un diagramma semilogaritmico ed entrambe le aree sono pari alla varianza di *x*. In effetti, una rappresentazione in cui la densità spettrale viene moltiplica per la frequenza (prodotto che ha le dimensioni della varianza) in un diagramma semilogaritmico in frequenza, preserva la varianza, ma un'altra ragione che sta alla base di questa rappresentazione è che la funzione $f \cdot G_{xx}(f)$ tende a zero quando la frequenza tende sia a zero che a infinito e quindi avrà uno o

più massimi a frequenze finite. Il reciproco delle frequenze in corrispondenza dei massimi vengono interpretate come i tempi principali di scala del moto.

Alcune considerazioni su funzioni di Auto-correlazione e spettri

È stato formulato e dimostrato da Khinchin (Monin e Yaglom, 2007b) un Teorema secondo cui *ogni funzione che possiede una Trasformata di Fourier non negativa ha le caratteristiche per poter essere una funzione di Auto-correlazione di un processo stocastico stazionario.* Perciò, per verificare se una funzione candidata può essere o meno una funzione di Auto-correlazione di un processo stocastico stazionario, bisogna in primo luogo calcolare la relativa Trasformata di Fourier e successivamente verificare che essa sia sempre non negativa. Alcune funzioni candidate ad essere funzioni di autocorrelazione sono le seguenti (Monin e Yaglom, 2007b):

$$R(\tau) = C \cdot e^{-\alpha|\tau|} \qquad [3.79a]$$

$$R(\tau) = C \cdot e^{-\alpha\tau^2} \qquad [3.79b]$$

$$R(\tau) = C \cdot e^{-\alpha\tau}\cos(\beta\tau) \qquad [3.79c]$$

$$R(\tau) = C \cdot (\alpha\tau)^{\nu} K_{\nu}(\alpha\tau) \qquad [3.79d]$$

In esse C, α e β sono costanti positive, ν è un intero positivo e $K_\nu(x)$ è una Funzione Speciale ed in particolare è la Funzione di Bessel modificata del terzo ordine nota anche come funzione di Basset o di Mcdonald. È interessante notare come tutte queste forme funzionali per α e τ piccoli tendono a riprodurre un'esponenziale decrescente. Le corrispondenti Trasformate di Fourier $E(\omega)$ sono:

$$E(\omega) = \frac{2C\alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} \qquad [3.80a]$$

$$E(\omega) = \frac{4C\alpha}{\pi} \cdot \frac{\sin^2(\omega/(2\alpha))}{\omega^2} \qquad [3.80b]$$

$$E(\omega) = \frac{2C\alpha \cdot (\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{\pi(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \qquad [3.80c]$$

$$E(\omega) = \frac{2^{\nu-1} C \cdot \Gamma(\nu + 1/2)\alpha^{2\nu}}{\sqrt{\pi}(\alpha^2 + \omega^2)^{\nu+1/2}} \qquad [3.80d]$$

Come si può vedere, le Trasformate di Fourier delle (3.79) sono tutte positive e quindi tali funzioni possono essere funzioni di Auto-correlazione di processi stocastici stazionari.

Spettri di potenza

Se si considera il comportamento degli spettri ad alta frequenza (cioè ad elevati valori di ω e quindi di f), si può notare come essi diminuiscano molto rapidamente in un modo simile ad una legge di potenza. Al di sopra, comunque, di una frequenza massima molto elevata, la diminuzione della densità spettrale è ancora più veloce e completamente dovuta all'azione preminente delle forze viscose, ma di ciò non tratteremo nel seguito. Come vedremo al Cap. 4, la diminuzione della densità spetrale secondo una legge di potenza non è solo una sensazione visiva ma anche una realtà. Partendo da ciò, cerchiamo di studiare più approfonditamente spettri di questo genere.

Prima, però, di addentrarci nella discussione, è conveniente utilizzare anche la *funzione di struttura del secondo ordine* $D(\tau)$ che dobbiamo mettere in relazione alla funzione di Auto-correlazione. In effetti, è facile verificare che:

$$D(\tau) = \overline{[u(t) - u(t+\tau)]^2} = 2 \cdot [R(0) - R(\tau)] \qquad [3.81a]$$

e quindi che:

$$D(\tau) = 2\int_0^{\infty} [1 - \cos\omega\tau]\, E(\omega) \cdot d\omega \qquad [3.81b]$$

Immaginiamo, ora, che alle alte frequenze lo spettro dipenda dalla frequenza secondo la legge:

$$E(\omega) \approx A \cdot \omega^{-p} \qquad [3.81c]$$

Dalla relazione tra spettri e funzioni di struttura del secondo ordine è facile vedere che quando analizziamo uno spettro alle alte frequenze implicitamente consideriamo una funzione di struttura a piccoli *time-lag* e se lo spettro è del tipo (3.81a) allora per *time-lag* piccoli:

$$D(\tau) \approx \tau^{q} \qquad [3.81d]$$

L'obiettivo è *capire il significato dei particolari valori di p e q e la connessione tra loro*.

Innanzitutto sappiamo che $R(0)$ è pari alla varianza del processo (che abbiamo supposto essere a media nulla) e richiediamo che tale varianza sia finita. Dato che si ha:

$$R(0) = \int_0^{\infty} A \cdot \omega^{-p} \cdot d\omega \qquad [3.82]$$

perché la varianza sia finita (e quindi l'integrale converga) è necessario che $p > 1$.

In secondo luogo, possiamo richiedere al processo stocastico che sia anche differenziabile e che l'Auto-correlazione della derivata di ordine *n* abbia anch'essa varianza finita. Rimandando a Pope (2003) per i dettagli, perché la varianza sia finita (e quindi l'integrale converga) è necessario che sia soddisfatta anche la seguente disequazione: $p > 2n + 1$.

In terzo luogo, consideriamo la funzione di struttura del secondo ordine e la funzione di Auto-correlazione data dalla funzione (3.79d) che è una funzione di potenza. Questa funzione è particolarmente complessa, ma per piccoli valori di τ può essere approssimata (Pope, 2003) in modo tale che:

$$D(\tau) = \begin{cases} 4\dfrac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1-\nu)}(\alpha\tau)^{2\nu} \cdots & \nu < 1 \\ 2(\nu-1)(\alpha\tau)^{2} \quad \cdots & \nu > 1 \end{cases} \qquad [3.83]$$

quindi, la funzione di struttura ha un andamento secondo una legge di potenza con esponente:

$q = 2\nu$, se $\nu < 1$
$q = 2$, se $\nu > 1$

Infine, se consideriamo lo spettro (3.80d) corrispondente alla funzione di correlazione (3.79d), si ha che la potenza dello spettro alle alte frequenze deve essere tale per cui $p = 1 + 2\nu$.

In sintesi, le relazioni che dovrebbero esistere tra l'esponente dello spettro *p*, l'esponente della legge di potenza che descrive la funzione di struttura del secondo ordine *q*, il grado di differenziabilità del processo stocastico *n* ed il parametro ν della (3.80d) sono:

$$\begin{gathered} p > 1 \\ p > 2n + 1 \\ q = 2\nu \quad se\ \nu < 1 \\ q = 2 \quad se\ \nu > 1 \\ p = 1 + 2\nu \end{gathered}$$

È solo l'evidenza sperimentale che può indicare il valore appropriato di *p* e *q*. Se, come vedremo al Cap. 4, risulta evidente sperimentalmente e teoricamente che $p = 5/3$, allora si avrà che $\nu = 1/3$, $q = 2/3$ ed il processo non risulta differenziabile. Come, però, si è detto al di sopra di una frequenza massima lo spettro diminuisce con la frequenza in maniera molto più rapida di quanto previsto da una legge di potenza e in questa regione spettrale il processo è differenziabile.

Tempi e Lunghezze Euleriane di scala

La funzione di Auto-correlazione $R(\tau)$ di un processo stocastico stazionario $U(t)$ in qualche modo misura il grado di memoria del proprio stato iniziale che il processo mantiene dopo un *time-lag* τ. È naturale, quindi, cercare di ottenere da tale funzione un *tempo caratteristico di decorrelazione*

del segnale T_{Eu}, noto come *Tempo Caratteristico Euleriano di scala (*o anche *tempo integrale di scala*), e definito come:

$$T_{Eu} = \frac{1}{R(0)} \int_0^\infty R(\tau) \cdot d\tau = \frac{1}{\sigma_u^2} \int_0^\infty R(\tau) \cdot d\tau \qquad [3.84a]$$

Ricordando la relazione esistente tra funzione di auto-correlazione e spettro, si dimostra che:

$$\begin{aligned} T_{Eu} &= \frac{1}{4\sigma_u^2} G_{uu}(f)|_{f=0} = \frac{1}{2\sigma_u^2} S_{uu}(f)|_{f=0} \\ &= \frac{\pi}{2\sigma_u^2} E_{uu}(\omega)|_{\omega=0} = \frac{\pi}{\sigma_u^2} \Phi_{uu}(\omega)|_{\omega=0} \end{aligned} \qquad [3.84b]$$

Noto il tempo caratteristico di scala di un processo, impiegando l'ipotesi di Taylor e con un vento medio pari a *U*, la *Lunghezza Caratteristica Euleriana di scala* (o anche *lunghezza integrale di scala*) L_{Eu} è data da:

$$L_{Eu} = U \cdot T_{Eu} \qquad [3.84c]$$

3.2.1.2 Lo spettro streamline

L'ipotesi di Taylor consente di convertire le osservazioni fatte a tempi diversi in misure relative a punti diversi lungo la linea sottovento (*streamline*) e ciò grazie alla trasformazione: $x = U \cdot t$, dove *U* è la velocità media del vento. Così facendo, una realizzazione $u(t)$ di una variabile stocastica *U* funzione del tempo si può trasformare in una realizzazione $u(x) = u(U\,t)$ funzione della distanza sottovento. In pratica, è possibile costruire una nuova densità spettrale nello spazio piuttosto che nel tempo in cui le armoniche non sono più temporali (e quindi dipendenti dalla frequenza *f* o ω), ma spaziali e dipendenti dal *numero d'onda* k_1 *lungo la direzione streamline.* Tra frequenza e numero d'onda nella direzione sottovento vale la relazione:

$$k_1 = \frac{2\pi f}{U} \qquad [3.85a]$$

Per ottenere una relazione tra la densità spettrale $G_{uu}(f)$ e l'analoga densità spettrale $F_{uu}(k_1)$, entrambe densità *One-Side*, conviene sfruttare il fatto che integrando entrambe le densità spettrali sull'intero intervallo delle frequenze dobbiamo giungere comunque alla stessa varianza, quindi:

$$\int_0^\infty G_{uu}(f)\, df = \sigma_u^2 = \int_0^\infty F_{uu}(k_1)\, dk_1 \qquad [3.85b]$$

Da questa relazione e considerando che $dk_1 = 2\pi/U \cdot df$, si ha che:

$$G_{uu}(f) = \frac{2\pi}{U} F_{uu}(k_1) \qquad [3.85c]$$

e anche:

$$f \cdot G_{uu}(f) = k_1 \cdot F_{uu}(k_1) \qquad [3.85d]$$

relazione che consente di passare da un'analisi spettrale nel tempo ad un'analisi spettrale nella direzione *streamline*.

3.2.1.3 I Cross-spettri

Consideriamo due segnali meteorologici $u(t)$ e $v(t)$ a media nulla e stazionari. La loro funzione di Cross-correlazione è definita come:

$$R_{uv}(\tau) = E[u(t) \cdot v(t+\tau)] \qquad [3.86]$$

e non è una funzione né pari né dispari. Anche in questo caso è possibile ottenere le relazioni di Wiener-Khinchine che risultano essere:

$$R_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{uv}(\tau) \cdot e^{j2\pi f\tau} df \qquad [3.87a]$$

$$S_{uv}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uv}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau \qquad [3.87b]$$

La funzione $S_{uv}(f)$ (qualunque siano le variabili u e v) è detta <u>*Cross-Spettro*</u> di u e v. Va ricordato che esiste la seguente relazione di simmetria:

$$R_{uv}(-\tau) = R_{vu}(\tau) \qquad [3.88a]$$

e quindi si ha:

$$S_{uv}(-f) = S_{uv}^{*}(f) = S_{vu}(f) \qquad [3.88b]$$

dove S^{*}_{uv} è la complessa coniugata di S_{uv}. Per un *time-lag* nullo, la funzione di cross-correlazione risulta pari alla covarianza tra le due variabili e quindi dalla (3.87a) si ha che:

$$R_{uv}(0) = \overline{u'v'} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{uv}(\tau) \cdot df \qquad [3.89]$$

Come si vede dalla sua definizione, il Cross-Spettro S_{uv} è una funzione complessa di f e quindi può essere formalmente scomposto in due parti $C(f)$ e $Q(f)$ legate tra loro dalla relazione:

$$S_{uv}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uv}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau = C_{uv}(f) - jQ_{uv}(f) \qquad [3.90a]$$

dove la parte pari, detta <u>*Co-Spettro*</u>, è definita come:

$$C_{uv}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uv}(\tau) \cdot \cos 2\pi f\tau \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [R_{uv}(\tau) + R_{uv}(-\tau)] \cdot \cos 2\pi f\tau \cdot d\tau \qquad [3.90b]$$

mentre la parte dispari è detta <u>*Spettro di Quadratura*</u> ed è definita come:

$$Q_{uv}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uv}(\tau) \cdot \sin 2\pi f\tau \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [R_{uv}(\tau) - R_{uv}(-\tau)] \cdot \sin 2\pi f\tau \cdot d\tau \qquad [3.90c]$$

Visto che lo Spettro di Quadratura è una funzione dispari, è facile mostrare che:

$$R_{uv}(0) = \overline{u'v'} = \int_{-\infty}^{\infty} C_{uv}(f) \cdot df \qquad [3.90d]$$

Dato che il Cross-spettro è una funzione complessa, può anche essere espresso nella forma:

$$S_{uv}(f) = |S_{uv}(f)| \cdot e^{-j\theta(f)} \qquad [3.91a]$$

dove l'<u>*Ampiezza del Cross-Spettro*</u> è data da:

$$|S_{uv}(f)|^2 = [C_{uv}(f)]^2 + [Q_{uv}(f)]^2 \qquad [3.91b]$$

e l'<u>*Angolo di Fase*</u> tra $u(t)$ e $v(t)$ alla frequenza f è:

$$\theta(f) = \tan^{-1}\left(\frac{Q_{uv}(f)}{C_{uv}(f)}\right) \qquad [3.91c]$$

Normalizzando il quadrato dell'ampiezza con le densità spettrali dei singoli segnali si ottiene la <u>*Coerenza*</u> data dalla relazione:

$$\Gamma(f) = \frac{[C_{uv}(f)]^2 + [Q_{uv}(f)]^2}{S_{uu}(f) \cdot S_{vv}(f)} \qquad [3.91d]$$

3.2.1.4 Metodi alternativi per determinare le densità spettrali

La definizione di Spettri e Cross-spettri introdotta finora si basa sulla Trasformata di Fourier delle funzioni di Auto-correlazione e di Cross-correlazione e per ottenere in pratica tali funzioni sarebbe necessario stimarle in maniera campionaria, cosa che può essere fatta con algoritmi di stima ben poco efficienti. Una via alternativa, di fatto l'unica realmente utilizzata, è delineata qui di seguito e si basa sulla Trasformata di Fourier dei segnali originari.

Per generalità, consideriamo due processi stocastici congiunti $X(t)$ e $Y(t)$ stazionari, ergodici e a media nulla che, campionati per un periodo di osservazione finito T, forniscono la realizzazione k-esima costituita dalle funzioni $x_k(t)$ ed $y_k(t)$. Se consideriamo un solo processo stocastico e siamo interessati alla relativa densità spettrale, basta considerare $x_k(t) = y_k(t)$ ed utilizzare completamente i risultati che tra poco otterremo. *Definiamo* ora una nuova *Funzione Densità Spettrale Campionaria*:

$$S_{xy}(f,T,k) = \frac{1}{T} \cdot X_k^*(f,T) \cdot Y_k(f,T) \qquad [3.92a]$$

dove:

$$X_k(f,T) = \int_0^T x_k(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \qquad y_k(f,T) = \int_0^T y_k(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \qquad [3.92b]$$

Le quantità $X_k(f,T)$ e $Y_k(f,T)$ sono *le Trasformate di Fourier Finite* delle realizzazioni $x_k(t)$ e $y_k(t)$ rispettivamente, mentre con $X^*_k(f,T)$ si è indicato la complessa coniugata di $X_k(f,T)$. Queste trasformate di Fourier finite esistono praticamente sempre nelle situazioni di uso comune, visto che il tempo di campionamento è necessariamente finito e così è anche per la loro varianza.

Si può dimostrare (Bendat e Piersol, 1986, Pag.131-132), anche se in modo non semplice, che la densità spettrale $S_{xy}(f)$ deriva dalla densità spettrale campionaria $S_{xy}(f,T,k)$ secondo la relazione:

$$S_{xy}(f) = \lim_{T\to\infty} E\left[S_{xy}(f,T,k)\right] \qquad [3.93]$$

Quindi esiste una equivalenza tra questo metodo, basato sulla Trasformata di Fourier di realizzazioni di variabili, e quello generale basato sulla conoscenza delle funzioni di correlazione. L'importanza di questo metodo è molteplice. In primo luogo, non è necessario stimare in maniera campionaria le funzioni di correlazione, cosa piuttosto pesante dal punto di vista computazionale. In secondo luogo, è possibile campionare una realizzazione dei processi per un periodo T sufficientemente lungo, ripartire queste osservazioni in sottoperiodi più piccoli, stimare i singoli spettri campionari e da questi, mediante una mediazione frequenza per frequenza, stimare il relativo valore atteso del Cross-Spettro (o dello Spettro). Tutto ciò rende questo metodo l'unico che attualmente viene impiegato nella pratica corrente.

I metodi fin qui introdotti per rappresentare lo spettro di un processo stocastico non sono completamente corretti dal punto di vista formale e non sono stati usati nelle trattazioni a maggior contenuto teorico. In essi si usa una definizione decisamente più rigorosa e molto meno intuitiva, di cui qui di seguito vengono presentati gli elementi essenziali; si rimanda chi fosse interessato a maggiori dettagli al testo di Monin e Yaglom (2007b). La maggior limitazione connessa con i metodi precedenti sta nel ritenere integrabile ed armonico il processo stocastico. Tuttavia, anche se il processo $u(t)$ in generale non è né periodico né integrabile, sotto condizioni molto larghe, lo si può espandere in un altro processo stocastico $Z(\omega)$ secondo la relazione seguente:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dZ(\omega) \qquad [3.94a]$$

nota come Integrale Stocastico di Fourier-Stieltjes. Il processo $Z(\omega)$, che in generale è complesso, ha la proprietà seguente:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-jbt}-e^{-jat}}{-jt}\cdot u(t)\cdot dt = Z(b)-Z(a) \qquad [3.94b]$$

e l'integrale è stato così scritto per evitare di dover ritenere differenziabile il processo $Z(\omega)$. Per rendere più familiari queste due relazioni, possiamo porre $a = \omega$ e $b = \omega + \Delta\omega$. In questo modo:

$$\frac{e^{-jbt}-e^{-jat}}{-jt} = \frac{e^{-j\omega t}-e^{-jat}}{-jt} \cong \Delta\omega\cdot e^{j\omega t} \qquad [3.94c]$$

visto che $e^{-j\Delta\omega t} \cong 1 - j\Delta\omega t$. Utilizzando questa osservazione, la relazione (3.94b) può essere riscritta, dopo aver diviso per $\Delta\omega$ ed aver preso il limite per $\Delta\omega \to 0$, nel modo seguente:

$$\lim_{\Delta\omega\to 0}\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-jbt}-e^{-jat}}{-jt}\cdot u(t)\cdot dt\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}\cdot u(t)\cdot dt = \frac{dZ}{d\omega} \qquad [3.94d]$$

ipotizzando l'esistenza di $Z(\omega)$. Così, in questo caso, la relazione precedente è la Trasformata di Fourier di $u(t)$. Inoltre, la (3.94a) può essere ora riscritta come:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}\frac{dZ}{d\omega}d\omega \qquad [3.94e]$$

3.2.2 L'ANALISI SPETTRALE DEI CAMPI STOCASTICI

A questo punto non ci rimane che analizzare i campi stocastici nel dominio delle frequenze. Mentre l'analisi dei processi stocastici vedeva il tempo come elemento essenziale e ricercava nel segnale armoniche temporali, la caratteristica principale dei campi stocastici è proprio la sua spazialità e quindi l'analisi armonica relativa consiste nell'individuare nella sua distribuzione spaziale *armoniche spaziali* cui è dato il nome di *Modi di Fourier*.

3.2.2.1 I concetti di base

Si definisce *modo di Fourier* (o *armonica spaziale*) una funzione complessa del tipo:

$$f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}) = e^{j\boldsymbol{k}\circ\boldsymbol{r}} = \cos(\boldsymbol{k}\circ\boldsymbol{r}) + j\sin(\boldsymbol{k}\circ\boldsymbol{r}) \qquad [3.95a]$$

dove col simbolo $\circ$ si è indicato il prodotto scalare tra due vettori. Questa funzione è un'onda piana che si propaga nella direzione del *vettore numero d'onda* **k** e che è costante in tutti i punti dei piani normali a **k**. Il modo di Fourier è quindi una struttura armonica tridimensionale e il numero d'onda è un vettore che, indicando con k il suo modulo e con $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ e $\mathbf{e_3}$ i versori relativi agli assi cartesiani, può essere scomposto secondo le direzioni cardinali nel modo seguente:

$$\boldsymbol{k} = k\cdot\boldsymbol{n} = k\cdot(\boldsymbol{e_1}n_1 + \boldsymbol{e_1}n_1 + \boldsymbol{e_1}n_1) \qquad [3.95b]$$

Quindi, ogni modo di Fourier può esser visto come la sovrapposizione di tre singole armoniche spaziali monodimensionali, ciascuna che si propaga nella direzione degli assi cartesiani.

Limitiamoci, per semplicità, a considerare il campo stocastico vettoriale ed omogeneo della velocità del moto del fluido. Il fatto che il campo sia stazionario ed omogeneo implica che la velocità media sia costante e che quindi possa essere sottratta punto a punto, trasformando il campo originario nel relativo campo delle fluttuazioni. Nel seguito, quindi, considereremo solo il campo delle fluttuazioni **u**(**x**) per cui le funzioni di covarianza e di correlazione coincidono. Il tensore delle correlazioni tra le componenti cartesiane del moto (costituito da 9 componenti) è dato da:

$$R_{ij}(\boldsymbol{r}) = \overline{u_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\cdot u_j(\boldsymbol{x})} \qquad [3.96a]$$

Come nel caso dell'analisi spettrale dei processi stocastici, anche in questo caso si cerca di esprimere le funzioni di correlazione come combinazione lineare dei modi di Fourier. In pratica, definita la ***Trasformata di Fourier Spaziale*** del tensore di correlazione come il tensore seguente:

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\boldsymbol{r}) \cdot e^{-j\boldsymbol{k}\circ\boldsymbol{r}} dr_1 dr_2 dr_3 \qquad [3.96b]$$

il corrispondente tensore delle correlazioni è dato dalla combinazione lineare di infiniti modi di Fourier, ciascuno pesato col proprio valore di Φ_{ij}, cioè:

$$R_{ij}(\boldsymbol{r}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ij}(\boldsymbol{k}) \cdot e^{j\boldsymbol{k}\circ\boldsymbol{r}} dk_1 dk_2 dk_3 \qquad [3.96c]$$

che è l'*Antitrasformata spaziale di Fourier*. Le (3.96) sono le relazioni di Wiener-Khinchine nel caso spaziale ed il tensore complesso Φ_{ij} è detto *Spettro della velocità*. Si noti come il tensore Φ_{ij} abbia le dimensioni di (velocità)^2 · (numero d'onda)^3. Dato che le dimensioni del numero d'onda sono (lunghezza)$^{-1}$, le dimensioni di Φ_{ij} sono (velocità)^2 · (lunghezza)$^{-3}$. Le sue proprietà generali dipendono dalle caratteristiche del tensore di correlazione cui è legato funzionalmente e quindi:

- dato che il tensore di correlazione R_{ij} è simmetrico rispetto all'origine ed è una grandezza reale, si ha che $\Phi_{ij}(\boldsymbol{k}) = \Phi^*_{ij}(\boldsymbol{k}) = \Phi_{ij}(-\boldsymbol{k})$ dove Φ^*_{ij} è il complesso coniugato di Φ_{ij}.
- se il fluido è incomprimibile (ipotesi decisamente buona nel *PBL*) si può dimostrare che vale la seguente relazione di ortogonalità: $k_i\Phi_{ij}(\boldsymbol{k}) = k_j\Phi_{ij}(\boldsymbol{k}) = 0$.
- le componenti diagonali Φ_{ii} del tensore sono reali e non negative.

$\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ è una grandezza molto importante, dato che rappresenta la controparte, nello spazio dei numeri d'onda, degli Stress di Reynolds: $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ rappresenta il contributo per unità di volume, nello spazio dei numeri d'onda, del modo $e^{j\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}}$ allo stress $\overline{u_i u_j}$. È facile verificare che:

$$R_{ij}(0) = \overline{u_i u_j} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ij}(\boldsymbol{k}) \cdot dk_1 dk_2 dk_3 \qquad [3.97a]$$

Dato che le componenti diagonali Φ_{ii} del tensore sono reali e non negative e che per $\mathbf{r} = 0$ le funzioni di autocorrelazione per la componente *i*-esima eguagliano la relativa varianza, si ha che l'Energia Cinetica Turbolenta *e* può essere espressa come:

$$2e = \sum_{i=1}^{3} R_{ii}(0) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ii}(\boldsymbol{k}) \cdot dk_1 dk_2 dk_3 \qquad [3.97b]$$

Le informazioni contenute in Φ_{ij} possono essere così riassunte:

- gli indici *i* e *j* rappresentano la direzione della velocità nello spazio fisico. Per esempio, $\Phi_{22}(\mathbf{k})$ si riferisce interamente al campo della componente $u_2(\mathbf{x})$;
- la direzione $\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ del numero d'onda è la direzione di propagazione del modo di Fourier;
- il modulo *k* del numero d'onda determina la lunghezza caratteristica di scala *l* del modo, visto che $l = 2\pi/|\mathbf{k}|$.

L'informazione direzionale contenuta nel tensore dello spettro della velocità è in genere sovrabbondante rispetto agli scopi pratici e può essere rimossa, giungendo alla definizione di *funzione di energia spettrale* (o *Energy Spectrum*) $E(k)$ che è uno scalare e che dipende solo dal modulo *k* del vettore numero d'onda. Per giungere alla sua definizione, si considera la traccia di Φ_{ij} (cioè la somma dei suoi elementi diagonali) e la si integra su una superficie sferica nello spazio dei numeri

d'onda di raggio $k = |\mathbf{k}|$. Così facendo, dopo un po' di passaggi analitici si ottiene che:

$$E(k) = \frac{1}{2}\oint \Phi_{ii}(\boldsymbol{k}) \cdot d\sigma \qquad [3.98]$$

dove $d\sigma$ è una porzione infinitesima della sfera su cui è esteso l'integrale. Lo spettro $E(k)$ è reale e non negativo. In pratica $E(k)$ rappresenta il contributo all'energia cinetica turbolenta dei modi di Fourier con numero d'onda (in modulo) compresi tra k e $k + dk$.

3.2.2.2 Considerazioni sulla misura dello spettro della velocità

La misura diretta del tensore della densità spettrale della velocità è oltre le possibilità tecnologiche attuali, soprattutto in atmosfera. Ciò che, però, è possibile fare è realizzare misure in campo, protratte nel tempo ma in un numero limitato di punti, ed usare (con cautela) l'ipotesi di Taylor stimando, quindi, le funzioni di correlazione lungo la direzione del vento medio. In particolare, si è in grado di stimare le correlazioni R_{LL}, R_{NN} e R_{33} lungo la direzione $(r,0,0)$, se l'asse x è allineato con la direzione media del moto. In questo caso possono essere determinati gli *spettri monodimensionali*, cioè gli spettri che dipendono da un numero d'onda in una particolare direzione, normalmente quella longitudinale k_1, che è la sola che può essere legata in modo semplice alle osservazioni. Quindi, lo *spettro monodimensionale longitudinale* $\Phi_{11}(k_1)$ e lo *spettro monodimensionale laterale* $\Phi_{22}(k_1)$ sono definiti come:

$$\Phi_{11}(k_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{LL}(r,0,0) \cdot e^{-jk_1 r} dr \qquad [3.99a]$$

$$\Phi_{22}(k_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{NN}(r,0,0) \cdot e^{-jk_1 r} dr \qquad [3.99b]$$

In modo analogo si può procedere per la stima dello spettro monodimensionale della componente verticale del moto. In generale si ha che:

$$\Phi_{ij}(k_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(r,0,0) \cdot e^{-jk_1 r} dr \qquad [3.99c]$$

Si noti come gli elementi diagonali siano reali e pari.

Seguendo la convenzione quasi universalmente adottata nella Letteratura, invece di usare gli spettri Φ_{11}, Φ_{22}, Φ_{33} ed in generale gli spettri Φ_{ij}, si considerano in alternativa gli ***spettri monodimensionali*** $E_{11}(k_1) = 2\Phi_{11}$, $E_{22}(k_1) = 2\Phi_{22}$ e $E_{33}(k_1) = 2\Phi_{33}$. Quindi, si ha immediatamente che:

$$\mathrm{R}_{11}(r,0,0) = \int_0^{\infty} E_{11}(k_1) \cdot \cos(k_1 r)\, dr \qquad [3.99d]$$

e relazioni analoghe per le altre auto-correlazioni. Gli spettri monodimensionali sono legati al tensore di densità spettrale $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ della velocità dalle relazioni:

$$E_{11}(k_1) = 2\iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11}(\boldsymbol{k}) \cdot dk_1\, dk_2 \qquad [3.100a]$$

$$E_{22}(k_1) = 2\iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_{22}(\boldsymbol{k}) \cdot dk_1\, dk_2 \qquad [3.100b]$$

Queste due ultime relazioni (e quella analoga per E_{33}) evidenziano un problema. Gli spettri monodimensionali non dipendono solo dal modo di numero d'onda k_1 nella direzione x, ma anche da tutti gli altri modi che si propagano nello spazio in direzioni diverse e con numeri d'onda, in modulo, superiori a k_1. Questo fenomeno prende il nome di ***aliasing*** che non è un serio problema ad elevati numeri d'onda, quando i vortici di piccole dimensioni tendono ad avere la medesima

dimensione in tutte le direzioni come si vedrà al Cap. 4.

3.2.2.3 Conseguenze dell'isotropia

In generale il tensore dello spettro di velocità $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ contiene molte più informazioni di quante ne contenga l'*energy spectrum* $E(k)$. Tuttavia, in condizioni di turbolenza isotropa, si può mostrare che l'intero tensore $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ è completamente determinato da $E(k)$. Senza entrare nei dettagli (si veda Pope, 2003, pag. 222), si ha che in caso di isotropia:

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{k}) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} \cdot \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \qquad [3.101a]$$

dove k_i e k_j sono le proiezioni del vettore $\mathbf{k}$ nelle direzioni cardinali i e j. Oltre a ciò, sempre in condizioni stazionarie, omogenee ed anche isotrope, gli spettri monodimensionali sono determinati anche dall'*energy spectrum* $E(k)$. In effetti (Pope, 2000, pag 226) si può mostrare che:

$$E_{11}(k_1) = \int_{k_1}^{\infty} \frac{E(k)}{k} \cdot \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2} \right) dk \qquad [3.101b]$$

da cui si nota come l'*aliasing* è presente negli spettri monodimensionali.

$E_{11}(k_1)$ è una funzione monotona decrescente e presenta il valore massimo a $k_1 = 0$, come si può vedere differenziando la relazione precedente. La (3.101b) può, poi, essere invertita per ottenere $E(k)$ in termini di $E_{11}(k_1)$, ottenendo:

$$E(k) = \frac{k^3}{2} \left[\frac{1}{k} \frac{dE_{11}(k_1)}{dk} \right] \qquad [3.101c]$$

Ciò significa che la conoscenza di $E(k)$ consente di conoscere $E_{11}(k)$ e viceversa, purché $E(k)$ sia integrabile e $E_{11}(k)$ sia differenziabile. Analoghi ragionamenti possono essere fatti per gli spettri E_{22} ed E_{33} giungendo alle relazioni seguenti:

$$E_{22}(k_1) = E_{33}(k_1) = \frac{1}{2} \int_{k_1}^{\infty} \frac{E(k)}{k} \cdot \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2} \right) dk \qquad [3.101d]$$

$$E(k) = -k_1 \left\{ \frac{dE_{11}(k_1)}{dk_1} + \int_k^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{dE_{22}(k_1)}{dk_1} dk_1 \right\} \qquad [3.101e]$$

Inoltre, con calcoli piuttosto laboriosi, si può ottenere anche la relazione seguente che lega tra loro lo spettro longitudinale E_{11} e quello trasversale E_{22}:

$$E_{22}(k_1) = \frac{1}{2} \left[E_{22}(k_1) - k_1 \frac{dE_{11}(k_1)}{dk_1} \right] \qquad [3.101f]$$

Si verifica facilmente da queste relazioni che se $E(k)$ è descritto, almeno ad elevati valori del numero d'onda, da una legge di potenza proporzionale a k^{-p}, anche E_{11} e E_{22} avranno un analogo andamento. In particolare, se $p = 5/3$ (come si vedrà al Cap. 5), allora $E_{22}(k) = 4/3\ E_{11}(k)$, come si è riscontrato sperimentalmente.

3.2.3 SPETTRI SCALARI

Finora abbiamo trattato solo spettri relativi al campo di moto. In realtà è possibile realizzare l'analisi spettrale di variabili scalari, quali la temperatura, il contenuto d'acqua, ecc. Immaginiamo di analizzare segnali presi nel tempo in un punto dello spazio. A tali segnali si applica completamente quanto già visto per l'analisi spettrale dei processi stocastici. Più raramente si realizza un'analisi spettrale di campi stocastici scalari e, quando la si realizza, è per ottenere gli spettri monodimensionali per i quali vale quanto già detto a proposito del campo di moto.

3.3 LA TURBOLENZA LAGRANGIANA

Fin qui abbiamo descritto il moto dell'atmosfera e la sua turbolenza seguendo l'ottica *Euleriana*, cioè studiando il campo di moto vettoriale **u**(**x**,*t*) del fluido (nel nostro caso l'aria del *PBL*) e gli altri campi scalari che lo caratterizzano, campi considerati stocastici ai fini pratici e che descrivevano le caratteristiche fisiche del sistema attraverso il valore assunto nei vari punti del dominio spaziale d'interesse e nei vari istanti temporali. Questo non è l'unico modo per descrivere fluidodinamicamente l'atmosfera, come abbiamo brevemente accennato al Cap. 1. Infatti, se ad un certo istante iniziale t_0 si ipotizza di individuare le varie porzioni infinitesime che costituiscono l'atmosfera e le seguiamo una per una nel loro moto entro il dominio di indagine e negli istanti successivi al rilascio, otteniamo una *descrizione Lagrangiana dell'atmosfera*.

3.3.1 LE PARTICELLE LAGRANGIANE

La descrizione Lagrangiana del moto dell'atmosfera consiste, in linea di principio, nel descrivere nel tempo il *movimento* (cioè la posizione e la velocità) di tutte le particelle che costituiscono l'atmosfera. Perché ciò sia possibile, almeno in linea di principio, è necessario ipotizzare che le varie particelle siano singolarmente identificabili, sia ad un arbitrario istante iniziale t_0 che negli istanti successivi. È subito chiaro che la descrizione Lagrangiana risulta teoricamente molto attraente e naturale, ma estremamente difficile da adottare quando ci si appresta a realizzare misure, al contrario della visione Euleriana. Anche se sono state realizzate misure Lagrangiane in laboratorio, in atmosfera ancora oggi è veramente difficile realizzarle (Haugen 1966, Angell e al. 1971, Hanna 1981), anche accettando una buona dose di incertezza. Di fatto, (Dosio et al., 2005) lo studio della dinamica Lagrangiana di un fluido e delle sue caratteristiche stocastiche oggi viene fatto usando modelli numerici DNS (Direct Numerical Simulation) e LES (Large Eddy Simulation) cui si accennerà successivamente. Anche se tali modelli non sono veramente in grado di simulare una porzione significativa di atmosfera reale, tuttavia costituiscono una sorta di *laboratorio numerico* da cui vengono tratte preziose informazioni.

Si consideri, ora, una particella che a t_0 si trova nella posizione $\mathbf{x}_0$. Negli istanti successivi essa abbandonerà la propria posizione iniziale, seguendo la *traiettoria* nello spazio:

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x_0}, t) \qquad [3.102a]$$

dove con **X**(*t*) è stata indicata la posizione raggiunta al tempo *t* dalla particella che a t_0 stava in $\mathbf{x}_0$. Definita la traiettoria (che si suppone una funzione continua e derivabile), la velocità **V** della particella (*velocità Lagrangiana*) risulta inevitabilmente data da:

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x_0}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x_0}, t)}{\partial t} \qquad [3.102b]$$

La particella è il volume di atmosfera che a *t* si trova in **X**, quindi al tempo *t* essa dovrà necessariamente possedere la stessa velocità Euleriana **u**(**x**,t) in quel punto e in quell'istante:

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x_0}, t) = \boldsymbol{u}[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x_0}, t), t] \qquad [3.102c]$$

È immediato, perciò, ridefinire la traiettoria della particella, evidenziandone la dipendenza dalla velocità che progressivamente essa assume durante il moto, ottenendo:

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x_0}, t) = \boldsymbol{x_0} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x_0}, t')\, dt' \qquad [3.103a]$$

Al Cap. 2 sono state introdotte le relazioni fluidodinamiche che descrivono l'atmosfera in termini istantanei; esse sono state scritte in forma Euleriana ed in tale forma esse vengono normalmente impiegate. Tuttavia, come già chiarito, se vengono riscritte impiegando la derivata sostanziale

(che elimina la derivata parziale Euleriana ed i termini avvettivi), esse costituiscono la descrizione fluidodinamica Lagrangiana dell'atmosfera.

L'impressione che si ha da queste considerazioni è che la particella sia un'entità deterministica. In realtà così non è e lo si capisce dal fatto che durante il proprio moto nello spazio assume il valore di velocità proprio del punto in cui transita, valore che è una delle possibili realizzazioni del campo stocastico Euleriano di moto in quel punto e in quell'istante. Pertanto, le caratteristiche di una particella, cioè la sua traiettoria e la sua velocità variabile nel tempo, altro non sono che una delle possibili realizzazioni di un processo stocastico. Più precisamente, se si considera un punto $\mathbf{x}_0$ al tempo t_0, potremmo emettere contemporaneamente un numero N arbitrariamente grande di particelle. Esse avranno in comune il fatto di essere *nate* allo stesso istante e nello stesso punto, ma le loro traiettorie saranno differenti, rappresentando N realizzazioni indipendenti del processo stocastico *movimento di una particella emessa da* $\mathbf{x}_0$ *al tempo* t_0. Per completare la descrizione Lagrangiana, dovremmo naturalmente considerare tutti i possibili punti del dominio di indagine e far partire da essi infinite particelle per *campionare in termini Lagrangiani* il dominio e quindi per *catturare* le caratteristiche stocastiche che descrivono le infinite particelle. Ovviamente, dal punto di vista sperimentale, tutto ciò è impossibile.

3.3.2 CONCETTI GENERALI DI STATISTICA LAGRANGIANA

Per una descrizione statistica della turbolenza dell'atmosfera in termini Lagrangiani è necessario, in primo luogo, indicare quali entità hanno carattere stocastico. Per quanto detto, il moto delle particelle emesse da un punto del dominio di interesse è l'entità stocastica cercata. È immediato, però, constatare che c'è un parametro totalmente deterministico ed arbitrario che condiziona le considerazioni successive ed è la posizione iniziale $\mathbf{x}_0$ assunta dalle varie particelle considerate. Inizialmente consideriamo un ben preciso $\mathbf{x}_0$ e sviluppiamo i necessari concetti statistici che dovranno essere ripetuti poi per ogni punto iniziale possibile. Fissato $\mathbf{x}_0$, il moto di una particella è descritto da due variabili distinte: la posizione della particella nei vari istanti successivi a t_0 (3.103a) e la velocità che essa assume durante il proprio movimento (3.102c), funzioni stocastiche degli argomenti $\mathbf{x}_0$ e t.

3.3.2.1. Le densità di probabilità

Introduciamo ora le densità di probabilità Lagrangiane che sono tutte densità di probabilità condizionata, visto che, come minimo, sono condizionate dalla posizione iniziale $\mathbf{x}_0$ assunta dalla generica particella considerata. La più semplice di esse è legata alla probabilità P_X di trovare nella posizione $\mathbf{X}$+d$\mathbf{X}$ al tempo t una particella partita da $\mathbf{x}_0$ a t_0. Da essa è immediato definire la densità di probabilità $p(\mathbf{X}|\,\mathbf{x}_0,t)$. Per chiarire le idee, ragioniamo in termini campionari ed immaginiamo di emettere a t_0, da $\mathbf{x}_0$, M particelle identiche e di registrarne il movimento nello spazio fisico fino al tempo t. Esse seguiranno traiettorie anche molto diverse tra loro e lungo tali traiettorie ogni particella mostrerà una storia della propria velocità diversa dalle altre. Siano, però, N le particelle che si vengono a trovare a t in una posizione attorno al punto $\mathbf{X}$ (più esattamente nelle posizioni comprese tra $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}$+d$\mathbf{X}$), indipendentemente dalle traiettorie seguite per raggiungere tale posizione. La probabilità P_X è stimabile dal rapporto N/M e la *PDF* $p(\mathbf{X}|\,\mathbf{x}_0,t)$ sarà pari a N/M·d$\mathbf{X}$. Un secondo esempio è dato dalla probabilità che le particelle, emesse da $\mathbf{x}_0$ a t_0, assumano al tempo t una velocità $\mathbf{V}$. In questo caso la situazione considerata è meno intuitiva. In effetti immaginiamo di emettere M particelle da $\mathbf{x}_0$ e di lasciarle evolvere liberamente nello spazio. Facciamo ora la *fotografia* della situazione al tempo t. Vedremo che una parte di esse avrà raggiunto il generico punto $\mathbf{X}$ con velocità $\mathbf{V}$, ma anche altre avranno la stessa velocità, ma si troveranno in punti diversi dello spazio. Quello che cerchiamo è la probabilità che una qualsiasi delle particelle emesse abbia la velocità data, indipendentemente da dove si è venuta a trovare. Ciò è descritto dalla *PDF*:

$$p(\boldsymbol{V}|\boldsymbol{x_0},t)=\int p(\boldsymbol{V}|\boldsymbol{X},t)\cdot p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x_0},t)\cdot d\boldsymbol{X} \qquad [3.104a]$$

In sostanza, la relazione precedente afferma che la *PDF* cercata è il prodotto della probabilità che una particella si venga a trovare al tempo t in un generico punto $\mathbf{X}$ dello spazio per la probabilità che, in quel punto, essa assuma la velocità richiesta, il tutto sommato per ogni punto dello spazio. Si noti che $p(\mathbf{V}|\mathbf{X}, t)$ è la *PDF* che descrive la probabilità che al tempo t e in posizione $\mathbf{X}$ la velocità della particella sia $\mathbf{V}$: ma questa densità di probabilità coincide con l'analoga *PDF* Euleriana per il campo di moto $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$.

Consideriamo ora la probabilità che una particella, emessa a t_0 da $\mathbf{x}_0$, raggiunga al tempo t_1 la posizione $\mathbf{X}_1$ e al tempo t_2 la posizione $\mathbf{X}_2$. Tale probabilità è descritta dalla *PDF* congiunta: $p(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2|\mathbf{x}_0, t_1, t_2)$. Nota tale distribuzione, risulta immediato definire la probabilità che, nella traiettoria di una particella rilasciata a t_0 da $\mathbf{x}_0$, al tempo t_1 la velocità sia $\mathbf{V}_1$ e al tempo t_2 sia $\mathbf{V}_2$. Infatti, tale densità di probabilità congiunta risulta pari a:

$$p(\boldsymbol{V_1}, \boldsymbol{V_2}|\boldsymbol{x_0}, t) = \int p(\boldsymbol{V_1}, \boldsymbol{V_2}|\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, t_1, t_2) \cdot p(\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}|\boldsymbol{x_0}, t_1, t_2) \cdot d\boldsymbol{X}_1 d\boldsymbol{X}_2 \qquad [3.104b]$$

In termini campionari, emettiamo da $\mathbf{x}_0$ a t_0 N particelle, ognuna delle quali avrà una propria traiettoria nello spazio delle fasi. Di queste N particelle, individuiamo quelle M particelle che a t_1 presentano velocità $\mathbf{V}_1$ e a t_2 velocità $\mathbf{V}_2$. Il rapporto M/N è la *PDF* campionaria cercata.

Quelle presentate sono solo esempi semplici di *PDF* che possono essere convenientemente generalizzati a seconda degli usi richiesti, ovviamente con un aumento delle complicazioni formali. Definite le *PDF* è possibile definire anche i momenti che, però, non sono di comprensione così immediata come nel caso Euleriano.

3.3.2.2 I momenti

Innanzitutto, consideriamo il concetto di *velocità media di una particella* emessa da $\mathbf{x}_0$ a t_0. Ragionando in termini campionari, immaginiamo di emettere da tale punto un numero elevato di particelle. Esse, nel tempo, seguiranno traiettorie differenti, occupando posizioni differenti con velocità differenti. In sostanza, le loro traiettorie nello spazio delle fasi (le cui coordinate sono la posizione e la velocità, quindi uno spazio a 6 dimensioni) saranno differenti. Al tempo t registriamo la posizione che ognuna di esse ha raggiunto e la relativa velocità. Facciamo la media di quest'ultima e questa è la velocità media di una particella emessa a t_0 da $\mathbf{x}_0$, visto che le varie particelle emesse altro non erano che realizzazioni indipendenti del processo stocastico originario. In maniera più formale, si ha che:

$$\overline{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x_0}, t) = \int \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x_0}, t) p(\boldsymbol{V}|\boldsymbol{x_0}) \cdot d\boldsymbol{V} \qquad [3.105a]$$

In sostanza, la velocità media di una particella è il valor medio delle velocità che tutte le infinite particelle emesse da $\mathbf{x}_0$ possiedono, indipendentemente da dove si vengono a trovare effettivamente al tempo t. Nota la velocità media della particella (vista come processo stocastico), la *fluttuazione* che una ben precisa realizzazione presenta al tempo t, è necessariamente:

$$\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{x_0}, t) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x_0}, t) - \overline{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x_0}, t) \qquad [3.105b]$$

La definizione delle fluttuazioni apre la strada alla costruzione dei momenti centrali, esattamente come nel caso Euleriano. Se poi il moto del fluido entro cui si viene a trovare la particella in movimento è statisticamente stazionario, dal fatto che in ogni posizione della traiettoria della particella la velocità Lagrangiana della particella e quella Euleriana del fluido coincidono, discende di conseguenza che anche la velocità media della particella è costante, come quella del fluido e le due coincidono. In questo caso è sempre lecito eseguire un cambiamento di scala per rendere più *comoda* la situazione. In effetti se si sottrae punto a punto il vento medio, il campo Lagrangiano che ne consegue coincide col campo delle fluttuazioni.

Introduciamo, ora, i *momenti Lagrangiani del secondo ordine*. Rammentando la relazione (3.104b) ed il fatto che la velocità $\mathbf{V}$ della particella è un vettore con componenti cartesiane V_j, il

momento Lagrangiano del secondo ordine più generale che si possa concepire tra le componenti V_i al tempo t_1 e V_j al tempo t_2 ha la forma data dalla relazione seguente:

$$\overline{V_i(\boldsymbol{x_0}, t_1) \cdot V_j(\boldsymbol{x_0}, t_2)} = \int V_i(\boldsymbol{x_0}, t_1) \cdot V_j(\boldsymbol{x_0}, t_2) \cdot p\left(\boldsymbol{V}_i, \boldsymbol{V}_j | \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, t_1, t_2\right) \cdot p\left(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_j | \boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}\right) \cdot d\boldsymbol{X}_1 d\boldsymbol{X}_2 d\boldsymbol{X}_3 d\boldsymbol{V} d\boldsymbol{V} \quad [3.105c]$$

In una condizione generale di moto, i momenti Euleriani e Lagrangiani sono a priori non coincidenti. Tuttavia, quando si è in condizioni stazionarie ed omogenee, per definizione i momenti Lagrangiani ed Euleriani *one-point* coincidono. Anche se il *PBL* non è stazionario ed omogeneo, tuttavia le componenti orizzontali della velocità delle particelle nei pressi del suolo possono essere considerate campi omogenei ed isotropi. Ciò nonostante, anche in condizioni ideali (stazionarie, omogenee ed isotrope) le altre statistiche Lagrangiane, come le funzioni di correlazione e gli spettri, sono differenti da quelle Euleriane. In particolare, se paragoniamo le fluttuazioni temporali Euleriane delle componenti del vento con le analoghe Lagrangiane, vediamo importanti differenze. Per esempio, se osserviamo contemporaneamente un misuratore di direzione del vento ed un pennacchio di fumo che esce da un camino vicino, vediamo che le fluttuazioni della velocità locale del vento sono decisamente più rapide delle fluttuazioni contemporanee del pennacchio di fumo. Ciò comporta che le statistiche temporali Lagrangiane abbiano tempi di scala maggiori di quelle Euleriane.

3.3.2.3 Il Tempo Integrale Lagrangiano di Scala

Una volta introdotta la formulazione generale del momento del secondo ordine, è anche possibile definire una scala temporale caratteristica, detta *Tempo Integrale Lagrangiano di scala* (*Lagrangian integral time scale*, *Lagrangian correlation time*) che, per una generica componente V_i del moto della particella, è definito come:

$$T_{Li} = \int_{t_0}^{\infty} \frac{\overline{V_i(\boldsymbol{x_0}, t) \cdot V_i(\boldsymbol{x_0}, t_o)}}{[V_i^2(\boldsymbol{x_0}, t) \cdot V_i^2(\boldsymbol{x_0}, t_0)]^{1/2}} dt \quad [3.106]$$

che è forse il parametro più interessante della descrizione Lagrangiana del moto. Infatti, ogni particella rilasciata a t_0 da $\mathbf{x}_0$ percorrerà una traiettoria nello spazio delle fasi che è profondamente influenzata dalle proprie caratteristiche iniziali. Tuttavia, col tempo questa *memoria* tenderà a diminuire e si assisterà ad una decorrelazione col tempo della particella rispetto alle proprie condizioni iniziali. Il tempo caratteristico di scala T_{Li} può essere interpretato come il tempo necessario perché la componente V_i della velocità di una particella dimentichi il proprio valore iniziale.

3.3.3 AUTOCORRELAZIONE E SPETTRI IN CONDIZIONI STAZIONARIE E OMOGENEE

In condizioni stazionarie ed omogenee la varianza delle componenti Lagrangiane del moto coincide con la corrispondente varianza Euleriana e ciò vale anche per tutte le altre statistiche *one-point*, ma così non è, come detto, per le funzioni di Autocorrelazione e per le densità spettrali. Ciò deriva dal fatto che, come riscontrato nelle poche campagne sperimentali disponibili e nelle analisi numeriche, le componenti Lagrangiane del moto di una particella fluttuano più lentamente delle analoghe componenti Euleriane e gli spettri Lagrangiani sono concentrati a frequenze inferiori rispetto agli analoghi Euleriani (Hanna, 1981). Consideriamo ora una situazione stazionaria ed omogenea: in questo caso il moto di una particella è anch'esso statisticamente stazionario ed omogeneo e la velocità media della particella risulta costante. Sottraendo punto a punto il valor medio (vettore) della velocità, le componenti risultanti del moto della particella coincidono con le relative fluttuazioni. Se consideriamo una delle componenti Lagrangiane del moto della

particella (per esempio la componente trasversale *v*'), che per definizione ha valor medio nullo, in analogia a quanto già detto per la controparte Euleriana e in accordo con ciò che è stato presentato in precedenza, possiamo definire la *funzione di autocorrelazione Lagrangiana* come:

$$R_{Lv} = \overline{v'(t) \cdot v'(t+\tau)} \qquad [3.107]$$

indipendente da *t* (per la stazionarietà e l'omogeneità) e dipendente solo dal *time-lag*. Analoghe relazioni definiscono le funzioni di autocorrelazione per le altre componenti del moto.

Sempre in analogia con la trattazione Euleriana, si può definire la *densità spettrale Lagrangiana two-sided* $S_{Lv}(f)$ per la componente *v* del moto come la Trasformata di Fourier della relativa funzione di autocorrelazione $R_{Lv}(\tau)$. In particolare, si ha che:

$$S_{Lv}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{Lv}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau \qquad [3.108a]$$

$$R_{Lv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{Lv}(f) \cdot e^{j2\pi f\tau} df \qquad [3.108b]$$

Dato che il moto è stazionario ed omogeneo, le relazioni tra densità spettrali e varianze Euleriane e Lagrangiane sono date da:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{Lv}(f) \cdot df = \sigma_{Lv}^2 = \sigma_{Ev}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{Ev}(f) \cdot df \qquad [3.108c]$$

Come nel caso Euleriano, la funzione di autocorrelazione Lagrangiana è una funzione pari e perciò le (3.108a e b) diventano:

$$\begin{aligned} S_{Lv}(f) &= 2\int_{0}^{\infty} R_{Lv}(\tau) \cdot \cos(2\pi f\tau)\, d\tau \\ R_{Lv}(\tau) &= 2\int_{0}^{\infty} S_{Lv}(f) \cdot \cos(2\pi f\tau)\, df \end{aligned} \qquad [3.109]$$

Tutte queste considerazioni fatte per la componente *v* possono essere ripetute anche per le altre due componenti del moto.

Prendendo ancora a riferimento la componente orizzontale trasversale *v* del moto di una particella (analoghi ragionamenti si possono fare ovviamente anche per le altre componenti), nota la funzione di autocorrelazione è immediato definire il *Tempo Lagrangiano di Scala*:

$$T_{Lv} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{Lv}(\tau) \cdot d\tau \qquad [3.110]$$

il cui significato fisico è il tempo necessario alla particella per *dimenticare* il valore iniziale della componente *v* del moto.

Ritorniamo ora alle considerazioni iniziali. Come si è detto, le componenti Lagrangiane del moto fluttuano meno rapidamente delle analoghe componenti Euleriane e ciò risulta evidente sia dai risultati delle esperienze in campo (Hanna, 1981) che dalle sperimentazioni numeriche. Di conseguenza, i tempi caratteristici Lagrangiani saranno maggiori di quelli Euleriani e gli spettri Lagrangiani saranno concentrati a frequenze inferiori. Se indichiamo con T_L il Tempo Lagrangiano di Scala caratteristico di una delle componenti *v* e con T_E l'analogo tempo caratteristico Euleriano, il rapporto $\beta = T_L/T_E$ rappresenta una sorta di *fattore di rallentamento* che lega il moto Lagrangiano a quello Euleriano. Corrsin (1963) ha proposto una *congettura* secondo cui le forme funzionali delle funzioni di Autocorrelazione e delle densità spettrali sono simili; ciò in cui le

quantità Euleriane e Lagrangiane differiscono è la scala. Tale congettura, anche se non esatta, operativamente rappresenta una buona approssimazione, come confermato dalle misure sperimentali, e matematicamente può essere espressa come:

$$R_L(\beta\tau) = R_E(\tau) \qquad f \cdot S_L(f) = \beta \cdot f \cdot S_E(\beta f) \qquad [3.111a]$$

L'importanza pratica di questa congettura sta nel fatto che le misure Lagrangiane in atmosfera sono difficilissime da realizzare mentre quelle Euleriane sono decisamente più abbordabili. Se da queste ultime si ottengono le funzioni di Autocorrelazione e le densità spettrali, la congettura di Corrsin consente di ottenere una stima della loro controparte Lagrangiana. Nella **Fig. 3.16** è riportata una rappresentazione schematica della congettura di Corrsin.

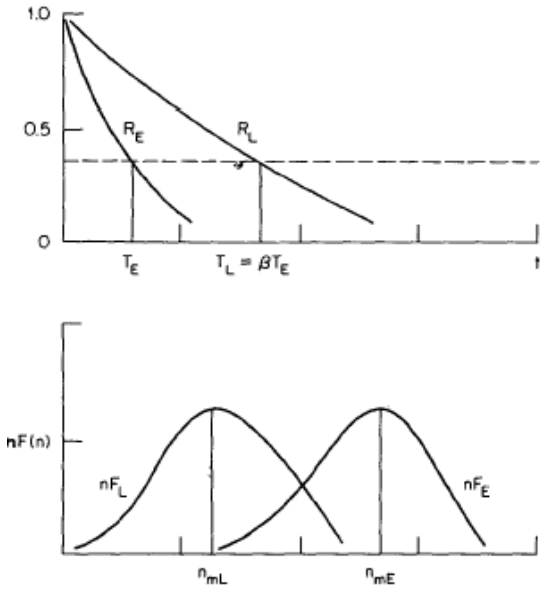


Fig. 3.16: rappresentazione schematica della congettura di Corrsin (Hanna, 1981)

Perché la si possa applicare è indispensabile conoscere il valore del rapporto β. Per prima cosa va detto che β non è una generica costante, ma dipende dal livello di turbolenza. In effetti si è visto che vale circa 2 nelle situazioni convettive, circa 4 nelle condizioni adiabatiche e circa 10 nelle condizioni stabili. Più precisamente Wandel e Kofoed-Hanse (1962) hanno evidenziato come β dipenda dall'intensità della turbolenza $i = \sigma_i/U_j$ (dove U_j è la rispettiva velocità media rispetto all'asse *j*) secondo la relazione:

$$\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \frac{U_i}{\sigma_i} = \frac{\gamma}{i} \qquad [3.111b]$$

dove la costante γ vale circa 0.44. Degrazia e Anfossi (1998), conducendo un'analisi differente, sono giunti ad un valore per la costante γ di 0.55. Comunque, l'importante è notare come il rapporto β sia inversamente proporzionale all'intensità della turbolenza e, a priori, variabile a seconda della componente del moto considerata. Su questo argomento ritorneremo al Cap. 4.

Attualmente si impiega la congettura di Corrsin quando mancano altre informazioni sulle funzioni di Autocorrelazione e sulle densità spettrali Lagrangiane, anche se in effetti la similarità funzionale tra funzioni Lagrangiane ed Euleriane non è completa. Ciò è quanto emerge da raffinate misure realizzate in esperimenti condotti in galleria a vento. Oltre a ciò, come meglio si vedrà al Cap. 4, le densità spettrali Lagrangiane ed Euleriane differiscono sistematicamente alle alte frequenze (*inertial subrange*): in particolare, mentre le densità Euleriane risultano proporzionali a $f^{-5/3}$, quelle Lagrangiane sono proporzionali a f^{-2}.

3.3.4 TEORIA LAGRANGIANA DI TAYLOR

A conclusione della breve esposizione sulla teoria Lagrangiana della turbolenza, consideriamo l'emissione da un punto dello spazio e ad un certo istante di un gran numero di particelle identiche. L'osservazione sperimentale ci garantisce che tali particelle (astrazione di una sostanza inquinante emessa da un camino) si disperdono nell'aria a causa dei moti turbolenti dell'atmosfera e si distanziano progressivamente le une dalle altre. A causa della caratteristiche stocastiche proprie del *PBL*, le traiettorie delle varie particelle saranno realizzazioni differenti di un processo stocastico descritto statisticamente dalla *PDF* $p(\mathbf{X}, \mathbf{x}_0, t)$ in cui $\mathbf{x}_0$ è il punto di emissione all'istante t_0 e $\mathbf{X}$ è la posizione della particella al tempo t. Se all'insieme delle particelle emesse attribuiamo una massa Q, la concentrazione della sostanza nel punto $\mathbf{X}$ al tempo t sarà data da:

$$C(\boldsymbol{X}, t) = Q \cdot p(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0, t) \qquad [3.112]$$

L'obiettivo che ci si prefigge è quello di determinare una legge statistica di tipo Lagrangiano che descriva la dispersione delle particelle emesse. Tale legge è stata ottenuta nel 1921 da uno studio di Taylor ora divenuto un classico della teoria della turbolenza dell'atmosfera.

3.3.4.1 Teoria statistica della diffusione turbolenta

Si consideri l'aria del *PBL* in moto turbolento stazionario e omogeneo in orizzontale (situazione tipica del *PBL*) e caratterizzata da un moto medio solo lungo l'asse x (il vento medio). Consideriamo, ora, il moto lungo l'asse y (trasversale rispetto al moto medio) di un elevato numero (virtualmente infinito) di particelle rilasciate all'istante $t_0 = 0$ e nella posizione $y = 0$. L'omogeneità ipotizzata per il campo di moto dell'aria comporta che quanto si otterrà per la dispersione trasversale potrà essere esteso anche alle altre direzioni.

Tra tutte le particelle emesse, consideriamone inizialmente una in particolare. Una volta rilasciata, essa si muoverà con le stesse proprietà statistiche del fluido circostante, seguendo una *traiettoria monodimensionale* descritta dalla variazione nel tempo della propria coordinata trasversale $y(t)$. Se si ipotizza (senza peccare di esagerato ottimismo) che la funzione $y(t)$ sia continua e derivabile, ad ogni istante t la velocità della particella sarà quindi data, per definizione, da:

$$v'(t) = \frac{dy}{dt} \qquad [3.113a]$$

dove la velocità della particella è stata indicata col simbolo $v'(t)$, cioè col simbolo normalmente usato per le fluttuazioni. In effetti, la particella avrà al generico tempo t la stessa velocità del fluido nel punto da lei occupato, velocità che, essendo il fluido a velocità media nulla in quella direzione, coinciderà con la relativa fluttuazione. Dopo un tempo t la particella avrà percorso una distanza y nella direzione y che dipenderà dalle fluttuazioni turbolente di velocità da essa incontrate lungo la traiettoria percorsa. In maniera del tutto generale si avrà che:

$$y(t) = \int_0^t v'(\tau) \cdot d\tau \qquad [3.113b]$$

Moltiplicando tra loro la (3.113a) e la (3.113b) si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$y\frac{dy}{dt} = v'(t) \int_0^t v'(\tau) \cdot d\tau \qquad [3.113c]$$

che, integrata dall'istante iniziale 0 all'istante t diventa:

$$y^2 = 2 \int_0^t v'(\tau_1) \left(\int_0^{\tau_1} v'(\tau_2) \cdot d\tau_2 \right) \cdot d\tau_1 \qquad [3.113d]$$

Il rilascio di una particella da un punto in un fluido turbolento è un processo stocastico di cui la traiettoria di una ben precisa particella è solo una realizzazione. Se ora, assieme alla

particella considerata, venissero rilasciate, sempre a $t_0 = 0$ e $y = 0$, un numero molto elevato di particelle identiche a quella fin qui considerata, le loro traiettorie evidenzierebbe un gran numero di realizzazioni indipendenti del campo di moto turbolento trasversale da cui risulta possibile ottenere il *valor medio della dispersione laterale delle particelle* al tempo *t*. A tale scopo è sufficiente mediare la relazione (3.113d) ottenendo:

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} = \int_0^t \int_0^{\tau_1} \overline{v'(\tau_1) \cdot v'(\tau_2)} \cdot d\tau_2 d\tau_1 \qquad [3.114a]$$

Sia $\tau = \tau_2 - \tau_1$. Prima di procedere è conveniente ricordare che, in condizioni stazionarie ed omogenee, la Funzione Lagrangiana di Autocorrelazione Normalizzata relativa alla dispersione laterale delle particelle dipende solo dal *time-lag* τ ed è definita come:

$$\rho_L(\tau) = \frac{\overline{v'(t) \cdot v'(t+\tau)}}{\overline{v'^2}} \qquad [3.114b]$$

A priori ρ_L potrebbe avere una forma funzionale qualsiasi, tuttavia per *time-lag nullo* $\rho_L(0) = 1$, per definizione. Inoltre, sulla base delle evidenze sperimentali, $\rho_L(\tau)$ può essere considerata una funzione continua e derivabile che tende rapidamente a zero col tendere all'infinito del *time-lag.* Usando questa definizione e ricordando l'omogeneità e la stazionarietà del moto del fluido, la relazione (3.114a) può essere riscritta come:

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} = 2\overline{v'^2} \int_0^t \int_0^{\tau_1} \rho_L(\tau) \cdot d\tau \cdot d\tau_1 \qquad [3.115a]$$

dove compare la varianza della velocità delle particelle, pari a quella del fluido, che non dipende dal tempo vista la stazionarietà del moto del fluido in cui si muovono le particelle. Per le stesse ragioni, la varianza della velocità trasversale delle particelle coincide con la varianza Euleriana delle fluttuazioni trasversali di velocità del vento, quindi:

$$\sigma_y^2 = 2\sigma_v^2 \int_0^t \int_0^{\tau_1} \rho_L(\tau) \cdot d\tau \cdot d\tau_1 \qquad [3.115b]$$

Derivando la relazione precedente, si ottiene la relazione nota come *Teorema di Taylor*:

$$\frac{d\sigma_y^2}{dt} = 2\overline{v'^2} \int_0^t \rho_L(\tau) \cdot d\tau \qquad [3.115c]$$

Il Teorema di Taylor evidenzia quindi la dipendenza diretta tra il tasso di variazione della varianza della dispersione laterale delle particelle e la varianza delle fluttuazioni della velocità del fluido in tale direzione con un coefficiente di proporzionalità (l'integrale presente nella relazione) che dipende dal tempo trascorso dall'emissione e dalle caratteristiche di turbolenza del fluido riassunte nella funzione di Autocorrelazione Normalizzata. Ricordiamo che la varianza della velocità della particella non solo è indipendente dalla posizione (essendo il moto orizzontalmente omogeneo) ma anche dal tempo (essendo il moto stazionario).

La funzione di autocorrelazione normalizzata ρ_L è una funzione pari e con il massimo (pari a 1) all'origine. Se la si suppone anche continua e derivabile (come risulta sperimentalmente), si avrà che $d\rho_L/d\tau|_0 = 0$. Tale funzione, in linea di principio analiticamente ignota, può essere espressa nella forma di una serie di Taylor che, arrestato ai primi tre termini, diventa:

$$\rho_L(\tau) = \rho_L(0) + \tau \left.\frac{d\rho_L}{d\tau}\right|_0 + \frac{\tau^2}{2} \left.\frac{d^2\rho_L}{d\tau^2}\right|_0 \cdots \cong 1 - \frac{\tau^2}{\lambda} \qquad [3.115c]$$

dove λ è *la Microscala Temporale Lagrangiana*, definita come:

$$-\frac{2}{\lambda^2} = \left.\frac{d^2\rho_L}{d\tau^2}\right|_0 \qquad [3.115d]$$

che è l'intercetta della parabola tangente nell'origine alla funzione di Autocorrelazione normalizzata. Quindi la relazione (3.115a) può essere riscritta anche come:

$$\sigma_y^2(t) = \overline{v'^2} \cdot t^2 \left(1 - \frac{t^2}{6\lambda^2}\right) \qquad [3.115e]$$

Kampé de Férriet nel 1939 ha riconsiderato la relazione di dispersione trasversale (3.115a) impiegando il Teorema di Integrazione per Parti secondo cui, se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono continue e derivabili in un intervallo (a,b), allora si ha che:

$$\int_a^b f(x) \cdot \frac{dg}{dx} dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b g(x) \cdot \frac{df}{dx} dx \qquad [3.116a]$$

Usando proprio il Teorema di integrazione per parti, dalla (3.115a) si ottiene facilmente:

$$\sigma_y^2(t) = 2\sigma_v^2 \int_0^t (t - \tau) \cdot \rho_L(\tau) \cdot d\tau \qquad [3.116b]$$

Le (3.115a) e (3.116b), che descrivono il tasso di crescita dello spostamento quadratico medio di una particella in funzione dell'Autocorrelazione Lagrangiana Normalizzata della velocità della particella stessa, esatte in condizioni di turbolenza omogenea e stazionaria, sono il famoso risultato ottenuto da Sir Geoffrey Ingram Taylor nel 1921. Esse nulla dicono sulla forma della distribuzione nello spazio delle particelle, ma si concentrano esclusivamente sul momento secondo della distribuzione incognita. Va però rilevato (Sorbjan, 1989, pag. 227-229) che, con ipotesi del tutto ragionevoli, è facile prevedere che la distribuzione delle particelle nella direzione *y* sia una distribuzione Gaussiana a media nulla e con la varianza pari a quanto previsto dalla (3.115a). Comunque, pur non essendo attesa una soluzione teorica della (3.115a), può risultare utile verificare alcune sue proprietà asintotiche, ovviamente nell'ipotesi che tale soluzione esista.

La prima considerazione asintotica è quella di *campo vicino* e si riferisce al caso in cui il *tempo di volo* t della particella (cioè l'intervallo temporale tra il suo rilascio, che si ipotizza avvenga al tempo 0, e l'istante considerato t) è molto breve. In questo caso $\rho_L \approx 1$ e quindi la relazione generale (3.115a) si riduce a:

$$\sigma_y^2(t) \cong \sigma_v^2 \cdot t^2 \qquad [3.117a]$$

cioè:

$$\sigma_y \cong \sigma_v t \qquad [3.117b]$$

Quindi nel campo vicino le particelle si disperdono trasversalmente in modo lineare col tempo di volo. *Perciò, per tempi di rilascio molto brevi, la dispersione trasversale delle particelle non è un processo di diffusione, ma è semplicemente un'avvezione ad una velocità stocastica iniziale sostanzialmente costante*.

La seconda considerazione asintotica comporta il considerare tempi di volo molto lunghi ($t >> T_L$ *campo lontano*). Per tempi così lunghi la funzione di Autocorrelazione tende a zero, ma il suo integrale rimane finito. Un modo per ottenere la forma asintotica della (3.116b) corrispondente al campo lontano è quello di riscriverla nel modo seguente:

$$\sigma_y^2(t) = 2\overline{v'^2} \cdot t \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) \cdot \rho_L(\tau) \cdot d\tau \qquad [3.118a]$$

Se $\tau << t$, $\tau/t \cong 0$, ricordando che per tempi di volo così lunghi:

$$\int_0^t \rho_L(\tau)\cdot d\tau \cong \int_0^\infty \rho_L(\tau)\cdot d\tau = T_L \qquad [3.118b]$$

si ha che in campo lontano:

$$\sigma_y^2(t) = 2\cdot\sigma_v^2\cdot t\cdot T_L$$
$$\sigma_y = \sqrt{2\cdot\sigma_v^2\cdot t\cdot T_L} \qquad [3.118c]$$

Questo risultato è del tutto simile a quanto si ottiene dalla teoria cinetica dei gas per i fenomeni di diffusione, quindi, *quando i tempi di volo sono molto superiori al Tempo caratteristico Lagrangiano T_L, la dispersione turbolenta delle particelle in un campo di moto turbolento omogeneo e stazionario è analoga alla diffusione molecolare*. Per avere un'idea degli ordini di grandezza in gioco, si consideri una situazione convettiva con $\sigma_v \cong 0.7$ m·s^{-1} e $T_L \cong 210$ s. Se al moto turbolento trasversale si sovrappone un moto orizzontale di traslazione di circa 2 m·s^{-1}, si può affermare che le condizioni di campo lontano si instaurano per tempi di volo molto superiori a 210 s (diciamo 1050 s) e a distanze dal punto di emissione superiori a 420 m (diciamo 2100 m). Spesso in pratica si attribuisce alla varianza della dispersione trasversale di particelle la forma funzionale seguente che dà conto dei due limiti asintotici:

$$\sigma_y^2(t) = \frac{2\overline{v'^2}\cdot t^2}{1 + t/T_L} \qquad [3.118d]$$

Esercizio 3.4

Come si vedrà al Cap. 4, la Teoria di Kolmogorov assicura che la Funzione di Autocorrelazione Normalizzata $\rho_L(\tau)$ è una funzione esponenziale così espressa:

$$\rho_L(\tau) = \exp(-\tau/T_L)$$

In questo caso, che forma assume la varianza σ^2_y?

Inserendo nella relazione (3.115b) che esprime il Teorema di Taylor la forma data per la funzione di autocorrelazione normalizzata, si ottiene:

$$\frac{d\sigma_y^2}{dt} = 2\cdot\overline{v'^2}\int_0^t \rho_L(\tau)\cdot d\tau = 2\cdot\overline{v'^2}\cdot T_L\left(1-\exp(-t/T_L)\right)$$

che integrata nel tempo porta all'espressione seguente:

$$\sigma_y^2 = 2\cdot\overline{v'^2}\cdot T_L^2\left(\frac{t}{T_L} - 1 + \exp(-t/T_L)\right)$$

Esercizio 3.5

Si consideri un fluido caratterizzato da una turbolenza stazionaria ed omogenea in orizzontale (cioè nella direzione y), ma si immagini, ora, di emettere da un punto dello spazio delle coppie di particelle invece che singole particelle. Ciò a cui si è interessati ora è stabilire quale possa essere la varianza (sempre nella direzione y) del baricentro Σ della coppia di particelle e della loro separazione Δ, grandezze definite rispettivamente come:

$$\Delta = \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{2}} \qquad \Sigma = \frac{y_1 + y_2}{\sqrt{2}}$$

Per fare ciò si utilizzi l'apparato teorico del Teorema di Taylor ipotizzando (ragionevolmente) che la funzione di correlazione normalizzata per la coppia di particelle $\rho_{2L}(t,\tau)$ sia pari a:

$$\rho_{2L}(t,\tau)=\frac{\overline{v_1(t)v_2(t-\tau)}}{\overline{v^2}}=e^{-t/T_L}e^{-(t-\tau)/T_L}$$

Dato che il campo di moto in cui vengono introdotte le coppie di particelle è stazionario, omogeneo ed isotropo, il valore medio di y_1 e di y_2 non può che essere nullo e che la varianza di y_1 non può che essere identica alla varianza di y_2. Quindi, per definizione:

$$\overline{\Delta^2}=\overline{\left(\frac{y_1-y_2}{\sqrt{2}}\right)^2}=\overline{y_1^2}-\overline{y_1y_2} \qquad \overline{\Sigma^2}=\overline{\left(\frac{y_1+y_2}{\sqrt{2}}\right)^2}=\overline{y_1^2}+\overline{y_1y_2}$$

Estendendo l'apparato teorico del Teorema di Taylor al caso delle coppie di particelle, possiamo scrivere la relazione seguente che esprime la covarianza tra la posizione delle due particelle della coppia:

$$\overline{y_1y_2}=2\overline{v^2}\int_0^t dt'\int_0^{t'}\rho_{2L}(t',\tau)\cdot d\tau$$

Se in questa equazione sostituiamo la forma data per la funzione di correlazione normalizzata, otteniamo che:

$$\overline{y_1y_2}=2\overline{v^2}T_L^2\left(1-e^{-t/T_L}\right)^2$$

Quindi alla fine otteniamo:

$$\overline{\Delta^2}=\overline{\left(\frac{y_1-y_2}{\sqrt{2}}\right)^2}=\overline{y_1^2}-\overline{v^2}T_L^2\left(1-e^{-t/T_L}\right)$$

$$\overline{\Sigma^2}=\overline{\left(\frac{y_1-y_2}{\sqrt{2}}\right)^2}=\overline{y_1^2}+\overline{v^2}T_L^2\left(1-e^{-t/T_L}\right)$$

che evidenziano come variano con il tempo di volo il baricentro della coppia di particelle e la separazione tra le particelle della coppia.

3.3.5.1 Rappresentazione spettrale della teoria di Taylor

La Teoria di Taylor, partendo dalla sola ipotesi di stazionarietà, omogeneità ed isotropia locale del campo di moto, giunge a descrivere la dispersione (laterale, nel caso considerato) di particelle emesse in un punto dello spazio ad un istante iniziale. In pratica, ha descritto la dispersione laterale di un pennacchio emesso (senza galleggiamento) da un camino. La relazione ottenuta è la (3.115d), scritta nel dominio del tempo. Ci si può domandare come tale relazione possa trasformarsi nel dominio delle frequenze. Ricordando che tra lo spettro Lagrangiano S_{Lv} (*two-sided*) della componente trasversale v del moto di una particella, la sua funzione di autocorrelazione $R_{Lv}(\tau)$ e la funzione di autocorrelazione normalizzata $\rho_{Lv}(\tau)$ valgono le (3.109) e (3.114b), si giunge facilmente alla relazione:

$$\sigma_y^2(t)=4\int_0^\infty S_{Lv}(f)\left[\int_0^t(t-\tau)\cdot\cos(2\pi f\tau)\cdot d\tau\right]\cdot df \qquad [3.119a]$$

che, integrata rispetto al tempo τ, diventa:

$$\sigma_y^2(t)=t^2\int_0^\infty S_{Lv}(f)\cdot\frac{\sin^2(2\pi f\tau)}{(\pi f\tau)^2}\cdot df \qquad [3.119b]$$

È di estrema importanza notare come nell'integrale presente nella relazione precedente ci sia la densità spettrale Lagrangiana $S_{Lv}(f)$ moltiplicata per la funzione $F(ft)$ definita come:

$$F(ft) = \frac{\sin^2(\pi f\tau)}{(\pi f\tau)^2} \qquad [3.119c]$$

che rappresenta un filtro.

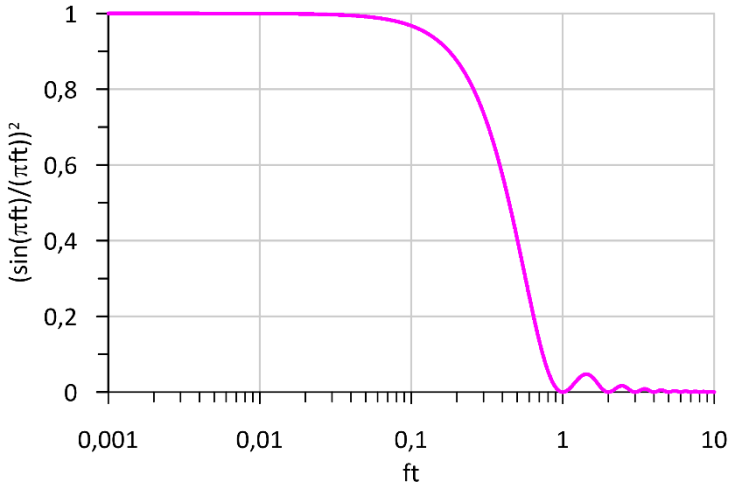


Fig. 3.17: la funzione filtro nella rappresentazione spettrale della legge di Taylor

Questa funzione, riportata in **Fig. 3.17**, decide con quali pesi le varie frequenze contribuiscono alla dispersione trasversale delle particelle. Dato che ad ogni frequenza è associato un vortice di dimensione inversamente proporzionale alla frequenza, in sostanza il filtro decide quali vortici contribuiscono alla dispersione delle particelle. La funzione filtro ha un comportamento molto interessante. Se il tempo *t* è molto piccolo, la particella è appena stata rilasciata e si trova nei pressi del punto di emissione. In questo caso la funzione peso *F*(*ft*) è prossima all'unità e l'intero integrale nella (3.119b) è pari alla varianza Euleriana della componente trasversale del vento. In sostanza, alla dispersione delle particelle all'inizio del moto nell'atmosfera contribuiscono tutte le scale di moto presenti nell'atmosfera stessa e quindi a tale dispersione partecipa l'intera energia cinetica dello spettro. Col passare del tempo, le fluttuazioni ad alta frequenza (corrispondenti agli *eddies* a piccola scala) progressivamente diminuiscono la loro influenza su σ_y che è guidata prevalentemente dai vortici di grandi dimensioni.

PROBLEMI

P03.01 Dimostrare che la funzione di densità di probabilità di una variabile stocastica non è adimensionale

P03.02 Data una distribuzione uniforme, calcolare il valor medio, la varianza, la Skewness e la Kurtosis.

P03.03 Dimostrare che per una distribuzione esponenziale $\mu = \lambda$ e $\sigma^2 = \lambda^2$

P03.04 Dimostrare che le relazioni (3.10) sono vere

P03.05 Dimostrare che per una distribuzione normale tutti i momenti centrali dispari (eccetto la media) sono nulli

P03.06 Dimostrare che per una distribuzione normale standardizzata la Kurtosis vale 3

P03.07 Una variabile stocastica Q è definita come $Q = a + bU$ dove U è una variabile stocastica ed a e b sono costanti. Dimostrare che:

$\overline{Q} = a + b\overline{U}$; $\quad var(Q) = b^2\, var(U)$; $\quad std(Q) = b \cdot std(U)$

P03.08 Siano U_1 e U_3 variabili stocastiche non correlate e $U_2 = a + bU_1 + cU_3$, dove a, b e c sono delle costanti. Mostrare che:

$\rho_{12} = \frac{b}{\left(b^2 + c^2 \overline{U_3^2}/\overline{U_1^2}\right)^{1/2}}$;

$\rho_{12} = 0$ se $b = 0$ e $c \neq 0$; $\quad \rho_{12} = 1$ se $c = 0$ e $b > 0$; $\rho_{12} = -1$ se $c = 0$ e $b < 0$

P03.09 Se U e V sono due variabili stocastiche, mostrare che $var(U+V) = var(U) + var(V) + Cov(U,V)$

P03.10 Se la variabile stocastica U è caratterizzata da una funzione di autocorrelazione $R_{uu}=\exp(-|\tau|/\tau_0)$, trovare la densità spettrale relativa $\Phi_{uu}(\omega)$. Graficare le due funzioni per $\tau_0=100$s.

P03.11 Dimostrare che $dR_{xx}/d\tau$ è una funzione pari

P03.12 Date le seguenti varianze in m^2/s^2 in due diverse posizioni A e B e a due tempi diversi

	Sito A		Sito B	
tempo	10.00	11.00	10.00	11.00
$\overline{u'^2}$	0.50	0.50	0.70	0.50
$\overline{v'^2}$	0.25	0.50	0.25	0.25
$\overline{w'^2}$	0.70	0.5	0.70	0.25

dove, quando e per quale variabile la turbolenza è: stazionaria, omogenea, isotropica

P03.13 Si considerino le misure istantanee della componente verticale del vento e della temperatura potenziale contenute nella tabella seguente.

	Misure		**Calcoli**					
	w	θ	w'	θ'	$(w')^2$	$(\theta')^2$	$w\theta$	$w'\theta'$
	0.5	295						
	-0.5	293						
	1.0	295						
	0.8	298						
	0.9	292						
	-0.2	294						
	-0.5	292						
	0.0	289						
	-0.9	293						
	-0.1	299						
Media								

Si realizzino i calcoli suggeriti dalle celle in bianco e si verifichi che:

$$\overline{w\theta} = \overline{w} \cdot \overline{\theta} + \overline{w'\theta'}$$

P03.14 Considerando ancora le misure dell'esercizio precedente, trovare la deviazione standard di w e di θ e calcolare il coefficiente di correlazione lineare tra le due grandezze.

P03.15 Usando i risultati ottenuti nei due problemi precedenti, determinare se le misure sono caratteristiche di una situazione stabile, adiabatica o convettiva.

P03.16 Siano date le seguenti misure istantanee di temperatura potenziale θ e di velocità verticale w:

w	0.5	0.7	0.3	0.4	0.1	-0.2	-0.4	0.7	0.3	-0.2
θ	281.0	281.5	280.9	280.7	281.2	281.4	281.9	281.5	281.7	281.1

Calcolare le grandezze seguenti: $\overline{w'^2}$, $\overline{\theta'^2}$ e $\overline{w'\theta'}$

P03.17 Assumendo che $R_{uu}(t) = \exp(-at^2)$, trovare la densità spettrale $\Phi_{uu}(\omega)$ e graficare entrambe le funzioni nel caso in cui $a = 0.001$ s^{-2}.
(Suggerimento: usare la Trasformata di Fourier $\Im[exp(-at^2)] = 1/\sqrt{\pi a} \cdot exp[-(\omega^2/4a)^2]$

P03.18 Assumendo $R_{uv}(t) = A \exp(-at^2)$, $R_{uu}(t) = B \exp(-a_v t^2)$ e $R_{vv}(t) = C \exp(-a_v t^2)$, trovare:

- lo spettro di quadratura
- il cospettro
- l'ampiezza
- l'angolo di fase
- la coerenza

P03.19 Se l'autocorrelazione spaziale è $R_{LL}(r, 0,0) = \overline{u'^2}\, exp(-|r|/L)$, trovare lo spettro monodimensionale longitudinale $k_1 E_{11}(k_1)/\overline{u'^2}$, lo spettro monodimensionale trasversale $k_1 E_{22}(k_1)/\overline{u'^2}$ e l'*energy spectrum* $E(k)$ in condizioni di isotropia.

4. LE SCALE DELLA TURBOLENZA

La turbolenza permea tutta la nostra vita quotidiana ed ha sempre catturato la curiosità dell'uomo. La prima nota scientifica documentata su questo fenomeno risale a Leonardo da Vinci (1452-1519) che, come molti suoi contemporanei, studiò il movimento dell'acqua e fu il primo ad impiegare il termine *turbolenza* per descrivere il moto vorticoso di un fluido, utilizzandolo quindi con il significato scientifico attuale. Molto interessanti sono alcuni suoi scritti e soprattutto alcuni suoi disegni di rara bellezza che ci illustrano il livello di conoscenza qualitativa del fenomeno posseduta da questo fantastico personaggio. Basta infatti ammirare il suo disegno riportato alla **Fig. 4.1** per restare esterrefatti.

Fig. 4.1: la turbolenza vista da Leonardo da Vinci (Codice Atlantico)

Leonardo ha catturato in questa immagine praticamente tutte le caratteristiche della turbolenza in un fluido, ma le ha anche descritte a parole (1507) in una maniera poetica, ma perfetta:

> *osservo il movimento della superficie dell'acqua e la vedo assomigliare alle chiome di un uomo animate da due moti: uno causato dal peso dei capelli e l'altro dalla direzione dei riccioli. Allo stesso modo l'acqua ha moti turbinosi una parte dei quali è costituita dalla corrente principale e l'altra da movimenti disordinati e ad essa contrari*.

Leonardo aveva già catturato l'essenza del fenomeno, ma dobbiamo aspettare secoli prima che ci si azzardasse a descrivere tutto ciò teoricamente ed ancora non ci si è riusciti completamente. Possiamo dire che tutto questo Capitolo si pone come obiettivo quello di tradurre in una teoria matematica congruente i disegni di Leonardo sulla turbolenza e specializzare tutto ciò al *PBL* dove la turbolenza regna sovrana. Ma prima di iniziare lo studio è opportuno riepilogare quanto finora già conosciamo.

Il moto di un fluido ad elevato numero di Reynolds (come l'aria del *PBL*) è caratterizzato da una variazione del tutto irregolare delle caratteristiche fisiche e chimiche del fluido stesso in ogni punto dello spazio e ad ogni istante. Questo stato di cose viene normalmente indicato come

turbolenza completamente sviluppata. E questa è la normale situazione che incontriamo nel *PBL*. Se ci limitassimo a considerare il solo campo di velocità (analoghi ragionamenti potremmo farli anche per la altre grandezze fisiche come la temperatura o la pressione) ed introducessimo il concetto di velocità media (per esempio, mediando punto a punto su intervalli temporali sufficientemente lunghi ed ammettendo che il processo sia ergodico), vedremmo che le variazioni spaziali e temporali del campo di moto verrebbero fortemente attenuate dal processo di mediazione, evidenziando un valor medio variabile lentamente e con regolarità nello spazio e nel tempo. Ovviamente, sottraendo punto a punto il campo medio dal campo istantaneo, otterremo la parte fluttuante del campo di velocità che, viceversa, è fortemente irregolare. In sostanza, il moto complessivo dell'aria può essere visto come il moto di un insieme numerosissimo di porzioni di fluido tra di loro logicamente e fisicamente separate entro cui è presente una sorta di regolarità di moto. Queste strutture parzialmente coerenti in cui si può scomporre il fluido in moto prendono il nome di *disturbi* (questo è il termine usato da Monin e Yaglom) o *eddy* (termine usato in tutta la Letteratura anglosassone) o *vortici*. La definizione data non è molto quantitativa, ma il concetto di *eddy* elude una definizione precisa.

In questo Capitolo esaminiamo più nel dettaglio queste irregolarità che, come Leonardo ci ha mostrato nel suo disegno di **Fig. 4.1**, appaiono, almeno qualitativamente, come un insieme di *disturbi* di differente *dimensione* (*scala*), dove col termine dimensione intendiamo l'ordine di grandezza della distanza entro cui la velocità varia apprezzabilmente. Vedremo che le loro dimensioni variano in un intervallo estremamente ampio, coprendo parecchie decadi: i più grandi hanno dimensioni dell'ordine di grandezza della regione in cui si sviluppa il campo di moto ed i più piccoli sono talmente piccoli da essere aggrediti dalle forze viscose e da essere dissipati in calore. L'obiettivo che cercheremo di perseguire è quello di individuare una *parentela energetica* tra i disturbi di dimensione differente e di giungere a delle relazioni quantitative utili alla descrizione delle proprietà statistiche del *PBL*.

Dato che le basi teoriche del moto dei fluidi sono state completamente esposte in precedenza e finora non è emerso nulla di utile allo scopo, risulta naturale che per poter fare qualche passo in avanti in questa direzione è necessario proporre (e verificare) delle *ipotesi ad hoc*. È ciò che Kolmogorov ed i suoi collaboratori hanno fatto con successo negli anni '40, consegnandoci una teoria semiempirica affascinate ed elegante, oltre che di estrema utilità pratica. Una sintesi discorsiva e vivace della storia dello studio della turbolenza e delle conoscenze finora acquisite le possiamo trovare nel lavoro di Tampieri e Anfossi (2004), mentre il lavoro di Ecke (2005) ci consente non solo di avere il quadro storico in cui si è sviluppa la teoria della turbolenza, ma fornisce anche dettagli scientifici interessanti, oltre ad una sintesi chiara dei problemi tuttora aperti. L'esposizione che faremo in questo Capitolo si basa comunque sulla bellissima trattazione di Monin e Yaglom (2007b) (due dei protagonisti di questa avventura scientifica) e su alcune pagine di rara chiarezza, incisività e completezza di Landau e Lifshitz (1987).

4.1 PREMESSA CONCETTUALE

Al Cap. 3 abbiamo introdotto il concetto di isotropia nella descrizione dei campi stocastici ed abbiamo toccato con mano il fatto che un campo dotato di tale proprietà è estremamente semplice da trattare. Ma abbiamo anche visto che la turbolenza isotropa è, di per sé, un'idealizzazione matematica che ha ben poche affinità con i moti reali incontrati negli esperimenti di laboratorio o nel *PBL* reale. Ciò nonostante, è ragionevole supporre (ed è intuitivo farlo) che i disturbi a scale sufficientemente piccole, presenti nei moti ad alto numero di Reynolds in piccole regioni dello spazio ed osservati per intervalli di piccola durata, siano praticamente omogenei ed isotropi. Se ciò fosse vero, potremmo pensare che almeno questi piccoli vortici siano facilmente descrivibili proprio impiegando la teoria della turbolenza isotropa.

L'ipotesi che i disturbi a piccola scala in un fluido ad alto numero di Reynolds siano circa isotropi ha origine da un'intuizione di Richardson (1922) ed assume che la turbolenza sviluppata

consista di un insieme di disturbi disordinati (*eddies*), tra loro differenti per dimensione spaziale e velocità di scala. Se partiamo ipoteticamente da un fluido in moto laminare caratterizzato da una lunghezza di scala *L* e da una velocità di scala *U* ed aumentiamo gradualmente *Re* (per esempio aumentando *U*), vediamo che il moto del fluido progressivamente diventa turbolento e che i disturbi di differenti dimensioni (*ordini*) non compaiono simultaneamente. Quando $Re = UL/\nu$ supera il valore critico Re_c, notiamo che i disturbi a grande scala (*disturbi del primo ordine*) sono i primi ad apparire. Essi sono instabili e generano a loro volta disturbi del secondo ordine, di dimensione inferiore, che estraggono energia dai primi, quelli a scala maggiore. Mentre i disturbi del primo ordine occupano grosse porzioni di fluido, quelli del secondo ordine occupano regioni più limitate, ma sono più numerosi. I disturbi del secondo ordine, anch'essi instabili, generano, poi, disturbi del terzo ordine di dimensione ancora inferiore, che traggono la propria energia dai disturbi del secondo ordine, e così via in una progressione apparentemente inarrestabile. Così si stabilisce una *gerarchia* in cui ogni disturbo trae la propria energia dai disturbi a scala immediatamente superiore e trasferisce la propria energia ai disturbi a scala immediatamente inferiore. I disturbi a scala più piccola evidentemente sono anche caratterizzati da valori più elevati dei gradienti di velocità e ciò comporta che siano più vulnerabili alle forze viscose che ne dissipano l'energia cinetica in calore. In pratica, nel moto turbolento del *PBL* (ma anche dell'oceano) ha luogo una vera e propria *cascata energetica* (*energy cascade*) intuita da Leonardo (che l'ha mirabilmente mostrata nel disegno di **Fig.4.1**) e che può essere visualizzata schematicamente nella **Fig. 4.2**, dove con l_0 è stata indicata la dimensione dei vortici a scala maggiore.

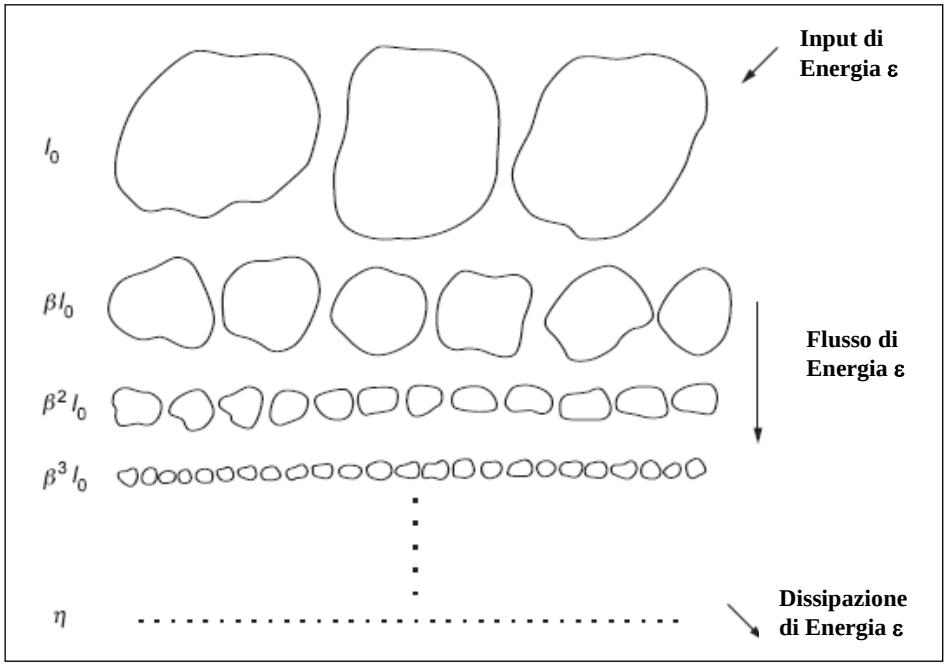


Fig. 4.2: visione pittorica dell'energy cascade (Frish, 1995)

In sostanza, la nostra visione del moto del fluido in condizioni di turbolenza sviluppata può essere sintetizzata qualitativamente nel modo seguente:

- pur nell'apparente disordine che regna nel fluido in moto turbolento, individuiamo sicuramente un moto medio, facilmente ottenibile dal campo che osserviamo mediando punto a punto la velocità per tempi sufficientemente lunghi, superiori al tempo caratteristico del fluido dato da $T_0 = L/U$. Tale moto medio presenta una notevole regolarità e le variazioni di velocità sono significative solo su distanze dell'ordine di *L*;
- sovrapposta al moto medio, notiamo la presenza nel fluido di zone caratterizzate da disturbi di diversa dimensione caratteristica che possono essere visualizzati come regioni

di fluido che possiedono un elevato grado di coerenza. Queste zone hanno le dimensioni più varie: alcune hanno dimensioni paragonabili a quelle del dominio in cui si muove il fluido (e derivanti proprio dalla sua non omogeneità), altre decisamente più piccole. Ognuno di questi disturbi è, sostanzialmente, un mondo a sé, deriva dalla frammentazione dei disturbi a scala superiore da cui ha acquisito la propria energia cinetica, perde progressivamente la *memoria* del moto medio originale del fluido e tende ad assumere delle configurazioni sostanzialmente isotrope.

Consideriamo questa *cascata energetica* in maggior dettaglio. I disturbi a scala maggiore hanno una lunghezza di scala l_1 (detta anche *scala fondamentale o scala esterna*) che è dello stesso ordine di grandezza della scala L caratteristica dell'intero moto medio del fluido. Sia l_1 che L possono essere definite in modi leggermente differenti dai vari Autori, ma ciò che conta veramente è che $l_1 < L$. I disturbi a scala maggiore hanno ampiezza maggiore e la loro velocità caratteristica v_1 è dello stesso ordine di grandezza della variazione Δu che presenta il moto medio dell'atmosfera su distanze dell'ordine di L. Per fissare le idee, v_1 è dell'ordine di grandezza di σ_u, la deviazione standard del vento medio. I disturbi a scala maggiore traggono, poi, la propria energia direttamente dal moto medio (in particolare, dallo *shear* del campo di moto medio) e ciò influenza inequivocabilmente le loro caratteristiche: i disturbi di scala maggiore sono sicuramente non omogenei e anisotropi. Ad essi si può attribuire un numero di Reynolds definito come:

$$Re_1 = \frac{v_1 l_1}{\nu} \qquad [4.1]$$

normalmente molto inferiore al numero di Reynolds *Re* tipico del fluido nel suo complesso che vede nella velocità media U la velocità di scala. Infatti, $l_1 < L$ e $v_1 < \Delta u < U$, e quindi $Re_1 < Re$. *Re* è comunque elevato facendo sì che la principale caratteristica di questi vortici sia l'*instabilità*. Ciò comporta che essi si frammentino naturalmente, generando strutture turbolente più piccole caratterizzate da una lunghezza di scala $l_2 < l_1$ e da una velocità di scala $v_2 < v_1$ e quindi da un numero di Reynolds $Re_2 < Re_1$, ma ancora elevato e superiore al valore critico. Perciò questi vortici secondari saranno a loro volta instabili e si frammenteranno, producendo disturbi di dimensione l_3 ancora più piccola con velocità di scala v_3 ancora inferiore e così via.

Esercizio 4.1

Si ipotizzi che i disturbi a scala maggiore, generati dal moto medio, abbiano una dimensione caratteristica l_0 (quella precedentemente indicata come l_1) e che da essi abbiano origine vortici di dimensioni inferiori che a loro volta si frammentano in vortici ancora più piccoli in un processo a cascata. Complessivamente la dimensione caratteristica dei disturbi prodotti dalla frammentazione progressiva può essere descritta dalla relazione:

$$l_n = l_0 r^n \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

dove $0 < r < 1$ (un valore utile per fissare le idee è r = ½). Individuare l'ordine di grandezza del numero N_0 di disturbi a scala maggiore per unità di volume ed il numero N_n di disturbi per unità di volume di dimensione l_n.

Per quanto riguarda i disturbi a scala l_0, l'ordine di grandezza del loro numero in un volume V sarà proporzionale a V/l_0^3, quindi:

$$N_0 \approx l_0^{-3}$$

Ragionamenti analoghi portano a dire che:

$$N_n \approx l_n^{-3} = l_0^{-3} r^{-3n}$$

Quindi il numero di disturbi di dimensione caratteristica l_n crescerà come r^{-3n}. Se $r = 0.5$, dopo la prima frammentazione la densità di disturbi aumenterà di 8 volte, dopo la seconda di 64 volte, dopo la terza di 512 volte e dopo la quarta di 4096 volte.

Questo processo di continua frammentazione spontanea termina dopo *N step* (dove *N* è

un numero elevatissimo), quando la dimensione caratteristica dei disturbi di dimensione inferiore l_N, raggiunge un valore η (che nel seguito individueremo) cui corrisponde la velocità di scala v_N e quando il numero di Reynolds Re_N tipico del disturbo è dell'ordine dell'unità. Il moto ad una tale scala è idrodinamicamente stabile e, di fatto, i disturbi a questa scala non possono più frammentarsi. Tuttavia, il fatto che essi siano caratterizzati da un *Re* così piccolo, fa sì che la viscosità diventi una forzante esterna predominante. Infatti, l'energia che essi possiedono è totalmente dedicata a contrastare le forze viscose e quindi è convertita in calore, mentre lo stesso non avviene per i disturbi a scala maggiore di η (e quindi con *Re* maggiori), che non vengono apprezzabilmente influenzati dalla viscosità. Il processo di frammentazione continua, da disturbi a scala maggiore a quelli a scala inferiore fino ad arrestarsi a quelli alla scala di η, richiede un continuo flusso di energia lungo tutto lo spettro dimensionale. A questo punto è evidente che la turbolenza sviluppata può essere mantenuta attiva solo con un apporto continuo di energia dall'esterno (dal moto medio), visto che essa è accompagnata da una continua dissipazione di energia cinetica in calore. Oltre alla *lunghezza di scala* l_n ed alla *velocità di scala* v_n del disturbo di ordine *n*, si può definire anche un *tempo caratteristico di scala* τ_n pari a $\tau_n = l_n/v_n$ a cui può essere attribuito il significato di intervallo temporale entro il quale il vortice mantiene una propria identità prima di evolvere (mutare) in strutture differenti.

Altro elemento da considerare è il fatto che il trasferimento di energia dalle scale superiori a quelle inferiori è un processo di natura stocastica e perciò l'effetto dell'anisotropia, della non omogeneità e della non stazionarietà del moto medio progressivamente diminuisce con la diminuzione di scala dei disturbi. Infatti, un ruolo importante del trasferimento di energia dalla scala l_n alla scala l_{n+1} è giocato dalle fluttuazioni di pressione che sono il risultato della disomogeneità del campo di velocità alla scala l_n, conducendo all'apparizione di fluttuazioni di pressione alla scala l_{n+1} non solo nella direzione in cui era polarizzato il campo di moto originario, ma anche in tutte le altre direzioni. Le fluttuazioni di pressione influenzano, così, la ridistribuzione dell'energia cinetica del moto originale lungo tutte le possibili direzioni. In pratica è decisamente plausibile che l'effetto della direzionalità sia concentrato prevalentemente nei disturbi di ordine inferiore (e di maggiori dimensioni) e praticamente assente nei disturbi di ordine superiore. In modo analogo, le variazioni spaziali della velocità **u** del moto medio (ottenuto mediando su tempi dell'ordine di $T_0 = L/U$ il campo di moto istantaneo **U**), che caratterizzano la disomogeneità del moto, saranno importanti solo a distanze dell'ordine di $L \sim l_1$, dove sono dell'ordine di $\Delta\mathbf{u} \sim v_1$, ma a distanze inferiori non influenzeranno le fluttuazioni a piccola scala che in pratica sono statisticamente omogenee. D'altro canto, al diminuire di l_n (e quindi anche di Re_n) diminuisce anche il tempo di scala $\tau_n = l_n/v_n$, decisamente inferiore a T_0, scala temporale caratteristica del moto medio e della sua non stazionarietà (cioè della variazione della velocità media **u**). Il moto medio è la forzante energetica dell'intera cascata di vortici e, a tutti gli effetti, può essere considerata quasi-stazionaria (visto l'elevato valore del proprio tempo caratteristico). Quindi, se la forzante dell'*energy cascade* è stazionaria, le caratteristiche statistiche dei vari vortici lo saranno anch'esse.

Alla luce ciò, si giunge in modo naturale alla conclusione che, per il moto di un fluido ad elevato *Re*, i disturbi (*eddy*) a piccola scala (cioè con lunghezza di scala molto inferiore a $L \sim l_1$ e con tempi di scala piccoli rispetto a $T_0 = L/U$) confinati in regioni dello spazio-tempo sufficientemente piccole sono praticamente omogenei, stazionari ed isotropi. Queste conclusioni, già insite nei ragionamenti di Richardson, sono state esplicitamente formulate da Kolmogorov nel 1941.

4.2 LA TURBOLENZA LOCALMENTE ISOTROPA

Il moto di un fluido è complessivamente descritto dal campo di velocità istantanea **U**(**x**,t), dove la dipendenza dal tempo può essere trascurata per i ragionamenti appena fatti. Quello che intendiamo fare è studiare il moto dei vari disturbi che in esso si originano e, per fare ciò, è necessario che essi emergano in qualche modo dal campo di moto generale. In sostanza, vogliamo *filtrare* il

campo di moto con un filtro ideale che evidenzi, di volta in volta, i disturbi di lunghezza caratteristica voluta. Dato che essi a priori non sono periodici, l'analisi armonica non è lo strumento più appropriato. È quindi opportuno seguire l'idea di Kolmogorov (1941) e semplicemente sottrarre punto a punto dal campo di velocità **U**(**x**) il campo medio di velocità **u**(**x**) ottenendo il campo delle fluttuazioni **u'** = **U**(**x**) – **u**(**x**) che non è più esplicitamente dipendente dal moto medio del fluido. Fatto ciò, è importante convincerci che le proprietà a piccola scala della turbolenza si riflettono solo nel *moto relativo* delle particelle di fluido che appartengono al disturbo in piccole regioni dello spazio e per tempi brevi. Dato che un disturbo è una porzione di fluido che possiede una certa coerenza, tale coerenza si riflette nel fatto che le velocità relative delle particelle che lo compongono possiedono una certa *parentela*, cioè sono parzialmente correlate.

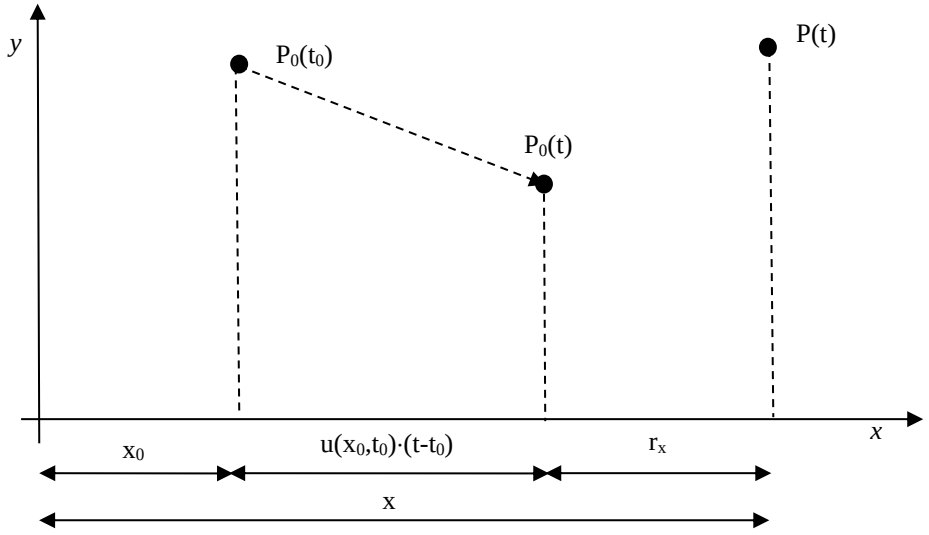


Fig. 4.3: sistema di coordinate relative per la descrizione del moto di un disturbo turbolento.

Detto ciò, consideriamo ora una piccola regione *G* dello spazio-tempo e un *punto centrale* $P_0 = (\mathbf{x}_0, t_0)$ (del tutto arbitrario, ma interno al disturbo che vogliamo studiare) e definiamo un sistema di assi cartesiani in moto alla velocità media $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0,t_0)$, orientato in maniera del tutto arbitraria visto che il disturbo è localmente omogeneo ed isotropo. Il passaggio ad un tale sistema di riferimento comporta che le coordinate usuali $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ed il tempo *t* siano sostituite da:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x_0}, t_0) \cdot (t - t_0) \\ \tau &= t - t_0 \end{aligned} \qquad [4.2]$$

Per comprendere meglio ciò, conviene considerare la **Fig. 4.3** dove P_0 è la particella d'aria di riferimento e *P* è la particella generica. In realtà nella figura (che è bidimensionale e non tridimensionale per semplicità grafica) è evidenziata solo la componente *x* della relazione (4.2). Lo spostamento **r** è chiaramente una variabile stocastica visto che stiamo considerando una porzione di fluido in moto turbolento. Anche la velocità assoluta $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ (cioè la velocità depurata del valor medio) è ora sostituita dalla *velocità relativa* definita come:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, \tau) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x_0}, t_0) \qquad [4.3]$$

Si può ora dare la seguente definizione: *un eddy in una regione G dello spazio-tempo è localmente isotropo se, per ogni valore* $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0,t_0) = \mathbf{u}_0$, *la distribuzione multidimensionale di probabilità per ogni insieme finito di velocità relative* $\mathbf{v}(r_k, \tau_k)$, $k = 1, 2,..,n$ *nei punti* $(\mathbf{x}_0,t_0)$, $(\mathbf{x}_1,t_1)$,, $(\mathbf{x}_n,t_n)$, *di G è:*

a) indipendente da $\mathbf{u}_0$
b) stazionaria (indipendente da t_0*)*
c) omogenea (indipendente dalla scelta di $\boldsymbol{x}_0$*)*

d) isotropa (invariante a riflessioni e rotazioni nello spazio dei vettori **r***).*

La discussione fatta al punto 4.1 ci consente di assumere che la turbolenza di un fluido a numero di Reynolds elevato sia sempre localmente isotropa in ogni regione le cui dimensioni lineari siano molto minori di L e le cui scale temporali caratteristiche siano inferiori a $T_0 = L/U$. In altre parole, se restringiamo l'attenzione ai vettori r_k e agli intervalli temporali τ_k tali che:

$$|\mathbf{r}_k| = r_k << L \qquad \text{e} \qquad |\tau_k| << T_0$$

allora per $Re >> 1$ la distribuzione di probabilità per ogni insieme finito di $\mathbf{v}_k(r_k,\tau_k)$ può essere considerata stazionaria, omogenea ed isotropa. Nota la distribuzione di probabilità per la velocità relativa, è possibile determinare anche la distribuzione di probabilità per le differenze di velocità in punti sufficientemente vicini nello spazio-tempo e quindi per le derivate della velocità relativa rispetto sia alla distanza che rispetto al tempo.

Se nel fluido in moto turbolento il campo di temperatura oltre che essere turbolento è anche non omogeneo, la situazione è più complicata. In questo caso, la definizione di turbolenza isotropa dovrà essere estesa, includendo tra le entità fisiche considerate non solo le velocità relative dei punti della regione G rispetto al punto P_0, ma anche le rispettive differenze di temperatura, e richiedendo che la stazionarietà, l'omogeneità e l'isotropia siano soddisfatte dalla probabilità congiunta per le differenze di velocità relativa e di temperatura. Tutto ciò vale per un fluido incomprimibile (solenoidale). Per un fluido comprimibile la definizione di isotropia locale dovrebbe essere ulteriormente estesa alle differenze di pressione e di densità.

Dato che la definizione di turbolenza isotropa coinvolge la distribuzione di probabilità per le sole differenze tra variabili del moto e temperatura relative a coppie di punti sufficientemente vicini, non è il caso di preoccuparsi dell'evoluzione nello spazio e nel tempo dei valori medi dei campi quando queste idee vengono applicate alla turbolenza del *PBL*.

È chiaro che tutto questo ragionamento si fonda sulla possibilità di enucleare dal campo di moto **U** un campo di moto medio **u.** Avendolo costruito mediante un processo di mediazione nel tempo, esso inevitabilmente dipende dal tempo di mediazione usato. Va detto, però, che la definizione di isotropia locale coinvolge solo disturbi ad alta frequenza (per un disturbo di ordine n la frequenza, cioè la periodicità probabile con cui tale disturbo si ripete nel tempo, è proporzionale a v_n/l_n) molto inferiore alla frequenza fondamentale U/L.

4.3 LE IPOTESI DI KOLMOGOROV

Già abbiamo detto che al ridursi della scala dei disturbi si riduce anche l'effetto di *orientamento* esercitato dal moto medio del fluido su tali disturbi, aumentando nel contempo l'indipendenza delle loro proprietà geometriche e cinematiche dal moto medio. È quindi ragionevole assumere che i parametri del moto medio (per esempio la lunghezza caratteristica di scala L e la velocità caratteristica U) non influiscano *direttamente* sullo stato statistico delle fluttuazioni a piccola scala e che lo stato statistico dei disturbi a piccola scala sia determinato solo dalle proprietà interne agli stessi. Tali proprietà saranno naturalmente determinate dal trasferimento inerziale di energia dai moti a grande scala a quelli a piccola scala (cioè dal lavoro effettuato contro gli *stress* di Reynolds), trasferimento che avrà termine quando i disturbi raggiungeranno una scala talmente piccola da dissiparsi in calore. A scale superiori a questa, le forze inerziali e le forze viscose saranno in equilibrio statistico, indipendentemente dalle caratteristiche del moto medio.

Questo stato di cose non comporta, tuttavia, che lo stato statistico delle fluttuazioni a piccola scala non dipenda del tutto dalle proprietà del moto medio. In realtà, il moto medio influisce sulle fluttuazioni a piccola scala, ma solo *indirettamente*, cioè mediante il flusso di energia che è associato al moto medio e che è trasferito ai disturbi di scala sempre più piccola mediante il processo di continua frammentazione. Si supponga che il numero di Reynolds *Re* sia così elevato che l'omogeneità, l'isotropia e la stazionarietà dello stato statistico siano ottenute da disturbi

a scala relativamente grande, per cui *Re* è molto maggiore di Re_c. In questo caso tali disturbi non verranno apprezzabilmente influenzati dalla viscosità. Il tasso di dissipazione medio di energia ε, cioè l'ammontare medio di energia convertita in calore per unità di massa e di tempo, sarà allora pari all'ammontare medio di energia trasferito ai disturbi a scala maggiore (l_1) dal flusso medio. Di conseguenza ε sarà la caratteristica dei moti a grande scala che influenzerà lo stato statistico delle fluttuazioni a piccola scala. Per i disturbi a scala maggiore (n = 1), considerazioni dimensionali ci inducono a ritenere che l'energia cinetica ad essi associata sia dell'ordine di u_1^2 (dove u_1 è la loro velocità caratteristica) e che ε sia dell'ordine di u_1^3/l_1.

Così come l'informazione direzionale delle grandi scale è persa col trasferimento di 'energia lungo la cascata energetica, Kolmogorov sostiene che anche tutte le informazioni geometriche dei grandi vortici (determinate dal moto medio del fluido e dalle condizioni al contorno) vengono perse durante la cascata energetica. Quindi, le caratteristiche statistiche dei moti a piccola scala devono essere in un certo senso *universali*, cioè simili per ogni moto ad elevato numero di *Re*.

4.3.1 LA PRIMA IPOTESI KOLMOGOROV

Concentriamo, ora, l'attenzione sui vortici che hanno perso la propria direzionalità e sono sostanzialmente isotropi. È invalso l'uso (Pope, 2003) di introdurre la lunghezza di scala l_E (dell'ordine di 1/6 l_1) come demarcazione tra i vortici sicuramente anisotropi ($l > l_E$) ed i piccoli vortici localmente isotropi ($l < l_E$). È di questa classe di disturbi che ci occuperemo ora.

Ritorniamo, ora, alla questione di quali parametri governano le proprietà statistiche delle velocità relative $\mathbf{v}(\mathbf{r},\tau)$ con valori di $|\mathbf{r}|$ e di τ sufficientemente piccoli. Sulla base della discussione precedente, le proprietà dei moti a grande scala possono influenzare le proprietà statistiche dei disturbi a scala inferiore solo attraverso il tasso di dissipazione dell'energia turbolenta ε. In aggiunta, tali proprietà dovranno dipendere anche dai parametri che caratterizzano le proprietà fisiche del fluido, che possono essere descritte dalla densità ρ e dalla viscosità ν. Poiché, tuttavia, i valori della velocità relativa sono indipendenti dalla scelta dell'unità di massa, le proprietà statistiche del moto dei disturbi non potranno dipendere da ρ. Siamo, perciò, costretti a concludere che le proprietà statistiche dei disturbi a scala sufficientemente piccola dipendono solo da ε e da ν. Questa è, in sostanza, la prima ipotesi di Kolmogorov, così espressa:

Prima ipotesi di Similarità di Kolmogorov

Nel caso di disturbi in un campo di moto di un fluido a Re sufficientemente elevato, la distribuzione multidimensionale di probabilità per le velocità relative $\mathbf{v}(\mathbf{r},\tau)$ *in una regione G dello spazio-tempo in cui la turbolenza è localmente isotropa, è definita senza ambiguità dai valori di* ε *e di* ν.

Sulla base di questa ipotesi è possibile, con l'analisi di Similarità, formare in un solo modo con le due grandezze ε ($m^2 \cdot s^{-3}$) e ν ($m^2 \cdot s^{-1}$) la lunghezza di scala η, la velocità di scala v_η ed il tempo di scala τ_η che risultano così definite, a parte fattori numerici ininfluenti:

$$\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} \qquad v_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4} \qquad \tau_\eta = (\nu/\eta)^{1/2} \qquad [4.4]$$

La lunghezza di scala η è nota come *lunghezza di Kolmogorov*.

Esercizio 4.2

Dimostriamo con l'aiuto della Teoria della Similarità la relazione (4.4) per la lunghezza di scala di Kolmogorov η.
Per prima cosa, si indichi con l'espressione [C] le dimensioni di una grandezza fisica C e con L e T rispettivamente la lunghezza ed il tempo. La viscosità cinematica ν e il tasso di dissipazione medio di energia cinetica turbolenta ε hanno quindi le dimensioni:

$$[\nu] = L^2\,T^{-1} \qquad [\varepsilon] = L^2\,T^{-3}$$

Per la prima ipotesi di Kolmogorov ogni proprietà locale del disturbo dovrà essere funzione solo di queste due grandezze fisiche. Cerchiamo di individuare una lunghezza di scala η che dipenda solo da queste due variabili e dimostriamo che è unica. Tale lunghezza caratteristica dovrà essere espressa genericamente come:

$$\eta = K\,\varepsilon^a \nu^b$$

(*K* è una generica costante) e quindi bisognerà che tale relazione sia congruente dal punto di vista dimensionale. Ciò comporta che:

$$L = (L^2T^{-3})^a\,(L^2T^{-1})^b$$

Da questa relazione si individua un sistema di due equazioni nei due esponenti, equazioni dovute al fatto che, perché una relazione fisica sia dimensionalmente congruente, bisogna che le dimensioni del membro di sinistra siano uguali a quelle del membro di destra.

$$\text{Considerando la lunghezza} \rightarrow \; 2a + 2b = 1$$
$$\text{Considerando il tempo} \quad \rightarrow \; -3a - b = 0$$

La soluzione è unica e data da: a = -1/4 e b = 3/4. Quindi, a parte una costante, la lunghezza di Kolmogorov è data dalla relazione:

$$\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$$

Esercizio 4.3

Si consideri una situazione convettiva in cui, nel *SL* con *friction velocity* $u_* = 0.3$ m·s^{-1}. Come si vedrà al Cap.8, una stima di ε nel *Surface Layer* è dato dalla relazione:

$$\varepsilon = u_*^3/(kz)$$

dove *k* è la costante di Von Karman (0.4) e *z* è la quota di misura di u_* (es. 10 m). Quindi, in questa situazione $\varepsilon = 0.007$ m^{2}s^{-3}. Nella situazione considerata, l'estensione verticale del *PBL* sia $z_i = 1000$ m (che possiamo identificare con la *Scala Esterna L del Moto*) ed il vento medio nell'intero *PBL* sia $U = 3$ m·s^{-1}. La scala temporale caratteristica del moto è quindi pari a $T_0 = L/U = 0.3\cdot10^3$ s ≅ 6 minuti. Il moto dell'aria è sicuramente turbolento, visto che:

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{Uz_i}{\nu} = 2 \cdot 10^8$$

($\nu = 1.5\cdot10^{-5}$ m^{2}s^{-1}). I vortici di maggiore dimensione avranno, quindi, una dimensione caratteristica di circa 10^3 m. A questo punto disponiamo di tutti gli elementi per calcolarci le scale di Kolmogorov in questa situazione convettiva. In particolare, avremo che:

$$\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} = 0.7 \cdot 10^{-3} m$$
$$v_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4} = 0.02 \;\; \text{m} \cdot s^{-1}$$
$$\tau_\eta = (\nu/\eta)^{1/2} = 2.2 \cdot 10^2 \;\; \text{s}$$

È interessante osservare come le dimensioni caratteristiche dei disturbi in questa situazione di convettività varino da 10^3 m a 10^{-3} m (quindi di 6 decadi).

I disturbi con lunghezza di scala η, caratterizzati da una velocità di scala v_η presentano un numero di Reynolds pari a $Re_\eta = \eta v_\eta/\nu = 1$ come è immediato dimostrare. Quindi η è dello stesso ordine di grandezza della lunghezza di scala dei disturbi su cui la viscosità presenta un effetto apprezzabile. Vortici con dimensioni inferiori a η sono inevitabilmente preda delle forze viscose che ne dissipano l'energia in calore. Per questo η è un'importante caratteristica fisica della turbolenza sviluppata. La sua definizione consente, ora, di individuare un intervallo dimensionale per i disturbi entro cui la loro caratteristica principale è l'isotropia locale e la mancanza di interazione con la viscosità. Infatti, tutti i disturbi con lunghezza di scala *l* inferiore a l_E e superiore a η sono localmente isotropi e non apprezzabilmente influenzati dalla dissipazione di energia: l'intervallo dimensionale $\eta \div l_E$ è noto come *Universal Equilibrium Range*.

Consideriamo, ora, il rapporto tra la lunghezza di scala η dei moti più piccoli e la lunghezza l_1 di scala dei vortici di dimensioni maggiori ed i rapporti analoghi per la velocità di scala ed il tempo caratteristico di scala. Tutti questi rapporti possono essere immediatamente determinati sulla base della definizione di scala di Kolmogorov e dal fatto che $\varepsilon \sim v_1^3/l_1$:

$$\frac{\eta}{l_1} = \frac{1}{l_1}\left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \cong \left(\frac{\nu^3}{v_1^3 l_1^3}\right)^{1/4} = Re^{-3/4} \qquad \frac{v_\eta}{v_1} \cong Re^{-1/4} \qquad \frac{\tau_\eta}{\tau_1} \cong Re^{-1/2} \qquad [4.5]$$

Quindi in questo modo si dimostra che la validità della Prima Ipotesi di Kolmogorov implica la diminuzione della lunghezza di Kolmogorov al crescere del numero di Reynolds caratterizzante il moto del fluido e così faranno anche la velocità di scala e il tempo di scala, ma più lentamente.

Esercizio 4.4

Consideriamo i disturbi entro l'Universal Equilibrium Range ed ipotizziamo, come fatto in precedenza, che la loro dimensione caratteristica sia data da:

$$l_n = l_0 r^n$$

dove l_0 è la dimensione del disturbo di scala maggiore. Individuare una relazione che evidenzi come varia la loro velocità caratteristica.

Partiamo dal fatto che il tasso di dissipazione di energia cinetica turbolenta ε è legato alla dimensione l_0 ed alla velocità v_0 (velocità caratteristica del disturbo a dimensione l_0) dalla relazione seguente che abbiamo introdotto alla fine del paragrafo precedente:

$$\varepsilon \approx v_0^3/l_0$$

e ricordiamo che il tasso di energia cinetica trasferita da vortice a vortice nell'*energy cascade* è sempre ε. Pertanto, vale anche la relazione:

$$\varepsilon \approx v_n^3/l_n$$

e quindi

$$v_n \approx v_0 r^{n/3}$$

o anche a:

$$v_n \approx (\varepsilon l_0)^{1/3} r^{n/3}$$

4.3.2 LA SECONDA IPOTESI KOLMOGOROV

Consideriamo ora il caso in cui il valore di *Re* del moto del fluido sia talmente elevato da far assumere ad η un valore piccolissimo, se confrontato con *L* (questo è il caso trattato nell'*Esercizio 4.3*). In questo tipo di turbolenza possiamo isolare un vasto sottoinsieme di disturbi di lunghezza di scala *l* molto minore di *L* (e di conseguenza omogenei, isotropi e quasi stazionari) ma molto maggiore della lunghezza di Kolmogorov η. Per questi disturbi, le velocità relative caratteristiche v_l saranno molto maggiori di v_η e quindi il relativo numero di Reynolds $Re_l = lv_l/\nu$ sarà molto elevato rispetto a $\eta v_\eta/\nu = 1$. In altre parole, in questo sottointervallo dimensionale il processo dominante è il trasferimento inerziale dell'energia ai disturbi a piccola scala, senza però alcuna apprezzabile conversione diretta di energia in calore ad opera delle forze viscose. Le proprietà statistiche corrispondenti a questo sottointervallo di scala (noto come *Inertial Subrange*) non dipendono perciò dalla viscosità ν. In essenza, questa è la Seconda Ipotesi di Kolmogorov, che può essere formulata con maggior rigore nel modo seguente:

Seconda ipotesi di Similarità di Kolmogorov

Quando il numero di Reynolds Re è sufficientemente elevato e U è una velocità caratteristica del moto a grande scala, la distribuzione di probabilità multidimensionale per le velocità relative $v(r_k, \tau_k)$, (k = 1, .. , n) in uno spazio sufficientemente

piccolo ed in intervalli $|r_k| << L$ *e* $|\tau_k| << L/U$ *che soddisfano le condizioni aggiuntive:*

$$|r_k| >> \eta, \qquad |r_j - r_k| >> \eta, \qquad per\ j \neq k$$
$$|\tau_k| >> \tau_\eta, \qquad |\tau_j - \tau_k| >> \tau_\eta, \qquad per\ j \neq k$$

sono determinate, senza ambiguità, solo dal valore del tasso di dissipazione di energia turbolenta ε *e sono indipendenti dalla viscosità* ν.

Dato che non è possibile costruire né una lunghezza né una velocità né un tempo di scala col solo tasso di dissipazione ε, lo stato statistico dei disturbi che dimensionalmente stanno entro l'*Inertial Subrange* ha una forma universale determinata esclusivamente da ε. È conveniente, a questo punto, introdurre per comodità la lunghezza di scala l_D (l_D = 60 η, Pope, 2003) in modo che l'intero intervallo dimensionale dei disturbi sia ripartito nel modo seguente (**Fig. 4.4**):

- Universal Equilibrium Range: $l < l_E$
- Inertial Subrange: $l_E > l > l_D$
- Dissipation Range: $l < l_D$

La scala l_D individua un punto di transizione tra le scale maggiori contenenti energia e le scale più piccole che la dissipano. I moti nell'*Inertial Subrange* sono determinati dagli effetti inerziali (gli effetti viscosi sono trascurabili), mentre nel *Dissipation Range* tali moti vengono condizionati significativamente dagli effetti viscosi, responsabili essenzialmente della dissipazione.

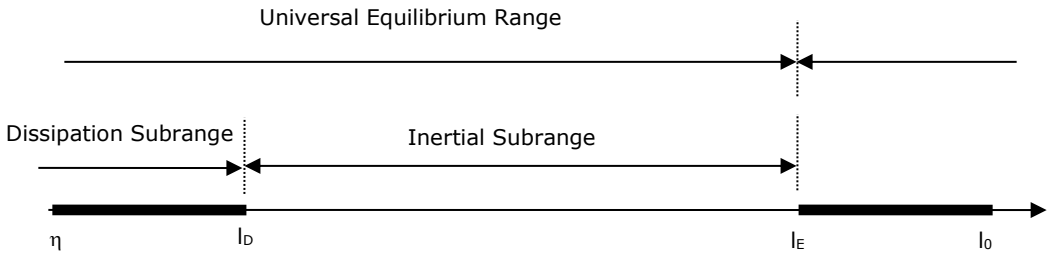


Fig. 4.4: ripartizione dell'intervallo dimensionale dei disturbi turbolenti

Esercizio 4.5

Riconsideriamo la situazione dell'*Esempio 4.3* ed immaginiamo che la *friction velocity* sia stata ottenuta da un anemometro ultrasonico triassiale che tratteremo più in dettaglio al Cap.11. Tuttavia, si può dire che, idealmente, tale sensore misura la componente istantanea della velocità dell'aria lungo tre percorsi di lunghezza finita tra loro ortogonali. Immaginiamo che il percorso di misura sia di 0.12 m.
Da quanto visto all'*Esempio 4.3*, la lunghezza di Kolmogorov è pari a $\eta = 0.7 \cdot 10^{-3}$ m e quindi l_D è dell'ordine di 0.042 m; quindi, l'anemometro ultrasonico triassiale non è in grado in questa situazione di misurare disturbi appartenenti al Dissipation Subrange.

Nell'*Inertial Subrange* la lunghezza, la velocità ed il tempo caratteristico di scala non possono essere espresse solamente dal tasso di dissipazione ε; tuttavia, per un vortice di lunghezza di scala *l*, la velocità ed il tempo caratteristico di scala possono essere espressi in funzione di ε ed *l* nel modo seguente:

$$v(l) = (\varepsilon \cdot l)^{1/3} = v_\eta (l/\eta)^{1/3} = v_1 (l/l_1)^{1/3}$$
$$\tau(l) = (l^2/\varepsilon)^{1/3} = \tau_\eta (l/\eta) = \tau_1 (l/l_1)^{2/3} \qquad [4.6]$$

In queste relazioni si è utilizzato il fatto che $\varepsilon \cong v_1^3/l_1$. La conseguenza di ciò è che, sulla base

della seconda ipotesi di similarità, nell'*Inertial Subrange* la velocità relativa $v(l)$ ed il tempo caratteristico $\tau(l)$ decrescono col decrescere di l.

Nella concezione dell'*Energy Cascade* una quantità di centrale importanza è il tasso $T(l)$ a cui l'energia viene trasferita dai vortici a scala maggiore di l ai vortici a scala inferiore. Se tale processo viene realizzato primariamente da disturbi di dimensione comparabile con l, allora $T(l)$ sarà dell'ordine di $v(l)^2/\tau(l)$ e sulla base delle relazioni di Similarità può essere espresso come:

$$\frac{v^2(l)}{\tau(l)} = \frac{(\varepsilon \cdot l)^{2/3}}{(l^2/\varepsilon)^{1/3}} = \varepsilon \qquad [4.7]$$

Quindi, dal momento in cui un vortice di dimensione l_E (caratterizzato da un tasso di dissipazione ε) entra nel processo di *Energy Cascade* ed inizia a frammentarsi in vortici di dimensione inferiore, tale vortice trasferisce al tasso costante di dissipazione ε l'energia entro tutto l'*Inertial Subrange* fino a che l è dell'ordine di l_D, quindi $T_E = T(l_E) = T(l) = T_D = T(l_D) = \varepsilon$. Solo a questo punto si innescano i processi di dissipazione viscosa. Ciò è illustrato in maniera schematica nella **Fig. 4.5**.

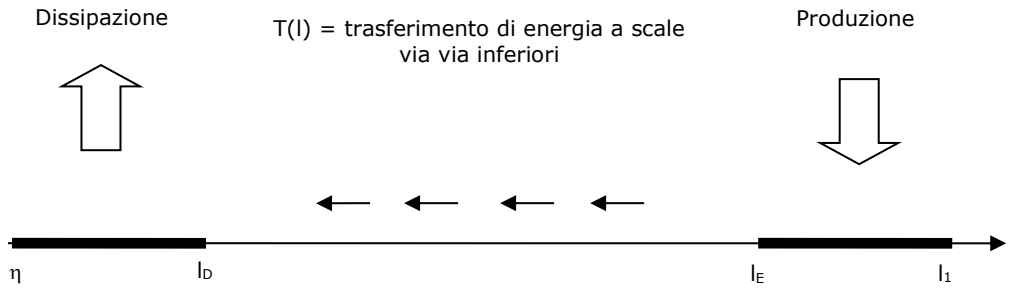


Fig. 4.5: il processo di trasferimento di energia entro l'Universal Equilibrium Range (ridisegnato da Sorbjan, 1989)

4.3.3 EVOLUZIONI DELLE IPOTESI KOLMOGOROV

Dalla formulazione di queste ipotesi presentate in Kolmogorov (1941), e note sinteticamente come Teoria K41, sono stati fatti molti progressi nello studio teorico della turbolenza nei fluidi e le verifiche sperimentali hanno mostrato come le ipotesi originarie di Kolmogorov (K41) dessero una spiegazione più che soddisfacente di molte delle proprietà dei moti turbolenti. Oltre a ciò, le deduzioni basate su di esse sono risultate in buon accordo con i risultati sperimentali. Nondimeno, si deve ricordare che esse non hanno e non possono avere una dimostrazione rigorosa sulla base delle leggi della Fluidodinamica.

Comunque, più tardi, nel 1962 i lavori di Kolmogorov(1962) e di Obukhov (1962) hanno iniziato una revisione della teoria originaria K41, migliorandola dal punto di vista teorico. Rimandando a Pope (2003, paragrafo 6.7.4) per un'approfondita discussione sull'argomento, qui basta segnalarne una caratteristica interessante. Mentre la teoria K41 originale si basata sul valor medio del tasso di dissipazione di energia cinetica turbolenta ε e sul valor medio della viscosità ν, i due lavori del 1962 citati riformulavano la stessa teoria utilizzando per il tasso di dissipazione di energia cinetica turbolenta un suo valore locale ottenuto come valor medio su distanze r molto piccole. È necessario, a questo punto abbandonare la Teoria K41? La risposta al quesito sembrerebbe negativa dato che la nuova teoria introduce correzioni alla formulazione originaria della teoria che, ai fini pratici, possiamo ignorare senza apprezzabili errori. Per chi fosse comunque interessato all'argomento consigliamo quanto è contenuto nel lavoro di Ecke (2005).

4.4 CONSEGUENZA DELLE IPOTESI DI KOLMOGOROV NEL DOMINIO DEL TEMPO

Nel Cap. 3 sono state studiate le proprietà principali dei campi stocastici in condizioni stazionarie, omogenee ed isotrope e questo studio è stato condotto in termini del tutto generali. Qui di seguito studieremo, invece, come tutto ciò si modifica (ed in qualche modo si semplifica) quando vengono adottate le due Ipotesi di Kolmogorov.

4.4.1 STATISTICHE EULERIANE DELLE DIFFERENZE DI VELOCITÀ

Consideriamo le caratteristiche statistiche delle *differenze di velocità* tra il punto **x**+**r** ed il punto **x** ad un dato istante *t*

$$\Delta_r \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) \qquad [4.8]$$

Se $r = |\mathbf{r}|$ è sufficientemente piccolo, la distribuzione di probabilità di $\Delta_r\mathbf{u}$ è omogenea, isotropa e stazionaria, per cui risulta possibile usare la prima e la seconda ipotesi di Kolmogorov. Tuttavia, qui non considereremo le distribuzioni di probabilità, ma restringeremo l'attenzione ai primi due momenti del vettore $\Delta_r\mathbf{u}$ che è un *processo stocastico ad incrementi stazionari*.

Per l'isotropia e l'omogeneità, è immediato verificare che il momento primo è pari a:

$$\overline{\Delta_r \boldsymbol{u}} = \overline{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)} = 0 \qquad [4.9]$$

Ricordando quanto presentato al punto 3.1.3.4, il momento secondo (che è un tensore e che è noto come Funzione di Struttura) nell'intero *Equilibrium Range* (cioè per $r << L$), può essere espresso in termini di due sole funzioni scalari funzioni di *r*, precisamente la Funzione di Struttura Longitudinale $D_{LL}(r)$ e la Funzione di Struttura Laterale $D_{NN}(r)$ del campo di velocità, definite come:

$$D_{LL}(r) = \overline{(\Delta_r u_L)^2} \qquad D_{NN}(r) = \overline{(\Delta_r u_N)^2} \qquad [4.10a]$$

dove u_L e u_N sono rispettivamente la componente del campo di velocità relativa parallela e perpendicolare al vettore distanza **r**. La relazione per il tensore del momento secondo di $\Delta_r\mathbf{u}$ è la (3.56d) qui riportata per comodità:

$$\overline{\Delta_r u_i \cdot \Delta_r u_j} = D_{ij}(r) = \frac{D_{LL}(r) - D_{NN}(r)}{r^2} r_i r_j + D_{NN}(r)\cdot\delta_{ij} \qquad [4.10b]$$

Come si è detto, delle sue 9 componenti, solo le tre componenti diagonali sono non nulle. Quando l'equazione di continuità è espressa in forma incomprimibile e cioè quando il campo è solenoidale (cosa che considereremo sempre vera nel seguito), tra le due funzioni di struttura D_{LL} e D_{NN} sussiste la (3.56g), anch'essa qui riportata per comodità:

$$D_{NN}(r) = D_{LL}(r) + \frac{r}{2}\cdot\frac{dD_{LL}(r)}{dr} \qquad [4.10c]$$

Queste relazioni sono vere in generale, purché la turbolenza sia stazionaria, omogenea ed isotropa. Vediamo come esse si modificano nell'*Universal Equilibrium Range* e nell'*Intertial Subrange*.

4.4.1.1 L'Universal Equilibrium Range

Nell'*Universal Equilibrium Range*, le relazioni (4.10b) e (4.10c) possono essere riformulate tenendo conto della Prima Ipotesi di Kolmogorov, secondo cui le proprietà statistiche delle velocità relative (e quindi anche delle Funzioni di Struttura) devono dipendere solo dal tasso di dissipazione media di energia ε e dalla densità ν. Più in particolare, le Funzioni di Struttura D_{LL} e D_{NN}, scalate dalla velocità di scala v_η, dovranno essere delle Funzioni Universali della distanza normalizzata r/η, cioè:

$$\frac{D_{LL}(r)}{v_\eta^2} = \beta_{LL}\left(\frac{r}{\eta}\right) \qquad \frac{D_{NN}(r)}{v_\eta^2} = \beta_{NN}\left(\frac{r}{\eta}\right) \qquad [4.11a]$$

Le due Funzioni Universali β_{LL} e β_{NN}, per la (4.10c), dovranno essere legate tra loro dalla relazione seguente, come è facile verificare:

$$\beta_{NN}(r) = \beta_{LL}(r) + \frac{r}{2}\cdot\frac{d\beta_{LL}(r)}{dr} \qquad [4.11b]$$

Come si vede dalle (4.11), le due Funzioni di Struttura non dipendono esplicitamente dal tempo, ma solo implicitamente attraverso la loro dipendenza da ε che varia lentamente nel tempo.

Consideriamo, ora distanze $r << \eta$. In questa regione l'effetto delle forze viscose che tende a dissipare i vortici è dominante sul moto relativo delle particelle d'aria e le componenti della velocità relativa sono descritte da funzioni decisamente regolari nelle coordinate spaziali. Dato che *r* è molto piccolo, si può espandere **u**(**x**+**r**) in serie di Fourier arrestandola al primo termine. Da questa considerazione e dalla definizione di funzione di struttura è facile verificare che valgono le relazioni seguenti:

$$D_{LL}(r) \cong \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2}\cdot r^2 \qquad D_{NN}(r) \cong \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2}\cdot r^2 \qquad [4.12a]$$

Quindi, nel *Dissipation range*, le Funzioni di Struttura dipenderanno quadraticamente dalla distanza *r* (molto minore della lunghezza di Kolmogorov η). Queste relazioni possono però essere riscritte in una maniera decisamente più espressiva. Anticipando quanto sarà detto a Cap. 5, il tasso medio di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta ε è dato dalla relazione compatta:

$$\varepsilon = \nu\overline{\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\right)^2} \qquad [4.12b]$$

che in realtà esprime la somma di 9 termini. In condizioni di turbolenza isotropa si ha che:

$$s_{\alpha\alpha} = \overline{\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}\right)^2} = s \quad per\ ogni\ \alpha = 1{,}2{,}3$$
$$s_{\alpha\beta} = \overline{\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\right)^2} = s \quad per\ ogni\ \alpha \neq \beta = 1{,}2{,}3 \qquad [4.12b]$$

Quindi:

$$\varepsilon = 15\nu\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2} \qquad e \qquad \varepsilon = 7.5\nu\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2} \qquad [4.12c]$$

Queste considerazioni derivanti dall'isotropia della turbolenza fanno sì che le (5.12a) prendano la forma seguente:

$$D_{LL}(r) = \frac{\varepsilon}{15\nu}r^2 \qquad D_{NN}(r) = \frac{2\varepsilon}{15\nu}r^2 = 2D_{LL}(r) \qquad [4.12d]$$

in cui è evidenziata la dipendenza delle Funzioni di Struttura dal tasso di dissipazione ε e dalla viscosità ν. Inoltre, in questo intervallo dimensionale, D_{NN} è due volte D_{LL}. Adottando, quindi la Prima Ipotesi di Kolmogorov, le relazioni tra D_{LL} e D_{NN}, differenziali per una turbolenza genericamente isotropa, ora si trasformano in relazioni algebriche di immediato utilizzo.

4.4.1.2 L'Inertial Subrange

Consideriamo ora distanze comprese nell'*Inertial Subrange*. In tale intervallo dimensionale, secondo la Seconda ipotesi di Kolmogorov le proprietà statistiche delle velocità relative devono dipendere dal tasso di dissipazione media di energia turbolenta ε e devono essere indipendenti

dalla viscosità ν. Ciò vale, ovviamente, anche per le Funzioni di Struttura. Per giungere ad una relazione operativa, basta seguire la Teoria della Similarità secondo cui deve valere:

$$D_{LL}(r) = C_k \cdot (\varepsilon)^a (r)^b \qquad [4.13a]$$

dove C_k è una costante universale e gli esponenti a e b devono essere determinati in maniera che le dimensioni fisiche del membro di sinistra dell'equazione eguaglino le dimensioni del membro di destra. È immediato verificare che:

$$D_{LL}(r) = C_k \cdot (\varepsilon \cdot r)^{2/3} \qquad [4.13b]$$

Anche nell'*Inertial Subrange* vale la relazione (4.10c) che lega tra loro D_{LL} e D_{NN}. Impiegandola, si vede immediatamente che:

$$D_{NN}(r) = \frac{4}{3} C_k \cdot (\varepsilon \cdot r)^{2/3} \qquad [4.13c]$$

Nell'*Inertial Subrange* le relazioni (4.13) esprimono in varia forma quella che è nota come *la legge dei due terzi* valida per la Funzione di Struttura (il momento secondo di $\Delta_r\mathbf{u}$). Quando la distanza aumenta oltre il suo estremo superiore, la funzione di struttura continua ad aumentare con *r*, ma più lentamente ed in maniera non universale. La Legge dei Due Terzi è stata oggetto di un numero rilevante di verifiche sperimentali sia in laboratorio che in atmosfera. Seguendo Pope (2003) si può affermare che:

- la costante C_k assume sperimentalmente il valore di circa 2.0;
- nell'intervallo $7000\,\eta \cong 1/2\,L > r > 20\eta$ il valore di C_k varia di circa il ±15%;
- nell'intervallo $1200\,\eta \cong 1/10\,L > r > 12\eta$ il rapporto di 4/3 tra D_{NN} e D_{LL} varia di circa il ±15%;
- non è stata riscontrata una tangibile differenza tra $D_{NN} = D_{22}$ e D_{33}.

Esercizio 4.6

Si considerino ancora una volta le condizioni convettive dell'*Esempio 4.3* e si immagini che il vento medio alla quota di misura (10 metri dal suolo) sia ora pari a 1 $m \cdot s^{-1}$. Se l'anemometro ultrasonico triassiale funziona con una frequenza di campionamento di 10 Hz, ogni 0.1 secondi si ottiene una misura e, supponendo valida l'ipotesi di Taylor, tra due misure temporalmente successive passa una *distanza r* = 0.1 m. Dato che la Lunghezza di Kolgorov è $\eta = 0.7 \cdot 10^{-3}$ m, la distanza longitudinale *r* sarà pari a circa 143η, quindi ben all'interno degli intervalli citati sopra in cui valgono le relazioni relative all'*Inertial Subrange*

Consideriamo un periodo di misura di almeno 30 minuti ed applichiamo ora alle misure della componente lungo la direzione media del moto la definizione di Funzione di Struttura Longitudinale D_{LL}, ottenendo $D_{LL} = 0.0155\ m^2 s^{-2}$. Per ottenere una stima del tasso medio di dissipazione di energia cinetica ε basta applicare la (4.13b) ottenendo $\varepsilon = 6.8 \cdot 10^{-3}\ m^2 s^{-3}$. Questo è effettivamente un metodo per stimare sperimentalmente il tasso medio di dissipazione di energia cinetica in campo da misure anemometriche.

4.4.2 LE CORRELAZIONI EULERIANE DELLA VELOCITÀ

Al Cap.3 sono state introdotte le Funzioni di Auto-correlazione e al punto 3.1.3.4 si è visto quali proprietà esse abbiano in situazioni stazionarie, omogenee ed isotrope. Qui di seguito presenteremo una breve sintesi di quanto già esposto, effettueremo alcuni approfondimenti e ricaveremo alcuni risultati rilevanti utilizzando le Ipotesi di Kolgomorov.

4.4.2.1 Statistiche two-point ed isotropia

In turbolenza stazionaria, omogenea ed isotropa con velocità media nulla, la correlazione *two-point* è espressa dalla (3.49b), quindi è indipendente da **x** e dipendente dalla distanza **r**. Per l'isotropia del campo, ogni possibile correlazione *two-point* può essere ottenuta dalle Funzioni di Auto-correlazione Longitudinale R_{LL} e Trasversale R_{NN} (si veda relazione 3.53a). Se poi si ammette che il campo di velocità è solenoidale, allora è possibile ottenere un'ulteriore relazione che lega tra loro R_{LL} e R_{NN} espressa dalla (3.54) e quindi ogni $R_{ij}(\mathbf{r})$ in un campo stazionario, omogeneo, isotropo e solenoidale può essere ottenuto dalla sola conoscenza di $R_{LL}(r)$ e di r. Se si rilegge il contenuto del punto 3.1.3.4 si ritroveranno altre proprietà notevoli delle Funzioni di Correlazione in questo tipo di turbolenza. Da tutto ciò è immediatamente chiaro come la statistica *two-point* in condizioni di isotropia sia completamente determinata dall'Auto-correlazione longitudinale $R_{LL}(r)$ e trasversale $R_{NN}(r)$. Ricordiamo, ora, la loro definizione. Se il vettore **r** è orientato lungo l'asse x_1, allora:

$$\begin{aligned} R_{LL}(r) &= \overline{u_1(x+r)\cdot u_1(x)} \\ R_{NN}(r) &= \overline{u_2(x+r)\cdot u_2(x)} \end{aligned} \qquad [4.14a]$$

Inoltre, esse hanno dimensione (L^2T^{-2}). Per le considerazioni che seguono è conveniente renderle adimensionali, ricorrendo alla ridefinizione seguente (si ricordi che u_1 e u_2 sono in realtà delle fluttuazioni):

$$\begin{aligned} R_{LL}(r) &= \overline{u_1^2}\cdot\frac{\overline{u_1(x+r)\cdot u_1(x)}}{\overline{u_1^2}} = \overline{u_1^2}\cdot f(r) \\ R_{NN}(r) &= \overline{u_2^2}\cdot\frac{\overline{u_2(x+r)\cdot u_2(x)}}{\overline{u_2^2}} = \overline{u_2^2}\cdot g(r) \end{aligned} \qquad [4.14b]$$

dove $f(r)$ e $g(r)$ sono funzioni adimensionali di r che valgono 1 quando $r = 0$ e sono tra loro legate dalla relazione:

$$g(r) = f(r) + \frac{r}{2}\frac{df(r)}{dr} \qquad [4.14b]$$

quando il campo è solenoidale. Con queste funzioni, che altro non sono che delle correlazioni normalizzate, è possibile definire due distinte *lunghezze di scala*:

$$L_{11} = \int_0^\infty f(r)\,dr \qquad L_{22} = \int_0^\infty g(r)\,dr \qquad [4.14c]$$

Se poi il campo è solenoidale, vale la (4.14b) e quindi:

$$L_{22} = \int_0^\infty g(r)\,dr = \int_0^\infty \left[f(r) + \frac{r}{2}\frac{df(r)}{dr}\right]dr = L_{11} + \frac{1}{2}\int_0^\infty r\frac{df(r)}{dr}\,dr \qquad [4.14d]$$

Risolvendo per parti l'integrale, si giunge alla relazione $L_{22} = 1/2\ L_{11}$.

4.4.2.2 La microscala di Taylor

In generale non è possibile dire molto sulla forma analitica delle funzioni di correlazione. Tuttavia, sempre ipotizzando di essere in condizioni stazionarie, omogenee ed isotrope, è possibile fare qualche passo avanti in questo senso assumendo che il campo delle velocità relative sia un campo continuo. Questa ipotesi è estremamente intuitiva e non è contraddetta dalla realtà dei fatti, almeno per quanto ci appare sperimentalmente. Consideriamo, ora, una generica componente del campo isotropo, per esempio la componente longitudinale $u_L(r)$, variabile a seconda della distanza da un punto fisso generico. Per procedere è necessario dare una definizione di *derivata*. Il modo più sicuro per definirla nel caso di un processo stocastico qual è $u_L(r)$ è definire la *derivata in senso quadratico medio* du_L/dr in modo tale che:

$$\lim_{\delta \to 0} \overline{\left| \frac{u_L(r+\delta) - u_L(r)}{\delta} - \frac{du_L}{dr} \right|^2} = 0 \qquad [4.15]$$

Ritorniamo alla funzione di Auto-correlazione $R_{LL}(r)$ o meglio alla sua versione normalizzata $f(r)$. La domanda che ci si pone è: qual è il comportamento di $R_{LL}(r)$ quando $r = 0$? Essa è sempre una funzione continua, è pari e non è superiore a 1. Oltre a ciò, si può dimostrare che la sua derivata prima all'origine è nulla e la sua derivata seconda all'origine è sempre negativa.

Si definisce *microscala longitudinale di Taylor* λ_f il valore di r in cui la parabola osculante la funzione di Auto-correlazione normalizzata longitudinale $f(r)$ interseca l'asse r, cioè:

$$\lambda_f = \sqrt{-\frac{2}{\left.\frac{d^2 f}{dr^2}\right|_{r=0}}} \qquad [4.16]$$

Questa lunghezza caratteristica è stata individuata da Taylor nel 1935 in uno dei primi studi sulla turbolenza isotropa, anche se ora la lunghezza di Kolmogorov ne ha oscurato l'importanza.

Si può dimostrare (Pope, 2003, pag. 199) che la microscala longitudinale di Taylor può essere espressa mediante i gradienti della velocità longitudinale $u_L(r)$ ottenendo:

$$\frac{2\overline{u_L^2}}{\lambda_f^2} = \overline{\left(\frac{du_L}{dx_1}\right)^2} \qquad [4.17a]$$

Ricordando la (4.12c) che lega ε alla viscosità e al gradiente di u_L, si giunge immediatamente a:

$$\varepsilon = 30\nu \frac{\overline{u_L^2}}{\lambda_f^2} \qquad [4.17b]$$

Ragionamenti del tutto analoghi possono essere fatti anche per la funzione di correlazione normalizzata $g(r)$ da cui si ottiene la *microscala trasversale di Taylor* λ_g che risulta pari a $\lambda_f/\sqrt{2}$.

4.4.2.3 Implicazioni delle Ipotesi di Kolmogorov

Tra Funzioni di Correlazione e Funzioni di Struttura esiste un evidente parallelismo come si è visto al punto 3.1.3.4; entrambe risultano descritte da due funzioni speciali: le funzioni di Correlazione Longitudinale $R_{LL}(r)$ e Trasversale $R_{NN}(r)$ per la Funzione di Correlazione cui si contrappongono in termini logici le funzioni $D_{LL}(r)$ e $D_{NN}(r)$ per le Funzioni di Struttura. In situazioni isotrope si ha che tra di esse devono valere le relazioni:

$$\begin{aligned} D_{LL}(r) &= 2 \cdot [R_{LL}(0) - R_{LL}(r)] = 2\left[\overline{u_L^2} - R_{LL}(r)\right] \\ D_{NN}(r) &= 2 \cdot [R_{NN}(0) - R_{NN}(r)] = 2\left[\overline{u_N^2} - R_{NN}(r)\right] \end{aligned} \qquad [4.18a]$$

e, sulla base di quanto abbiamo ottenuto al punto precedente, nell'*Inertial Subrange*, grazie alle Ipotesi di Kolmogorov, valgono le relazioni di Similarità (4.13) e quindi:

$$\begin{aligned} R_{LL}(r) &= \overline{u_L^2} - \frac{C_k}{2}(\varepsilon \cdot r)^{2/3} \\ R_{NN}(r) &= \overline{u_N^2} - \frac{2C_k}{3}(\varepsilon \cdot r)^{2/3} \end{aligned} \qquad [4.18b]$$

4.4.2.4 Equazioni dinamiche per Correlazioni e Funzioni di Struttura

La descrizione statistica della turbolenza è imperniata sulle Funzioni di Correlazione e sulle Funzioni di Struttura che descrivono le proprietà statistiche del moto di un fluido come l'atmosfera. Anche se il tema potrebbe essere sviluppato in termini del tutto generali, a noi interessa soprattutto ciò che accade in condizioni di turbolenza omogenea e localmente isotropa e, soprattutto, siamo

interessati ad individuare un'equazione che descriva la *dinamica del moto*, cioè la variazione nel tempo di tali funzioni. Vista la complessità del tema, ci limiteremo alle sole equazioni dinamiche relative alle Funzioni di Correlazione e alle Funzioni di Struttura. I campi che prendiamo in considerazione sono i campi di velocità **u**(**x**,t) e, questa volta, anche il campo di temperatura potenziale virtuale θ(**x**,t). Dato che i campi sono omogenei, per definizione è sempre possibile operare un'opportuna trasformazione di variabili che renda nullo il campo di moto medio ed il campo di temperatura media. Così facendo, ci riconduciamo in realtà a considerare campi di fluttuazioni che consentono una maggiore semplicità nella definizione delle Funzioni di Correlazione e di Struttura.

Se ci focalizziamo sul campo di moto, o, che è lo stesso, sul campo delle rispettive fluttuazioni, sappiamo che il tensore delle correlazioni del secondo ordine delle componenti della velocità è definito in generale dalla (3.49a) e che in condizioni omogenee tale tensore è espresso dalla relazione (3.53a) in cui ora teniamo conto esplicitamente anche del tempo. Pertanto, questo tensore risulta definito attraverso la correlazione longitudinale R_{LL} e trasversale R_{NN} che, in condizioni isotrope, dipendono solo dal modulo del vettore distanza r (con componenti cartesiane r_j). Tra esse, in condizioni di omogeneità ed isotropia, sussiste la relazione differenziale (3.56g). Quindi, le correlazioni *two-point* del secondo ordine in turbolenza omogenea ed isotropa sono totalmente determinate dalla correlazione longitudinale R_{LL} a sua volta funzione solo della distanza dal punto considerato.

È possibile poi definire nel modo generale seguente il tensore del terzo ordine della correlazione delle componenti del moto:

$$R_{ij,k}(r,t) = \overline{u_i(\boldsymbol{x},t)\cdot u_j(\boldsymbol{x},t)\cdot u_k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t)} \qquad [4.19]$$

Tutto ciò è trattato estesamente in Monin e Yaglom (2007b, Cap. 13).

I valori istantanei delle componenti del moto ubbidiscono, ovviamente, alle equazioni di Navier-Stokes. Se utilizziamo queste equazioni per esprimere le correlazioni spaziali, alla fine di lunghi e noiosi calcoli giungiamo all'equazione differenziale seguente:

$$\frac{\partial R_{LL}}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{4}{r}\right)\cdot\left[R_{LL,L}+2\nu\frac{\partial R_{LL}}{\partial r}\right] \qquad [4.20]$$

nota come *Equazione di von Karman–Howarth*. Essa lega tra loro correlazioni longitudinali del secondo e del terzo ordine e descrive l'evoluzione nel tempo della funzione di correlazione longitudinale. Dato che dalle equazioni di Navier-Stokes siamo giunti alla sola equazione precedente, questa equazione non potrà essere chiusa visto che in essa è presente anche la funzione di correlazione del terzo ordine. A prima vista, pur apprezzando l'importanza teorica di questa equazione, non se ne vede la possibile utilità pratica. Per poter giungere a qualcosa di applicabilità immediata, conviene proseguire nell'analisi e trasformare l'equazione di von Karman-Howarth in modo da sostituire entrambe le Funzioni di Correlazioni con le corrispondenti Funzioni di Struttura.

Si ipotizzi ora un'isotropia locale, come ci si trova quando si considerano vortici entro l'*Inertial Subrange*. In questo caso sappiamo che tra le Funzione di Correlazione e le Funzioni di Struttura sussistono le relazioni (Monin e Yaglom 2007b, paragrafo 13.3):

$$\begin{aligned} D_{LL}(r,t) &= 2\cdot[R_{LL}(0,t)-R_{LL}(r,t)] \\ D_{LLL}(r,t) &= 6R_{LL,L}(r,t) \end{aligned} \qquad [4.21a]$$

e che, quando il numero di Reynolds è molto elevato, esse non dipendono esplicitamente dal tempo ma solo dal tasso di dissipazione medio di energia cinetica turbolenta ε e dalla viscosità cinematica ν. Se trasformiamo l'equazione di von Karman – Howarth sostituendo le Funzioni di Struttura alle Funzioni di Correlazione e se ipotizziamo (Monin e Yaglom 2007b pag. 396) che:

$$\frac{\partial D_{LL}}{\partial t} = 0 \qquad e \qquad \frac{\partial D_{LL}}{\partial t} = -\frac{2}{3}\varepsilon \qquad [4.21b]$$

otteniamo l'interessante equazione seguente:

$$D_{LLL}(r) - 6\nu\frac{\partial D_{LL}(r)}{\partial r} = -\frac{4}{5}\varepsilon \cdot r \qquad [4.21c]$$

che lega tra loro in maniera diagnostica D_{LL} e D_{LLL} quando il Numero di Reynolds è sufficientemente grande, cosa vera per il *Surface Layer* dato che $Re = u_* z/\nu$ è dell'ordine di 10^4. Questa equazione dinamica non è chiusa, visto che coinvolge la Funzione di Struttura longitudinale del secondo e del terzo ordine. Per chiuderla si può introdurre l'ipotesi della *skewness costante* che può essere espressa come:

$$S(r) = \frac{D_{LLL}(r)}{[D_{LL}]^{3/2}} = C < 0 \qquad [4.21d]$$

Con ciò, la (4.21c) ora risulta chiusa ed espressa come:

$$C \cdot [D_{LL}(r)]^{3/2} - 6\nu\frac{\partial D_{LL}(r)}{\partial r} = -\frac{4}{5}\varepsilon \cdot r \qquad [4.21e]$$

Dalle misure disponibili si è visto che |C| assume valori compresi nell'intervallo 0.2÷0.4. Ovviamente, se l'isotropia è violata, $S(r)$ non potrà essere costante. Comunque, al di là di ciò, nell'*Inertial Subrange* il termine dipendente dalla viscosità risulta del tutto trascurabile e quindi la relazione (4.21c) si semplifica ulteriormente, diventando la semplice relazione diagnostica:

$$D_{LLL}(r) = -\frac{4}{5}\varepsilon \cdot r \qquad [4.22]$$

Poiché il tasso medio di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta è, per definizione, positivo, dalla relazione precedente risulta evidente che la Funzione di Struttura D_{LLL} non può che essere negativa. Se stimiamo dalle misure la funzione di struttura del terzo ordine, otteniamo immediatamente il tasso di dissipazione medio di energia cinetica turbolenta.

Anche per il campo di temperatura possono essere fatte osservazioni analoghe. In particolare, è possibile ottenere anche in questo caso un'equazione dinamica analoga a quella di von Karman–Howarth, che coinvolge ora la Funzione di Correlazione del secondo ordine per la temperatura potenziale e la Funzione di Correlazione del terzo ordine per la velocità longitudinale e la temperatura. Tale equazione risulta così espressa (Monin e Yaglom 2007b, pag. 136):

$$\frac{\partial R_{\theta\theta}(r,t)}{\partial t} = 2 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r}\right) \cdot \left[R_{L\theta,\theta}(r,t) + 2\chi\frac{\partial R_{\theta\theta}(r,t)}{\partial r}\right] \qquad [4.23a]$$

dove χ è la diffusività termica. Introducendo la Funzione di Struttura del secondo ordine per la temperatura potenziale e la Funzione di Struttura del terzo ordine della temperatura potenziale e della velocità longitudinale definite come:

$$\begin{aligned} D_{\theta\theta}(r) &= \overline{[\theta(x+r) - \theta(x)]^2} \\ D_{L\theta\theta}(r) &= \overline{[u(x+r) \cdot \theta(x+r) - \theta(x)]^2} \end{aligned} \qquad [4.23b]$$

in condizioni di isotropia locale l'equazione (4.23a) diventa:

$$D_{L\theta\theta}(e) - 2\chi\frac{\partial D_{\theta\theta}(r)}{\partial r} = -\frac{4}{5}N_T \cdot r \qquad [4.23c]$$

dove N_T è il tasso medio di dissipazione della semi-varianza. Questa equazione è valida ad elevati numeri di Reynolds e per elevati valori del numero di Peclet . Nel *Surface Layer Re* è elevato così come è elevato anche il Numero di Peclet perché $Pe = \nu/\chi$ $Re \approx 10^4$. Anche in questo caso, nell'*Inertial Subrange* il termine dipendente dalle proprietà molecolari è trascurabile, per cui:

$$D_{L\theta\theta}(r) = -\frac{4}{5}N_T \cdot r \qquad [4.23d]$$

relazione che consente di determinare N_T dalla stima della funzione di struttura del terzo ordine.

4.5 ANALISI SPETTRALE E IPOTESI DI KOLMOGOROV

Al punto 3.2.2 sono stati descritti i principi generali dell'analisi spettrale dei campi stocastici, sia in situazioni generiche che in situazioni di turbolenza isotropa, non tenendo in alcun conto la dimensione caratteristica dei vari disturbi presenti nel *PBL*. In questo paragrafo, invece, si approfondirà l'argomento alla luce delle due Ipotesi di Kolmogorov. Per semplicità espositiva, comunque, è opportuno riassumere brevemente la teoria precedentemente esposta:

- l'obiettivo dell'analisi spettrale è far emergere dal campo di moto di un fluido turbolento la presenza delle irregolarità a varie dimensioni, scomponendo la statistica *two-point* del campo (il tensore delle correlazioni) in *modi di Fourier*, cioè in componenti armoniche spaziali. Per comodità, l'analisi viene condotta per campi stazionari ed omogenei;
- il risultato principale è costituito dalle *relazioni di Wiener-Khinchine* (3.96) che legano tra loro il tensore delle correlazioni $R_{ij}(\mathbf{r})$ a un nuovo tensore $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ che è la densità spaziale *two-sided* del campo di velocità, funzione del vettore d'onda **k** il cui modulo *k* è pari a $k = 2\pi/l$, dove *l* è la lunghezza d'onda dell'armonica spaziale;
- il tensore Φ_{ij} ha le dimensioni (L^5T^{-2});
- dato che il tensore di correlazione R_{ij} è simmetrico rispetto all'origine ed è una grandezza reale, il tensore dello spettro di velocità avrà la proprietà $\Phi_{ij}(k) = \Phi_{ij}^{*} = \Phi_{ij}(-k)$ dove Φ^{*}_{ij} è il complesso coniugato di Φ_{ij};
- se il moto del fluido è incomprimibile (ipotesi decisamente buona nel *PBL*) si può dimostrare che vale la seguente relazione di ortogonalità $k_i\Phi_{ij}(\boldsymbol{k}) = k_j\Phi_{ij}(\boldsymbol{k}) = 0$;
- le componenti diagonali Φ_{ii} del tensore sono reali e non negative;
- il tensore $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ è la controparte, nello spazio dei numeri d'onda, degli Stress di Reynolds, cioè $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ è il contributo per unità di volume dello spazio dei numeri d'onda, del modo $e^{\mathbf{j}\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}}$ allo stress $\overline{u_i u_j}$, come mostrato in (3.97a);
- dato che le componenti diagonali Φ_{ii} del tensore sono reali e non negative, a $\mathbf{r} = 0$ si ha che l'energia cinetica turbolenta *e* può essere espressa dalla (3.97b);
- la direzionalità contenuta nello spettro della velocità può essere rimossa, giungendo alla definizione di *funzione di energia spettrale E*(*k*) (*Energy Spectrum*) (3.98a) che è uno scalare dipendente solo dal modulo *k* del vettore numero d'onda. In pratica *E*(*k*) rappresenta il contributo all'energia cinetica turbolenta dei modi di Fourier con numero d'onda (in modulo) compresi tra *k* e *k* + *dk*;
- la misura diretta di $\Phi_{ij}(\mathbf{r})$ è oltre le possibilità tecnologiche attuali. È possibile però misurare nel tempo in un numero limitato di punti, usando poi l'ipotesi di Taylor per stimare le funzioni di correlazione <u>*lungo la direzione del vento medio*</u>. È così che si stimano le correlazioni R_{LL}, R_{NN} e R_{33} lungo la direzione (r,0,0), se l'asse *x* è allineato con la direzione media del moto. In questo caso si possono determinare gli *spettri monodimensionali* (ed anche quello verticale) definiti dalle relazioni (3.99). Seguendo la convenzione quasi universalmente adottata in Letteratura, invece di usare Φ_{11}, Φ_{22}, Φ_{33} ed in generale Φ_{ij}, si considerano come spettri monodimensionale le quantità $E_{11}(k_1) = 2\Phi_{11}$, $E_{22}(k_1) = 2\Phi_{22}$ e $E_{33}(k_1) = 2\Phi_{33}$. Sia gli spettri Φ_{ii} che gli spettri E_{ii} hanno dimensioni (L^3T^{-2}).

<u>*In condizioni di isotropia*</u>, l'intero tensore $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ è completamente determinato dall'*Energia spettrale E*(*k*) e tra le due grandezze sussiste la relazione algebrica (3.101a). Oltre a ciò, sempre in condizioni stazionarie, omogenee ed isotrope, gli spettri monodimensionali sono determi-

nati anche dall'*Energia Spettrale E*(*k*) come mostrato nelle relazioni (3.101).

4.5.1 ISOTROPIA LOCALE ED IPOTESI DI KOLMOGOROV

Le ipotesi di Kolmogorov si applicano nello spazio fisico a disturbi di piccola scala, che si collocano nell'*Universal Equilibrium Range* definito da $l < l_E$, dove l è la lunghezza di scala del generico disturbo. Nello spazio dei numeri d'onda l'intervallo corrispondente è $k > k_E = 2\pi/l_E$. In accordo con l'ipotesi di isotropia locale, le proprietà statistiche del campo di velocità nell'*Universal Equilibrium Range* sono isotrope e, di conseguenza, per $k > k_E$, il tensore dello spettro di velocità $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ può essere espresso in termini di *Energia Spettrale E*(*k*) e quest'ultima funzione (*E*(*k*) è uno scalare) può essere, a sua volta, espressa in termini di spettri monodimensionali E_{11}, E_{22} ed E_{33}.

In accordo con la Prima Ipotesi di Kolmogorov, le proprietà statistiche del campo di moto devono poter essere descritte solo dal tasso di dissipazione medio dell'energia turbolenta ε e dalla viscosità ν. Ciò vale anche per gli spettri, visto che anch'essi sono una proprietà statistica del campo. Come descriveremo più diffusamente al Cap. 8, possiamo utilizzare la Teoria della Similarità per individuare (almeno parzialmente) una relazione che leghi gli spettri a queste due proprietà del fluido. In poche parole, la Teoria della Similarità:

- richiede di formare con le variabili in gioco (le densità spettrali, il numero d'onda *k*, il tasso di dissipazione ε e la densità ν) tutti i possibili gruppi adimensionali;
- se i gruppi adimensionali si riducono ad uno solo, tale gruppo sarà una costante di cui nulla dice la Teoria della Similarità e che dovrà essere individuato sperimentalmente;
- se i gruppi sono almeno due, uno di essi sarà descritto da una funzione del rimanente. Di questa funzione nulla dice la Teoria della Similarità ed essa dovrà essere individuata direttamente dalle misure sperimentali.

Per prima cosa consideriamo il numero d'onda *k* che ha le dimensioni (L^{-1}). Avendo introdotto la lunghezza di scala di Kolmogorov $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, viene quindi naturale individuare come primo gruppo adimensionale $k\eta = k(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$. Ricordando, inoltre, che sia *E*(k) che gli spettri monodimensionali hanno dimensioni (L^3T^{-2}), il secondo (e ultimo) gruppo adimensionale distinto che individuiamo è $E(k) / (\varepsilon^{2/3}k^{-5/3})$. Quindi, per la Teoria della Similarità, i due gruppi adimensionali individuati sono legati tra loro da una relazione funzionale del tipo:

$$E(k) = \varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \cdot F(k\eta) \qquad [4.24a]$$

dove $F(k\eta)$ è una Funzione Universale di Similarità da individuarsi sperimentalmente. Questa relazione, in accordo con la Prima Ipotesi di Kolmogorov, si applica per $k > k_E$, cioè quando:

$$k\eta > \frac{2\pi\eta}{l_E} \qquad [4.24b]$$

La Seconda Ipotesi di Kolmogorov si applica nell'*Inertial Subrange*, quando $\eta << l << l_1$ o, più precisamente, quando $l_D < l < l_E$. Il corrispondente intervallo nello spazio dei numeri d'onda è $k_E < k < k_D$ e anche:

$$k_D\eta = \frac{2\pi\eta}{l_D} > k\eta > \frac{2\pi\eta}{l_E} = k_E\eta \qquad [4.24c]$$

Nell'*Inertial Subrange*, per la Seconda Ipotesi di Kolmogorov, l'*Energia Spettrale E*(*k*) possiede una forma universale determinata unicamente dal tasso medio di dissipazione di energia cinetica ε ed indipendentemente dalla viscosità ν. Dato che l'unico gruppo adimensionale che si riesce ad individuare è $E(k)/(\varepsilon^{2/3}k^{-5/3})$, la funzione universale $F(k\eta)$ diventa una costante C e quindi si ha che nell'*Inertial Subrange* la forma analitica dell'*Energy Spectrum* data da:

$$E(k) = C \cdot \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \qquad [4.25a]$$

Questa è la famosa *legge dei meno cinque terzi* che descrive l'*Energia Spettrale* in funzione del numero d'onda e la costante C è una costante universale che le misure sperimentali pongono pari a $C = 1.4$. Ragionamenti del tutto analoghi possono essere fatti anche per gli spettri monodimensionali, la cui espressione analitica nell'*Inertial Subrange* diventa:

$$\begin{aligned} E_{11}(k) &= C_1 \cdot \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \\ E_{22}(k) &= C'_1 \cdot \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \\ E_{33}(k) &= C'_1 \cdot \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \end{aligned} \qquad [4.25b]$$

Utilizzando poi le relazioni (3.101e) e (3.101f) si ottiene facilmente che $C_1 \approx 0.49$ e $C'_1 \approx 0.65$.

4.5.2 UN MODELLO SPETTRALE

Il modello che emerge dall'analisi fatta sui disturbi presenti in un moto turbolento è estremamente semplice e possiamo sintetizzarlo così:

- c'è un limite superiore alla dimensione caratteristica dei disturbi, data dalla dimensione caratteristica L del moto stesso. Nel caso del *PBL* essa è dell'ordine di 10^3 m. Questi disturbi di grandi dimensioni (tipicamente i vortici convettivi) sono sostanzialmente anisotropi e catturano energia cinetica dallo *shear* del moto medio ad un tasso pari ad ε. Indichiamo con l_1 la dimensione caratteristica dei disturbi di maggiore dimensione.

- i disturbi di maggior dimensione sono i primi a formarsi e, vista la loro anisotropia, sono instabili e si frammentano in vortici di dimensioni inferiori, anch'essi instabili. Questi ultimi, per la loro instabilità, si frammentano a loro volta in disturbi più piccoli in un processo a *cascata* che stabilisce una *gerarchia dimensionale decrescente* di disturbi;

- man mano la dimensione dei disturbi prodotti dal processo di frammentazione diminuisce, diminuisce pure l'anisotropia caratteristica del disturbo stesso e quindi la *parentela* dal moto medio. Convenzionalmente si definisce una dimensione caratteristica l_E (pari a 1/6 l_1) come linea di demarcazione dimensionale tra i disturbi anisotropi e quelli isotropi. L'intervallo dimensionale $l_1 \div l_E$ raccoglie tutti i disturbi anisotropi. Tale intervallo è noto come *Energy-containing Range*, visto che per la loro anisotropia tali disturbi sottraggono energia al moto medio;

- per i disturbi con scala caratteristica $l < l_E$, la principale caratteristica è l'isotropia locale che impedisce che essi possano sottrarre energia al moto medio. Pertanto, la conseguenza principale di tutto ciò è che ogni disturbo trasmette ai disturbi che si generano dalla sua frammentazione la stessa energia acquisita dai disturbi da cui sono nati. In sostanza c'è una *cascata energetica* che si incarica di trasmettere ai piccoli disturbi l'energia che i vortici più grossi hanno acquisito dal moto medio e che è pari a ε. È consuetudine indicare col termine *Universal Equilibrium Range* l'intervallo dimensionale $l < l_E$;

- il numero di Reynolds Re_l che può essere associato a ciascun disturbo a scala l in un moto a grande Re resta elevato e quindi il disturbo resta immune dall'influenza delle forze viscose fino a che l si avvicina ad una scala caratteristica η per la quale $Re_\eta = 1$. A questo punto le forze viscose interferiscono col disturbo tendendo a distruggerlo e dissipandolo in calore. Convenzionalmente è stata definita una lunghezza caratteristica $l_D = 60\eta$, al di sopra della quale i disturbi non vengono influenzati dalla viscosità. L'intervallo dimensionale $l_E > l > l_D$ è noto come *Inertial Subrange*. In questo intervallo dimensionale i disturbi dipendono solo dal tasso di energia cinetica ε che si trasmettono l'un l'altro;

- per tutti i disturbi a scala l inferiore a l_D la dissipazione viscosa è l'elemento essenziale. Essi ne sono preda e ad essa soccombono dissipandosi in calore. L'intervallo dimensionale $l < l_D$ è noto come *Dissipation Range*.

A fronte di questa semplice visione fenomenologica, non tutto è stato definito quantitativamente. In particolare, sarebbe interessante poter disporre di un modello spettrale che copra sia l'*Energy-containing Range*, sia l'*Universal Equilibrium Range*. Finora siamo riusciti solo ad ottenere un'espressione generica per l'*Energia Spettrale* $E(k)$. Per gli spettri monodimensionali $E_{11}(k)$, $E_{22}(k)$ ed $E_{33}(k)$ siamo giunti ad un'espressione analitica effettivamente usabile solo nell'*Inertial Subrange*, mentre per il *Dissipation Range* è stata ottenuta una forma analitica che richiede l'individuazione di una Funzione Universale di Similarità. Poco si può fare di più in termini puramente teorici: le restanti informazioni devono essere ottenute dalle misure. L'analisi spettrale ha messo a dura prova le capacità sperimentali dei fluidodinamici, dato che per coprire il grande numero di decadi su cui si estende l'intervallo spettrale di interesse è necessario disporre di strumentazione ad alta precisione e a risposta rapida, oltre a sistemi di acquisizione che lavorano a frequenze elevate. Comunque, in laboratorio molto si è fatto in proposito, ottenendo risultati molto interessanti. Di fatto, in laboratorio possono essere misurati l'*Energia Spettrale* e gli spettri monodimensionali (senza invocare l'Ipotesi di Taylor) e si può esplorare anche il tensore delle densità spettrali Φ_{ij}. Dato, però, che il nostro interesse è focalizzato unicamente sulla turbolenza presente nel *PBL*, il problema è ben diverso. Ad oggi, la tecnologia disponibile per le attività sperimentali in campo non ci consente di andare oltre la misura diretta degli spettri monodimensionali, quasi sempre ottenuti invocando l'Ipotesi di Taylor. E questo è un problema ancora da risolvere. Nella parte restante del paragrafo sintetizzeremo i principali risultati ottenuti in laboratorio, presentati nella forma di un modello spettrale analitico, mentre rimandiamo al Cap. 8 i risultati dell'analisi spettrale effettuata nel *PBL*.

Seguendo Pope (2003), la sintesi dei risultati di laboratorio e di quanto si è riusciti ad ottenere dall'utilizzo delle due Ipotesi di Kolmogorov è costituita da un modello analitico per l'*Energia Spettrale* che così è stato formulato:

$$E(k) = C \cdot \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} f_L(kL) f_\eta(k\eta) \qquad [4.26a]$$

La funzione f_L oltre che dipendere dal numero d'onda k, dipende dalla scala del moto medio L e si incarica di tener conto dell'anisotropia caratteristica dell'*Energy-containing Range*. Essa non potrà mai essere universale e dipenderà sempre dalle caratteristiche del particolare moto medio che si è instaurato. La sua forma analitica scelta è la seguente:

$$f_L(kL) = \left(\frac{kL}{[(kL)^2 + c_L]^{1/2}}\right)^{5/3+p_0} \qquad [4.26b]$$

dove c_L e p_0 sono due costanti, entrambe positive, da determinare sperimentalmente. f_L tende quindi a 1 quando kL assume valori elevati e ciò esprime analiticamente il fatto che l'effetto dell'anisotropia e, quindi, dell'influenza del moto medio diminuisce col diminuire della scala del disturbo. Oltre a ciò, quando kL diventa piccolo, la f_L risulta tale che lo spettro varia col numero d'onda come k^{p0}. Dato che l'esponente p_0 è positivo, lo spettro cresce con il numero d'onda. La dipendenza dalla scala esterna L fa sì che questa funzione non sia universale. Comunque, dai dati sperimentali raccolti in laboratorio si è ottenuto per c_L e per p_0 rispettivamente i valori 6.78 e 2. La funzione f_η si incarica, invece, di descrivere ciò che avviene nel *Dissipation Range*. Per essa è stata proposta la seguente formulazione analitica:

$$f_\eta(k\eta) = exp\left\{-\beta\left\{\left[(k\eta)^4 + c_\eta^4\right]^{1/4} - c_\eta\right\}\right\} \qquad [4.26c]$$

dove β e c_η sono costanti positive. Questa funzione, per la prima Ipotesi di Kolmogorov, è una funzione universale, cosa effettivamente confermata dai dati sperimentali che hanno fornito per le due costanti β e c_η rispettivamente i valori 4.2 e 0.4.

4.6 STRUTTURA LOCALE DELLA TEMPERATURA

Dopo aver trattato la struttura locale del campo di moto sia nel dominio del tempo che in quello delle frequenze (spaziali), trattiamo ora la struttura locale dei campi di scalari passivi come la temperatura e la concentrazione di sostanze passive (vapor d'acqua, sostanze inquinanti, radionuclidi, ecc.) in un fluido (come il *PBL*) caratterizzato da un elevato numero di Reynolds. Lo studio, come fatto finora, sarà condotto dal punto di vista Euleriano anche se, per comodità di comprensione, a volte si utilizzeranno concetti Lagrangiani. In effetti è più semplice e intuitivo immaginarsi, per esempio, il campo di temperatura come il risultato del movimento di particelle, ciascuna dotata di una propria temperatura individuale. Ognuno dei vortici della gerarchia che si viene a generare per continua frammentazione, sarà costituito da particelle con propria temperatura e, con l'evoluzione di ognuno di essi, le varie particelle si verranno a rimescolare nello spazio mutando rapidamente e irregolarmente il campo di temperatura che un osservatore Euleriano vede dall'esterno.

Qui di seguito tratteremo il caso della temperatura come rappresentativo di tutti i campi scalari passivi seguendo prevalentemente Monin e Yaglom (2007b, pag.377).

4.6.1 CONSIDERAZIONI DI BASE

Supponiamo che $\theta(\mathbf{x}, t)$ sia la temperatura trasportata dalle particelle che si muovono nel campo di moto turbolento e che essa non abbia un effetto apprezzabile sul livello di turbolenza. In sostanza supponiamo che la temperatura sia uno scalare passivo. Come visto, le proprietà statistiche delle fluttuazioni di velocità in ogni regione dello spazio-tempo sufficientemente piccolo sono isotrope e quasi-stazionarie, completamente definite dal tasso medio di dissipazione di energia cinetica ε e dalla viscosità cinematica ν. È quindi naturale aspettarsi che le fluttuazioni di temperatura derivanti dal rimescolarsi di porzioni di fluido a differenti temperature iniziali siano anch'esse isotrope e stazionarie in piccole regioni dello spazio-tempo. Di conseguenza, il campo scalare $\theta(\mathbf{x}, t)$ può essere considerato localmente isotropo in una regione dello spazio-tempo in cui il campo di moto è localmente isotropo. Tuttavia, non c'è ragione alcuna di supporre che i suoi parametri statistici dipendano solo da ε e da ν. Infatti, l'evoluzione del campo di temperatura è descritta, in termini istantanei, dall'equazione di trasferimento del calore che contiene la conducibilità molecolare χ. Perciò è chiaro che il valore di χ può influenzare la struttura locale del campo $\theta(\mathbf{x}, t)$. Questo effetto non può essere trascurato: nel caso di un intenso rimescolamento turbolento, la conducibilità termica molecolare gioca un ruolo importante dato che i moti turbolenti possono far sì che volumi di fluido con temperature molto differenti si avvicinino, con un conseguente rapido aumento dei gradienti di temperatura. Tuttavia, anche se aggiungiamo χ ai parametri ε e ν, ancora non otteniamo l'insieme completo di parametri che definiscono lo stato statistico delle fluttuazioni di temperatura a piccola scala.

Quando abbiamo esplorato la struttura locale del campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, abbiamo assunto che il numero di Reynolds $Re = L \cdot \Delta U/\nu$ (ΔU è la tipica differenza di velocità su distanze dell'ordine di L) fosse sufficientemente elevato ed abbiamo considerato il processo di frammentazione delle disomogeneità macrostrutturali. Abbiamo notato che, di tutte le grandezze che caratterizzano i moti turbolenti a grande scala, l'unica che influenzava effettivamente i disturbi a piccola scala era il tasso medio di trasferimento di energia dai moti a grande scala a quelli a piccola scala. Ciò alla fine determinava la distruzione dei disturbi a scala molto piccola a causa della viscosità molecolare. Il campo di temperatura può essere considerato allo stesso modo. Possiamo, tuttavia, assumere elevato non solo il numero di Reynolds *Re*, ma anche il numero di Peclet definito come:

$$Pe = \frac{L_\theta \cdot \Delta_\theta U}{\chi} \qquad [4.27]$$

dove L_θ è una lunghezza caratteristica pari alla distanza tipica per cui si nota un'apprezzabile variazione della temperatura media e $\Delta_\theta U$ è la tipica variazione della velocità media del vento sulla distanza L_θ.

4.6.2 IL TASSO DI DISSIPAZIONE DELLE DISOMOGENEITÀ TERMICHE

La frammentazione a cascata dei disturbi del campo di velocità porta anche alla frammentazione delle disomogeneità macrostrutturali di temperatura a scala L_θ in disturbi a piccola scala del campo $\theta(\mathbf{x}, t)$. Nelle regioni dello spazio-tempo con dimensioni lineari molto inferiori a L_θ, la temperatura media $\bar{\theta}$ può essere considerata praticamente costante. La fluttuazione $\theta' = \theta - \bar{\theta}$ è, perciò, una misura del grado di disomogeneità del campo di temperatura in quella regione. A tal proposito, conviene considerare la quantità:

$$H = \frac{1}{2}\int_V \rho \cdot \overline{[\theta(\boldsymbol{x}, t) - \bar{\theta}]^2}\, dV \qquad [4.28]$$

come misura della disomogeneità nel volume V. Tale grandezza si basa sulla semi-varianza delle fluttuazioni di temperatura $\overline{\theta'^2}/2$. Per visualizzare meglio il concetto, riferendoci ad una regione sferica dello spazio di raggio l, possiamo immaginare questa quantità come la metà della deviazione quadratica media delle fluttuazioni di temperatura in questa regione rispetto alla sua temperatura media; con ciò abbiamo caratterizzato il contributo dovuto a disturbi di una data lunghezza di scala l alla disomogeneità del campo. La frammentazione delle disomogeneità termiche risulterà quindi nel fatto che la misura totale della disomogeneità di temperatura sarà concentrata prevalentemente nei disturbi a piccola scala. Immaginiamo di isolare un disturbo, che si presenterà come una struttura sostanzialmente coerente costituita da particelle le cui temperature conducono al grado di disomogeneità quantificato da $\overline{\theta'^2}/2$. Tale struttura si muoverà nello spazio-tempo senza alterare questa grandezza, esattamente come non varia la propria energia cinetica in un moto inerziale. Una variazione nel grado di disomogeneità di temperatura può essere prodotta solo dalla conduzione termica molecolare, che porta ad un'equalizzazione della temperatura tra particelle contigue, cioè ad una riduzione complessiva di $\overline{\theta'^2}/2$.

Sia N_θ il *tasso medio di dissipazione delle disomogeneità di temperatura*, cioè il tasso di riduzione della semi-varianza delle fluttuazioni di temperatura dovuto alla conduzione termica molecolare. Per elevati numeri di Reynolds e di Peclet N_θ sarà quasi completamente concentrato nei disturbi a scala più piccola e sarà pari al *trasporto della misura di disomogeneità termica lungo l'intero intervallo spettrale*, cioè sarà pari all'aumento nell'unità di tempo del contributo della semi-varianza di temperatura associata ai disturbi a piccola scala $l << \min(L_\theta, L)$ e dovuti alla frammentazione delle disomogeneità termiche a grande scala.

È chiaro che la grandezza N_θ può rimanere costante nel tempo se le disomogeneità a grande scala sono mantenute attive da sorgenti di calore esterne che producono una distribuzione fissa di temperatura media (per esempio la presenza della radiazione solare nel *PBL*). Se non fosse così, N_θ dipenderebbe dal tempo. Tuttavia, la variazione temporale di N_θ sarà molto lenta se paragonata ai tempi caratteristici di scala dei moti turbolenti a lunghezza di scala sufficientemente piccola. Perciò, quando consideriamo le proprietà statistiche dei disturbi termici a piccola scala, N_θ può essere considerato costante. Si può mostrare che, usando l'equazione di conservazione dell'energia termica di cui si tratterà al Cap. 5, in un volume V sufficientemente grande, in modo da poter trascurare il trasferimento convettivo di calore ai bordi, la riduzione della misura della disomogeneità termica può essere descritta da:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_V \rho \cdot \overline{[\theta(\boldsymbol{x}, t) - \bar{\theta}]^2}\, dV\right] = -\chi \int_V \rho \cdot \overline{\left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_\alpha}\right)^2}\, dV \qquad [4.29]$$

Di conseguenza il tasso di riduzione specifica (per unità di massa) della misura di disomogeneità

termica è dato da:

$$N_\theta = -\chi \overline{\left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_\alpha}\right)^2} \qquad [4.30]$$

Questa relazione è molto simile a quella che descrive il tasso medio di dissipazione di energia cinetica ε e ciò non è un caso, visto che le due grandezze hanno un significato fisico simile.

4.6.3 LE IPOTESI DI KOLMOGOROV PER IL CAMPO DI TEMPERATURA

Quando si considera il campo di temperatura, l'*Universal Equilibrium Range* coinvolge disomogeneità termiche aventi una lunghezza di scala $l << L_0 = \min(L, L_\theta)$. La Prima Ipotesi di Kolmogorov, in questo caso, assumerà la forma seguente:

Prima Ipotesi di Kolmogorov

In una situazione di turbolenza sviluppata con Re e Pe sufficientemente elevati, le caratteristiche statistiche per le differenze di velocità e di temperatura ad un arbitrario e finito insieme di punti di una regione V dello spazio di dimensione $l << L_0$ sono invarianti a tutte le rotazioni e le traslazioni di questo insieme di punti, a condizione che queste trasformazioni non portino questi punti oltre i confini di V e sono determinate solo dai parametri ε, ν, N_θ e χ.

Generalizziamo, ora, la Seconda Ipotesi di Kolmogorov alle differenze di temperatura. Per prima cosa notiamo che, per *Pe* sufficientemente elevato, la conducibilità termica molecolare, caratterizzata da χ, gioca un ruolo apprezzabile solo per disturbi a piccola scala. Ciò deriva dal fatto che il numero di Peclet è il rapporto tra i termini dell'equazione del calore che descrivono la convezione di calore e quelli che descrivono la conduzione termica molecolare. Perciò quest'ultima è importante solo per disturbi con $Pe \leq 1$. È naturale supporre che *Pe* decresca monotonicamente al decrescere della lunghezza di scala dei disturbi. Quindi, per *Pe* sufficientemente elevati del flusso medio, dovrà esistere un sottointervallo dimensionale per la lunghezza di scala *l* caratteristica dei disturbi per cui $Pe >> 1$. In questo sottointervallo in cui *l* è sempre molto inferiore a L_0, tutte le caratteristiche statistiche dovranno essere indipendenti da χ. Questo intervallo può essere chiamato *Convective Subrange*.

Se tentiamo di determinare l'ordine di grandezza del limite inferiore del *Convective Subrange* incontriamo una specifica difficoltà dovuta alla presenza di ε e di χ che hanno le stesse dimensioni (L^2T^{-1}). Pertanto, i parametri adimensionali che descriveranno la turbolenza a piccola scala in presenza di disomogeneità termiche sarà, in generale, funzione del *Numero di Prandt* definito come $Pr = \nu/\chi$. In particolare, il rapporto tra la lunghezza di scala dei piccoli disturbi che sono apprezzabilmente influenzati dalla conducibilità molecolare e la lunghezza di Kolmogorov η sarà anch'esso funzione di *Pr*. Perciò il *Convective Subrange* è determinato da:

$$L_0 \gg l \gg \lambda(Pr) \cdot \eta \qquad [4.31]$$

dove λ(*Pr*) è una funzione universale. Invece di η si potrebbe usare la cosiddetta *lunghezza di scala interna della temperatura* definita come $\eta_\theta = (\chi^3/\varepsilon)^{1/4} = \eta(Pr)^{-3/4}$, tuttavia, la conclusione che per $l >> \eta_\theta$ siamo necessariamente entro i limiti del *Convective Subrange* non è detto che sia giustificata, dato che la possibilità di ignorare la conducibilità molecolare rispetto alla convezione dipenderà dal campo di velocità che è influenzato dalla viscosità ν. Tuttavia, queste considerazioni sono importanti solo nei casi limite $\nu << \chi$ e $\nu >> \chi$. Si può mostrare (Monin e Yaglom, 2007, pag. 433) che:

- se $\nu << \chi$, il *Convective Subrange* si estende solo alle scale $l >> \eta_\theta$

- se $\nu >> \chi$, il *Convective Subrange* si estende solo alle scale $l >> (\nu\chi^2/\varepsilon)^{1/4} = (\eta\eta_\theta)^{1/3}$

Nelle situazioni più normali, quando $Pr \cong 1$ (e questo è il caso del *PBL*), η, η_θ, e $(\eta\eta_\theta)^{1/3}$ sono dello stesso ordine di grandezza e la funzione universale $\lambda(Pr)$ degenera in un coefficiente numerico dell'ordine dell'unità. Perciò, quando il numero di *Prandt* è circa unitario, il limite superiore dei sottointervalli delle lunghezze di scala in cui la dissipazione molecolare e la conducibilità termica molecolare sono ancora importanti possono essere considerati coincidenti.

Si consideri ora l'*Inertial-Convective Subrange* definito come $L_0 \gg l \gg \eta_0 = max(\eta, \eta_\theta)$ che è l'intersezione dell'*Inertial* e del *Convective Subrange*. Per disturbi aventi una dimensione di scala appartenente a questo sottointervallo, possiamo ignorare l'effetto della viscosità e della conducibilità molecolare. In altre parole, possiamo formulare l'ipotesi seguente:

Seconda Ipotesi di Kolgomorov

Quando il Numero di Reynolds e Numero di Peclet sono elevati, le caratteristiche statistiche per le differenze di velocità e di temperatura in un insieme finito di punti tali che tutte le distanze r_k tra di essi soddisfa la disuguaglianza $L_0 \gg l \gg \eta_0 = max(\eta, \eta_\theta)$ sono unicamente determinate dai valori dei parametri ε e N_θ.

Le due ipotesi di Similarità conducono ad alcune semplici conseguenze per le proprietà statistiche della differenza spaziale di temperatura $\Delta_r\theta = \theta(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}) - \theta(\boldsymbol{x})$ quando il moto turbolento ha elevati valori di *Re* e di *Pe*. In particolare, se si considera l'*Universal Equilibrium Range* ($r << L_0$), la Funzione di Struttura spaziale della temperatura:

$$D_{\theta\theta}(\boldsymbol{r}) = \overline{(\Delta_r\theta)^2} \qquad [4.33a]$$

dipende solo da $r = |\mathbf{r}|$. e ha la forma:

$$D_{\theta\theta}(r) = N_\theta \varepsilon^{-1/2}\chi^{1/2} \cdot h\left(\frac{r}{\eta_\theta}; \frac{\nu}{\chi}\right) \qquad [4.33b]$$

dove la funzione $h(x,z)$ è una funzione universale di due variabili. Per distanze r sufficientemente piccole, $\Delta_r\theta$ può essere considerata una funzione pressoché lineare in r e così, se anche Pr è prossimo all'unità, si può dimostrare che:

$$D_{\theta\theta}(r) \approx \frac{N_\theta}{3\chi} r^2 \qquad [4.33c]$$

Questa relazione vale quando $r << \eta_\theta$.

Nel caso in cui la distanza r si colloca nell'*Inertial-Convective Subrange* ($L_0 >> r >> \eta_0$), è possibile usare la Seconda Ipotesi di Kolmogorov che porta alla relazione seguente:

$$D_{\theta\theta}(r) = C_\theta N_\theta \varepsilon^{-1/3} r^{2/3} \qquad [4.34]$$

dove C_θ è una costante universale. Anche per la funzione di Struttura della temperatura si è giunti alla *legge dei due terzi* nel sottointervallo inerziale.

Possiamo anche considerare quali siano le ripercussioni delle Ipotesi di Kolmogorov sullo spettro monodimensionale della temperatura $E_\theta(k)$. Considerazioni di analisi dimensionale conducono ad individuare per l'*Inertial-Convective Subrange* la relazione seguente:

$$E_\theta(k) = B_\theta N_\theta \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3} \qquad [4.35a]$$

valida se $1/L \ll k \ll 1/\eta_\theta$. B_θ è una costante universale e si può dimostrare che $B_1 \cong 0.25 C_\theta$. Come si vede, anche per lo spettro della temperatura, nell'*Inertial-Convective Subrange* vale la legge dei cinque terzi.

4.7 IPOTESI DI KOLMOGOROV PER LA TURBOLENZA LAGRANGIANA

Fin qui abbiamo studiato le proprietà della turbolenza isotropa o localmente isotropa dal punto di vista Euleriano e ciò sarà utile per realizzare ed interpretare le misure in campo e per confrontarle con le previsioni e ricostruzioni modellistiche. Come si è visto, al modo Euleriano di procedere si contrappone la visione Lagrangiana del fenomeno e le due descrizioni sono totalmente intercambiabili. Tuttavia, nella micrometeorologia la metodologia di indagine di tipo Euleriano sono praticamente le uniche che si utilizzano in pratica. Diversa è la situazione quando si vuole descrivere la dispersione di sostanze passive (per esempio sostanze inquinanti) in aria. In questo caso la visione Lagrangiana fornisce una descrizione più coerente ed anche concettualmente più semplice del fenomeno. Come vedremo, è stata sviluppata una classe di modelli di dispersione (i modelli Lagrangiani a particelle) che oggi rappresentano uno dei modi più realistici per trattare la dispersione degli inquinanti in aria, almeno di quelli poco reattivi chimicamente. Per fornire una base efficace alla teoria della dispersione Lagrangiana, nei punti che seguono viene presentata, in forma condensata, la teoria Lagrangiana della turbolenza in situazioni localmente isotrope, completando quanto è già stato presentato al punto 3.3.

4.7.1 STATISTICHE LAGRANGIANE DELLE DIFFERENZE DI VELOCITÀ

Consideriamo ora il fluido come un insieme di particelle in moto turbolento e trattiamolo dal punto di vista Lagrangiano. Dal punto di vista Euleriano, tale moto sia caratterizzato da un elevato numero di Reynolds. Consideriamo, ora, una generica particella in movimento, particella che ad un certo istante iniziale t_0 si trovava nella posizione $\mathbf{x}_0$. Immaginiamo, poi di essere in situazioni stazionarie ed omogenee. La caratteristica principale del moto di una tale particella è la differenza di velocità che essa presenta a due istanti temporali t_0 e $t_0+\tau$, dove t_0 è un arbitrario istante iniziale. In condizioni stazionarie ed omogenee, la scelta di un particolare t_0 è irrilevante. Tale grandezza, che ovviamente possiede caratteristiche stocastiche, può essere definita come:

$$\Delta_r \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x_0}, t) - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x_0}, t_0) \qquad [4.36a]$$

dove $\mathbf{V}$ è la velocità (vettoriale) Lagrangiana della particella che si trovava nella posizione $\mathbf{x}_0$ all'istante iniziale t_0. Dall'istante t_0 all'istante t la particella si è mossa nello spazio fisico, descrivendo la traiettoria $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0,t)$. Dato che, come già visto al punto 3.3, la particella ad ogni istante e in ogni punto dello spazio in cui viene a trovarsi possiede esattamente la velocità Euleriana del fluido in quel punto e in quell'istante, la relazione precedente può essere riscritta come:

$$\Delta_r \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x_0}, t) - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x_0}, t_0) = \boldsymbol{u}[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x_0}, t)] - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x_0}, t) \qquad [4.36b]$$

dove $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ è la velocità Euleriana riscontrata nel fluido nel punto $\mathbf{x}$ al tempo t. Se $\tau = t - t_0$ è molto inferiore al tempo Lagrangiano di scala T (cioè all'intervallo di tempo durante il quale la variazione della velocità Lagrangiana $\mathbf{V}(\mathbf{x}_0,t)$ della particella diventa comparabile con $|\mathbf{V}|$), allora:

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x_0}, t) \cong \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x_0}, t) \cdot (t - t_0) \qquad [4.36c]$$

Perciò, quando $\tau \ll T$ e $\tau \ll T_0 = L/U$ si può ritenere che $\Delta_\tau \mathbf{V}$ possieda caratteristiche statistiche isotrope, indipendenti da $\mathbf{x}_0$, t_0 e $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0,t_0)$. Logica conseguenza di ciò è che possiamo applicare anche in questo contesto Lagrangiano le due Ipotesi di Kolmogorov. La condizione $\tau << T_0$ è necessaria altrimenti verrebbero meno le condizioni Euleriane di stazionarietà prescritte per il moto del fluido.

Per il *momento del secondo ordine* del vettore stocastico $\Delta_\tau \mathbf{V}$ abbiamo, grazie alla isotropia, che:

$$\overline{\Delta_\tau V_i \cdot \Delta_\tau V_i} = D^{(L)}(\tau) \cdot \delta_{ij} \qquad [4.37]$$

dove $D^{(L)}(\tau)$ è la *Funzione di Struttura Lagrangiana* della velocità. La prima Ipotesi di

Kolmogorov, poi, ci assicura anche la *Funzione di Struttura Lagrangiana* dipende solo dal tasso di dissipazione medio ε e dalla viscosità del fluido ν. Considerando le velocità di scala ed il tempo di scala di Kolmogorov v_η, definite in precedenza, ed applicando considerazioni di analisi dimensionale si ottiene la relazione:

$$D^{(L)}(\tau) = \nu_\eta^2 \cdot \beta_L(\tau/\tau_\eta) \qquad [4.38a]$$

dove $\beta_L(x)$ è una nuova funzione universale. Quando $\tau << \tau_\eta = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$ (condizione che, in termini Lagrangiani, equivale a supporre di essere nel *Dissipation Subrange*) il vettore $\Delta_\tau \mathbf{V}$, in ciascuna sua particolare realizzazione, è naturalmente proporzionale a τ (per la stessa ragione per cui $|\Delta_\tau \mathbf{u}| \approx r$ quando $r = |\mathbf{r}| << \eta$, come si è visto in precedenza) e quindi, applicando l'Analisi Dimensionale oltre alla prima ipotesi di Kolmogorov, si ha che:

$$\begin{aligned} \beta_L(\tau/\tau_\eta) &= a_0(\tau/\tau_\eta)^2 \\ D^{(L)}(\tau) &= a_0 \varepsilon^{3/2} \nu^{-1/2} \tau^2 \end{aligned} \qquad [4.38b]$$

Se si confronta questa relazione con la relazione che descrive l'andamento della Funzione di Struttura Euleriana, si nota come entrambe abbiano una dipendenza quadratica, la prima da τ e la seconda da *r*. Ciò è facilmente spiegabile col fatto che per tempi così piccoli, la velocità della particella poco si discosta dalla velocità Euleriana nel punto $\mathbf{x}_0$ al tempo t_0 e può essere considerata una costante nell'intervallo τ.

Se invece $\tau_\eta << \tau << T_0$, in termini Lagrangiani si è nell'*Inertial Subrange*. In questo caso vale la Seconda Ipotesi di Kolmogorov e quindi la Funzione di Struttura potrà dipendere dal tasso medio di dissipazione ε ma non dalla viscosità ν. Ciò comporta che, applicando l'Analisi Dimensionale, si abbia:

$$\begin{aligned} \beta_L(\tau/\tau_\eta) &= C_0 \cdot (\tau/\tau_\eta) \\ D^{(L)}(\tau) &= C_0 \cdot \varepsilon \cdot \tau \end{aligned} \qquad [4.38c]$$

Questa è una relazione importantissima, su cui si basano i modelli di dispersione Lagrangiani a particelle, ed è l'*equivalente Lagrangiano della legge Euleriana dei due-terzi*.

Vista l'importanza pratica di questa relazione è stato dedicato un notevole sforzo per la determinazione della costante C_0. Rimandando alla fine del Capitolo maggiori dettagli in proposito, si può dire che i valori ottenuti per C_0 differiscono profondamente da esperimento ad esperimento variando nell' intervallo $1.6 \div 6.5$, intervallo enorme, cosa non sorprendente vista la difficoltà di realizzare esperimenti di tipo Lagrangiano. Un modo più pratico per stimare C_0 è il seguente: dato che la (4.38c) è il cardine di ogni modello di dispersione Lagrangiano, si realizza un esperimento di dispersione (in laboratorio o in campo) e se ne descrivano i risultati con un modello di questo tipo. Il valore di C_0 che minimizza le differenze quadratiche tra i risultati del modello e le misure sperimentali può essere considerato una stima affidabile ed operativa di C_0. Effettivamente ciò è stato fatto impiegando soprattutto gli esperimenti in laboratorio di Willis e Deardorff (1974, 1976a e b, 1978, 1981). Il risultato ha condotto ad un valore di $C_0 = 3$, anche se si è notato una dipendenza dal livello di turbolenza del moto del fluido.

4.7.2 CONSIDERAZIONI SPETTRALI LAGRANGIANE

Oltre alla Funzione di Struttura, nella visione Lagrangiana è possibile introdurre anche le Funzioni di Auto-correlazione (si veda a tal proposito il punto 3.3.3). Se consideriamo una situazione statisticamente stazionaria, omogenea ed isotropa ed indichiamo con *V* una delle componenti cartesiane della velocità della particella, vediamo che il valor medio di *V* è nullo, mentre la relativa varianza non lo è e, per l'isotropia, è uguale per ogni componente. Naturalmente, se consideriamo un tempo *t* generico, la Funzione di Auto-correlazione tra *t* e $t + \tau$ non dipenderà da *t* (per la

stazionarietà e l'omogeneità) ma solo dal *time-lag* τ e sarà espressa come:

$$R^{(L)}(\tau) = \overline{V(t) \cdot V(t+\tau)} = \overline{V^2} \cdot \rho(\tau) \qquad [4.39a]$$

dove $\rho(\tau)$ è la Funzione di Auto-correlazione normalizzata. Si ricordi che il *Tempo Lagrangiano di Scala* relativo a *V* è:

$$T_L = \int_0^\infty \rho(\tau)\, d\tau \qquad [4.39b]$$

La rappresentazione spettrale della Funzione di Auto-correlazione è:

$$R^{(L)}(\tau) = \int_0^\infty E^{(L)}(\omega) \cdot \cos(\omega\tau)\, d\omega \qquad [4.40a]$$

in cui appare la funzione $E^{(L)}(\omega)$ che è la Trasformata di Fourier della Funzione di Auto-correlazione e che prende il nome di *Spettro Lagrangiano della velocità*. Tale funzione, a sua volta, è esprimibile mediante la funzione di Auto-correlazione come:

$$E^{(L)}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R^{(L)}(\tau) \cdot \cos(\omega\tau)\, d\tau \qquad [4.40b]$$

ed ha le dimensioni (L^2T^{-1}). Quando $\tau = 0$:

$$R^{(L)}(0) = \int_0^\infty E^{(L)}(\omega)\, d\omega \qquad [4.40c]$$

È facile mostrare come tra la Funzione di Struttura e la Funzione di Auto-correlazione sussista la relazione seguente:

$$D^{(L)}(\tau) = 2\overline{V^2} - 2R^{(L)}(\tau) \qquad [4.41a]$$

Da tutte queste relazioni è immediato constatare che la rappresentazione spettrale della Funzione di Struttura Lagrangiana è espressa dalla relazione seguente:

$$D^{(L)}(\tau) = 2 \int_0^\infty (1 - \cos(\omega\tau)) \cdot E^{(L)}(\omega) \cdot d\omega \qquad [4.41b]$$

Per la seconda Ipotesi di Kolmogorov, quando τ è entro l'*Inertial Subrange*, cioè quando $1/T_0 << \omega << 1/\tau_\eta$, $E^{(L)}(\omega)$ dipenderà da ω e da ε, ma non da ν. Considerazioni dimensionali portano a dire che la relazione analitica dello *Spettro Lagrangiano della velocità* nell'*Inertial Subrange* sarà data da:

$$E^{(L)}(\omega) = B_0 \varepsilon \cdot \omega^{-2} \qquad [4.42a]$$

Questa relazione è l'equivalente Lagrangiano della legge dei *cinque-terzi* valida per gli spettri Euleriani. La costante B_0 può essere legata al valore della costante C_0 e, come si può dimostrare considerando le relazioni precedenti, tale relazione è:

$$B_0 = \frac{C_0}{\pi} \cong 0.32 C_0 \qquad [4.42b]$$

Il comportamento di $E^{(L)}(\omega)$ nell'*Inertial Subrange* è interessante. Infatti, se si ipotizza che la Funzione di Auto-correlazione normalizzata $\rho(\tau)$ abbia la forma esponenziale seguente:

$$\rho(\tau) = exp[-\tau/T_L] \qquad [4.43a]$$

per ogni τ e quindi anche nell'*Inertial subrange*, la sua rappresentazione spettrale è pari a:

$$E^{(L)}(\omega) = \frac{2\overline{V^2}T_L}{\pi \cdot (1 + \omega^2 T_L^2)} \qquad [4.42b]$$

che, ad alte frequenze, quindi nell'*Inertial Subrange* mostra una dipendenza da ω identica a quanto ottenuto seguendo la Seconda Ipotesi di Kolmogorov e senza ipotizzare alcuna forma analitica specifica per la Funzione di Auto-correlazione. Ciò dimostra che l'approssimazione esponenziale della Funzione di Auto-correlazione Lagrangiana è consistente con quanto previsto dalla Seconda Ipotesi di Kolmogorov.

4.7.3 CARATTERISTICHE DEL CAMPO DI ACCELERAZIONE

Una particella che percorre una traiettoria inevitabilmente cambierà la propria velocità ad ogni istante, salvo che si muova di moto rettilineo uniforme, cosa decisamente poco probabile in una situazione turbolenta. Risulta, quindi, naturale chiedersi quali siano le proprietà statistiche dell'accelerazione. Rimandando a Monin e Yaglom (2007b, pag. 368) per una trattazione più completa, qui di seguito svilupperemo solo quei concetti che ci risulteranno utili per l'introduzione successiva dei modelli di dispersione Lagrangiani a particelle.

Data una particella, la sua accelerazione in un moto turbolento può essere così definita:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x_0}, t) = \lim_{(t-t_0)\to 0} \frac{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x_0}, t) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x_0}, t)}{t - t_0} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\Delta_\tau G}{\tau} \qquad [4.43a]$$

Dato che le caratteristiche statistiche di $\Delta_\tau \mathbf{V}$ sono universali ed isotrope nel caso in cui τ sia sufficientemente piccolo, le proprietà statistiche dell'accelerazione saranno anch'esse universali ed isotrope. Perciò, in una regione sufficientemente piccola dello spazio-tempo il campo $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0,t)$ sarà isotropo e le sue caratteristiche statistiche saranno stazionarie e dipenderanno solo dal tasso medio di dissipazione ε e dalla viscosità ν. Consideriamo, ora, il tensore della correlazione temporale Lagrangiana del campo di accelerazione:

$$B_{o,ij}(\tau) = \overline{A_i(\boldsymbol{x_0}, t) \cdot A_j(\boldsymbol{x_0}, t + \tau)} \qquad [4.43b]$$

Data l'isotropia, nell'*Universal Equilibrium Range* varrà ancora una volta la Prima Ipotesi di Kolmogorov e quindi questo tensore avrà la forma:

$$B_{o,ij}(\tau) = B_o \cdot \delta_{ij}$$
$$B_o(\tau) = \frac{v_\eta^2}{\tau_\eta^2} f\left(\frac{\tau}{\tau_\eta}\right) = \varepsilon^{3/2}\nu^{-1/2} f\left(\varepsilon^{1/2}\nu^{-1/2}\tau\right) \qquad [4.43c]$$

dove $f(x)$ è una funzione universale e $B_0(\tau)$ è la funzione di correlazione dell'accelerazione Lagrangiana. Dato che nell'*Universal Equilibrium Range* le proprietà statistiche dell'accelerazione devono dipendere solo dal tasso di dissipazione ε e dalla viscosità ν, l'analisi dimensionale ci porta a dire che il valore quadratico medio dell'accelerazione turbolenta sarà dato da:

$$\overline{A^2} = K\varepsilon^{3/2}\nu^{-1/2} \qquad [4.44]$$

Da questa relazione si vede come l'accelerazione dipenda dalla viscosità. Per elevati valori del numero di Reynolds, la viscosità influenza solo i moti a piccola scala che corrispondono all'estremo superiore dell'intervallo delle frequenze nell'*Universal Equilibrium Range*. Quindi, si può concludere che l'accelerazione Lagrangiana turbolenta è dominata largamente dai moti a scala molto piccola con $l << \eta$.

Nell'*Inertial Subrange* (quando τ è molto maggiore di τ_η), dovendo essere valida la Seconda Ipotesi di Kolmogorov, $B_0(\tau)$ dovrà dipendere solo da ε e dovrà essere indipendente da ν, quindi l'analisi dimensionale ci conduce alla relazione seguente:

$$B_0(\tau) = D_0\, \varepsilon/\tau \qquad [4.45]$$

dove D_0 è una costante. Di conseguenza il coefficiente di correlazione tra $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0,t)$ e $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0,t+\tau)$ sarà molto piccolo. Perciò l'accelerazione di una particella al tempo t e quella al tempo $t+\tau$, se τ è molto maggiore di τ_η saranno praticamente incorrelate. Questa conclusione rivestirà un ruolo essenziale nei modelli Lagrangiani a particelle per la dispersione degli inquinanti.

4.8 SINTESI OPERATIVA DELL'ANALISI SPETTRALE

Per semplificare l'uso degli importanti risultati ottenuti applicando le Ipotesi di Kolmogorov all'Analisi Spettrale, qui riportiamo in forma più operativa alcune delle relazioni già presentate sia in ambito Euleriano che in ambito Lagrangiano, dando loro una forma che le rende più facilmente applicabili nella pratica.

4.8.1 ANALISI SPETTRALE EULERIANA

Il primo risultato ottenuto applicando l'Analisi Spettrale Euleriana all'*Inertial Subrange* è che gli spettri spaziali monodimensionali delle componenti del moto presentano una semplice dipendenza dal numero d'onda k_1. In particolare, lo spettro monodimensionale (cioè la densità spettrale) della componente longitudinale u del moto è data da:

$$F_{uu}(k_1) = \alpha_u \varepsilon^{2/3} k_1^{-5/3} \qquad [4.46a]$$

cioè la ben nota *Legge dei meno cinque terzi*. Inoltre, gli spettri per le componenti v e w sono strettamente legati allo spettro della componente u e sono pari a 4/3 $F_{uu}(k_1)$. Quindi, introducendo il parametro $\alpha_i = 1, 4/3, 4/3$ quando $i = u, v, w$, si può così definire la relazione per un generico spettro monodimensionale nell'*Inertial Subrange*:

$$F_{ii}(k_1) = \alpha_i \alpha_u \varepsilon^{2/3} k_1^{-5/3} \qquad [4.46b]$$

Va poi ricordato (Kaimal e Finnigan, 1994) che tra le densità spettrali spaziali monodimensionali $F_{ii}(k_1)$ e le relative funzioni di autocorrelazione spaziale $R_i(r_1)$, entrambe relative alla direzione r_1 del vento medio valgono le *Relazioni di Wiener-Khinchine* così espresse:

$$F_{ii}(k_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_i(r_1) \cdot e^{-jk_1 r_1}\, dr_1 \qquad R_i(r_1) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{ii}(k_1) \cdot e^{jk_1 r_1}\, dk_1 \qquad [4.47a]$$

L'analisi spettrale Euleriana ha, come si è visto, una natura spaziale e si riferisce ai numeri d'onda k_1 relativi alla direzione x. Per poter confrontare ciò che da essa si ottiene con la realtà del *PBL*, sarebbe necessario condurre esperimenti in cui si dovrebbero raccogliere misure ad elevata frequenza contemporaneamente in più punti dello spazio. In realtà, le possibilità di misura nel *PBL* sono piuttosto limitate e ciò che è possibile sperare di ottenere in modo relativamente semplice impiegando le tecniche di misura attualmente disponibili è la raccolta di *serie storiche* ad alta frequenza (temporale) in pochi punti dell'atmosfera prossimi alla superficie terrestre. Se però impieghiamo l'Ipotesi di Taylor (ovviamente se applicabile), è possibile passare agevolmente da una visione nel tempo ad una visione nello spazio e viceversa, con la limitazione che la visione spaziale è ridotta alla sola direzione lungo cui spira il vento medio. Con questa limitazione si può quindi passare dagli spettri monodimensionali spaziali funzioni del numero d'onda k_1 (quindi lungo la direzione del vento medio) alle densità spettrali per le singole componenti del moto espresse in termini di frequenza angolare ω (rad·s^{-1}). Dato che tra la densità spettrale nel dominio delle frequenze angolari e la funzione di autocorrelazione nel tempo sussistono le seguenti relazioni di Wiener –Khinchine:

$$\Phi_{ii}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_i(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\,d\tau \qquad R_i(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ii}(\omega)\cdot e^{j\omega\tau}\,d\omega \qquad [4.47b]$$

e ricordando che secondo l'Ipotesi di Taylor (U è la velocità media del vento) $k_1 = \omega/U$, allora è immediato constatare che:

$$F_{ii}(k_1) = U\cdot\Phi_{ii}(\omega) \qquad [4.47c]$$

Esercizio 4.7

Si misuri in un punto P la serie $u_i(t)$. È necessario che σ_{ui}^2 sia la stessa sia che la si ottenga integrando la densità spettrale $F_{ii}(k_1)$, sia che la si ottenga integrando $\Phi_{ii}(\omega)$, cioè:

$$\sigma_i^2 = \int_{-\infty}^{\infty} F_{ii}(k_1)\cdot dk_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ii}(\omega)\cdot d\omega$$

Ma, per l'Ipotesi di Taylor, tra k_1 e ω vale la relazione $k_1 = \omega/U$ dove U è la velocità media del vento. Quindi:

$$dk_1 = \frac{1}{U}d\omega$$

A questo punto possiamo scrivere:

$$\sigma_i^2 = \int_{-\infty}^{\infty} F_{ii}(k_1)\cdot dk_1 = \frac{1}{U}\int_{-\infty}^{\infty} F_{ii}\left(\frac{\omega}{U}\right)\cdot d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ii}(\omega)\cdot d\omega$$

Perché ciò sia vero è necessario che:

$$F_{ii}(k_1) = F_{ii}\left(\frac{\omega}{U}\right) = U\cdot\Phi_{ii}(\omega)$$

Spesso, però, si preferisce evitare l'uso della frequenza angolare ω ed utilizzare al suo posto la frequenza naturale n (Hz). La relazione tra le due definizioni di frequenza è $\omega = 2\pi\cdot n$ e quindi la densità spettrale $S_{ii}(n)$ è legata alla densità spettrale $\Phi_{ii}(\omega)$ dalla relazione:

$$S_{ii}(n) = 2\pi\cdot\Phi_{ii}(\omega) \qquad [4.48a]$$

A questo risultato si perviene con ragionamenti analoghi a quelli fatti nell'*Esercizio 4.7*. Utilizzando tutto ciò, l'importante relazione (4.46b) può essere riscritta nella forma più facilmente utilizzabile:

$$S_{ii}(n) = \alpha_i\alpha_u\left(\frac{U}{2\pi}\right)^{2/3}\varepsilon^{2/3}n^{-5/3} \qquad [4.48b]$$

dove il coefficiente α_u può ora essere agevolmente determinato sperimentalmente e assume un valore pari a 0.5 ± 0.04. Questa relazione può essere dimostrata impiegando una metodologia simile a quella impiegata all'Esempio precedente. Quindi la (4.48b) è del tutto analoga alla (4.46b), solo che questa volta può essere applicata ad una serie storica raccolta con strumenti a risposta rapida in un punto dello spazio, cosa decisamente più semplice da realizzare.

Esercizio 4.8

Nel *SL* in condizioni adiabatiche il tasso medio di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta ε è dato dalla relazione di Similarità:

$$\varepsilon = u_*^3/(kz)$$

dove k è la costante di von Karman (pari a 0.4) e z è la quota di misura pari a 5 m. Determinare la friction velocity u_* se la velocità media del vento è pari a 2 $m\cdot s^{-1}$ e la densità spettrale $S_{uu}(n)$ quando n = 2 Hz risulta pari a 2.047 10^{-3} $m^2\cdot s^{-1}$.

Prendiamo in considerazione la relazione (4.48b). Ricordando che $\alpha_u = 0.5$ e che per la componente u del moto $\alpha_i = 1$, si ha che:

$$S_{uu}(2) = 0.5\left(\frac{2}{2\pi}\right)^{2/3}\varepsilon^{2/3}2^{-5/3} = 0.2332\cdot\varepsilon^{2/3}0.315 = 2.047\cdot10^{-3}$$

quindi $\varepsilon = 0.0047\ m^2s^{-3}$ e, impiegando la relazione di Similarità data, valida nel *SL* in condizioni adiabatiche, si ottiene $u_* = 0.21\ m \cdot s^{-1}$.

Un ragionamento analogo può essere fatto per la densità spettrale della temperatura potenziale, giungendo facilmente alla relazione seguente, valida nell'*Inertial Subrange*:

$$S_{\theta\theta}(n) = \frac{\alpha_T}{(2\pi)^{2/3}} U^{2/3} \varepsilon^{-1/3} N_\theta \cdot n^{-5/3} \qquad [4.49]$$

dove con α_T si è indicata la costante B_θ presente nella relazione (4.49a) che vale circa 0.41±0.04. Per comodità nei calcoli successivi, conviene ricordare che la funzione di autocorrelazione temporale $R_i(\tau)$ è una funzione pari (ciò è vero anche per la funzione di autocorrelazione spaziale) e quindi le relazioni di Wiener-Khinchine si semplificano nel modo seguente:

$$\Phi_{ii}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R_i(\tau) \cdot \cos(\omega\tau)\, d\tau \qquad R_i(\tau) = \int_0^\infty \Phi_{ii}(\omega) \cdot \cos(\omega\tau)\, d \qquad [4.50]$$

La Funzione di Struttura del secondo ordine $D^2_{ii}(\tau)$ è un elemento importante nella Teoria della Turbolenza ed è strettamente legata alla funzione di autocorrelazione dalla relazione:

$$D^2_{ii}(\tau) = 2 \cdot [R_i(0) - R_i(\tau)] \qquad [4.51a]$$

che in termini spettrali diventa:

$$D^2_{ii}(\tau) = 2 \cdot \int_0^\infty [1 - \cos(\omega\tau)] \cdot \Phi_{ii}(\omega) \cdot d\omega \qquad [4.51b]$$

Utilizziamo, ora, in questa relazione la forma spettrale (4.48b) ottenuta dalla Teoria di Kolmogorov applicata all'*Inertial Subrange*. Ciò comporta che:

$$D^2_{ii}(\tau) = \frac{2\alpha_u \alpha_i}{(2\pi)^{2/3}} \cdot (\varepsilon U)^{2/3} \int_0^\infty \frac{[1 - \cos(2\pi n\tau)]}{n^{5/3}} \cdot dn \qquad [4.51c]$$

Ricordando che:

$$\int_0^\infty \frac{[1 - \cos(x)]}{x^{5/3}} \cdot dx = -\frac{\Gamma(-2/3)}{2} \cong 2 \qquad [4.51d]$$

si ha che:

$$D^2_{ii}(\tau) \cong 4\alpha_u \alpha_i \cdot (\varepsilon U)^{2/3} \tau^{2/3} \qquad [4.51e]$$

Consideriamo ora le relazioni (4.13b,c) in cui è presentata la relazione di Similarità che la Teoria di Kolmogorov ha ottenuto per la funzione di struttura del secondo ordine nell'*Inertial Subrange*. Utilizzando l'Ipotesi di Taylor e generalizzando le relazioni (4.13b,c) otteniamo:

$$D^2_{ii}(\tau) = \alpha_i C_k \cdot (\varepsilon U)^{2/3} \tau^{2/3} \qquad [4.52a]$$

che, confrontata con la (4.51e) si ottiene la relazione seguente che lega tra le costanti C_k e α_u:

$$C_k \cong 4\alpha_u \qquad [4.52b]$$

quindi C_k è dell'ordine di 2.

Analoghe considerazioni possono essere fatte anche per la Funzione di Struttura del secondo ordine della temperatura e nell'*Inertial Subrange*, applicando la Seconda ipotesi di Kolmogorov, otteniamo:

$$D^2_{\theta\theta}(\tau) = C_T \varepsilon^{-1/3} N_\theta (U)^{2/3} \tau^{2/3} \qquad [4.52c]$$

dove la costante C_T vale circa 3.2.

4.8.2 ANALISI SPETTRALE LAGRANGIANA

Sintetizziamo ora i risultati ottenuti applicando l'Ipotesi di Kolmogorov nell'*Inertial Subrange* all'analisi spettrale Lagrangiana ed alla Funzione di Struttura Lagrangiana del secondo ordine.

Come abbiamo visto ai Paragrafi 4.7.1 e 4.7.2, se consideriamo la componente del moto di una particella Lagrangiana nella direzione *x*, nell'*Inertial Subrange* lo spettro Lagrangiano e la funzione di Struttura Lagrangiana del secondo ordine sono espressi rispettivamente dalle relazioni di similarità seguenti:

$$\Phi_u^L(\omega) = B_0 \cdot \varepsilon \cdot \omega^{-2} = \frac{B_0}{2\pi}\varepsilon \cdot n^{-2} \qquad D_{Lu}^2\tau = C_0 \cdot \varepsilon \cdot \tau \qquad [4.53]$$

In queste relazioni, col pedice *u* si è indicato che le relazioni scritte si riferiscono non necessariamente ad una componente del moto generica, ma alla componente longitudinale lungo l'asse *x*.

Come nel caso Euleriano, anche in questo caso si può scrivere una relazione che lega tra loro la Funzione di struttura Lagrangiana del secondo ordine alla densità spettrale Lagrangiana che presenta la forma seguente:

$$D_L^2(\tau) = 2\int_0^\infty [1 - \cos(\omega\tau)] \cdot \Phi_u^L(\omega) \cdot d\omega \qquad [4.54a]$$

Tenendo conto della particolare forma che la densità spettrale Lagrangiana assume nell'*Inertial Subrange*, essa può essere riscritta come:

$$D_L^2(\tau) = B_0\varepsilon\int_0^\infty \frac{[1 - \cos(\omega\tau)]}{\omega^2} \cdot d\omega \qquad [4.54b]$$

Ricordando che vale la relazione:

$$\int_0^\infty \frac{[1 - \cos(x)]}{x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \qquad [4.54c]$$

si ha che:

$$D_L^2(\tau) = \pi \cdot B_0.\varepsilon\tau \qquad [4.54d]$$

Infine, confrontando questa relazione con la (4.54b) si vede immediatamente come $C_0 = \pi B_0$.

4.8.3 IL FATTORE DI RALLENTAMENTO DI CORRSIN E LA COSTANTE C_0.

Nella relazione di Similarità per la Funzione di Struttura Lagrangiana compare, come abbiamo visto, il coefficiente C_0. Come sempre quando si considerano grandezze Lagrangiane, le difficoltà sperimentali limitano di molto la determinazione delle grandezze di interesse, in questo caso l'individuazione di un valore certo di questa costante. Molto si è detto su questo argomento, ma il risultato è che per C_0 sono stati proposti valori che vanno da 2 a 10, un intervallo di incertezza piuttosto ampio per una costante. Du (1997) ha trattato estesamente il tema, giungendo ad attribuire a questa costante il valore di 3.0 ± 0.5, mentre Degrazia e Anfossi (1998) hanno sintetizzato buona parte della Bibliografia relativa all'argomento. La grande variabilità dei valori ottenuti nei diversi esperimenti condotti in laboratorio e in atmosfera potrebbe implicare che C_0, in realtà, non sia una costante universale, ipotesi già ventilata da Landau e Lifshitz (1987). Essa potrebbe, invece, dipendere sia dalla componente del moto considerata che dal livello di turbolenza del moto.

Seguendo Degrazia e Anfossi (1998), Anfossi e. al. (2000) e Degrazia e al (2008), ipotizziamo (salvo verificarlo alla fine del ragionamento) che sia la costante C_0 che la costante B_0 (tra loro collegate funzionalmente come abbiamo visto) dipendano dalla componente del moto. In questo caso, da quanto abbiamo visto dovrebbero valere le relazioni di Similarità seguenti entro l'*Inertial Subrange*:

$$D_i^L(\tau) = C_0\varepsilon \cdot \tau \qquad \Phi_{ii}^L(\omega) = B_{0i}\varepsilon \cdot \omega^2 \qquad [4.55]$$

dove ω è la frequenza angolare, ε è il tasso medio di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta e τ è il *time lag*. Come già abbiamo visto in precedenza, tra lo spettro e la Funzione di Struttura del secondo ordine è possibile stabilire una relazione funzionale. In particolare, si ha che:

$$D_i^L(\tau) = 2 \cdot [R_i^L(0) - R_i^L(\tau)] = 2 \int_0^\infty [1 - \cos(\omega\tau)] \cdot E_i^L(\omega) \cdot d\omega \qquad [4.56a]$$

dove R_i^L è la funzione di auto-correlazione Lagrangiana. Rifacendo esattamente i medesimi passaggi matematici fatti al paragrafo precedente, otteniamo:

$$B_{0i} = \frac{C_{0i}}{\pi} \qquad [4.56b]$$

che, a differenza della (4.54d), asserisce che il rapporto tra la costante C_0 per una data direzione del moto e la corrispondente costante B_0 è pari a π.

Se consideriamo ora la descrizione Euleriana del fenomeno, sappiamo che la Funzione di Struttura Euleriana D_i^E e lo Spettro di energia Euleriano S_i^E sono dati rispettivamente da:

$$D_i^E(\tau) = \alpha_i C_S \cdot (\varepsilon \cdot U)^{2/3} \cdot \tau^{2/3} \qquad S_i^E(n) = \frac{\alpha_i \alpha_u}{(2\pi)^{2/3}} (\varepsilon \cdot U)^{2/3} \cdot n^{-5/3} \qquad [4.57a]$$

Anche per la Funzione di Struttura e lo Spettro Euleriano vale una relazione formalmente identica alla (4.56a) e, seguendo i ragionamenti fatti al Paragrafo precedente, giungiamo a dire che:

$$\alpha_u = \frac{C_s}{4} \qquad [4.57b]$$

La chiave per procedere è ricordare che l'energia cinetica turbolenta è la stessa sia nella descrizione Lagrangiana che in quella Euleriana, anche se questa affermazione è vera a rigore solo in condizioni di turbolenza omogenea. Tuttavia, Anfossi e al. (2006), impiegando simulazioni numeriche LES, hanno mostrato come ciò sia sostanzialmente corretto anche in condizioni non completamente omogenee. Ciò comporta, quindi, che l'integrale su tutte le frequenze dello Spettro Euleriano deve essere pari all'integrale su tutte le frequenze dello Spettro Lagrangiano. Va rilevato, però, che la validità delle relazioni che esprimono sia lo spettro Euleriano che lo spettro Lagrangiano è ristretta all'*Inertial Subrange* e quindi, rispettivamente per $n > n_E$ $1/T_i^E$ e $n > n_L = 1/T_i^L$. Integrando analiticamente da n_L a ∞ lo spettro Lagrangiano e da n_E a ∞ lo spettro Euleriano ed uguagliando i risultati ottenuti si ha che:

$$\frac{B_{0i}}{2\pi} \frac{\varepsilon}{n_L} = \sigma_{Li}^2 = \sigma_{Ei}^2 = \frac{3\alpha_i \alpha_u}{2 \cdot (2\pi)^{2/3}} \left(\frac{\varepsilon U}{n_E}\right)^{2/3} \qquad [4.58a]$$

e quindi:

$$\frac{T_i^L}{T_i^E} = \frac{n_E}{n_L} = \frac{3}{2} \frac{(\alpha_i \alpha_u)^{3/2}}{B_{0i}} \frac{U}{\sigma_i} = \beta_i \qquad [4.58b]$$

Siamo giunti quindi alla relazione di Corrsin (1963) secondo cui il rapporto tra tempo caratteristico Lagrangiano ed Euleriano per una componente del moto u_i è pari al *fattore di rallentamento* β_i cui siamo arrivati ora in maniera estremamente convincente. Ciò che c'è di diverso rispetto alla relazione originale di Corrsin è il fatto che ogni componente del moto abbia un proprio fattore di rallentamento β_i.

C'è un numero rilevante di lavori che confermano la relazione seguente che esprime il fattore di rallentamento:

$$\beta_i = \gamma \frac{U}{\sigma_i} \qquad [4.59a]$$

dove γ è una costante. Questa relazione è stata dimostrata esattamente da Wandel e Kofoed-Hansen (1962) in condizioni di completa omogeneità. In questo caso $\gamma = (\pi)^{1/2}/4 = 0.44$. Quando le situazioni non sono omogenee, sperimentalmente si è visto che la costante γ si viene a trovare

nell'intervallo 0.4 ÷ 0.7. Degrazia e Anfossi (1998) hanno individuato per questa costante il valore di 0.55 che conferma quanto appena detto.

Ritornando ora alla relazione (4.58b), è possibile ora ottenere una relazione tra le costanti γ, α_u, α_i e B_{0i}:

$$\gamma = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \frac{(\alpha_i \alpha_u)^{3/2}}{B_{0i}} \qquad [4.59b]$$

Ma, dalla (4.56b) e utilizzando il fatto che $\alpha \approx C_s/4$, si ottiene una relazione che pone il coefficiente C_{0i}, differente per le varie componenti del moto, in relazione a γ e C_s, entrambe costanti:

$$C_{0i} = \frac{\pi}{\gamma}\left(\frac{3}{8}\alpha_i C_s\right)^{3/2} \qquad [4.59c]$$

da cui si ha che:

$$C_{0u} = \frac{(C_s)^{3/2}}{1.39\gamma} \qquad C_{0v} = C_{0w} = \frac{(C_s)^{3/2}}{0.90\gamma} \qquad [4.59d]$$

Se si considera $C_s = 2$ e $\gamma = 0.55$, otteniamo $C_{0u} = 4.14$ e $C_{0v} = C_{0w} = 7.9$. Il valore relativo alla componente del moto lungo l'asse x è confermato da Hanna (1981), che ha trovato C_{0u} nell'intervallo 4.0 ± 2.0, da Anfossi e al. (2000) che hanno trovato il valore 4.3 e da Rizza e al. (2006) che hanno trovato C_{0u} nell'intervallo 4.3 ± 0.3.

PROBLEMI

P04.01 Dimostrare la validità della relazione (4.7)

P04.02 Dimostrare che un disturbo con dimensione caratteristica pari alla lunghezza di Kolmogorov η ha Numero di Reynolds pari a 1.

P04.03 Consideriamo disturbi entro l'Universal Equilibrium Range la cui dimensione l_n è legata alla dimensione l_0 dei disturbi a scala maggiore dalla relazione $l_n = l_0\, r^n$ (dove $n = ½$). Se lo shear stress S_l tipico di un disturbo di dimensione l è pari a $S_l \sim \nu_l/l$, trovare una relazione che esprima lo shear in funzione del tasso di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta ε e di l_0, valido per ogni disturbo di dimensione l_n.

P04.04 Dimostrare la relazione (4.11b)

P04.05 Dimostrare la relazione (4.17c)

P04.06 Si considerino ancora i disturbi considerati al problema precedente e si individui una relazione che esprima il tempo caratteristico t_n in funzione di l_0 e di ε

P04.07 Utilizzando la (4.14d) dimostrare che la lunghezza di scala L_{11} è il doppio di L_{22}.

P04.08 Se la microscala di Taylor è $\lambda = 0.09$ m e la microscala di Kolmogorov è $\mu = 0.002$ m, quanto valgono l'energia cinetica turbolenta E ed il suo tasso di dissipazione ε? Che dimensioni ha ε? (Si ricordi che la viscosità dinamica ν è pari a $1.46 \cdot 10^{-5}$ m^{2}s^{-1}).

P04.09 Si consideri una situazione adiabatica in cui $u_* = 0.3$ m·s^{-1}. In questo caso il tasso medio di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta è dato dalla relazione di Similarità:

$$\varepsilon = \frac{u_*^3}{kz}$$

dove k è la costante di von Karman (0.4) e z è la quota di misura pari a 3 m. Se la velocità media del vento è pari a 3 m·s^{-1}, individuare la relazione analitica che descrive nell'Inertial Subrange la densità spettrale $S_{uu}(n)$ in funzione della frequenza n (Hz) impiegando per α_u il valore 0.55.

P04.10 Se $S_{uu}(n) = 2.0474 \cdot 10^{-3}$ m^2·s quando $n = 2$ Hz, determinare il tasso medio di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta ε quando la velocità media del vento è pari a 2 m·s^{-1}.

P04.11 Se $S_{uu}(n) = 2.0474 \cdot 10^{-3}$ m^2·s quando $n = 3$ Hz, determinare la velocità media del vento U se il tasso medio di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta vale $\varepsilon = 0.0135$ m^{2}s^{-3}.

P04.12 Ipotizziamo di misurare ad una quota z entro il *SL* la densità spettrale $S_{uu}(n)$ e $S_{\theta\theta}(n)$ con un anemometro ultrasonico triassiale che consente anche di determinare la velocità media del vento U e la temperatura virtuale media dell'aria T. Stimare il tasso medio di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta ε ed il tasso medio di dissipazione della semi-varianza della temperatura N dal valore assunto dalle due densità spettrali ad una specifica frequenza n (per es. a 3 Hz). Ipotizziamo, poi, di essere in situazioni convettive. In questo caso:

$$\epsilon = \frac{u_*^3}{kz} \cdot \left(1 + 0.5 \left|\frac{z}{L}\right|^{2/3}\right)^{3/2} \qquad N = \frac{u_* T_*^2}{kz} \cdot \left(1 + 16 \left|\frac{z}{L}\right|\right)^{-1/2}$$

Individuare una relazione analitica che lega tra loro il parametro di stabilità |z/L| ed il flusso turbolento di calore sensibile H_0 alle due densità spettrali.

P04.13 Ipotizziamo di misurare ad una quota z entro il *SL* la densità spettrale le funzioni di struttura Euleriane $D^2_{uu}(\tau)$ e $D^2_{\theta\theta}(\tau)$. Individuare una relazione analitica che lega il tasso medio di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta ε ed il tasso medio di dissipazione della varianza della temperatura N al time lag τ.

5. IL MODELLO OPERATIVO DEL PBL

Il modello fluidodinamico, introdotto al Cap.2, pur formalmente esatto, è del tutto inapplicabile ai fini pratici per la non linearità intrinseca che lo rende ipersensibile anche a piccole perturbazioni delle condizioni iniziali e al contorno. Oltre a ciò, l'elevato numero di Reynolds che caratterizza la parte bassa della Troposfera, costantemente in regime turbolento, rende impossibile, con le tecnologie di misura ad oggi disponibili, determinare sperimentalmente con precisione le condizioni iniziali ed al contorno di una porzione anche limitata del *PBL*. Supponendo pure che queste difficoltà vengano meno (cosa decisamente improbabile), ci si troverebbe comunque di fronte ad una difficoltà *computazionale* insormontabile. Infatti, del modello fluidodinamico del *PBL* non si conoscono soluzioni analitiche relative a situazioni vicine a quelle reali e quindi sarebbe necessario procedere ad una sua risoluzione numerica che passa attraverso la discretizzazione del dominio di indagine in un numero finito di celle di calcolo nello spazio e nel tempo. Per non perderci qualcosa di importante nella risoluzione numerica del sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che costituiscono il modello, è necessario che le dimensioni spaziali e temporali della cella di calcolo siano inferiori alle dimensioni spaziali e temporali caratteristiche dei fenomeni che caratterizzano l'evoluzione della bassa atmosfera. Ma nel *PBL*, sempre in regime turbolento, sono presenti vortici di varie dimensioni che nascono, evolvono e si frammentano trasferendosi energia l'un l'altro, fino a scomparire generando calore. Quindi, la discretizzazione del dominio di calcolo dovrebbe essere tale da consentire la descrizione di tutte queste scale spaziali e temporali. Abbiamo visto che, dal punto di vista fluidodinamico, il *PBL* può essere caratterizzato da una lunghezza di scala L (dell'ordine di 10^3 m in senso verticale e dell'ordine di 10^5 m in orizzontale) e da una velocità di scala U (dell'ordine di 10 $m \cdot s^{-1}$), oltre che dalla viscosità cinematica ν pari a circa $1.4 \cdot 10^{-5}$ $m^2 \cdot s^{-1}$. Quindi il numero di Reynolds $Re = UL/\nu$ è di circa $10^9 \div 10^{11}$ (a seconda che si consideri la scala caratteristica verticale o quella orizzontale) e non ci sono dubbi che il *PBL* sia in regime turbolento. Inoltre, i grandi vortici, che si sviluppano dal suolo nelle situazioni convettive, rappresentano dimensionalmente l'estremo superiore dei vortici presenti nel *dominio*. Dato che essi occupano quasi tutta l'estensione verticale del *PBL*, la loro dimensione caratteristica l è prossima a L (e quindi dell'ordine di 10^3 m) e la loro velocità caratteristica u è prossima a U. Anche per questi vortici è possibile definire un Numero di Reynolds $R_t = ul/\nu$ sicuramente dell'ordine di 10^9. Questi sono i vortici più grandi che possono risiedere nel *PBL*, ma la loro vita è decisamente breve, visto che possiedono un'instabilità intrinseca che li spinge a frammentarsi in vortici di dimensioni inferiori che, a loro volta, si frammentano ulteriormente dando luogo a vortici sempre più piccoli finché questi raggiungono dimensioni tali da consentire alla viscosità una loro completa distruzione. Come si è visto al Cap. 4, secondo l'ipotesi di Kolmogorov, la lunghezza caratteristica dei vortici che vengono catturati dalle forze di dissipazione viscosa è la *lunghezza di scala di Kolmogorov* $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ cui corrisponde una *velocità di scala* $u_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4}$ dove ε è il tasso medio di dissipazione di energia cinetica turbolenta, che incontreremo più in là nel Capitolo. Per ora è sufficiente considerare ε come l'energia cinetica per unità di massa e di tempo trasferita da un vortice di dimensione generica ai vortici prodotti dalla sua frammentazione e può essere espressa approssimativamente come $\varepsilon \approx u^3/l$. Quindi, se $u \sim 10$ $m \cdot s^{-1}$, $l \sim 10^3$ m, il tasso medio sarebbe pari a $\varepsilon \sim 1$ $m^2 \cdot s^{-3}$ e perciò la lunghezza di scala sarebbe dell'ordine $\eta \approx 2 \cdot 10^{-4}\ m$ e la velocità di scala sarebbe $u_\eta \approx 0.06\ ms^{-1}$, mentre il tempo caratteristico si ridurrebbe a $\tau_\eta = \eta/u_\eta \approx 3 \cdot 10^{-3}$ s. Quindi le dimensioni caratteristiche dei vortici presenti nel *PBL* hanno dimensioni che variano da $10^3\ m$ (i grandi vortici convettivi) a $10^{-3}\ m$ (i piccoli vortici prossimi ad essere dissolti in calore dalle forze viscose). Un dominio spaziale in grado di rappresentare (*risolvere*) tutte le scale presenti nel *PBL* dovrebbe essere un parallelepipedo con dimensione

orizzontale dell'ordine di 10^5 m e con dimensione verticale dell'ordine di 10^3 m, mentre la dimensione della cella elementare dovrebbe essere dell'ordine della più piccola scala da risolvere, cioè dovrebbe essere un cubo di dimensione circa pari a η. Quindi il numero di celle che il modello dovrebbe considerare per riuscire a risolvere le varie scale presenti nel *PBL* dovrebbe essere dell'ordine di 10^{21}, un numero enorme e ben superiore alle capacità di calcolo dei computer attualmente disponibili. In un contesto reale non ci resta quindi altra scelta che abbandonare ogni speranza di poter utilizzare direttamente il modello fluidodinamico del *PBL* ed adottare definitivamente il modello statistico introdotto ai Capitoli precedenti, secondo cui:

1. le variabili meteorologiche vengono considerate campi stocastici;
2. tali variabili, secondo l'ipotesi di Reynolds, sono la somma di un valor medio (lentamente variabile nel tempo e deterministico) e di una fluttuazione turbolenta di natura puramente stocastica;
3. valgono ancora le equazioni che costituiscono il modello fluidodinamico del *PBL*, che però ora dovrebbero essere riscritte tenendo conto dell'ipotesi di Reynolds ed evidenziando i vari momenti statistici centrali.

A rigore, adottando l'ipotesi di Reynolds, adottiamo pure come media il valore atteso impiegato in Statistica, anche se tale definizione a rigore non la si può usare in un contesto operativo. In pratica ipotizzeremo sempre che i processi atmosferici siano anche *ergodici* e quindi che la media d'insieme e la media temporale coincidano. Questo è il modo tradizionale di operare, quello impiegato nei normali modelli meteorologici e quello che useremo qui di seguito, anche se oggi è stata sviluppata una classe di modelli alla cui base sta la media spaziale. Tali modelli sono stati denominati *LES* (*Large Eddy Simulation Model*) e li tratteremo brevemente nell'**Appendice 5**.

Per concludere va sottolineato come a questo punto *abbandoniamo di fatto il mondo fisico del PBL* e lo sostituiamo con un *mondo astratto alternativo totalmente stocastico* e ciò *filosoficamente* non è cosa di poco conto, anche se è l'unico modo possibile di procedere. I due mondi coinciderebbero armonicamente se ci si trovasse in una situazione di ergodicità, proprietà non soddisfatta in generale nella realtà fisica del *PBL*. Comunque, alla luce di decenni di applicazione pratica di questa metodologia operativa, si può asserire che le deduzioni che potremo trarre dal modello che vede il *PBL* come un insieme interconnesso di campi stocastici rappresenta abbastanza bene il mondo reale anche se con alcuni *caveat*.

5.1 LE PROPRIETÀ DELLA MEDIA

Per prima cosa è opportuno riformulare dettagliatamente l'ipotesi proposta nel 1895 da Osborne Reynolds (già brevemente introdotta al paragrafo 3.1.4.1) secondo cui il valore istantaneo di ogni variabile è la somma di una quantità *media* e di una fluttuazione *turbolenta*. Visto che abbiamo abbandonato il mondo fisico e abbiamo adottato il mondo stocastico, le variabili che consideriamo sono tutte stocastiche e la media da adottare non può che essere la media d'insieme che, per una variabile generica *A*, sarà indicata come $\bar{A}$. Le grandezze fisiche interessate dalle equazioni di bilancio *istantanee* si possono decomporre in media e fluttuazione nel modo seguente:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' \qquad v = \bar{v} + v' \qquad w = \bar{w} + w' \\ \theta_v &= \overline{\theta_v} + \theta_v{}' \qquad p = \bar{p} + p' \qquad \rho = \bar{\rho} + \rho' \\ q_v &= \overline{q_v} + q_v{}' \qquad q_L = \overline{q_L} + q_L{}' \qquad q_S = \overline{q_S} + q_S{}' \end{aligned} \tag{5.1}$$

Per poter utilizzare correttamente l'ipotesi di Reynolds, bisogna ricordare le principali proprietà cui deve soddisfare la media di insieme. Date due generiche variabili stocastiche *A* e *B* con fluttuazioni *a'* e *b'* e *c* è una costante generica, indicando col simbolo $\overline{(\cdots)}$ il valor medio statistico (cioè il valore atteso), le proprietà della media sono:

1. Proprietà 1: la media della media è la media stessa, quindi: $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$;
2. Proprietà 2: la media delle fluttuazioni è nulla: $\overline{a'} = 0$;
3. Proprietà 3: la media del prodotto di una costante *c* per una variabile stocastica è pari al prodotto della costante per il valor medio della variabile: $\overline{cA} = c \cdot \bar{A}$;
4. Proprietà 3: la media possiede la proprietà distributiva, cioè: $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$;
5. Proprietà 4: il valor medio del prodotto di una variabile stocastica *B* per il valor medio di una variabile *A* è pari al prodotto dei due valori medi, cioè: $\overline{\bar{A} \cdot B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$;

Tutte queste proprietà sono facilmente dimostrabili, sfruttando il fatto che il valor medio di una variabile stocastica *X*, distribuita secondo una qualsiasi funzione di densità di probabilità *p*(*x*), per definizione è espresso come:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) \cdot dx \qquad [5.2a]$$

e che ogni funzione *Q*(*X*) di tale variabile ha il valor medio dato da:

$$\overline{Q(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x) \cdot p(x) \cdot dx \qquad [5.2b]$$

Impiegando quest'ultima proprietà, si può ottenere un'ulteriore importante proprietà della media. Si ipotizzi, infatti, che una variabile stocastica *X* sia funzione del tempo *t*, cioè *X*(*t*) e che la funzione *Q*(*X*) = ∂*X*(*t*)/∂*t*. Allora, nell'ipotesi che *p*(*x*) sia indipendente dal tempo, si ha:

$$\overline{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial x}{\partial t} \cdot p(x) \cdot dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty x} \cdot p(x) \cdot dx = \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} \qquad [5.2c]$$

quindi l'operatore derivata temporale (e spaziale, come si può facilmente dimostrare) commuta con l'operatore di media statistica. Si può anche verificare facilmente che:

$$\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial t}\right)} = 0 \qquad [5.2d]$$

Prima di procedere, è interessante calcolare il valor medio del prodotto di due grandezze istantanee *A* e *B*. Decomponendo entrambe le grandezze secondo l'ipotesi di Reynolds, mediando il prodotto, sviluppando i termini ed applicando le proprietà della media d'insieme si ha che:

$$\begin{gathered}\overline{A \cdot B} = \overline{(\bar{A} + a') \cdot (\bar{B} + b')} = \overline{\bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A}b' + a'\bar{B} + a'b'} = \\ \overline{\bar{A} \cdot \bar{B}} + \overline{\bar{A}b'} + \overline{\bar{B}a'} + \overline{a'b'} = \bar{A} \cdot \bar{B} + 0 + 0 + \overline{a'b'} = \\ \bar{A} \cdot \bar{B} + \overline{a'b'}\end{gathered} \qquad [5.2e]$$

cioè il valor medio del prodotto di due variabili stocastiche è la somma del prodotto:

- dei rispettivi valori medi e
- della loro covarianza $\overline{a'b'}$ che non è necessariamente nulla.

Come si dimostrerà in seguito, la principale differenza tra le equazioni con variabili istantanee e quelle con variabili medie sta proprio nella presenza in queste ultime dei momenti di secondo ordine (*Reynolds Stress* e *Flussi di Calore turbolento*) che in generale *non possono essere trascurati*.

5.2 LE EQUAZIONI PER LE VARIABILI MEDIE

Note le proprietà della media statistica e adottata l'ipotesi di scomposizione delle variabili atmosferiche istantanee in una componente media e in una fluttuazione turbolenta, non ci resta che considerare una ad una le equazioni fluidodinamiche ricavate al Cap. 2 ed ottenere le corrispondenti equazioni per il momento statistico del primo ordine, cioè per la media.

5.2.1 L'EQUAZIONE DI STATO DEI GAS

Si consideri l'equazione di stato dei gas (2.29b) scritta per le variabili istantanee. Sostituendo ogni occorrenza di variabile istantanea con la rispettiva decomposizione di Reynolds si ottiene:

$$\frac{\bar{p}}{R_d} + \frac{p'}{R_d} = [\bar{\rho} + \rho'] \cdot [\overline{T_v} + T'_v] \qquad [5.3a]$$

che, sviluppando i vari termini, mediando ed impiegando le proprietà della media, diventa:

$$\frac{\bar{p}}{R_d} = \bar{\rho} \cdot \overline{T_v} + \overline{\rho' T'_v} \qquad [5.3b]$$

Dato che l'ultimo termine (la covarianza tra la densità dell'aria e la temperatura virtuale) è generalmente molto più piccolo degli altri e quindi trascurabile, l'equazione di stato dei gas, scritta per le variabili medie, diventa con buona approssimazione:

$$\bar{p} = R_d \cdot \bar{\rho} \cdot \overline{T_v} \qquad [5.3c]$$

Quindi con ottima approssimazione l'equazione di stato dai gas mantiene la stessa struttura analitica sia che venga espressa in termini di variabili istantanee che in termini di variabili medie.

Ottenuta la prima relazione del modello Fluidodinamico scritto per le variabili medie, è interessante individuare delle relazioni tra i rapporti delle fluttuazioni con i rispettivi valori medi per la pressione, la densità e la temperatura virtuale. A tal fine, sottraendo la relazione (5.3c) tra le variabili medie dalla relazione (5.3a) tra le variabili istantanee (decomposte in valor medio e fluttuazioni) e dividendo il tutto per la (5.3c) si ottiene:

$$\frac{p'}{\bar{p}} = \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{T'_v}{\overline{T_v}} + \frac{\rho' T'_v}{\bar{\rho}\overline{T_v}} \qquad [5.4a]$$

Considerazioni di scala evidenziano come il denominatore dell'ultimo termine a destra sia di norma maggiore del proprio numeratore; quindi, la relazione precedente si riduce a:

$$\frac{p'}{\bar{p}} = \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{T'_v}{\overline{T_v}} \qquad [5.4b]$$

che è la *legge linearizzata delle perturbazioni nei gas ideali*.

Nel *PBL* tipici valori di perturbazione di pressione e di temperatura virtuale sono rispettivamente 0.1 mbar e 1 K e perciò il rapporto $p'/\bar{p}$ è normalmente molto inferiore a $T'_v/\overline{T_v}$. Ciò comporta che la legge linearizzata dei gas possa essere ulteriormente semplificata nella forma seguente:

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{T'_v}{\overline{T_v}} \qquad [5.4c]$$

e con argomenti analoghi si giunge anche ad un'utile forma della relazione precedente in cui compare la temperatura potenziale virtuale, cioè:

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{\theta'_v}{\overline{\theta_v}} \qquad [5.4d]$$

5.2.2 L'EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Il bilancio di massa scritto per le variabili istantanee è dato, in generale, dall'equazione (2.15a), mentre la (2.17) è la sua versione *anelastica* e la (2.18) la sua forma *incomprimibile*. Si consideri, inizialmente, la forma completa (2.15a). Introducendo in essa la decomposizione di Reynolds per la densità e le componenti del vento e sviluppando i vari calcoli, si ottiene:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \cdot \overline{u_\alpha})}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \overline{\rho' u'_\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad [5.5a]$$

L'ultimo termine di sinistra è la divergenza del flusso turbolento della densità che, a priori, non dovrebbe essere nullo, ma considerazioni di scala ed evidenze sperimentali mostrano come di fatto tale termine sia trascurabile. Quindi, la forma generale dell'equazione di continuità, scritta per le variabili medie, risulta ben rappresentata dall'equazione *prognostica* seguente:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \cdot \overline{u_\alpha})}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad [5.5b]$$

che è scritta *in forma di flusso*, cioè il termine *avvettivo* è rappresentato dalla divergenza del prodotto tra la densità media dell'aria ed il valor medio delle componenti della velocità, che è poi il flusso medio di massa.

Se si considera ora sia la *forma anelastica* che la *forma incomprimibile* dell'equazione, ragionamenti analoghi portano alle relazioni seguenti, che esprimono le loro controparti scritte per le variabili medie:

$$\frac{\partial (\bar{\rho}_0 \cdot \overline{u_\alpha})}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad [5.5c]$$

$$\frac{\partial \overline{u_\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad [5.5d]$$

Quanto ottenuto sta a significare che la forma matematica dell'equazione di continuità scritta per le variabili medie è del tutto identica all'analoga equazione scritta per le variabili istantanee. Ciò è vero *esattamente* solo per la forma incomprimibile ed è un'ottima approssimazione per la forma generale e per la forma anelastica. Va inoltre notato che nella forma anelastica (5.5c) è presente il valore di *background* sinottico ρ_0 della densità dell'aria. Un'approssimazione altrettanto buona dell'equazione di continuità in forma anelastica (Pielke, 2002) è data ripetendo i ragionamenti di scala direttamente sulla (5.5b) ed ottenendo:

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \cdot \overline{u_\alpha})}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad [5.5e]$$

che poco o nulla differisce dalla (5.5c), se non per la presenza del valor medio della densità dell'aria al posto del suo valore di *background* sinottico.

È interessante poi notare come, considerando la forma incomprimibile, l'equazione di continuità rappresenti una *relazione diagnostica* sia per le componenti medie del vento che per le rispettive fluttuazioni, come facilmente si può dimostrare. In effetti, è immediato dimostrare come nel caso incomprimibile valga la relazione:

$$\frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad [5.5f]$$

Per concludere, è opportuno illustrare con un esempio ciò che esprime l'equazione di continuità (Stull, 2000) e per questo conviene considerarne la forma incomprimibile e *specializzarla* per un caso particolare. Si consideri, infatti un volume di controllo a forma di parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi coordinati e di lunghezza Δx, Δy e Δz. In questo caso, la (5.5d) può essere approssimata come:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta y} + \frac{\Delta w}{\Delta z} \cong 0 \qquad [5.5g]$$

se le dimensioni del volume di controllo sono *sufficientemente piccole*. Consideriamo ora il caso concreto rappresentato nella **Fig. 5.1** in cui è evidenziata con frecce la velocità dell'aria entrante ed uscente dalle varie facce del volume di controllo. La lunghezza delle frecce è direttamente proporzionale alla velocità. Questa situazione particolare evidenzia che:

- nella direzione *x* la velocità dell'aria che entra nel volume di controllo è inferiore alla velocità dell'aria uscente da esso. Ciò significa che il flusso di massa entrante nel volume è inferiore a quello uscente. Una situazione di questo genere è chiamata *divergenza*;
- nella direzione *z* la velocità verticale entrante è superiore a quella uscente; quindi, il flusso di massa entrante nel volume è superiore a quello uscente. Una situazione di questo genere è detta *convergenza*;
- il flusso di massa entrante in direzione *y* è uguale a quello uscente e in questa direzione non si ha né divergenza né convergenza.

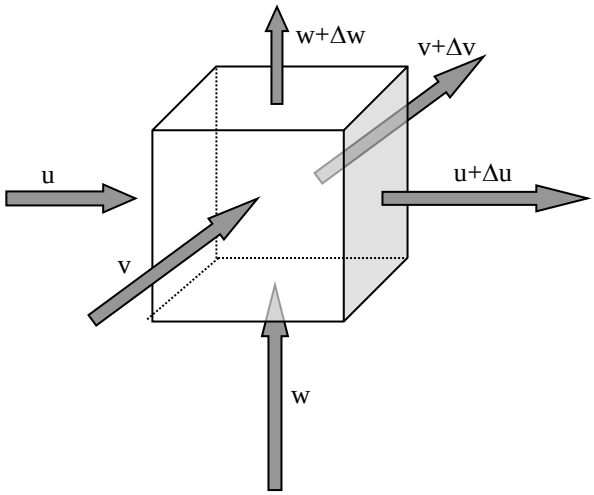


Fig. 5.1: equazione di continuità, divergenza e convergenza.

In sostanza, la convergenza in una o due direzioni deve essere bilanciata dalla divergenza nelle direzioni rimanenti.

5.2.3 LE EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES

Il punto di partenza per ottenere le equazioni del moto per le componenti medie della velocità dell'aria (del vento, quindi) è costituito dalle corrispondenti equazioni per le componenti istantanee la cui espressione generica, in notazione tensoriale, è pari a:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + f \varepsilon_{i\alpha 3} u_\alpha + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha^2} \qquad [5.6]$$

dove si vede come ciascuna delle tre equazioni istantanee del moto sia costituita da sei termini distinti: il tasso di variazione della componente del moto u_i, la sua avvezione, il contributo derivante dai gradienti di pressione, la componente dovuta alla gravità, la componente dovuta alla rotazione terrestre ed il termine viscoso.

5.2.3.1 Mediazione delle equazioni

Per l'ipotesi di Reynolds, le componenti del moto, la densità e la pressione possano essere scomposti nei rispettivi valori medi e nelle fluttuazioni turbolente, ottenendo così nuove equazioni, sempre di sei termini, con le caratteristiche seguenti:

- *primo termine*: l'operatore media e l'operatore derivata commutano tra loro, quindi:

$$\overline{\frac{\partial(\overline{u}_\iota + u_\iota)}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{u}_\iota}{\partial t} \qquad [5.7a]$$

- *secondo termine*: questo termine non lineare è estremamente interessante, infatti, sviluppando i prodotti, si ha che:

$$\overline{(\overline{u_\alpha} + u'_\alpha)\frac{\partial(\overline{u}_\iota + u'_\iota)}{\partial x_\alpha}} = \overline{\overline{u_\alpha}\frac{\partial(\overline{u}_\iota)}{\partial x_\alpha}} + \overline{u'_\alpha \frac{\partial(\overline{u}_\iota)}{\partial x_\alpha}} + \overline{\overline{u_\alpha}\frac{\partial u'_\iota}{\partial x_\alpha}} + \overline{u'_\alpha \frac{\partial u'_\iota}{\partial x_\alpha}} \qquad [5.7b]$$

  È immediato verificare che il secondo ed il terzo termine di destra sono nulli e quindi:

$$\overline{(\overline{u_\alpha} + u'_\alpha)\frac{\partial(\overline{u}_\iota + u'_\iota)}{\partial x_\alpha}} = \overline{u_\alpha}\frac{\partial(\overline{u}_\iota)}{\partial x_\alpha} + \overline{u'_\alpha \frac{\partial u'_\iota}{\partial x_\alpha}} \qquad [5.7c]$$

  L'ultimo termine dello sviluppo è insolito e, come si vedrà, è di fatto un flusso turbolento. Di esso si tratterà successivamente.

- *terzo termine*: la trattazione semplificata, ma estremamente realistica, di questo termine si basa sulla constatazione che:

$$\frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \cong \frac{1}{\bar{\rho}'} \qquad \frac{\partial p'}{\partial x_i} = 0 \qquad [5.7d]$$

  quindi:

$$-\overline{\frac{1}{(\bar{\rho} + \rho')} \cdot \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_\iota}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \qquad [5.7e]$$

- *quarto termine*: è uno scalare e non risulta modificato dall'operazione di mediazione.

- *quinto termine*: non ci sono dubbi di sorta nell'affermare che:

$$\overline{f\varepsilon_{\iota\alpha 3}(\overline{u_\alpha} + u'_\alpha)} = f\varepsilon_{i\alpha 3}\overline{u_\alpha} \qquad [5.7f]$$

- *sesto termine*: esso condensa l'effetto delle forze viscose e, una volta introdotta la scomposizione di Reynolds per le componenti del moto, diventa:

$$\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha^2} = \nu\frac{\partial^2(\overline{u}_\iota + u'_i)}{\partial x_\alpha^2} = \nu\frac{\partial^2 \overline{u}_\iota}{\partial x_\alpha^2} + \nu\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_\alpha^2} \qquad [5.7g]$$

  Mediando e ricordando che l'operatore media e l'operatore derivata commutano tra loro e che il valor medio delle fluttuazioni è nullo, si ha:

$$\overline{\nu\frac{\partial^2 u_\iota}{\partial x_\alpha^2}} = \nu\frac{\partial^2 \overline{u}_\iota}{\partial x_\alpha^2} \qquad [5.7h]$$

Sulla base di tutto ciò, le equazioni prognostiche delle componenti cartesiane medie del moto risultano date in notazione tensoriale da:

$$\frac{\partial \overline{u}_\iota}{\partial t} + \overline{u_\alpha}\frac{\partial \overline{u}_\iota}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \delta_{i3}g + f\varepsilon_{i\alpha 3}\overline{u_\alpha} - \overline{u'_\alpha \frac{\partial u'_\iota}{\partial x_\alpha}} + \nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha^2} \qquad [5.8]$$

dove:

- il *primo termine* rappresenta il tasso di variazione di quantità di moto media per unità di massa, cioè l'accelerazione di una particella d'aria in atmosfera;
- il *secondo termine* descrive l'avvezione di quantità di moto media causata dal moto medio delle masse d'aria;

- il *terzo termine* descrive l'effetto accelerante derivato dalle forze legate al gradiente della pressione media;
- il *quarto termine* descrive l'azione verticale della gravità;
- il *quinto termine* descrive l'influenza della rotazione terrestre (effetto di Coriolis);
- il *sesto termine* (scritto in termini tensoriali e, quindi, equivalente a nove termini distinti, tre per ogni componente cartesiana) rappresenta l'influenza degli *stress di Reynolds* sul moto medio. La presenza di quest'ultimo termine implica che la *turbolenza deve sempre essere considerata*, anche quando si è interessati solamente alle variabili medie. Spesso questo termine è dello stesso ordine di grandezza (a volte anche maggiore) degli altri termini presenti nell'equazione;
- il s*ettimo termine* rappresenta l'azione dissipativa delle forze viscose. Lontano dal suolo questo termine può essere trascurato.

Esercizio 5.1

Si può mostrare come il termine che rappresenta l'azione dissipativa delle forze viscose nella (5.8) sia a tutti gli effetti trascurabile rispetto agli altri termini dell'equazione.

Se U è la tipica velocità orizzontale di scala (per es. 10 ms^{-1}) e L è la tipica lunghezza di scala del *PBL* (per es. 100 m), ignorando la velocità verticale, l'ordine di grandezza del termine avvettivo T della (5.8) è:

$$T = u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \approx \frac{U^2}{L}$$

Il termine di dissipazione viscosa D, invece, può essere approssimato come:

$$D = \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha^2} \approx \nu \frac{U}{L^2}$$

L'importanza del termine dissipativo rispetto al termine di trasporto la si ottiene dal loro rapporto. In particolare:

$$\frac{T}{D} \approx \frac{UL}{\nu} = Re$$

Impiegando i valori numerici attributi alle scale di velocità e di lunghezza e ricordando che $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}$ m^2s^{-1}, Re è dell'ordine di 10^8 valore tipico per il *PBL* turbolento, quindi $D \approx 10^{-8}T$, cioè del tutto trascurabile.

La forma con cui sono espressi i termini *turbolenti* è scomoda e conviene individuarne una congruente con il concetto di Stress di Reynolds e di Flussi Turbolenti (Cap. 3). Per riscrivere il penultimo termine della (5.8) è necessario utilizzare l'equazione di continuità in una delle due forme semplificate: o la forma anelastica o quella incomprimibile. Si consideri la forma anelastica (2.17) per le variabili istantanee. La sua mediazione conduce inevitabilmente alla (5.5c). Introducendo nella forma istantanea la decomposizione di Reynolds e sottraendo la (5.5c) si ottiene che:

$$\frac{\partial(\rho_0 \cdot u'_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad [5.9a]$$

Grazie a questa relazione, il termine *turbolento* dell'equazione media di Navier-Stokes diventa:

$$\overline{u'_\alpha \frac{\partial u'_\iota}{\partial x_\alpha}} = \frac{1}{\rho_0}\overline{\left[\rho_0 u'_\alpha \frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\alpha}\right]} = \frac{1}{\rho_0}\overline{\left[\frac{\partial(\rho_0 u'_\alpha u'_\iota)}{\partial x_\alpha} - u'_\iota \frac{\partial(\rho_0 u'_\alpha)}{\partial x_\alpha}\right]} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\left(\rho_0 \overline{u'_\alpha u'_\iota}\right)}{\partial x_\alpha} \qquad [5.9b]$$

in cui è presente il valore di *background* sinottico ρ_0 della densità. Con buona approssimazione (Pielke, 2002) si può porre anche in questo caso $\rho_0 = \bar{\rho}$. Analoga procedura si può usare per la forma incomprimibile dell'equazione di continuità giungendo a:

$$\overline{u'_\alpha \frac{\partial u'_\iota}{\partial x_\alpha}} = \frac{\partial \left(\overline{u'_\alpha u'_\iota}\right)}{\partial x_\alpha} \qquad [5.9c]$$

L'uso della forma incomprimibile dell'equazione di continuità è soggetto a notevoli vincoli (la lunghezza di scala verticale *H* deve essere molto minore di H_α) quindi nel seguito considereremo solo ciò che si ottiene dall'uso della forma anelastica, cioè il risultato (5.9b), che introdotto nella (5.8) fornisce la <u>*versione definitiva delle Equazioni di Navier-Stoke*</u>:

$$\frac{\partial \overline{u_\iota}}{\partial t} + \overline{u_\alpha}\frac{\partial \overline{u_\iota}}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + f \varepsilon_{i\alpha 3} \overline{u_\alpha} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \left(\bar{\rho} \overline{u'_\alpha u'_\iota}\right)}{\partial x_\alpha} \qquad [5.10]$$

Sulla base dell'analisi dimensionale mostrata nell'**Esempio 5.1**, nell'equazione precedente è stato eliminato il termine di dissipazione viscosa che risulta decisamente trascurabile nel *PBL*. Tale termine risulta importante solo nelle immediate vicinanze del suolo.

5.2.3.2 L'approssimazione di Boussinesq

Fin qui si è decomposta ogni variabile istantanea in un valor medio ed in una fluttuazione e questa è l'essenza dell'ipotesi di Reynolds. Ora, però, immaginiamo che anche il valor medio della pressione, della temperatura potenziale virtuale e della densità sia scomponibile in un *valore di background sinottico* p_0, θ_0 e ρ_0 p_0, e in una *fluttuazione a mesoscala* p'', θ'' e ρ''. In corrispondenza alla temperatura potenziale θ_0 risulta definito anche lo stato di riferimento T_0. Ciò sta a significare che sia ipotizzabile uno *stato di riferimento* per l'atmosfera, secondo cui:

- vale la legge dei gas nella forma $p_0 = R_d \rho_0 T_0$,
- l'atmosfera è in equilibrio idrostatico e quindi deve valere esattamente l'equazione idrostatica: $\partial p_0/\partial z = -\rho_0 g$. Quindi lo stato reale dell'atmosfera <u>*differisce di poco*</u> da quello di riferimento. Il criterio che si adotta in questa decomposizione non è rigido; una possibilità è quella di ritenere che, ad ogni istante *t* e ad una quota *z*, il valore di *background sinottico* di una variabile coincida con la sua media orizzontale su tutto il dominio di indagine e a quella quota, mentre la rispettiva *perturbazione a mesoscala* sia la differenza tra il valore medio della variabile ed il valore di *background* sinottico. Oltre a ciò, semplicemente per ragioni di comodità analitica, è conveniente non considerare la densità media ρ ma il volume specifico $\alpha=1/\rho$. Quindi anche per α sarà definibile un valore di *background* sinottico α_0 ed una perturbazione a mesoscala α''. Per come è stato qui definito, il valore di *background* sinottico di una data variabile non varia rispetto a *x* e a *y*.

Se ora consideriamo l'equazione per la componente verticale del moto, il termine relativo al gradiente verticale di pressione ed alla gravità sono, in generale, espressi come:

$$\mathfrak{F} = \bar{\alpha}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g \qquad [5.11a]$$

Utilizzando la decomposizione descritta, sviluppando i calcoli e ricordando che i valori di *background* del volume specifico e della pressione sono in equilibrio idrostatico, si ottiene:

$$\mathfrak{F} = \alpha_0\left(1 + \frac{\alpha''}{\alpha_0}\right) \cdot \left(\frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial p''}{\partial z}\right) + g = \alpha_0\left(1 + \frac{\alpha''}{\alpha_0}\right) \cdot \frac{\partial p''}{\partial z} - \frac{\alpha''}{\alpha_0} g \qquad [5.11b]$$

Il termine $\alpha'' \partial p''/\partial z$ risulta piccolo e perciò trascurabile, quindi:

$$\mathfrak{F} = \alpha_0 \frac{\partial p''}{\partial z} - \frac{\alpha''}{\alpha_0} g = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p''}{\partial z} - \frac{\alpha''}{\alpha_0} g \qquad [5.11c]$$

La sostituzione dei termini di gradiente verticale di pressione nell'equazione verticale del moto, fa sì che la (5.10) diventi:

$$\frac{\partial \overline{u_\iota}}{\partial t} + \overline{u_\alpha}\frac{\partial \overline{u_\iota}}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\rho_0}\cdot\frac{\partial p"}{\partial x_i} + \delta_{i3}\frac{\alpha"}{\alpha_0}g + f\varepsilon_{i\alpha 3}\overline{u_\alpha} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\left(\rho_0\overline{u'_\alpha u'_\iota}\right)}{\partial x_\alpha} \qquad [5.12]$$

Per liberarci del rapporto $\alpha"/\alpha_0$ si introduce nell'equazione di stato la decomposizione in variabile di *background* e perturbazione a mesoscala per la pressione, il volume specifico e la temperatura e dopo alcuni passaggi algebrici si giunge a:

$$\frac{\alpha"}{\alpha_0} \cong \frac{T"_v}{T_{v0}} - \frac{p"}{p_0} \qquad [5.13a]$$

trascurando un termine in cui è presente il prodotto delle perturbazioni a mesoscala della pressione e del volume specifico. Così, al posto del volume specifico, si utilizza la pressione e la temperatura virtuale. Se, però, si considera la definizione di temperatura potenziale virtuale, differenziandone il logaritmo e ricordando che $C_p = C_v + R_d$, si ottiene:

$$\frac{d\theta_v}{\theta_{v0}} = \frac{dT_v}{T_{v0}} - \left(1 - \frac{C_p}{C_v}\right)\frac{dp}{p_0} \qquad [5.13b]$$

Dato che le perturbazioni a mesoscala sono piccole, in pratica esse coincidono con i rispettivi differenziali; quindi, dalla relazione precedente inserita nella (5.13a), si ottiene:

$$\frac{\alpha"}{\alpha_0} \cong \frac{\theta"_v}{\theta_{v0}} - \frac{C_v}{C_p}\frac{p"}{p_0} \qquad [5.13c]$$

valida (Pielke, 2002) nell'approssimazione anelastica, cioè quando la lunghezza di scala verticale H è dello stesso ordine di grandezza del *density scale depth* H_α. Se invece, $H << H_\alpha$ (Pielke 2002), cioè nell'approssimazione incomprimibile dell'equazione di continuità, essa si riduce a:

$$\frac{\alpha"}{\alpha_0} \cong \frac{\theta"_v}{\theta_{v0}} \qquad [5.13d]$$

che, per la sua semplicità, è la più usata nelle applicazioni pratiche, anche quando sarebbe maggiormente appropriato l'uso della (5.13c). Tutto ciò costituisce l'*approssimazione di Boussinesq.* In sostanza, anche se le perturbazioni a mesoscala di densità sono causate sia dalle perturbazioni a mesoscala della temperatura che della pressione, *nei fatti* quando la lunghezza verticale di scala è piccola rispetto a quella orizzontale, l'influenza delle perturbazioni di pressione risultano quasi irrilevante.

Quindi, tenendo conto dell'approssimazione di Boussinesq, il sistema di equazioni (5.12) prende la forma tensoriale seguente:

$$\frac{\partial \overline{u_\iota}}{\partial t} + \overline{u_\alpha}\frac{\partial \overline{u_\iota}}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\rho_0}\cdot\frac{\partial p"}{\partial x_i} + \frac{\theta"_v}{\theta_{v0}}\delta_{i3}g + f\varepsilon_{i\alpha 3}\overline{u_\alpha} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\left(\rho_0\overline{u'_\alpha u'_\iota}\right)}{\partial x_\alpha} \qquad [5.14]$$

Le (5.8) e le (5.14) sono profondamente differenti. Mentre la prima è del tutto generale, la seconda è espressa in termini di scostamenti a mesoscala dal valore di *background* sinottico della pressione e della temperatura potenziale virtuale. Se la definizione di *background* sinottico è quella qui adottata, essi risultano costanti in orizzontale e variabili solo con la quota e col tempo, a differenza dei rispettivi valori medi. Ad ogni istante l'equazione idrostatica e l'equazione di stato dei gas consentiranno poi la determinazione del corretto valore di *background* della densità, noti i valori di *background* di pressione e temperatura.

5.2.3.3 Il modello idrostatico e non idrostatico

Con tutte queste forme di approssimazioni per le equazioni del moto e per l'equazione di continuità, il quadro che ne risulta non è certamente chiaro. Proviamo ora a definire una gerarchia semplificata di modelli che combinano tali approssimazioni in maniera razionale. Naturalmente si tratterà nel seguito il problema della *prognosi* della temperatura potenziale virtuale e dell'umidità che però non varierà per le varie tipologie di modelli considerate.

Modello idrostatico

Questo modello è sicuramente il più semplice e si basa sull'ipotesi drastica secondo cui la variazione verticale della pressione media è totalmente idrostatica e quindi:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho} g \qquad [5.15]$$

In pratica, il modello idrostatico è composto dalle equazioni seguenti:

- le componenti orizzontali medie *u* e *v* del moto sono ottenute dalle equazioni prognostiche (5.8) relative a tali componenti, trascurando invece l'equazione per la componente verticale *w*;
- la pressione media è ottenuta diagnosticamente dall'equazione idrostatica (5.15);
- la temperatura virtuale media dell'aria, ipotizzando nota la temperatura potenziale virtuale dall'integrazione della rispettiva equazione prognostica di cui si tratterà successivamente, è calcolata diagnosticamene impiegandone direttamente la definizione;
- la densità media dell'aria è calcolata, una volta nota pressione e temperatura virtuale media, dall'equazione di stato dei gas;
- nota la densità media, la componente media *w* del moto viene ottenuta diagnosticamente dall'equazione di continuità nella forma anelastica o nella forma incomprimibile.

Il vantaggio principale del modello idrostatico sta nella sua semplicità e nella sua capacità di rimuovere le onde acustiche che si propagano in verticale, possibili soluzioni delle equazioni di moto. Il suo svantaggio principale sta nel fatto che *non risolve* adeguatamente le accelerazioni verticali che sono tanto più importanti quanto più piccola è la dimensione verticale della griglia di calcolo che viene adottata quando il modello viene riscritto nella versione discretizzata.

Modello non idrostatico elastico

Questo modello rappresenta il grado massimo di completezza e quindi di complessità. Esso è costituito dalle equazioni seguenti:

- le componenti medie del moto sono ottenute dalle tre equazioni del moto (5.8);
- la densità media è derivata dall'equazione di continuità in forma elastica (5.5b);
- la pressione deriva direttamente dall'equazione di stato dei gas.

5.2.3.4 Riepilogo delle equazioni di moto

Le semplificazioni introdotte e la loro combinazione rischiano di disorientare chi deve scegliere le equazioni di moto e l'equazione di continuità appropriate per un modello a mesoscala di atmosfera. Per ragioni puramente didattiche conviene, da questo momento in poi, definire un *sistema tipico di equazioni del moto* da utilizzare nel seguito che, di fatto, è quello non idrostatico elastico in cui vengono trascurati gli sforzi viscosi ed è costituito dalle equazioni seguenti:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{w\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} - \frac{1}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial(\bar{\rho}\overline{u'u'})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\overline{v'u'})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho}\overline{w'u'})}{\partial z}\right] \\
&\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f\bar{u} - \frac{1}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial(\bar{\rho}\overline{u'v'})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\overline{v'v'})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho}\overline{w'v'})}{\partial z}\right] \qquad [5.16] \\
&\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g - \frac{1}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial(\bar{\rho}\overline{u'w'})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\overline{v'w'})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho}\overline{w'w'})}{\partial z}\right]
\end{aligned}$$

Esse dipendono esplicitamente da cinque grandezze medie (le tre componenti della velocità, la pressione e la densità) e da nove flussi turbolenti. Per completare la *chiusura* del sistema, come si vedrà nel seguito, si devono aggiungere a queste equazioni l'equazione di continuità e l'equazione di stato dei gas e ciò comporta che le grandezze medie dell'intero sistema, ora costituito da cinque equazioni, aumentino di due unità (la temperatura potenziale e l'umidità). Se, come si vedrà nei punti seguenti, è possibile scrivere equazioni prognostiche anche per la temperatura potenziale media e per l'umidità, si raggiunge un bilancio complessivo tra equazioni del modello e grandezze medie implicate in esso. Tuttavia, il modello nel suo complesso *non è matematicamente chiuso!* Mancano all'appello le equazioni che forniscono i flussi turbolenti, i momenti del secondo ordine cioè, presenti nelle equazioni di Navier-Stokes e, come si vedrà, anche nelle equazioni per la temperatura potenziale e l'umidità. Si potrebbero scrivere equazioni anche per queste grandezze (e alcune le scriveremo), ma esse richiederebbero la conoscenza di momenti turbolenti di ordine superiore che, per essere esplicitati, avrebbero bisogno della conoscenza di momenti ancora superiori e così via. Il sistema delle equazioni della Fluidodinamica scritte per le variabili medie non può mai essere chiuso! Su questo argomento si ritornerà successivamente.

Ritornando alle equazioni di Navier-Stokes, si ricorda come siano possibili alcune tipiche semplificazioni. La prima è costituita dall'adozione dell'ipotesi di Boussinesq. Con essa compare nelle diverse equazioni il valore di background sinottico della densità dell'aria che si va a sostituire alla densità media locale. Come si nota, in queste equazioni non compare più la pressione media locale ma il *disturbo a mesoscala*, cosa che vale anche per la temperatura potenziale. La semplificazione maggiore si ha quando si adotta l'approssimazione idrostatica. In questo caso, è consueto introdurre il cosiddetto *vento geostrofico* caratterizzato nel modo seguente:

$$f\bar{u}_g = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \qquad f\bar{v}_g = +\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \tag{5.17a}$$

A questo punto, il nuovo insieme di equazioni è il seguente:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{w\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}} = -f\left(\bar{v}_g - \bar{v}\right) - \frac{1}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial\left(\bar{\rho}\overline{u'u'}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\bar{\rho}\overline{v'u'}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\bar{\rho}\overline{w'u'}\right)}{\partial z}\right] \\
&\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = +f\left(\bar{u}_g - \bar{u}\right) - \frac{1}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial\left(\bar{\rho}\overline{u'v'}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\bar{\rho}\overline{v'v'}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\bar{\rho}\overline{w'v'}\right)}{\partial z}\right] \\
&\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho}g
\end{aligned} \tag{5.17b}$$

Come si nota, è scomparsa l'equazione per la componente verticale media della velocità, sostituita dall'equazione idrostatica.

Esercizio 5.2

Alla latitudine di 44°N la componente media *v* del vento (componente N-S) è inferiore di 2 m·s^{-1} alla corrispondente componente del vento geostrofico. Se si ignora la subsidenza (cioè il valore medio di *w*), con una completa omogeneità orizzontale e in una situazione stazionaria quale deve essere il gradiente verticale dello stress di Reynolds necessario a supportare un tale deficit di velocità?

Innanzitutto, alla latitudine indicata il valore del coefficiente di Coriolis è pari a:

$$f = 2 \cdot 7.292 \cdot 10^{-5} \sin\Phi = 1.02 \cdot 10^{-4} s^{-1}$$

Per le ipotesi poste, l'equazione della componente media *u* del moto, che contiene la differenza tra il valore medio di *v* e la relativa componente geostrofica, risulta pari a:

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{\bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}_{=0} = -f\left(v_g - \bar{v}\right) - \underbrace{\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}}_{=0} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}$$

che si riduce a:

$$-\frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z} = f\left(v_g - \bar{v}\right)$$

Dato che il deficit geostrofico (la parte entro la parentesi tonda nel membro di destra) vale 2 m·s^{-1}, il gradiente verticale dello stress di Reynolds è costante e negativo e vale:

$$\frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z} = -1.02 \cdot 10^{-4} s^{-1} \cdot 2\ m \cdot s^{-1} = 2.04 \cdot 10^{-4} m \cdot s^{-2}$$

5.2.4 L'EQUAZIONE DELLA TEMPERATURA POTENZIALE VIRTUALE

Si consideri ora la relazione (2.32), che rappresenta il Primo Principio della Termodinamica. Ignorando la diffusività molecolare totalmente ininfluente a mesoscala, l'introduzione in essa dell'ipotesi di Reynolds porta immediatamente alla relazione:

$$\frac{\partial(\overline{\theta_v} + \theta'_v)}{\partial t} + (\bar{u}_\alpha + u'_\alpha)\frac{\partial(\overline{\theta_v} + \theta'_v)}{\partial x_\alpha} = S_T \qquad [5.18a]$$

in cui compare il termine S_T che rappresenta complessivamente il *termine di sorgente* con cui viene immesso o sottratto istantaneamente calore al sistema. La sua espressione analitica è complessa e verrà trattata nel Cap. 6. Impiegando uno sviluppo analitico del tutto analogo a quello impiegato per le equazioni prognostiche del moto, è facile arrivare alla relazione seguente che è la relazione prognostica per la temperatura potenziale virtuale media:

$$\frac{\partial\overline{\theta_v}}{\partial t} + \bar{u}_\alpha\frac{\partial\overline{\theta_v}}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\left(\bar{\rho}\cdot\overline{u'_\alpha\theta'_v}\right)}{\partial x_\alpha} + S_\theta \qquad [5.18b]$$

dove, anche in questo caso, si può notare che:

- il primo termine rappresenta il guadagno di calore medio e quindi il tasso di variazione media della temperatura potenziale virtuale;
- il secondo termine descrive l'avvezione del calore medio causata dal moto medio;
- il terzo termine rappresenta la divergenza del flusso turbolento di calore;
- il quarto termine rappresenta il termine di sorgente S_θ media del termine istantaneo S_T.

Anche la mediazione dell'equazione per la temperatura potenziale virtuale istantanea ripropone la situazione vista nella conservazione della quantità di moto, solo che in questo caso la (5.18b) sottolinea il fatto che vento e temperatura non sono affatto disaccoppiati, anzi sono strettamente legati non solo dalla presenza del termine avvettivo, ma anche dalle covarianze tra le componenti del vento e la temperatura potenziale virtuale, cioè dai flussi turbolenti di calore sensibile, presenti nell'ultimo termine.

Se come equazione di continuità si adotta la forma anelastica o la forma incomprimibile, il termine avvettivo dell'equazione si può scrivere in *forma di flusso*. In effetti si ha che:

$$\frac{\partial\overline{u_\alpha}\overline{\theta_v}}{\partial x_\alpha} = \overline{u_\alpha}\frac{\partial\overline{\theta_v}}{\partial x_\alpha} + \overline{\theta_v}\frac{\partial\overline{u_\alpha}}{\partial x_\alpha} = \overline{u_\alpha}\frac{\partial\overline{\theta_v}}{\partial x_\alpha} \qquad [5.18c]$$

e quindi, l'equazione prognostica di temperatura potenziale virtuale in forma di flusso è:

$$\frac{\partial\overline{\theta_v}}{\partial t} + \frac{\partial\overline{u_\alpha}\overline{\theta_v}}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\left(\bar{\rho}\cdot\overline{u'_\alpha\theta'_v}\right)}{\partial x_\alpha} + S_\theta \qquad [5.18d]$$

La motivazione di questa scrittura (quando risulta possibile adottarla) sta nella maggior facilità con cui può essere risolta numericamente.

Prima di concludere, è opportuno fare alcune precisazioni in merito al termine di sorgente.

La sua espressione generale è la seguente:

$$S_\theta = \frac{\overline{\theta_v}}{C_p \overline{T_v}} \cdot \frac{dQ}{dt} \qquad [5.18e]$$

dove *dQ*/*dt* è il tasso di energia rilasciata (o assorbita) da uno dei seguenti processi:

- la trasformazione di fase da vapore a liquido e viceversa,
- la trasformazione di fase da vapore a solido e viceversa,
- la trasformazione di fase da liquido a solido e viceversa
- il riscaldamento dovuto alla radiazione solare
- il riscaldamento/raffreddamento da divergenza netta di radiazione infrarossa.

Del riscaldamento dovuto alla radiazione solare e della divergenza della radiazione infrarossa si tratterà al Cap.6. Per quanto riguarda gli altri termini, si rimanda a Pielke (2002).

Esercizio 5.3

Si supponga che la covarianza tra la *w* e la temperatura potenziale virtuale (il flusso cinematico di calore verticale) decresca linearmente con la quota secondo la legge:

$$\overline{w'\theta_v'} = a - bz$$

con $a = 0.3$ K·m·s^{-1} e $b = 3 \cdot 10^{-4}$ K·s^{-1}. Assumendo un profilo verticale arbitrario di temperatura potenziale nel *PBL*, quale sarà la forma del profilo l'ora successiva? Si trascuri la subsidenza, il calore latente e si assuma una completa omogeneità orizzontale.

Con le ipotesi semplificative usate, l'equazione della temperatura potenziale virtuale diventa:

$$\frac{\partial \overline{\theta}_v}{\partial t} + \underbrace{\overline{u}\frac{\partial \overline{\theta}_v}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\overline{v}\frac{\partial \overline{\theta}_v}{\partial y}}_{=0} = -\underbrace{\frac{\partial \overline{u'\theta_v'}}{\partial x}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \overline{v'\theta_v'}}{\partial y}}_{=0} - \frac{\partial \overline{w'\theta_v'}}{\partial z}$$

quindi, tenuto conto della relazione per la variazione verticale del flusso turbolento di calore:

$$\frac{\partial \overline{\theta}_v}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{w'\theta_v'}}{\partial z} = b$$

Ciò sta a significare che il tasso di variazione di temperatura potenziale virtuale ad ogni quota è costante e quindi ad ogni quota la temperatura potenziale virtuale aumenterà proporzionalmente al tempo in misura uguale. Quindi, qualunque sia la quota:

$$\theta(z, t + 1h) - \theta(z, t) = b \cdot \Delta t = 3 \cdot 10^4 K \cdot s^{-1} \cdot 3600\ s = 1.08\ K$$

Questo scenario è frequente nel *ML* convettivo nelle ore diurne e soleggiate. Quanto ottenuto è che ogni qual volta il flusso turbolento di calore decresce linearmente con la quota, la forma del profilo verticale di temperatura potenziale virtuale verrà *preservata* ed i singoli valori alle varie quote si incrementeranno in eguale misura.

5.2.5 LE EQUAZIONI PER L'UMIDITÀ

Se si opera in modo analogo sulla (2.33a), che rappresenta il bilancio di umidità specifica in fase vapore e trascurando ancora una volta la viscosità, si giunge alla relazione prognostica per il contenuto medio di vapor d'acqua che è la seguente:

$$\frac{\partial \overline{q_v}}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial \overline{q_v}}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \left(\bar{\rho} \cdot \overline{u'_\alpha q'_v}\right)}{\partial x_\alpha} + \frac{S_{qv}}{\bar{\rho}} \qquad [5.19a]$$

in cui il primo termine rappresenta la variazione temporale di vapor d'acqua media, il secondo termine descrive l'avvezione di vapor d'acqua causata dal vento medio, il terzo termine rappresenta la divergenza del flusso turbolento di vapor d'acqua ed il quarto termine è il termine netto

di sorgente per il vapor d'acqua. Per la fase liquida e solida si giunge ad equazioni simili ed in particolare a:

$$\frac{\partial \overline{q_L}}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial \overline{q_L}}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \left(\bar{\rho} \cdot \overline{u'_\alpha q'_L} \right)}{\partial x_\alpha} + \frac{S_{qL}}{\bar{\rho}} \qquad [5.19b]$$

$$\frac{\partial \overline{q_S}}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial \overline{q_S}}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \left(\bar{\rho} \cdot \overline{u'_\alpha q'_S} \right)}{\partial x_\alpha} + \frac{S_{qS}}{\bar{\rho}} \qquad [5.19c]$$

Tutti i termini di sorgente medi presenti nelle (5.19) sono di forma complessa e in Pielke (2002) sono riportati dettagli ulteriori.

Anche in questo caso le equazioni per l'umidità specifica possono essere scritte in forma di flusso, naturalmente quando l'equazione di continuità usata è in forma anelastica o incomprimibile. In particolare, l'equazione per il contenuto medio di vapor d'acqua diventa:

$$\frac{\partial \overline{q_v}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_\alpha q_v}}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \left(\bar{\rho} \cdot \overline{u'_\alpha q'_v} \right)}{\partial x_\alpha} + \frac{S_{qv}}{\bar{\rho}} \qquad [5.19d]$$

ed equazioni analoghe possono essere scritte per i contenuti di acqua liquida e solida.

Le equazioni (5.19) affermano un concetto estremamente interessante: la presenza in atmosfera di vapor d'acqua (o di acqua liquida o solida) è influenzata, ed influenza a sua volta, le altre variabili meteorologiche con un effetto di controreazione non facilmente immaginabile e rappresentata nella (5.19) dalle covarianze tra l'umidità specifica e le componenti del vento, cioè dai flussi turbolenti di umidità.

5.2.6 L'EQUAZIONE PER LE SPECIE CHIMICHE

Per la conservazione di ogni specie chimica presente in aria vale la relativa legge di conservazione in termini istantanei e quando la sua concentrazione è espressa in *mixing ratio* dalla (2.34b). L'introduzione dell'ipotesi di Reynolds e l'applicazione dell'operatore media conducono all'equazione prognostica per la concentrazione media che, trascurando la viscosità, diventa:

$$\frac{\partial \overline{\chi_m}}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial \overline{\chi_m}}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \left(\bar{\rho} \cdot \overline{u'_\alpha \chi'_m} \right)}{\partial x_\alpha} + S_c \qquad [5.20]$$

dove il termine S_c rappresenta collettivamente i termini di sorgente (emissioni, processi chimici e chimico-fisici). Il primo termine di destra rappresenta poi la divergenza della covarianza tra componenti del vento e concentrazione dello scalare, cioè il flusso turbolento di scalare. Questa relazione evidenzia alcuni aspetti di primario interesse:

- l'evoluzione spazio-temporale della concentrazione media di una specie chimica dipende dal trasporto (avvezione) della sostanza stessa, causata dal campo medio del vento;
- l'avvezione, però, non è l'unico meccanismo di dispersione dell'inquinante. In effetti il primo termine di destra dell'equazione, che rappresenta la divergenza del flusso turbolento di inquinante, indica chiaramente come la turbolenza del *PBL* giochi un ruolo decisivo nella dispersione degli inquinanti;
- apparentemente l'equazione (5.20) *dipende direttamente* dalle grandezze meteorologiche (lo si vede sia nel termine avvettivo che nella divergenza del flusso turbolento), ma *apparentemente* non influenza le grandezze meteorologiche. Nella realtà tale influenza esiste, si pensi per esempio al fatto che l'aumento della concentrazione in aria di alcune specie chimiche (gassose o aerosol) cambia la trasparenza dell'atmosfera e quindi i flussi di radiazione solare e infrarossa, che fanno parte del termine di sorgente per l'equazione della temperatura potenziale virtuale, e che la presenza di particolato può influire sulle trasformazioni di fase subite dall'acqua atmosferica. Dato che, almeno in prima

approssimazione, tutto ciò può essere ignorato, tale problema non verrà considerato, salvo dedicare l'intera parte finale del libro a trattare le problematiche connesse con la dispersione degli inquinanti in aria.

5.2.7 LA DIVERGENZA DEI FLUSSI TURBOLENTI

Nelle equazioni prognostiche delle variabili medie appena derivate compaiono i *momenti del secondo ordine* (varianze e covarianza tra le componenti istantanee della velocità e tra componenti delle velocità e grandezze scalari come temperatura potenziale virtuale, umidità e concentrazione di specie chimiche) che non sono noti a priori e che, in generale, non sono nemmeno trascurabili. Anche per essi si possono ricavare (operazione algebrica semplice, ma estremamente laboriosa) delle equazioni prognostiche derivate dalle equazioni di conservazione per le variabili istantanee e dall'introduzione dell'ipotesi di Reynolds. Se queste nuove equazioni non contenessero ulteriori incognite, il sistema risulterebbe chiuso. Purtroppo, in esse si introducono momenti del terzo ordine, innestando quindi un processo degenerativo secondo cui più elevato è il grado del momento per cui si è derivata l'equazione, maggiore è il numero di nuove incognite coinvolte, tutte costituite da momenti di ordine superiore al momento desiderato. Questo è il ben noto *problema della chiusura* delle equazioni fluidodinamiche che Keller e Friedmann nel 1924 per primi misero in evidenza e che porta alla conclusione che *il sistema di equazioni fluidodinamiche descrittive del PBL non può mai essere chiuso* congruentemente con la visione stocastica del *PBL*. Questo non significa tuttavia che tale apparato matematico non possa portare ad un modello operativo per la previsione dell'evoluzione spazio-temporale del *PBL*.

Consideriamo ora i flussi turbolenti presenti nelle equazioni prognostiche per i valori medi. In particolare, consideriamo inizialmente le equazioni del moto nella forma (5.16a): nell'ultimo termine di destra di ogni equazione relativa alle varie componenti u_i è presente il termine scritto sinteticamente come:

$$\frac{\partial\left(\bar{\rho}\cdot\overline{u'_\alpha u'_\iota}\right)}{\partial x_\alpha} \qquad [5.21a]$$

che coinvolge gli *Stress di Reynolds* (flussi di quantità di moto introdotti al punto 3.1.4.4). Complessivamente, le tre equazioni del moto richiedono la conoscenza dell'intera *Matrice di Varianza-Covarianza*. In teoria sono nove le componenti di tale matrice che si riducono, però, a sole sei indipendenti per la simmetria della stessa, cioè $\overline{u'u'}$, $\overline{v'v'}$, $\overline{w'w'}$, $\overline{u'v'} = \overline{v'u'}$, $\overline{u'w'} = \overline{w'u'}$, $\overline{v'w'} = \overline{w'v'}$. Dato che non è possibile dedurre per tali grandezze equazioni prognostiche dipendenti dalle sole variabili medie e da momenti del primo ordine, è necessaria una loro parametrizzazione. Questo è il ben noto problema della *chiusura* di cui si tratterà nel seguito.

Comunque, una gran parte delle chiusure proposte, al di là dei dettagli specifici di cui si tratterà tra poco, ipotizza *almeno formalmente* una proporzionalità diretta tra il flusso (varianza o covarianza) ed il gradiente delle componenti del moto, con coefficienti di proporzionalità, noti come *coefficienti di diffusione turbolenta* (*eddy diffusion coefficients*), non necessariamente costanti. In pratica questi tipi di chiusura ipotizzano:

$$\begin{aligned}
&\overline{u'u'} = -K_{mxx}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}; \quad \overline{v'u'} = -K_{mxy}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}; \quad \overline{w'u'} = -K_{mxz}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\\
&\overline{u'v'} = -K_{mxy}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}; \quad \overline{v'v'} = -K_{myy}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}; \quad \overline{w'v'} = -K_{myz}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\\
&\overline{u'w'} = -K_{mxz}\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}; \quad \overline{v'w'} = -K_{myz}\frac{\partial w}{\partial y}; \quad \overline{w'w'} = -K_{mzz}\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}
\end{aligned} \qquad [5.21b]$$

quindi i coefficienti di diffusione turbolenta indipendenti per la quantità di moto sono in totale sei. Pertanto, i vari termini di diffusione turbolenta presenti nelle tre equazioni di moto (5.16) con questa ipotesi diventerebbero:

$$\cdots - \frac{1}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\rho}K_{mxx}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\rho}K_{mxy}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{\rho}K_{mxz}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)\right]\cdots$$
$$\cdots - \frac{1}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\rho}K_{mxy}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\rho}K_{myy}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{\rho}K_{myz}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)\right]\cdots \qquad [5.21c]$$
$$\cdots - \frac{1}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\rho}K_{mxz}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\rho}K_{myz}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{\rho}K_{mzz}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right)\right]\cdots$$

Se ora si considera l'equazione prognostica per la temperatura potenziale virtuale, si vede come in essa compaiano tre flussi turbolenti, uno per ciascuna direzione cartesiana. Anche in questo caso, nella maggior parte delle chiusure proposte si ipotizza, *almeno formalmente*, una dipendenza diretta tra flusso e gradiente di temperatura nella direzione coordinata relativa dove, anche in questo caso, i coefficienti di proporzionalità, che dovranno essere opportunamente parametrizzati, vengono indicati col nome *coefficienti turbolenti per il calore* e rappresentati, a seconda della direzione del flusso di calore, da K_{hxx}, K_{hyy} e K_{hzz}. Quindi il termine di divergenza di flusso della (5.18b) risulterà pari a:

$$\cdots - \frac{1}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\rho}K_{hxx}\frac{\partial \overline{\theta_v}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\rho}K_{hyy}\frac{\partial \overline{\theta_v}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{\rho}K_{hzz}\frac{\partial \overline{\theta_v}}{\partial z}\right)\right]\cdots \qquad [5.22]$$

In modo analogo si potrà operare per l'equazione dell'umidità e per l'equazione delle specie chimiche, individuando opportuni coefficienti di diffusione turbolenta. Anche se, a priori, i coefficienti di diffusione turbolenta per il calore dovrebbero differire da quelli per l'umidità e le specie chimiche, in pratica si adotta per tutte le equazioni riferite alle grandezze scalari i medesimi coefficienti di diffusione turbolenta, anche perché finora non si hanno conoscenze migliori.

Per concludere, è opportuno fare almeno due considerazioni:

- i vari coefficienti di diffusività turbolenta, sia per la quantità di moto che per le grandezze scalari, non sono delle costanti ma variano nello spazio e nel tempo;
- la loro forma funzionale dipende dal tipo di chiusura adottata. Ci può essere il caso in cui essi dipendono da parametri globali del *PBL* quali u_*, H_0, z_i. Ci può anche essere il caso in cui tali parametri dipendano da momenti del secondo ordine o loro derivati come l'energia cinetica turbolenta. In questo caso il modello dovrà arricchirsi, solo per la stima dei coefficienti di diffusione turbolenta, di altre equazioni prognostiche o diagnostiche per questi momenti (di qui la necessità di conoscere tali equazioni, cosa che verrà fatta poco oltre) in cui, però compariranno momenti del terzo ordine che inevitabilmente dovranno essere drasticamente parametrizzati.

Per descrivere la divergenza dei flussi turbolenti sono stati utilizzati i coefficienti di diffusione turbolenta nei termini mostrati sopra, in sostanza utilizzando una formulazione simile alla Legge di Fick per la diffusione molecolare. Ciò che rende profondamente diversa la diffusione molecolare da quella turbolenta è che, mentre il coefficiente di diffusione molecolare è una ben precisa proprietà del fluido, al contrario le proprietà diffusive della turbolenza sono inscindibilmente legate allo stato di moto del fluido, non alle sue proprietà chimico-fisiche, e quindi variano, in generale, da punto a punto e da istante ad istante. Va inoltre ricordato, come si vedrà nel seguito, che alcuni tipi di chiusura differiscono profondamente da tale modello, come per esempio la famiglia delle chiusure non locali.

5.2.8 LE EQUAZIONI FLUIDODINAMICHE DELL'ATMOSFERA

Vale la pena, ora, fare alcune considerazioni riepilogative. L'insieme delle relazioni individuate costituisce il modello di base per la descrizione spazio-temporale dello stato medio dell'atmosfera ed è composto dalle relazioni seguenti:

- *la definizione di temperatura potenziale e di temperatura potenziale virtuale*. Tali definizioni sono delle relazioni matematiche di tipo totalmente algebrico;

- *le equazioni prognostiche del moto*. Sono tre equazioni differenziali alle derivate parziali valide nel sistema di riferimento non inerziale solidale con la superficie terrestre. La loro forma completa, scritta sinteticamente in notazione tensoriale, senza esplicitare ulteriormente i flussi turbolenti, è la seguente:

$$\frac{\partial \overline{u_\iota}}{\partial t} + \overline{u_\alpha}\frac{\partial \overline{u_\iota}}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \delta_{i3}g + f\varepsilon_{i\alpha 3}\overline{u_\alpha} - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\left(\bar{\rho}\overline{u'_\alpha u'_\iota}\right)}{\partial x_\alpha} \qquad [5.23a]$$

- *l'equazione di continuità*. Tale equazione esprime matematicamente la conservazione della massa e, scritta nella sua forma completa, risulta essere:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\overline{u_\alpha})}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad [5.23b]$$

  Ad essa in alternativa si affiancano con ben precisi limiti di applicabilità le due forme diagnostiche, quella anelastica e quella incomprimibile, di uso molto più frequente;

- *l'equazione di stato dei gas*. Questa equazione, del tutto algebrica, rappresenta il tessuto connettivo tra le diverse variabili termodinamiche ed è espressa nel modo consueto:

$$\bar{p} = R_d\cdot\bar{\rho}\cdot\overline{T_v} \qquad [5.23c]$$

- *l'equazione prognostica per la temperatura potenziale virtuale*. Questa relazione deriva dal Primo Principio della Termodinamica ed è il veicolo attraverso cui le equazioni del moto *sentono* i fenomeni termodinamici di riscaldamento e cambiamento di fase. Essa è espressa, senza esplicitare i termini turbolenti, nella forma:

$$\frac{\partial \overline{\theta_v}}{\partial t} + \bar{u}_\alpha\frac{\partial \overline{\theta_v}}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\left(\bar{\rho}\cdot\overline{u'_\alpha\theta'_v}\right)}{\partial x_\alpha} + S_\theta \qquad [5.23d]$$

- *le equazioni per l'umidità*. Queste equazioni, che esprimono il bilancio di acqua presente in aria nei vari stati di aggregazione, forniscono le informazioni necessarie al termine di sorgente dell'equazione della temperatura potenziale virtuale e mostrano come la presenza dell'acqua atmosferica possa contribuire al moto dell'aria. Tali equazioni, comprensive dei termini turbolenti, risultano espresse come:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{q_v}}{\partial t} + \bar{u}_\alpha\frac{\partial \overline{q_v}}{\partial x_\alpha} &= -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\left(\bar{\rho}\cdot\overline{u'_\alpha q'_v}\right)}{\partial x_\alpha} + \frac{S_{qv}}{\bar{\rho}} \\
\frac{\partial \overline{q_L}}{\partial t} + \bar{u}_\alpha\frac{\partial \overline{q_L}}{\partial x_\alpha} &= -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\left(\bar{\rho}\cdot\overline{u'_\alpha q'_L}\right)}{\partial x_\alpha} + \frac{S_{qL}}{\bar{\rho}} \\
\frac{\partial \overline{q_S}}{\partial t} + \bar{u}_\alpha\frac{\partial \overline{q_S}}{\partial x_\alpha} &= -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\left(\bar{\rho}\cdot\overline{u'_\alpha q'_S}\right)}{\partial x_\alpha} + \frac{S_{qS}}{\bar{\rho}}
\end{aligned} \qquad [5.23e]$$

- *le equazioni per le specie chimiche*. Anche se spesso ignorate nei modelli meteorologici, le equazioni per la concentrazione (in termini di *mixing ratio*) delle specie chimiche in aria contribuiscono, attraverso il termine di sorgente dell'equazione della temperatura potenziale virtuale, a determinare lo stato dell'atmosfera. Esse, o meglio la dispersione degli inquinanti in aria, saranno il tema prioritario dell'ultima parte del libro. Tali equazioni, una per ogni specie considerata, scritte nella forma sintetica sono:

$$\frac{\partial \overline{\chi_m}}{\partial t} + \bar{u}_\alpha\frac{\partial \overline{\chi_m}}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\left(\bar{\rho}\cdot\overline{u'_\alpha\chi'_m}\right)}{\partial x_\alpha} + S_c \qquad [5.23f]$$

Il dominio di indagine considerato è un tipico dominio a mesoscala di cui nulla è definito a priori. Se però si pone l'attenzione su situazioni a forte omogeneità orizzontale, è possibile giungere ad un modello differenziale molto più semplice che ha costituito nel passato una sorta di *laboratorio modellistico* in cui studiare le caratteristiche del *PBL*, anche quelle relative ai momenti di ordine superiore. In questo caso tutte le derivate parziali spaziali del tipo $\partial/\partial x$ e $\partial/\partial y$ risultano nulle (tranne nei termini di gradiente della pressione media che compaiono indirettamente nelle componenti del vento geostrofico) ed il modello che alla fine otteniamo, che è *monodimensionale*, è costituito dal sistema delle più semplici equazioni seguenti:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= -f\left(v_g - \bar{v}\right) - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial(\bar{\rho}\overline{u'w'})}{\partial z} \\
\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= +f\left(u_g - \bar{u}\right) - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\left(\bar{\rho}\overline{v'w'}\right)}{\partial z} \\
\frac{\partial \overline{\theta_v}}{\partial t} &= -\frac{\partial\left(\overline{w'\theta'_v}\right)}{\partial z} + S_\theta \\
\frac{\partial \overline{q_v}}{\partial t} &= -\frac{\partial\left(\overline{w'q'_v}\right)}{\partial z} + S_\theta
\end{aligned} \qquad [5.24]$$

a cui va aggiunta l'equazione di stato dei gas. Si noti che, essendo nulli i gradienti orizzontali delle componenti medie del vento, l'equazione di continuità nella forma anelastica o nella forma incomprimibile asserisce semplicemente che l'accelerazione media verticale non potrà che essere nulla. Con questo modello sono state ottenute le prime ricostruzioni modellistiche del *PBL* convettivo ed i profili illustrati nella **Fig. 5.2** ne sono un esempio significativo.

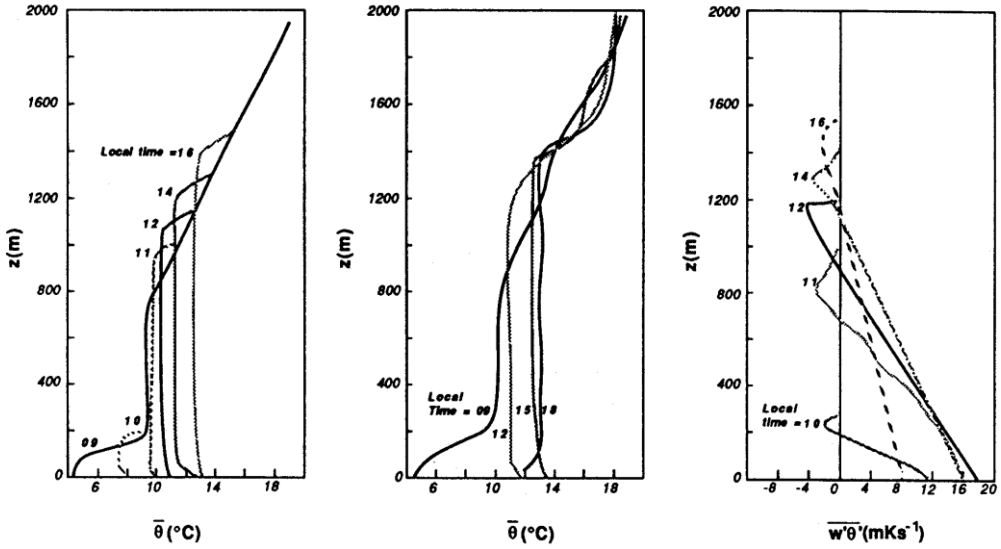


Fig.5.2: ricostruzione modellistica (a sinistra) e profili misurati (al centro) della temperatura potenziale in una situazione convettiva. A destra è presentato il profilo verticale del flusso di calore in forma cinematica (André e al, 1978)

Il modello matematico costituito da tutte queste equazioni (o dalle loro varianti descritte) costituisce un sistema differenziale alle derivate parziali *non lineare* e *non chiuso*, vista la mancanza di indicazioni su come quantificare i termini turbolenti presenti nella maggior parte di esse. La *parametrizzazione* di tali termini, cioè la modalità di espressione di questi termini in funzioni delle variabili medie o, comunque di variabili note, è compito dello schema di *Chiusura* di cui si tratterà successivamente. Prima, però, di trattare questo argomento, conviene innanzitutto rivedere l'Ipotesi di Taylor che sembra essere in stridente contrasto con quanto abbiamo ottenuto finora e subito dopo presentare la deduzione (e le peculiarità) delle equazioni prognostiche

relative ai momenti del secondo ordine, sia per l'importanza intrinseca dell'argomento sia perché alcune di esse saranno impiegate in alcuni tipi sofisticati di chiusure locali.

5.2.9 ANCORA L'IPOTESI DI TAYLOR

L'Ipotesi di Taylor introdotta al punto 3.1.4.2 sembra essere in stridente contrasto con quanto esposto fin qui. In realtà, quest'ipotesi è solo un'approssimazione della realtà, peraltro molto utile quando si realizzano misure (soprattutto spettrali). Per prima cosa val la pena ricordare le parole esatte con cui Taylor nel 1938 l'ha formulata:

> *"If the velocity of the air stream which carries the eddies is very much greater than the turbulence velocity, one may assume that the sequence of changes in velocity at a fixed point are simply due to the passage of an unchanging pattern of turbulent motion over the point."*

Taylor non pretendeva quindi di formulare un'ipotesi vera in assoluto, ma affermava solo un'approssimazione ragionevole. Sulla ragionevolezza e sull'applicabilità o meno dell'ipotesi di Taylor molto si è discusso e, come esempio, basta citare i lavori di Willis e Deardorff (1976c) e di Tong (1996) e, recentemente, quello di Higgins e al (2012). In termini matematici (Tampieri, 2017) l'ipotesi di Taylor per uno scalare passivo *a* (la temperatura potenziale, una componente del moto, ecc.) ad un istante e in un punto è data dalla relazione seguente:

$$\frac{Da}{Dt} = 0 \qquad [5.25a]$$

secondo cui la variabile *a* in un flusso turbolento subisce una pura e semplice avvezione. Se si confronta la (5.25a) con la (2.34b) per la conservazione istantanea di uno scalare, si potrebbe concludere non solo che si è in assenza di una sorgente per lo scalare *a*, ma anche che l'azione dei moti molecolari è trascurabile e fin qui nulla di strano. Si consideri ora un sistema di riferimento con asse *x* orientato lungo il vento medio *U*. Al tempo *t* il vento istantaneo sarà **U** = (*U*+*u*, *v*, *w*) dove con *u*, *v* e *w* sono state indicate le fluttuazioni. Quindi:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \left[(U+u)\frac{\partial a}{\partial x} + v\frac{\partial a}{\partial y} + w\frac{\partial a}{\partial z}\right] = 0 \qquad [5.25b]$$

Ma se si ipotizza che la scala delle fluttuazioni di velocità è molto inferiore alla velocità media, in pratica se $\overline{u_\alpha^2} \ll U^2$ (per ogni α), allora la relazione precedente si riduce a:

$$\frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{1}{U}\frac{\partial a}{\partial t} \qquad [5.25c]$$

che può essere integrata tra due istanti generici t_1 e t_2. Dato che $U = \partial x/\partial t$ e che tra t_1 e t_2 il valore del vento medio è U (quindi $x = U \cdot t$) si giunge inevitabilmente a:

$$a(x_2) - a(x_1) = a(t_1) - a(t_2) \qquad [5.25d]$$

dove $x_1 = U \cdot t_1$ e $x_2 = U \cdot t_2$ che è proprio l'ipotesi di Taylor. Ciò lo si è ottenuto ipotizzando che la scala tipica delle fluttuazioni fosse molto inferiore alla velocità media del vento, ma quando ciò può essere ragionevolmente vero? Una risposta la fornisce il lavoro sperimentale e teorico di Higgins e al. (2012) riassunto in **Fig. 5.3** dove l'asse *y* rappresenta il rapporto $p = Ut/D$ (*D* è la dimensione caratteristica del vortice, *t* è la sua *persistenza* tipica e *U* è la velocità media del vento), mentre l'asse *x* rappresenta il grado di accettabilità dell'ipotesi. Gli Autori sottolineano come il rapporto *p* debba essere superiore all'unità se l'ipotesi è ragionevolmente applicabile. Come si vede, in tutto ciò gioca un ruolo essenziale il rapporto tra la dimensione caratteristica del vortice e la quota di misura. In pratica, vortici di dimensione maggiore della quota di misura tendono ad avere una vita propria più lunga e sono i migliori candidati per l'applicabilità dell'ipotesi, mentre vortici di dimensioni inferiori sono meno persistenti e richiedono cautele nell'applicazione dell'ipotesi. Questi risultati, pur di estremo interesse, non sono facilmente applicabili, così in

pratica si usa il criterio suggerito da Stull (1988) sulla base del lavoro di Willis e Deardorff (1976c): se σ_U è la deviazione standard della velocità del vento, l'ipotesi di Taylor può essere applicata quando l'intensità di turbolenza risulta inferiore a 0.5, cioè quando $\sigma_U/U < 0.5$.

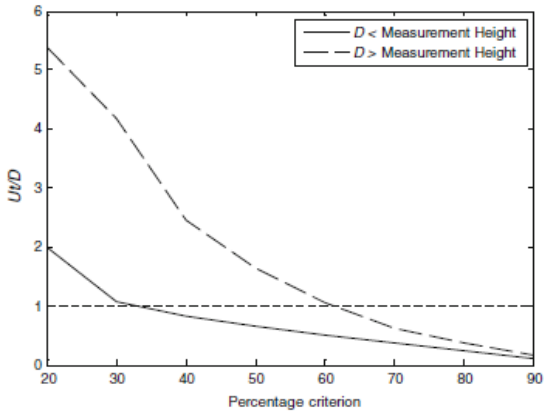


Fig. 5.3: applicabilità dell'ipotesi di Taylor (in percentuale) in funzione del parametro p=Ut/D (Higgins e al., 2012)

5.3 LE EQUAZIONI PER I MOMENTI DEL SECONDO ORDINE

Lo studio dei momenti del secondo ordine ha occupato un vasto spazio nella ricerca micrometeorologica passata sia teorica che numerica e sperimentale. Anche se qualcosa si accennerà nel seguito a tale riguardo, si rimanda chi fosse interessato a:

- Willis e Deardorff (1974) per le ricerche in laboratorio relative principalmente alle situazioni convettive;
- Kaimal e al. (1976), Caughey e Palmer (1979) per le misure nelle situazioni convettive;
- André e al. (1978), Zhou e al. (1985) per le ricostruzioni numeriche in situazioni convettive;
- Caughey e al. (1979) per l'analisi delle misure sperimentali realizzate in situazioni stabili.

La procedura per ottenere le equazioni prognostiche per i momenti secondi, è concettualmente semplice anche se noiosissima. Per tutti i dettagli si rimanda a Businger (1982), Wyngaard (1982), Stull (1988), Sorbjan (1989) e Wyngaard (2010). In pratica, essa consiste, per prima cosa, nel ricavare le equazioni per le fluttuazioni delle varie grandezze di interesse (le tre componenti del moto, la temperatura potenziale, ecc.) e, successivamente, con l'introduzione dell'operazione di media, generare le equazioni dei vari momenti. Va immediatamente detto che, a differenza delle equazioni per i momenti del primo ordine, la viscosità qui non può essere ignorata. Inoltre, per semplicità, si considerano a divergenza nulla le fluttuazioni del campo di moto. Il punto di partenza per l'ottenimento delle equazioni relative ai momenti del secondo ordine (varianze e covarianze) è l'individuazione delle equazioni prognostiche delle fluttuazioni delle grandezze meteorologiche. Per ottenerle, basta inserire la scomposizione di Reynolds nelle equazioni che formano il modello fluidodinamico dell'atmosfera (quelle del Cap.2) e sottrarre ad esse membro a membro le equazioni relative alle rispettive variabili medie. È un noioso gioco di pazienza che conduce alle equazioni differenziali per le fluttuazioni delle tre componenti del moto, della temperatura potenziale virtuale, dell'umidità e di uno scalare passivo che sono rispettivamente le relazioni (4.1.1), (4.1.3), (4.1.2) e (4.1.4) riportate da Stull (1988). Una volta ottenute le equazioni

prognostiche per le fluttuazioni delle variabili meteorologiche, per giungere alle equazioni prognostiche dei momenti del secondo ordine basta applicare l'identità seguente:

$$\frac{\partial \overline{a'b'}}{\partial t} = \overline{a' \frac{\partial b'}{\partial t}} + \overline{b' \frac{\partial \bar{a}'}{\partial t}} \qquad [5.26]$$

5.3.1 LE EQUAZIONI PER LE VARIANZE

5.3.1.1 La varianza delle componenti cartesiane della velocità

Anche se l'equazione per la varianza delle componenti cartesiane del moto, in realtà, può essere ottenuta dalla più generale equazione prognostica degli Stress di Reynolds, vale la pena comunque considerarla con un certo dettaglio per la sua importanza. Per ragioni di semplicità grafica, le fluttuazioni di ogni grandezza vengono indicate senza il tradizionale apice mentre i valori medi sono facilmente riconoscibili per l'*overbar* che li contraddistingue. In pratica, se si considera la componente *i-esima* del moto, con u_i ora si indica la fluttuazione attorno al valor medio $\overline{u_\iota}$. Senza entrare nei dettagli (noiosissimi) della deduzione, per la varianza di ogni componente *i-esima* del moto vale la complessa relazione differenziale seguente del tutto generale:

$$\frac{\partial \overline{u_\iota^2}}{\partial t} + \overline{u_\alpha} \frac{\partial \overline{u_\iota^2}}{\partial x_\alpha} + 2\overline{u_\iota u_\alpha} \frac{\partial \overline{u_\iota}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \overline{u_\alpha u_\iota^2}}{\partial x_\alpha} = 2\delta_{i3} u_\iota \overline{\frac{\theta_v}{\overline{\theta_v}} \cdot g} + 2f\varepsilon_{i\alpha 3}\overline{u_\iota u_\alpha} - 2\overline{\frac{u_\iota}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_\iota}} + 2\nu \cdot \overline{u_\iota \frac{\partial^2 u_\iota}{\partial x_\alpha^2}} \qquad [5.26a]$$

A questa relazione generale che rappresenta la varianza delle tre componenti del moto possono essere applicate varie semplificazioni. In particolare, si possono fare queste considerazioni:

- si può dimostrare (Stull, 1988, pag. 124) come il termine di Coriolis $2f\varepsilon_{i\alpha 3}\overline{u_\iota u_\alpha}$ sia nullo. Ciò sta a significare che la forza di Coriolis non può generare energia cinetica turbolenta;
- l'ultimo termine dell'equazione, che rappresenta gli effetti dissipativi dovuti alla viscosità, può essere notevolmente semplificato. In particolare, con semplici passaggi algebrici, si giunge alla relazione:

$$2\nu \cdot \overline{u_\iota \frac{\partial^2 u_\iota}{\partial x_\alpha^2}} = \nu \cdot \overline{\frac{\partial^2 u_\iota^2}{\partial x_\alpha^2}} - 2\nu \cdot \overline{\left(\frac{\partial u_\iota}{\partial x_\alpha}\right)^2} \qquad [5.26b]$$

  Il primo termine di destra, che rappresenta la diffusione molecolare della varianza, nel *PBL*, risulta molto piccola, dell'ordine di 10^{-6} s^{-2} nel *ML* e dell'ordine di 10^{-2} s^{-2} nel *SL* (Stull, 1989). Quando questa grandezza viene moltiplicata per ν, l'intero termine risulta dell'ordine di $10^{-11} \div 10^{-7}$ $m^2 s^{-3}$ e quindi del tutto trascurabile. L'altro termine di destra della (5.26b) risulta decisamente maggiore (dell'ordine di $10^{-4} \div 10^{-2}$ $m^2 s^{-3}$) e quindi deve essere considerato. Definiamo ora come *tasso di dissipazione viscosa* ε_i per la componente del moto *i-esima* la quantità:

$$\varepsilon_i = \nu \cdot \overline{\left(\frac{\partial u_\iota}{\partial x_\alpha}\right)^2} \qquad [5.26c]$$

  ovviamente sempre positiva. Dato che ε_i è una grandezza sempre positiva, il termine dissipativo sarà sempre negativo e ciò causerà sempre una diminuzione di varianza col tempo. Per tutto ciò, il termine di dissipazione viscosa può essere approssimato come:

$$2\nu \cdot \overline{u_\iota \frac{\partial^2 u_\iota}{\partial x_\alpha^2}} = -2\nu \cdot \overline{\left(\frac{\partial u_\iota}{\partial x_\alpha}\right)^2} \qquad [5.26d]$$

- il penultimo termine, che rappresenta gli effetti dovuti alle fluttuazioni di pressione, può

essere riscritto come:

$$2\overline{\frac{u_\iota}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_\iota}} = -\left(\frac{2}{\bar{\rho}}\right)\frac{\partial \overline{u_\iota p}}{\partial x_i} + 2\overline{\left(\frac{p}{\bar{\rho}}\right)\cdot\left(\frac{\partial u_\iota}{\partial x_\iota}\right)} \qquad [5.26e]$$

L'ultimo termine a destra è il termine di *ridistribuzione della pressione*. In ogni equazione relativa alla varianza di una delle componenti del moto tale termine è presente, ma se sommiamo le tre varianze (per ottenere il doppio dell'energia cinetica turbolenta) si sommano anche questi tre termini e tale somma è nulla quando il fluido è incomprimibile, cosa che in prima approssimazione possiamo sempre considerare vera. Quindi il termine di ridistribuzione della pressione non cambia l'energia cinetica totale, ma semplicemente ridistribuisce energia da una componente del moto all'altra, spostando energia dalla componente che ne ha di più a quella che ne ha di meno. Così, tale termine opera rendendo la turbolenza più isotropa e per questo è noto come *return-to-isotropy term*. Dato che termini del tipo $\partial u/\partial x$ sono tanto maggiori quanto più piccole sono le dimensioni dei vortici, c'è da aspettarsi che i vortici più piccoli siano pressoché isotropi.

Applicando queste semplificazioni e riorganizzando i vari termini, l'equazione prognostica per la varianza della componente u_i del moto risulta data da:

$$\frac{\partial \overline{u_\iota^2}}{\partial t} + \overline{u_\alpha}\frac{\partial \overline{u_\iota^2}}{\partial x_\alpha} = 2\delta_{i3}\overline{u_\iota\frac{\theta_v}{\bar{\theta}_v}}\cdot g - 2\overline{u_\iota u_\alpha}\frac{\partial \overline{u_\iota}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \overline{u_\alpha u_\iota^2}}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial \overline{u_\iota p}}{\partial x_i} - 2\nu\cdot\overline{u_\iota\frac{\partial^2 u_\iota}{\partial x_\alpha^2}} \qquad [5.27a]$$

in cui:

- il primo termine rappresenta il tasso di variazione locale della varianza;
- il secondo termine descrive l'avvezione della varianza ad opera del vento medio;
- il terzo termine è il termine di *galleggiamento* (*buoyancy*) che è di produzione o di consumo a seconda che il flusso turbolento di calore sia positivo (situazione diurna convettiva) o negativo (situazione notturna e stabile);
- il quarto termine è un termine di produzione, dato che il flusso turbolento di quantità di moto è normalmente negativo nel *PBL*;
- il quinto termine descrive il trasporto turbolento della varianza. Attenzione! È un momento del terzo ordine!
- Il sesto termine descrive come la varianza viene ridistribuita a causa delle perturbazioni di pressione. Questo termine è spesso associato ai fenomeni oscillatori (onde di gravità) che si possono instaurare in atmosfera;
- Il settimo termine descrive la dissipazione viscosa di varianza.

Le relazioni che descrivono il tasso di variazione della varianza delle tre componenti del moto sono identiche tra loro tranne nel fatto che il termine *di buoyancy* è assente nelle componenti orizzontali. Questa relazione è valida in generale. Se, però, il *PBL* è caratterizzato da una spiccata omogeneità orizzontale, allora in questo caso la componente verticale media del moto può essere trascurata e le tipiche variazioni verticali delle altre componenti medie del moto e dei diversi momenti sono molto maggiori delle analoghe variazioni orizzontali. In questa situazione paradigmatica cui spesso faremo riferimento, le equazioni prognostiche per le tre varianze risultano espresse dalle relazioni seguenti, in cui per sinteticità è stata impiegata la derivata materiale:

$$\begin{aligned}\frac{D\overline{u_\iota^2}}{Dt} &= -2\overline{uw}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{wu^2}}{\partial z} - \frac{2}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial \overline{up}}{\partial x} + 2\overline{\frac{p}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}} - 2\nu\cdot\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2} \\ \frac{D\overline{v_\iota^2}}{Dt} &= -2\overline{vw}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{wv}}{\partial z} - \frac{2}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial \overline{vp}}{\partial y} + 2\overline{\frac{p}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}} - 2\nu\cdot\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}\right)^2}\end{aligned} \qquad [5.27b]$$

$$\frac{D\overline{w_i^2}}{Dt} = 2\frac{g}{\overline{\theta_v}}\overline{w\theta_v} - \frac{\partial\overline{w^3}}{\partial z} - \frac{2}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial\overline{wp}}{\partial x} + 2\overline{\frac{p}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}} - 2\nu\cdot\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\right)^2}$$

Come si nota, il termine di sorgente per la varianza delle componenti orizzontali del moto è costituito dal solo *shear del vento*, mentre il termine di sorgente per la varianza della componente verticale del moto è esclusivamente la *buoyancy*.

Al di là del contributo dei singoli termini, è interessante avere almeno delle indicazioni qualitative sul comportamento della varianza delle tre componenti del moto.

Le due componenti orizzontali si comportano in maniera molto simile (in prima approssimazione, identica). Di giorno presentano valori spesso notevolmente elevati entro il *SL*, valori che decrescono con la quota fino a rimanere circa costanti entro l'intero *ML* diminuendo ulteriormente nella zona di *entrainment*. In **Fig. 5.4** è mostrata la situazione descritta. In essa sono evidenziate sia le misure sperimentali ottenute in laboratorio (Willis e Deardorff,1974; triangoli pieni) che alcune delle misure ottenute nella campagna sperimentale del Minnesota (Kaimal e al, 1976) e nella campagna di Ashchurch, Worchestershire (Caughey e al., 1979). Oltre a ciò, la curva tratteggiata rappresenta i risultati ottenuti da Deardorff (1974a). In questa rappresentazione la quota è *scalata* dal valore dell'estensione massima del *ML*, qui indicata come Z_i.

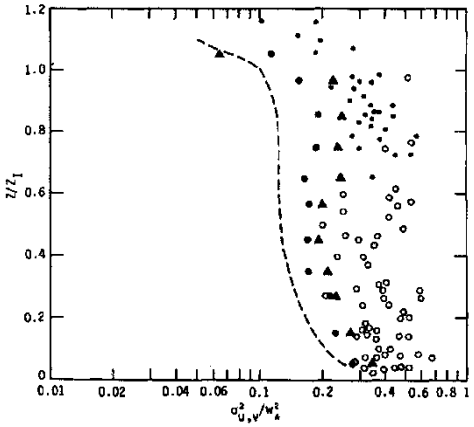


Fig. 5.4: profilo verticale della varianza della componente orizzontale in un PBL convettivo. Confronto tra ricostruzioni numeriche e valori misurati (Sun e Ogura, 1980).

Durante le ore notturne invece l'andamento con la quota della varianza delle componenti orizzontali è rapidamente decrescente fino ad annullarsi a quote abbastanza basse (attorno ai 200 m). In condizioni circa adiabatiche, l'andamento con la quota è ancora di diminuzione costante a partire da valori elevati al suolo, anche se raggiunge valori circa nulli a quote molto più elevate (circa 2000 m).

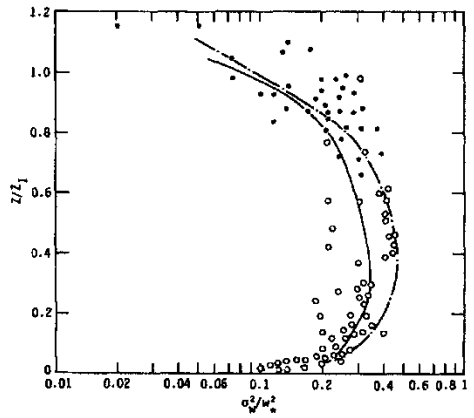


Fig. 5.5: profilo verticale della varianza della componente verticale del moto in un PBL convettivo. Confronto tra ricostruzioni numeriche e valori misurati (Sun e Ogura, 1980).

La varianza della componente verticale del moto presenta un comportamento in un certo senso complementare. In effetti, durante le ore diurne e convettive, è piccola entro il *SL* e cresce rapidamente nel *ML* fino a raggiungere un valore massimo approssimativamente ad un terzo dell'estensione massima del *PBL*. Quindi inizia una graduale diminuzione che la porta a valori molto bassi (quasi nulli) alla sommità del *PBL*. Tutto ciò è evidenziato nella **Fig.5.5** in cui sono riportati, oltre ai già citati dati sperimentali ottenuti nella campagna del Minnesota e di Ashchurch, anche il risultato di alcune simulazioni numeriche.

Il comportamento nelle situazioni stabili è analogo a quello presentato dalle componenti orizzontali dato che in tali situazioni esiste una notevole isotropia.

5.3.1.2 La varianza della temperatura potenziale virtuale

Con una tecnica analoga si ottiene anche l'equazione prognostica per la varianza della temperatura potenziale. Va detto per chiarezza che per ragioni storiche convivono in Letteratura due modi diversi di effettuare il bilancio di varianza della temperatura potenziale virtuale: il primo (Stull, 1988; Sorbjan, 1989; Tampieri, 2017) considera effettivamente il budget della varianza, mentre il secondo (Businger 1982; Garratt, 1992; Kaimal e Finnigan, 1994) prende a riferimento la semi-varianza e tutto ciò crea non poca confusione, soprattutto nell'interpretazione corretta del termine di dissipazione molecolare. Qui si è scelto di presentare l'equazione di conservazione della varianza della temperatura potenziale virtuale, adottando, però, per il termine di dissipazione molecolare la convenzione in uso soprattutto nel mondo sperimentale e che è congruente con il budget della semi-varianza. La relazione che si ottiene è la seguente:

$$\frac{\partial\overline{\theta_v^2}}{\partial t}+\overline{u_\alpha}\frac{\partial\overline{\theta_v^2}}{\partial x_\alpha}=-2\overline{\theta_v u_\alpha}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial\overline{u_\alpha\theta^2}}{\partial x_\alpha}-2\nu_\theta\cdot\overline{\left(\frac{\partial\theta_v}{\partial x_\alpha}\right)^2} \qquad [5.28a]$$

Nella derivazione di questa equazione si è ignorato il termine che dipende dalla variazione spaziale della radiazione netta (Stull 1989). Ogni termine di questa relazione rappresenta un processo specifico che interviene nel determinare la varianza della temperatura. In particolare:

- <u>*primo termine*</u>: è il termine prognostico, cioè il tasso di variazione locale della varianza della temperatura potenziale virtuale;
- <u>*secondo termine*</u>: è il termine *avvettivo*;
- <u>*terzo termine*</u>: è il termine di *produzione*, associato ai moti turbolenti, dovuti al gradiente di temperatura media;
- <u>*quarto termine*</u>: rappresenta il trasporto turbolento di varianza di temperatura. Si noti che questo è un momento terzo;
- <u>*quinto termine*</u>: è il termine di *dissipazione molecolare*. È usuale definire come *tasso di dissipazione della semi-varianza di temperatura* N_θ la grandezza seguente:

$$N_\theta=\nu_\theta\cdot\overline{\left(\frac{\partial\theta_v}{\partial x_\alpha}\right)^2} \qquad [5.28b]$$

Questa è la normale definizione del tasso di dissipazione della varianza della temperatura potenziale virtuale (Kaimal e Finnigan, 1994), anche se non mancano in Letteratura esempi in cui la definizione preveda un fattore moltiplicativo 2. Ciò è una notevole fonte di confusione!

Quindi la relazione di conservazione (5.28a) può essere riscritta ora come:

$$\frac{\partial\overline{\theta_v^2}}{\partial t}+\overline{u_\alpha}\frac{\partial\overline{\theta_v^2}}{\partial x_\alpha}=-2\overline{\theta_v u_\alpha}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial\overline{u_\alpha\theta^2}}{\partial x_\alpha}-2N_\theta \qquad [5.28c]$$

In una situazione di completa omogeneità orizzontale le derivate rispetto alle coordinate

orizzontali si annullano così come si annulla il termine proporzionale alla velocità media verticale del moto. In questo caso, l'equazione prognostica per la varianza della temperatura potenziale virtuale si semplifica notevolmente riducendosi alla più semplice relazione seguente:

$$\frac{\partial \overline{\theta_v^2}}{\partial t} = -2\overline{w\theta_v}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{w\theta^2}}{\partial z} - 2N_\theta \qquad [5.28d]$$

È immediato notare come il primo termine di destra (quello legato alla *buoyancy* ed al gradiente verticale di temperatura media) è positivo sia nelle situazioni convettive che in quelle stabili. Esso è il *termine di sorgente* e asserisce che la varianza della temperatura si genera per la combinazione del flusso verticale di calore sensibile e del gradiente di temperatura media. In condizioni stazionarie, è immediato constatare come la produzione di varianza di temperatura sia pari alla sua dissipazione viscosa (a meno del termine di trasporto turbolento verticale).

Il comportamento qualitativo del profilo verticale della varianza di temperatura potenziale nelle situazioni convettive vede due massimi, uno localizzato al suolo e causato dai vortici convettivi e l'altro localizzato alla sommità del *PBL* causato dall'*entrainment*. Ciò si vede chiaramente nella **Fig. 5.6** in cui è mostrato il profilo verticale della varianza della temperatura potenziale *scalata* rispetto a T_*^2 (in figura indicato col simbolo θ_*^2) ottenuta da simulazioni numeriche differenti, tutte relative a situazioni convettive, oltre che le misure ottenute nella già citata campagna del Minnesota.

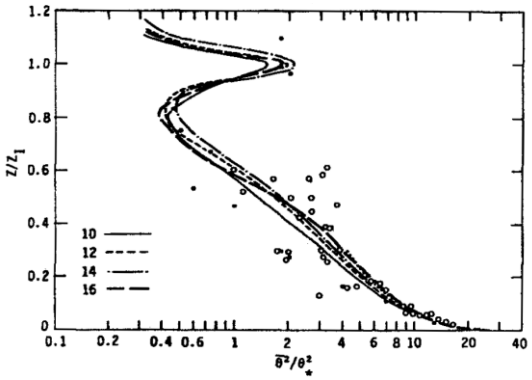


Fig. 5.6: profilo verticale della varianza della temperatura potenziale virtuale in un PBL convettivo. Confronto tra ricostruzioni numeriche e valori misurati (Sun e Ogura, 1980).

Nelle situazioni stabili, invece, si assiste ad una progressiva e rapida diminuzione della varianza con la quota.

5.3.1.3 La varianza degli scalari passivi

La relazione del bilancio della varianza per uno scalare passivo q (*mixing ratio* di vapor d'acqua o di ogni sostanza gassosa passiva inquinante) si ottiene con la medesima metodologia adottata per la varianza della temperatura potenziale virtuale, giungendo alla relazione generale seguente:

$$\frac{\partial \overline{q^2}}{\partial t} + \overline{u_\alpha}\frac{\partial \overline{q^2}}{\partial x_\alpha} = -2\overline{qu_\alpha}\frac{\partial \bar{q}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \overline{u_\alpha q^2}}{\partial x_\alpha} - 2\nu_q \cdot \overline{\left(\frac{\partial q}{\partial x_\alpha}\right)^2} \qquad [5.29a]$$

L'interpretazione fisica dei vari termini dell'equazione è identica a quella data per l'equazione della varianza della temperatura potenziale. Se, in analogia con quanto fatto per la varianza della temperatura, si definisce il *Tasso medio di Dissipazione molecolare dello scalare* la grandezza:

$$N_q = \nu_q \cdot \overline{\left(\frac{\partial q}{\partial x_\alpha}\right)^2} \qquad [5.29b]$$

allora la (5.29a) può essere riscritta come:

$$\frac{\partial \overline{q^2}}{\partial t} + \overline{u_\alpha}\frac{\partial \overline{q^2}}{\partial x_\alpha} = -2\overline{qu_\alpha}\frac{\partial \bar{q}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \overline{u_\alpha q^2}}{\partial x_\alpha} - 2N_q \qquad [5.29c]$$

Se poi si considera una situazione paradigmatica di completa omogeneità orizzontale, la (2.29c) si riduce alla più semplice equazione seguente:

$$\frac{\partial \overline{q^2}}{\partial t} = -2\overline{wq}\frac{\partial \bar{q}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{wq^2}}{\partial x_\alpha} - 2N_q \qquad [5.29d]$$

È immediato vedere come il primo termine del membro di sinistra sia il *termine di sorgente* che è il risultato dell'azione contemporanea del flusso turbolento di scalare e del suo gradiente. In particolare, questo termine è positivo quando il segno del flusso verticale e del gradiente verticale sono discordi. Anche in questo caso (è l'ultimo termine del membro di destra) è presente il termine di dissipazione molecolare. Infine, se si trascura il trasporto verticale di varianza e si considera una situazione stazionaria, il termine di sorgente bilancia esattamente il termine dissipativo.

5.3.2 GLI STRESS DI REYNOLDS ED I FLUSSI TURBOLENTI

Le equazioni per gli stress di Reynolds e per i flussi turbolenti di calore sono molto complesse e per esse si rimanda a Stull (1988). Dopo alcune semplificazioni dettate da considerazioni di scala (che portano a trascurare gli effetti di Coriolis e della diffusione molecolare degli stress), si giunge alla relazione prognostica seguente (Stull, 1988), valida per ogni <u>*stress di Reynolds*</u>:

$$\frac{\partial \overline{u_\iota u_k}}{\partial t} + \overline{u_\alpha}\frac{\partial \overline{u_\iota u_k}}{\partial x_\alpha} = -\overline{u_\iota u_\alpha}\frac{\partial \overline{u_k}}{\partial z} - \overline{u_k u_\alpha}\frac{\partial \overline{u_\iota}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{u_\iota u_\alpha u_k}}{\partial x_\alpha} + \frac{g}{\overline{\theta_v}}\cdot[\delta_{k3}\overline{u_\iota\theta_v} + \delta_{i3}\overline{u_k\theta_v}] + \overline{\frac{p}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial u_\iota}{\partial k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_\iota}\right)} - 2\varepsilon_{u_\iota u_k} \qquad [5.30a]$$

In questa relazione il Tasso di Dissipazione Viscosa dello stress di Reynolds è stato indicato come $\varepsilon_{u_i u_k}$ ed è dato dalla relazione (Businger, 1982):

$$\varepsilon_{u_i u_k} = \nu \cdot \overline{\left(u_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha^2} + u_i \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_\alpha^2}\right)} \qquad [5.30b]$$

I vari termini dell'equazione assumono il significato seguente:

- <u>primo termine</u>: tasso di variazione della covarianza (flusso di quantità di moto),
- <u>secondo termine</u>: avvezione del flusso di quantità di moto prodotta dal vento medio,
- <u>terzo e quarto termine</u>: produzione di flusso di quantità di moto dallo *shear* del vento
- <u>quinto termine</u>: trasporto del flusso di quantità di moto dovuto alla turbolenza. Attenzione che è un momento del terzo ordine.
- <u>sesto termine</u>: produzione o distruzione del flusso di quantità di moto da *buoyancy*
- <u>settimo termine</u>: ridistribuzione del flusso di quantità di moto operata dalle fluttuazioni di pressione (*return-to-isotropy*)
- <u>ottavo termine</u>: dissipazione viscosa.

Anche in questo caso sono presenti momenti del terzo ordine nei termini di trasporto turbolento.

Per un *PBL* omogeneo in orizzontale e considerando *solo* i flussi verticali, è possibile ottenere delle equazioni prognostiche semplificate. Nel caso degli stress di Reynolds l'equazione semplificata per i flussi verticali di quantità di moto è la seguente, in cui è stato anche indicato sinteticamente il significato dei vari termini presenti (Sorbjan, 1989):

$$\frac{\partial \overline{u_\iota w}}{\partial t} = \underbrace{-\overline{w^2}\frac{\partial \overline{u_\iota}}{\partial z}}_{\substack{produzione\\ meccanica}} - \underbrace{\frac{\partial \overline{u_\iota w^2}}{\partial z}}_{\substack{trasporto\\ turbolento}} \underbrace{-\frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\left(\overline{u_\iota \frac{\partial p}{\partial z}} + \overline{w\frac{\partial p}{\partial z}}\right)}_{\substack{azione\ della\\ pressione}} + \underbrace{\frac{g}{\overline{\theta_v}}\overline{u_\iota \theta_v}}_{buoyancy} + \underbrace{f\varepsilon_{ij3}\overline{u_\alpha w}}_{Coriolis} + \underbrace{\nu\cdot\left(\overline{w\frac{\partial^2 u_\iota}{\partial x_\alpha^2}} + \overline{u_\iota \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2}}\right)}_{\substack{dissipazione\ viscosa}} \quad [5.30c]$$

Prendendo a riferimento questa equazione valida in situazioni paradigmatiche, si può fare la considerazione seguente. Nelle situazioni convettive stazionarie con *shear* del vento non trascurabile si nota come nella parte bassa del *ML* la produzione meccanica bilanci approssimativamente il termine di pressione. In questo caso, se l'asse *x* è orientato lungo la direzione media del vento, trascurando il termine di Coriolis, il trasporto turbolento, la *buoyancy* ed il termine dissipazione viscosa, si ha che:

$$\overline{w^2}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\left(\overline{w\frac{\partial p}{\partial x}} + \overline{u\frac{\partial p}{\partial z}}\right) \quad [5.31a]$$

Supponendo vera la semplice parametrizzazione secondo cui tra il termine di pressione e la covarianza tra *u* e *w* esiste una semplice relazione lineare del tipo:

$$\overline{uw} = -\frac{\tau_1}{\bar{\rho}}\cdot\left(\overline{w\frac{\partial p}{\partial x}} + \overline{u\frac{\partial p}{\partial z}}\right) \quad [5.31b]$$

dove τ_1 è un opportuno tempo di scala, si ha la relazione semplificata seguente:

$$\overline{uw} = -\tau_1 \cdot \overline{w^2}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad [5.31c]$$

molto interessante perché tra i flussi verticali di quantità di moto ed il gradiente verticale delle componenti del vento sussisterebbe una relazione molto simile alla legge di Fick. Una relazione del genere la troveremo studiando il *SL* in condizioni stazionarie al Cap. 8. Tutto ciò va però preso con prudenza visto che l'approssimazione (5.31a) e le deduzioni conseguenti valgono solo in presenza di *shear* e quindi non in regime di *free convection.*

Per quanto riguarda, invece, il *flusso turbolento di calore sensibile*, è ovviamente possibile scrivere la relazione prognostica generale che, dopo alcune semplificazioni giustificate da motivi di scala (Stull, 1988), risulta pari a:

$$\frac{\partial \overline{\theta u_\iota}}{\partial t} + x_\alpha \frac{\partial \overline{\theta u_\iota}}{\partial x_\alpha} = -\overline{\theta_v u_\alpha}\frac{\partial \bar{u}_\iota}{\partial x_\alpha} - \overline{u_\iota u_\alpha}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \overline{\theta u_\alpha u_\iota}}{\partial x_\alpha} + \delta_{i3}\left(\frac{\overline{\theta\theta_v}}{\overline{\theta_v}}\right)g + \frac{1}{\bar{\rho}}\left[p\frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha}\right] - 2\varepsilon_{u_i\theta} \quad [5.31d]$$

In questa relazione il termine di dissipazione molecolare è definito come:

$$\varepsilon_{u_i\theta} = \nu\overline{\left(\frac{\partial u_\iota}{\partial x_\alpha}\right)\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha}\right)} \quad [5.31e]$$

Considerando il solo flusso verticale di calore in una *situazione di completa omogeneità orizzontal*e e trascurando il termine molecolare, la relazione precedente riferita ora alla temperatura potenziale virtuale, si semplifica riducendosi alla forma (Sorbjan, 1989):

$$\frac{\partial \overline{w\theta_v}}{\partial t} = -\underbrace{\overline{w^2}\frac{\partial \overline{\theta_v}}{\partial z}}_{\substack{produzione\\ meccanica}} - \underbrace{\frac{\partial \overline{w^2\theta_v}}{\partial z}}_{\substack{trasporto\\ turbolento}} + \underbrace{\left(\frac{\bar{g}}{\overline{\theta_v}}\right)\overline{\theta_v^2}}_{buoyancy} - \underbrace{\frac{1}{\bar{\rho}}\overline{\theta_v\frac{\partial p}{\partial z}}}_{\substack{effetto\ della\\ pressione}} \quad [5.31f]$$

Come si può notare, il terzo termine è anche questa volta un momento del terzo ordine.

Nella **Fig. 5.7** sono raccolti alcuni dati di flusso di calore (Zhou e al., 1985) ottenuti da misure realizzate alla torre meteorologica di Bulder in Colorado nel 1983 in una situazione convettiva e da cui è stato possibile individuare i vari termini di *budget* presenti nella relazione prognostica. Analizzando queste osservazioni si nota come il flusso verticale di calore turbolento sia prodotto al suolo dalla *buoyancy* e dallo *shear* (*thermals* positivi). Il risultato di ciò è un piccolo, ma regolare, trasferimento verso l'alto del flusso di calore. All'inversione, invece, c'è una grande produzione di flusso di calore per *buoyancy*, bilanciata principalmente da una produzione meccanica negativa causata dalla penetrazione delle particelle d'aria nello strato sovrastante più freddo. Questo termine negativo forza valori negativi di flusso di calore alla sommità del *PBL*. Queste *condizioni convettive* (che sono le più diffuse) sono dette *penetrative*. Tuttavia, nelle prime ore del giorno, con convezione debole, si possono instaurare condizioni non penetrative in cui i *thermals* decelerano muovendosi verso l'alto, raggiungendo la sommità del *PBL* con un valore di *buoyancy* leggermente negativo. In questo modo i *thermals* ascendenti si convertono in flussi discendenti. Gli *updraft* hanno una velocità maggiore ma occupano un'area inferiore rispetto ai *downdraft* che sono più lenti ma distribuiti maggiormente in orizzontale. In generale, fluttuazioni positive di temperatura e velocità verticale nei *thermals* ascendenti e fluttuazioni negative, di temperatura e di velocità verticale, nei flussi discendenti fanno sì che il flusso di calore vari linearmente con la quota da un valore positivo al suolo ad un valore negativo alla sommità del *PBL*.

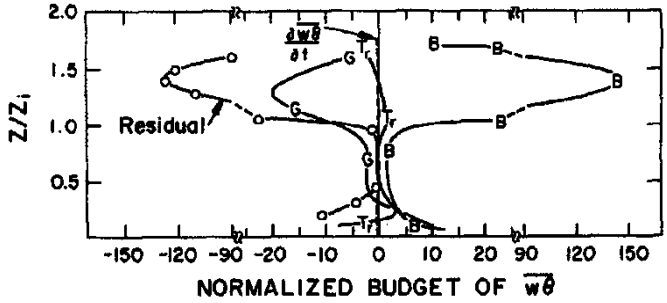


Fig.5.7: budget del flusso di calore verticale in situazioni convettive (Zhou e al, 1985). B è il termine di galleggiamento (buoyancy), T_r il trasporto turbolento, G la produzione meccanica, Residual l'ultimo termine e Z_i l'estensione massima del ML.

Nella parte centrale di un *PBL* convettivo, in condizioni stazionarie e con omogeneità orizzontale, la (5.31f) una volta tralasciati alcuni termini dimensionalmente ininfluenti si riduce a (Deardorff, 1966):

$$\overline{w^2}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z} = \left(\frac{g}{\overline{\theta_v}}\right)\overline{\theta_v^2} - \frac{1}{\bar{\rho}}\overline{\theta_v\frac{\partial p}{\partial z}} \qquad [5.31g]$$

Dato che il termine di pressione usualmente viene parametrizzato come:

$$\frac{1}{\bar{\rho}}\overline{\theta_v\frac{\partial p}{\partial z}} = \frac{\overline{w\theta_v}}{\tau_2} \qquad [5.31h]$$

dove τ_2 è un opportuno tempo turbolento di scala, la relazione precedente diventa:

$$\overline{w\theta_v} = -\tau_2\cdot\left(\overline{w^2}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z} - \left(\frac{g}{\overline{\theta_v}}\right)\overline{\theta_v^2}\right) \qquad [5.31i]$$

Essa evidenzia come il flusso verticale di calore turbolento non sia semplicemente proporzionale al gradiente di temperatura potenziale virtuale media, vista la struttura binomia del membro di destra della relazione. In particolare, oltre al termine di gradiente, si individua anche il termine di *controgradiente* di segno opposto ed attivo anche quando il gradiente di temperatura potenziale è nullo o piccolissimo, cosa che regolarmente ha luogo nel *ML* durante le situazioni convettive. Questa è una delle evidenze del fatto che esprimere i flussi di calore con i coefficienti di diffusività

turbolenta non sempre risulta corretto, specialmente nelle situazioni convettive.

5.3.3 L'ENERGIA CINETICA TURBOLENTA

La presenza della turbolenza nel *PBL* comporta che le variabili cinematiche e termodinamiche che lo caratterizzano fluttuino attorno ad un valore medio e da ciò deriva il fatto che nell'aria sia presente energia non associabile allo stato di riferimento dell'atmosfera. Per essere più precisi, le fluttuazioni delle componenti del moto hanno associata l'energia cinetica turbolenta (*TKE*), mentre le fluttuazioni di temperatura potenziale hanno associata l'energia potenziale turbolenta (*TPE*). Complessivamente, alla turbolenza è associata un'energia turbolenta totale (*TTE*) somma delle due. In questo paragrafo studieremo nel dettaglio la *TKE*, mentre nei due successivi la *TPE*, la *TTE* e l'interazione reciproca tra le diverse forme di energia.

Si definisce *energia cinetica turbolenta media* E_k (o meglio energia cinetica turbolenta per unità di massa) la metà della somma delle varianze delle componenti del vento cioè:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \left[\overline{u^2 + v^2 + w^2}\right] = \frac{1}{2} \cdot \overline{u_\alpha^2} \qquad [5.32]$$

L'energia cinetica turbolenta è quell'energia direttamente associabile ai movimenti caotici delle masse d'aria e rappresenta una delle variabili più importanti in Micrometeorologia, essendo di fatto il punto di partenza per le principali parametrizzazioni dei coefficienti di diffusività turbolenta, necessari per la chiusura del modello fluidodinamico dell'atmosfera.

5.3.3.1 L'equazione prognostica

L'equazione prognostica per l'energia cinetica turbolenta si ottiene dalla semisomma delle equazioni prognostiche per le varianze delle tre componenti del moto. Il risultato finale, dopo laboriosi e noiosi calcoli algebrici e l'eliminazione di alcuni termini di minor rilevanza dipendenti dalla viscosità (Stull, 1988), si presenta nella forma seguente:

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} + \overline{u_\alpha}\frac{\partial E_k}{\partial x_\alpha} = \delta_{\alpha 3}\frac{g}{\overline{\theta_v}} \cdot \overline{u_\alpha \theta_v} - \overline{u_\alpha u_\beta}\frac{\partial \overline{u_\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \overline{u_\alpha e}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \overline{u_\alpha p}}{\partial x_\alpha} - \varepsilon \qquad [5.33a]$$

In questa relazione col simbolo *e* si è indicato il valore istantaneo di Energia Cinetica turbolenta (cioè $e = u_\alpha^2/2$), mentre il Tasso Medio di Dissipazione di Energia Cinetica Turbolenta è definito in generale come:

$$\varepsilon = \nu \overline{\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^2} \qquad [5.33b]$$

Prima di fare altri commenti, si nota immediatamente come non ci sia traccia del termine di Coriolis e ciò è la diretta conseguenza del fatto che questa forza apparente non produce lavoro. Inoltre, essendo stata ottenuta come semisomma delle varianze delle tre componenti del moto, E_K può essere vista come composta da tre componenti distinte: E_x e E_y che sono le due componenti orizzontali ed E_z che è la componente verticale. Per quanto riguarda i vari termini che compongono l'equazione, va detto che:

- il primo termine rappresenta il tasso di variazione dell'energia cinetica turbolenta,
- il secondo termine tiene conto della sua avvezione;
- il terzo termine rappresenta la produzione di energia cinetica turbolenta, o la sua distruzione, dovuta alla convettività, cioè all'immissione turbolenta di calore. Nel caso in cui ci sia distruzione di energia cinetica, questa distruzione non è irreversibile. Infatti l'energia cinetica turbolenta persa diventa energia potenziale turbolenta ed il trasferimento tra le due forme di energia è reversibile;
- il quarto termine rappresenta la produzione di energia cinetica turbolenta dovuta alla

turbolenza meccanica legata allo *shear* del vento;

- il quinto termine rappresenta il trasporto turbolento di energia cinetica. Attenzione: anche se non sembra, è un momento del terzo ordine;
- il sesto termine descrive come si ridistribuisce l'energia cinetica turbolenta a causa delle perturbazioni di pressione tra le tre componenti E_x, E_y ed E_z. Questo termine è spesso associato alle oscillazioni ondose dell'aria (onde di gravità):
- il settimo termine rappresenta il tasso di dissipazione irreversibile dell'energia cinetica turbolenta, cioè la sua conversione in calore. Tale termine normalmente viene indicato complessivamente come ε.

La presenza del tasso di dissipazione di energia cinetica turbolenta ε nell'equazione indica che il processo di dissipazione è costantemente attivo e quindi che la turbolenza è *dissipativa*. Perciò, la turbolenza decade in modo naturale nel tempo a meno di non essere generata localmente o trasportata dal moto medio dell'aria. L'energia cinetica turbolenta E_K quindi non si conserva.

Il termine dissipativo è la semisomma dei termini dissipativi presenti nelle equazioni prognostiche per le tre varianze ed è dato in generale dalla (5.33b), quindi è la somma di 9 termini, in generale, distinti. *Se però la turbolenza è isotropa*, i termini:

$$s_{\alpha\alpha} = \overline{\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}\right)^2} \qquad [5.33c]$$

sono uguali per tutti gli $\alpha = 1, 2, 3$ ed anche i termini:

$$s_{\alpha\beta} = \overline{\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\right)^2} \qquad [5.33d]$$

sono uguali per tutte le combinazioni $\alpha \neq \beta$. Inoltre, in condizioni di turbolenza isotropa si ha che $2s_{11} = 2s_{22} = 2s_{33} = s_{12} = s_{13} = s_{23} = s_{21} = s_{31} = s_{32}$, quindi l'espressione di ε si semplifica come:

$$\varepsilon = 15\nu \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2} \qquad [5.33e]$$

Prima di discutere del significato dei vari termini della (5.33a), è importante presentare una sua forma semplificata. Orientando l'asse *x* nella direzione del vento medio, se si ignora l'avvezione, se si ipotizza che ci sia una omogeneità orizzontale e se la componente verticale media del vento (subsidenza) è trascurabile, tale relazione si riduce alla forma seguente:

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} = \frac{g}{\overline{\theta_v}} \cdot \overline{w\theta_v} - \left[\overline{uw}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{vw}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right] - \frac{\partial \overline{we}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \overline{wp}}{\partial x_\alpha} - \varepsilon \qquad [5.34]$$

5.3.3.2 I termini dell'equazione prognostica

Rimandando a Stull (1988) per una discussione più approfondita sull'argomento, qui di seguito vengono presentati alcuni commenti relativi ai vari termini presenti nella relazione (5.33a).

Termine 1: il tasso di variazione dell'energia cinetica turbolenta

La variazione nello spazio e nel tempo di E_k è molto elevata, come si può notare nella **Fig. 5.8** dove è rappresentata la ricostruzione numerica della distribuzione di E_k nel tempo e con la quota per due tipici giorni consecutivi. Da questa tipica ricostruzione si nota che:

- l'energia cinetica turbolenta è notevolmente più elevata nelle ore in cui la turbolenza convettiva è attiva e cresce rapidamente al crescere della turbolenza convettiva immessa nel *PBL* (*spin up*);
- si estende fino a quote dell'ordine dei 1000 m e, di fatto, *marca* l'intero *PBL*;

- presenta un massimo nel terzo inferiore del *PBL*;
- crolla rapidamente (*spin down*) e definitivamente al termine delle ore convettive quando cessano di essere attive le sorgenti di turbolenza convettiva;
- mantiene valori bassi nelle ore stabili (notturne) coprendo uno spessore di atmosfera decisamente limitato rispetto all'estensione verticale diurna del *PBL*.

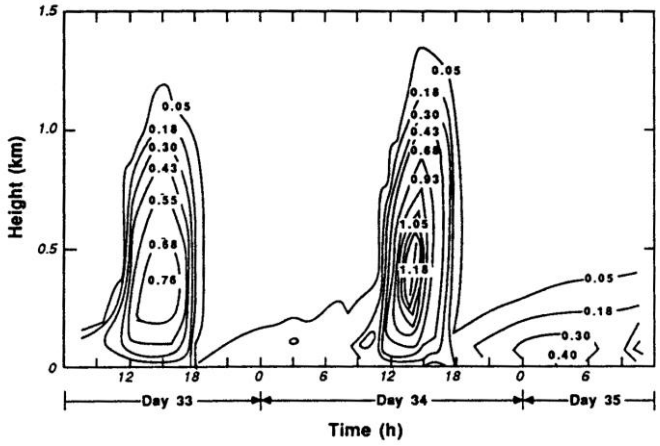


Fig.5.8: ricostruzione numerica della distribuzione verticale di energia cinetica turbolenta nel tempo (Mellor e Yamada, 1975)

Termine 2: l'avvezione

Ben poco è noto sul trasporto di energia cinetica turbolenta per opera del moto medio delle masse d'aria. Ciò che si è riscontrato numericamente è che tale trasporto ha ben poco peso nell'equazione prognostica di E_K e perciò è spesso ignorato nella pratica modellistica.

Termine 3: la produzione e distruzione convettiva

L'energia termica viene introdotta nel *PBL* all'interfaccia aria-suolo per trasferimento turbolento di calore sensibile. Quindi, nelle situazioni convettive sarà proprio il termine E_z che dipende dal flusso turbolento verticale di calore ad avere la supremazia, cosa ben verificata sia numericamente che sperimentalmente ed è indicata chiaramente dagli alti valori di E_k vicino al suolo. Tra l'altro, E_z varia circa linearmente con la quota fino a circa 2/3 dell'estensione verticale del *PBL*. Va notato, poi, che questo contributo alla variazione temporale di E_k è intrinsecamente anisotropo e polarizzato verso i trasferimenti verticali, in sintonia completa con il fatto che il *PBL* convettivo è sede privilegiata di *thermals*. La presenza delle nubi può alterare profondamente il quadro convettivo. In effetti una copertura completa del cielo impedisce lo sviluppo della convettività, abbassando i valori di E_k. D'altro canto la presenza di nubi cumuliformi con la loro produzione interna di *buoyancy* incrementa nella parte alta del *PBL* la produzione di E_K.

La situazione notturna è totalmente determinata dal gradiente di temperatura potenziale presente nel *PBL*, cioè dalla situazione di stabilità statica determinata dal valore positivo di tale gradiente. Come visto al Cap.1, in questa situazione ogni particella che viene spostata dalla propria posizione di equilibrio a causa di un'iniezione di energia, risponde oscillando e tendendo a ricollocarsi nella posizione originaria. Questa è chiaramente una situazione che tende a *sopprimere* l'energia cinetica turbolenta. Come vedremo, però, la soppressione di energia cinetica turbolenta comporta un incremento di energia turbolenta potenziale.

Termine 4: la produzione meccanica

La produzione *meccanica* di E_K dipende sia dagli *stress di Reynolds* sia dal gradiente del vento medio. Dato che tali grandezze dipendono solo dal movimento delle masse d'aria, il termine di

produzione meccanica risulta sempre attivo ed è facile dimostrare che è anche sempre positivo e che è tanto maggiore quanto più la situazione è ventosa. Dato che il movimento delle masse d'aria, principalmente su terreni piani, è sostanzialmente orizzontale, anche questo termine, come il termine di produzione convettiva, è intrinsecamente anisotropo solo che in questo caso è polarizzato orizzontalmente ed è presente nelle componenti E_x ed E_y. Essendo tale termine dipendente dagli *stress di Reynolds*, che diminuiscono rapidamente con l'allontanarsi dal suolo, è inevitabile che presenti sempre minore importanza con l'aumentare della quota e ciò spiega perché, nelle ore notturne, l'estensione verticale del *PBL*, cioè di fatto la porzione di atmosfera interessata dalla turbolenza meccanica, sia decisamente ridotta rispetto alle situazioni convettive.

Termine 5: il trasporto turbolento

Questo termine rappresenta la divergenza del flusso turbolento di E_k e dipende dalle sue differenze locali di intensità. Quindi, *localmente* può essere sia positivo che negativo a seconda della convergenza o divergenza del flusso, ma integrato su tutto il *ML* è identicamente nullo. Quindi questo termine non crea e non distrugge energia cinetica turbolenta ma la *ridistribuisce* entro il *PBL*.

Termine 6: la correlazione con le fluttuazioni di pressione

Le fluttuazioni di pressione sono una delle cose più difficili da misurare, soprattutto lontano dal suolo, e quindi evidenze sperimentali relative a questo termine sono inesistenti. C'è comunque da dire che uno dei compiti di questo termine è quello di ridistribuire entro il *PBL* l'energia cinetica turbolenta. Infatti, l'energia di provenienza convettiva viene introdotta nel sistema attraverso la componente verticale E_z di E_K e le fluttuazioni di pressione si incaricano di trasferirla alle componenti orizzontali. Viceversa, l'energia derivante dallo *shear* del vento viene introdotta nel sistema attraverso le componenti orizzontali E_x e E_y di E_K e in questo caso le fluttuazioni di pressione si incaricano di trasferirlo anche alla componente E_z. In pratica, le fluttuazioni di pressione cercano di far tendere il sistema ad un sostanziale livello di isotropia. Questa non è l'unica funzione delle fluttuazioni di pressione. Dalla teoria delle onde di gravità emerge il fatto che tale termine dovrebbe essere anche il responsabile del flusso di energia contenuta nelle onde di gravità che si propagano verticalmente e ciò inevitabilmente determina la perdita di una porzione significativa di E_k che viene trasmessa all'atmosfera sovrastante il *PBL*.

Termine 7: la dissipazione viscosa

L'energia cinetica turbolenta non si conserva e questo termine ne descrive la dissipazione causata dalla viscosità molecolare che agisce più efficacemente sui vortici di più piccole dimensioni. Tuttavia, l'*energy cascade* fa sì che i vortici di grandi dimensioni, generati durante le situazioni convettive, evolvano in vortici di dimensioni sempre più piccole fino ad essere preda di questo termine che ne descrive la trasformazione in calore. C'è quindi una stretta dipendenza tra intensità di E_K e la sua dissipazione viscosa ε e, dato che E_K normalmente diminuisce con la quota, anche il termine dissipativo presenterà un comportamento analogo. Nelle ore notturne, con bassi valori di E_k, la dissipazione viscosa sarà altrettanto bassa.

Esercizio 5.4

A z = 300 m in situazioni convettive $\partial u/\partial z$ = 0.01 $m \cdot s^{-1}$, la temperatura potenziale virtuale media è di 298 K, $\overline{u'w'}$ è pari a -0.03 $m^2 s^{-2}$ e la covarianza $\overline{w'\theta'}$ è 0.15 $K \cdot m^{-1} s^{-1}$. Ipotizzando una situazione stazionaria di omogeneità orizzontale e trascurando i termini di trasporto turbolento e di interazione con le fluttuazioni di pressione, quale deve essere il valore della dissipazione viscosa perché sia mantenuta una situazione localmente stazionaria (Stull, 1988)?

Utilizzando la relazione (5.34) si ha che:

$$0 = \frac{g}{\overline{\theta_v}} \cdot \overline{w'\theta'} - \overline{u'w'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - 0 - 0 - \varepsilon$$

cioè:

$$\varepsilon = \frac{g}{\overline{\theta_v}} \cdot \overline{w'\theta'} - \overline{u'w'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$$

Quindi, inserendo i valori numerici proposti nell'ultima relazione ottenuta semplificando i vari termini non significativi, si ha che:

$$\varepsilon = \frac{g}{\overline{\theta_v}} \cdot \overline{w'\theta'} - \overline{u'w'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \frac{9.81}{298} \cdot 0.15 - (-0.03) \cdot 0.01) =$$
$$4.94 \cdot 10^{-3} + 0.3 \cdot 10^{-3} = 5.24 \cdot 10^{-3} m^2 s^{-3}$$

5.3.3.3 Interazione dell'energia cinetica media con la turbolenza

Nella (5.33a) il quarto termine indica come l'interazione della turbolenza col vento medio produca energia cinetica turbolenta e ciò dovrebbe essere accoppiata ad una perdita di energia cinetica media del fluido. Per verificare questa ragionevole ipotesi, si consideri l'equazione data per le componenti medie del moto e si costruisca con regole analoghe a quelle fin qui utilizzate l'equazione prognostica per l'energia cinetica media *MKE* definita come:

$$MKE = \frac{1}{2} \cdot [\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2] = \frac{1}{2} \cdot \overline{u_\alpha}^2 \qquad [5.35a]$$

che, dopo alcune semplificazioni, prende la forma (Stull, 1988):

$$\frac{\partial MKE}{\partial t} + \overline{u_\alpha}\frac{\partial MKE}{\partial x_\alpha} = -\delta_{\alpha 3} g \overline{u_\alpha} - \frac{\overline{u_\alpha}}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_\alpha} + \overline{u_\beta u_\alpha}\frac{\partial \overline{u_\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial\left(\overline{u_\alpha} \cdot \overline{u_\beta u_\alpha}\right)}{\partial x_\alpha} + \nu \overline{u_\alpha}\frac{\partial^2 \overline{u_\alpha}}{\partial x_\beta} \qquad [5.35b]$$

Se la si confronta con l'equazione (5.33a) per l'energia cinetica turbolenta E_k si vede che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial t} &= \cdots\cdots - \overline{u_\beta u_\alpha}\frac{\partial \overline{u_\beta}}{\partial x_\alpha} + \cdots\cdots \\ \frac{\partial MKE}{\partial t} &= \cdots\cdots + \overline{u_\beta u_\alpha}\frac{\partial \overline{u_\beta}}{\partial x_\alpha} + \cdots\cdots \end{aligned} \qquad [5.35c]$$

In entrambe le equazioni è presente il medesimo termine, ma con segno opposto. Così l'energia che è prodotta meccanicamente come turbolenza è persa dal flusso medio e viceversa.

5.3.4 L'ENERGIA POTENZIALE TURBOLENTA

La turbolenza costantemente presente nel *PBL*, che si manifesta con la caoticità insita nell'evoluzione spaziale e temporale di tutte le grandezze che lo caratterizzano, non può essere completamente quantificata dalla sola energia cinetica associata direttamente alle fluttuazioni caotiche delle componenti del moto, la *TKE* appunto. Al contrario, proprio per comprendere alcuni aspetti che emergono sempre più chiaramente dalle attività sperimentali in condizioni stabili, è risultata chiara la necessità di tener conto anche dell'Energia Potenziale Turbolenta disponibile *TPE* associata direttamente alla stratificazione termica ed alle fluttuazioni di temperatura potenziale virtuale. Mentre la *TKE* è stata l'oggetto privilegiato di un'enorme quantità di lavori di ricerca nel passato (anche recente) e spesso l'unico fulcro su cui poggiano parecchi schemi di Chiusura dedicati prevalentemente alle situazioni convettive, solo recentemente è iniziata una limitata attività di ricerca finalizzata a comprendere l'importanza della *TPE* sia per spiegare alcuni fenomeni tipici delle situazioni stabili sia per costruire chiusure dedicate alla ricostruzione ed alla previsione di queste situazioni. Alcuni lavori significativi in proposito sono quelli di Canuto e Minotti (1993), Schumann e Gerz (1995), Cheng e al. (2002), Zilitinkevich (2002), Mauritsen e al. (2007) e Zilitinkevich e al. (2007, 2008, 2013). Nei due paragrafi che seguono si introdurrà, per prima cosa, il concetto di Energia Potenziale Turbolenta (per unità di massa) *TPE*, che non è così familiare ed immediato come il concetto di *TKE*, e successivamente si presenterà la sua equazione prognostica.

5.3.5.1 La definizione di Energia Potenziale Turbolenta

L'*Energia Potenziale Turbolenta* per unità di massa (*TPE*) può essere definita come quella porzione di energia associata allo spostamento, *adiabatico* e *casuale*, di una generica particella di fluido. In realtà, l'energia potenziale è direttamente associata alle fluttuazioni di densità (Zilitinkevich e al., 2008) che, a loro volta, per la legge di stato dei gas e l'equazione idrostatica, sono associati alle fluttuazioni di temperatura. Seguendo Mauritsen e al. (2007), la *TPE* associata a particelle che subiscono uno spostamento adiabatico verticale ℓ (di segno ed entità qualsiasi) rispetto ad una posizione di riferimento dove la temperatura potenziale vale Θ_0 ed il relativo gradiente verticale è $\partial\Theta/\partial z$, in media risulta pari a:

$$E_p = \frac{g}{2\Theta_0} \cdot \left|\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right| \cdot \overline{\ell^2} \qquad [5.36a]$$

cioè la *TPE* dipende dal gradiente locale della temperatura potenziale media e dalla varianza degli ipotetici spostamenti verticali della particella. L'obiettivo immediato è ora quello di eliminare dall'equazione la varianza degli spostamenti stocastici della particella d'aria. Dato che ℓ è *piccolo*, in corrispondenza di ogni spostamento ℓ si ha una fluttuazione di temperatura potenziale θ linearmente proporzionale ad ℓ , cioè: $\ell = \theta/(\partial\Theta/\partial z)$, quindi:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta^2}{|N^2|}\overline{\theta^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta^2}{|N^2|}\sigma_\theta^2 \qquad [5.36b]$$

dove $\beta = g/\Theta_0$ e il parametro di *buoyancy* è N è la Frequenza di Brünt-Väisälä locale:

$$N^2 = \frac{g}{\Theta_0} \cdot \frac{\partial\Theta}{\partial z} \qquad [5.36c]$$

Mentre le varianze delle componenti del moto erano sufficienti in qualsiasi punto del *PBL* a caratterizzare completamente l'energia cinetica legata ai moti turbolenti, l'energia potenziale associata agli stessi la si può completamente caratterizzare se è nota la stratificazione termica locale e l'entità delle fluttuazioni di temperatura potenziale rappresentata dalla relativa varianza.

5.3.5.2 L'Equazione Prognostica per l'Energia Potenziale Turbolenta

La definizione di Energia Potenziale Turbolenta E_p evidenzia come l'equazione prognostica cui deve ubbidire la sua variazione nello spazio e nel tempo derivi direttamente da quella della varianza della temperatura potenziale virtuale. Infatti, se si considera la (5.28a) che è l'equazione per la varianza di θ, la si divide per due e la si moltiplica per il fattore positivo $|N^2|/\beta$, nell'ipotesi che le variazioni di N siano più lente rispetto alle fluttuazioni turbolente (Zilitinkevich e al., 2007), si ottiene la relazione prognostica generale seguente, valida sia in situazioni convettive che in situazioni stabili e qualunque sia la complessità spaziale della turbolenza (Mauritsen e al. 2007):

$$\frac{DE_p}{Dt} = -\frac{\beta^2}{|N^2|}\overline{\theta_v u_\alpha} \cdot \frac{\partial\overline{\theta_v}}{\partial x_\alpha} - \frac{\beta^2}{2\cdot|N^2|} \cdot \frac{\partial\overline{u_\alpha\theta_v^2}}{\partial x_\alpha} - \frac{\beta^2}{2\cdot|N^2|}\nu_\theta\overline{\left(\frac{\partial\theta_v}{\partial x_\alpha}\right)^2} \qquad [5.37a]$$

In questa relazione del tutto generale e decisamente complessa è stato impiegato per brevità l'operatore $D/Dt = \partial/\partial t + \overline{u_\alpha}\cdot\partial/x_\alpha$. In una situazione paradigmatica a spiccata omogeneità orizzontale per cui è assente la subsidenza, solo le variazioni verticali delle variabili turbolente sono rilevanti e l'unico flusso turbolento di calore importante è quello verticale. In questo caso, essa si semplifica in modo drastico nella forma seguente:

$$\frac{DE_p}{Dt} = \beta\left|\overline{w\theta}\right| - \frac{\beta^2}{2\cdot|N^2|} \cdot \left(\frac{\partial\overline{w\theta_v^2}}{\partial z} + N_\theta\right) \qquad [5.37b]$$

Come si vede, in questo caso l'unica componente del moto rilevante nell'evoluzione nello spazio e nel tempo di E_p è la componente verticale istantanea del moto presente nel momento terzo della

temperatura potenziale virtuale e *w* che non è un termine di sorgente. Viceversa, l'unico termine di sorgente è rappresentato dalla *buoyancy*.

5.3.5 L'ENERGIA TOTALE TURBOLENTA

Per definizione, l'Energia Turbolenta Totale *TTE* è la somma algebrica della *TKE* e della *TPE*. In pratica, se nelle relazioni matematiche usiamo il simbolo *E* per l'energia turbolenta totale, si ha:

$$E = \frac{1}{2}\overline{u_\alpha}^2 + \frac{1}{2}\sigma_\theta^2 \frac{\beta^2}{|N^2|} \qquad [5.38a]$$

Per ottenere un'equazione prognostica dell'energia turbolenta totale *E* basta sommare membro a membro le relazioni prognostiche (5.33a) e (5.37a). Tuttavia, se per semplicità ci si pone in una situazione paradigmatica di completa omogeneità orizzontale, le equazioni prognostiche per E_K ed E_p sono rispettivamente la (5.34) e la (5.37b) che riscriviamo per comodità nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \frac{DE_k}{Dt} &= +\beta \cdot \overline{w\theta_v} - \left[\overline{uw}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{vw}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right] - \Phi_k - \varepsilon \\ \frac{DE_p}{Dt} &= \beta \cdot \left[\overline{w\theta_v}\right] - \Phi_p - \frac{\beta^2}{2 \cdot |N^2|} N_\theta \end{aligned} \qquad [5.38b]$$

dove i termini del terzo ordine sono:

$$\Phi_k = \frac{\partial \overline{wE_k}}{\partial z} - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \overline{wp}}{\partial z} \qquad \Phi_p = \frac{\beta^2}{2 \cdot |N^2|}\frac{\partial \overline{w\theta_v^2}}{\partial z} \qquad [5.38c]$$

Sommando membro a membro i termini delle due equazioni, si ottiene la forma semplificata dell'equazione prognostica per l'energia turbolenta totale *E*. Prima di presentarla, è importante fare un'importante osservazione. Si vede immediatamente come il termine di *buoyancy* $\beta\overline{w\theta_v}$ compaia in entrambe le equazioni. Mentre nelle situazioni convettive tali termini si sommano visto che entrambi sono positivi, nelle situazioni stabili il termine di *byoyancy* nell'equazione della *TKE* è naturalmente negativo, mentre l'analogo termine nell'equazione per la *TPE* è positivo; quindi, sommati si annullano (Mauritsen e al., 2007). Sulla base di tutto ciò, nelle situazioni paradigmatiche l'equazione prognostica per l'energia totale turbolenta risulta essere così espressa:

$$\frac{DE}{Dt} = -\left[\overline{uw}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{vw}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right] - \left(\Phi_k + \Phi_p\right) - \varepsilon_E + \begin{cases} 0 & per \;\; N^2 \geq 0 \\ 2\beta\overline{w\theta_v} & per \;\; N^2 < 0 \end{cases} \qquad [5.39a]$$

dove il termine dissipativo ε_E risulta pari a:

$$\varepsilon_E = \varepsilon + \frac{\beta^2}{2 \cdot |N^2|} N_\theta \qquad [5.39b]$$

Questa relazione descrive finalmente l'evoluzione nello spazio e nel tempo dell'energia totale associata alle fluttuazioni turbolente delle diverse variabili che descrivono il *PBL*. La sua forma è abbastanza semplice e l'omogeneità orizzontale su cui si basa può essere un'ottima approssimazione in tante situazioni reali. È facile, a questo punto, fare alcune importanti osservazioni:

- nelle situazioni convettive l'energia totale turbolenta viene prodotta e mantenuta dallo *shear* del campo medio del moto e dalla componente verticale del flusso turbolento di calore sensibile (il termine di *buoyancy*), quest'ultimo diretta conseguenza del trasferimento di calore di origine solare che si raccoglie durante le ore diurne all'interfaccia aria-suolo e con ciò trovano conferma le affermazioni fenomenologiche fatte al Cap. 1;
- sia nelle situazioni convettive che in quelle stabili è sempre attivo un termine dissipativo legato alla viscosità dell'aria ed alla sua diffusività molecolare termica. Quindi la turbolenza del *PBL* è un fenomeno dissipativo, come affermato in precedenza;

- nelle situazioni stabili il solo termine di sorgente attivo che introduce nel sistema energia totale turbolenta è il termine di *shear* mentre l'assenza nell'equazione del termine di *buoyancy* esclude che in queste situazioni ci sia perdita di energia totale legata al flusso turbolento verticale di calore sensibile che in queste condizioni è negativo.

Ma che ruolo gioca il termine di *buoyancy* $\beta\overline{w'\theta'}$? Se si prendono in considerazione contemporaneamente le equazioni prognostiche per E_K, E_p ed E si nota come:

- nelle <u>situazioni convettive</u> ($N^2 < 0$), la turbolenza viene generata sia dai moti a mesoscala (lo *shear* del campo medio di moto) che dall'energia solare (parzialmente trasferita all'aria del *PBL* dall'interfaccia aria-suolo che la riceve). Il termine di *shear* produce solo *TKE*, mentre il termine di *buoyancy* contribuisce sia alla generazione di *TKE* che di *TPE*;
- nelle <u>situazioni stabili</u> ($N^2 \geq 0$) l'unico termine di sorgente per l'energia totale del *PBL* è il termine di *shear* che produce solo *TKE*. Essa, però, viene trasformata progressivamente in *TPE* in funzione del valore assunto dalla *buoyancy.*

Tutto ciò è rappresentato schematicamente nella **Fig. 5.9.**

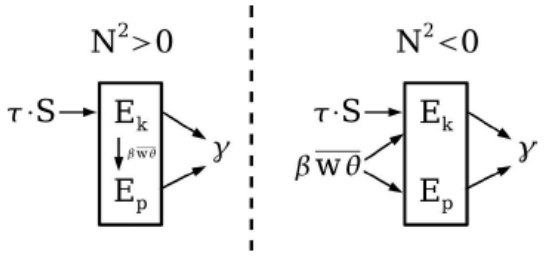


Fig. 5.9: l'energia turbolenta totale ed il ruolo della buoyancy nelle situazioni stabili. Con τ·S si intende lo shear. (Mauritsen e al. 2017)

5.3.6 I NUMERI DI RICHARDSON

La turbolenza nel *PBL* ha da due origini distinte: la convettività e lo *shear* del vento. Nel primo caso il motore del meccanismo è il riscaldamento del suolo realizzato dalla radiazione solare incidente che genera dei vortici turbolenti (*thermals*) in corrispondenza di opportuni *inneschi* che sempre si individuano al suolo (zone a riscaldamento differenziale, ostacoli riscaldati preferenzialmente, ecc.). Questi vortici di grandi dimensioni si staccano dal suolo per il *galleggiamento* (*buoyancy*) dovuto alla differenza positiva di temperatura tra l'aria dei vortici stessi e l'aria circostante e risalgono il *PBL* fino ad esaurire la propria forza ascensionale. Durante la loro vita, per il processo di *energy cascade* si frazionano in vortici sempre più piccoli fino a raggiungere dimensioni tali da essere dissipati in calore dalle forze viscose. Tutto ciò, da un lato genera turbolenza nel *PBL*, quella che viene definita *turbolenza convettiva* o da *buoyancy*, dall'altro induce nel *PBL* il caratteristico profilo di temperatura potenziale che presenta un gradiente verticale negativo nel *SL*, un gradiente circa nullo nel *ML* ed un gradiente positivo nel *Entrainment Layer*. Il *PBL* risulta essere in *condizioni convettive* e tale permane finché permane attiva la sorgente di tale turbolenza, cioè la trasmissione all'atmosfera del calore di provenienza solare realizzato all'interfaccia aria-suolo. Questo meccanismo è interamente descritto dall'equazione prognostica dell'energia cinetica turbolenta. In particolare, l'energia turbolenta prodotta dalla *buoyancy* inizialmente viene trasferita alla componente E_z e successivamente alle componenti E_x e E_y per opera delle fluttuazioni di pressione. La *buoyancy*, oltre a generare *TKE* (in pratica ad aumentare la varianza delle componenti del moto), aumenta anche la varianza della temperatura potenziale e quindi la *TPE*.

D'altro canto, il movimento delle masse d'aria sopra una superficie rugosa determina una situazione per cui viene generata turbolenza di natura completamente meccanica. In effetti un

fluido viscoso, quale l'aria, che scorre su una superficie solida presenta un profilo medio di velocità caratteristico: è nullo alla superficie solida e crescente con l'allontanarsi da essa con gradiente (*shear*) massimo al suolo e in decisa diminuzione con la quota fino ad annullarsi. Se il numero di Reynolds fosse basso, il moto sarebbe laminare. Dato che nel *PBL* il numero di Reynolds è invece molto elevato, il moto del fluido risulta essere altamente irregolare, e quindi turbolento, caratterizzato dalla presenza di vortici di dimensioni medio-piccole. L'innesco di tale meccanismo è ovviamente dato dalla rugosità della superficie su cui scorre il fluido e tale meccanismo permane finché il fluido risulta in movimento. La turbolenza così generata è detta *turbolenza meccanica* ed è presente anche quando è attivo il meccanismo che genera la turbolenza convettiva, sommandosi ad essa.

Tutti questi ragionamenti fenomenologici sono espressi in termini molto formali e poco evidenti nelle equazioni prognostiche di bilancio di *TKE*, *TPE* e *TTE*. L'obiettivo che ora ci poniamo è individuare degli *indicatori adimensionali* che ci aiutino a caratterizzare in modo sintetico e ragionevolmente semplice lo stato della turbolenza del *PBL*. Per ragioni di semplicità, prendiamo in considerazione le situazioni paradigmatiche stabili.

Si consideri l'equazione di bilancio della *TKE* che, indicando con Φ_K il termine di ridistribuzione della *TKE* tra le sue componenti e ricordando che il suo trasporto verticale è trascurabile, si può scrivere più semplicemente come:

$$\frac{DE_k}{Dt} = \beta \cdot \overline{w\theta_v} - \left[\overline{uw}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{vw}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right] - \Phi_k - \varepsilon \qquad [5.40a]$$

Per semplificare, si consideri una situazione stazionaria e si trascuri il momento del terzo ordine Φ_K. In questo caso:

$$\beta \cdot \overline{w\theta_v} - \left[\overline{uw}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{vw}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right] = \varepsilon \qquad [5.40b]$$

cioè la dissipazione viscosa viene bilanciata dalla produzione. Dato che nelle situazioni stabili il termine di *buoyancy* è negativo (trasforma parte della *TKE* in *TPE*), anche ignorando la dissipazione viscosa, tale trasferimento non potrà essere superiore alla generazione di energia. Consideriamo ora il parametro adimensionale, noto come <u>*Numero di Richardson Flusso*</u> R_f che è la forma adimensionale della relazione precedente una volta ignorato il termine dissipativo:

$$R_f = \frac{g}{\overline{\theta_v}} \cdot \frac{\overline{w\theta_v}}{\overline{uw}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{vw}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}} \qquad [5.41a]$$

Dato che nelle situazioni stabili che stiamo considerando le covarianze tra le componenti orizzontali del moto con la componente verticale sono negative, i gradienti verticali delle componenti verticali del moto sono positivi ed il flusso turbolento di calore sensibile è negativo, R_f non potrà che essere positivo. Ma è limitato secondo la relazione $R_f \leq 1$, visto che non può essere trasformata in *TPE* più energia cinetica di quanta ne generi lo *shear*. Sperimentalmente e teoricamente (Zilitinkevich e al. 2010) si può dimostrare che questo valore limite R_{fc} è di fatto inferiore a 1 e prossimo a 0.25. È immediato verificare che nelle situazioni convettive R_f assume valori negativi, sicuramente inferiori al valore critico R_{fc}. Ricapitolando:

- R_f <u>*è negativo*</u>: in questo caso il flusso turbolento di calore è positivo (quindi la covarianza tra la componente verticale del vento e la temperatura potenziale virtuale è positiva), cioè il *PBL* è in situazione convettiva ed il relativo meccanismo di turbolenza è pienamente attivo. Più è elevato in modulo R_f, maggiore è il livello di convettività dovuta o a un flusso di calore elevato o ad uno *shear basso*. Dato che, per come è stato definito, il valore di R_f è *locale*, tale indicatore quantificherà il livello di turbolenza esistente nel punto considerato, in cui siano noti sia gli stress di Reynolds che il flusso turbolento di calore sensibile, i gradienti verticali delle componenti della velocità e la temperatura potenziale media. Se si calcolasse R_f lungo una verticale entro un *PBL* convettivo, il suo valore permarrebbe negativo finché non se ne supera la sommità.

- R_f <u>*è nullo*</u>: l'unica possibilità in questo caso è che sia nullo il flusso turbolento di calore sensibile. Siamo, quindi, in una situazione di transizione (poco dopo l'alba o poco prima del tramonto), oppure in una giornata completamente nuvolosa. Il meccanismo di generazione dei vortici convettivi è inattivo, mentre è sempre attivo, per il movimento delle masse d'aria, il meccanismo di generazione della turbolenza meccanica. Ci si trova quindi in una *situazione adiabatica o neutra*.

- R_f <u>*è positivo*</u>: in questo caso il flusso turbolento di calore sensibile è negativo (la covarianza tra la componente verticale del vento e la temperatura potenziale virtuale è negativa). Anche in questo caso l'unico meccanismo di turbolenza attivo è quello meccanico che genera vortici di piccole dimensioni che *coprono* un'estensione verticale di atmosfera limitata e grosso modo proporzionale alla velocità del vento. Ci si trova, quindi, in una *situazione stabile*, molto simile a quella di un normale fluido viscoso che scorre su una superficie piana e rugosa. Più risulta elevato R_f, minore è la turbolenza presente nell'atmosfera. Tuttavia, R_f resta limitato al valore critico R_{fc} (circa 0.25) che non può mai essere superato in situazioni stazionarie.

Con l'introduzione di R_f è possibile riscrivere l'equazione dell'energia cinetica turbolenta (5.40a), ottenendo la relazione seguente (sempre nell'ipotesi di omogeneità orizzontale):

$$\frac{DE_k}{Dt} = -\left[\overline{uw}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{vw}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right]\cdot\left(1 - R_f\right) - \frac{\partial \overline{we}}{\partial z} - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \overline{wp}}{\partial z} - \varepsilon \qquad [5.41b]$$

Le cause che comportano la variazione (crescita o diminuzione) di R_f sono: la *buoyancy* e lo *shear*. Per quantificare meglio il peso delle due sorgenti di *TKE* conviene ipotizzare che il flusso verticale di calore sia direttamente proporzionale al gradiente verticale di temperatura potenziale media e che le due componenti orizzontali del flusso verticale di quantità di moto siano anch'esse direttamente proporzionali ai gradienti verticali delle rispettive componenti medie:

$$\overline{w\theta} = -K_H\frac{\partial \overline{\theta_v}}{\partial z} \qquad \overline{uw} = -K_M\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \qquad \overline{vw} = -K_H\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \qquad [5.42a]$$

dove K_M e K_H sono dei coefficienti di diffusività turbolenta. Introducendo tutto ciò nella definizione di R_f si ottiene la relazione seguente:

$$R_f = \frac{g}{\overline{\theta_v}}\cdot\frac{K_H\frac{\partial \overline{\theta_v}}{\partial z}}{K_M\left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)^2\right]} \qquad [5.42b]$$

Nell'ipotesi in cui il <u>*Numero di Prandtl*</u> $P_{rT} = K_M/K_H = 1$ (cioè nell'ipotesi in cui la diffusività turbolenta di calore sia pari a quella della quantità di moto), si ha che il parametro adimensionale costruito utilizzando i soli gradienti verticali e noto come <u>*Numero di Richardson Gradiente*</u>:

$$Ri = \frac{g}{\overline{\theta_v}}\cdot\frac{\frac{\partial \overline{\theta_v}}{\partial z}}{\left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)^2\right]} \qquad [5.42c]$$

eguaglierebbe R_f. Dato che ciò praticamente non è mai vero, R_i risulta essere un parametro adimensionale autonomo che, più che rappresentare lo stato locale di turbolenza visto dai parametri interni del sistema (i flussi turbolenti), evidenzia le forzanti esterne (i gradienti verticali medi) che generano tale stato. In sostanza, si potrebbe vedere *Ri* come la causa che produce la turbolenza e R_f come ciò che ne consegue. Dato che in Letteratura spesso si introduce genericamente il termine *Numero di Richardson*, senza specificare se Flusso o Gradiente, vale la pena ricordare che è invalso l'uso di indicare con tale termine solo *Ri*. Dalla definizione si vede subito come anche *Ri* sia definito *localmente* ed indichi, anche in questo caso, l'intensità della turbolenza nel punto che si sta considerando ed in cui sono noti i gradienti delle componenti medie orizzontali della

velocità del vento e della temperatura potenziale virtuale media. Valori negativi di *Ri* indicano *convettività*, mentre valori positivi *stabilità*.

È evidente come al crescere di *Ri* cresca contestualmente R_f. Ma R_f non può superare R_{fc}, quindi anche *Ri* ha un valore critico? E se esistesse questo valore critico, che significato avrebbe? È da circa un secolo che si dibatte sulla questione senza aver comunque raggiunto una conclusione totalmente certa. Sta di fatto che le evidenze sperimentali e le ricostruzioni numeriche LES hanno confermato il valore critico per R_f ma non un valore critico per *Ri*. Ciò che sembra risultare dalle limitate evidenze sperimentali, soprattutto quelle raccolte nelle regioni polari caratterizzate da eventi di stabilità elevata e persistente, è che *Ri* effettivamente può superare il valore 0.25 (valore critico per R_f). Per valori di $Ri < 0.25$ (*valori subcritici*) la turbolenza è sostanzialmente continua. Con l'aumentare di *Ri* questa continuità si disgrega progressivamente e per $Ri > 1$ (*valori supercritici*) la turbolenza è sostanzialmente intermittente e sovrapposta ad evidenti fenomeni ondosi. A differenza di quanto si credeva nel passato, la turbolenza non scompare mai finché il moto persiste, anche se si trasforma nelle sue caratteristiche esteriori. Anche se c'è ancora molta strada da fare (teorica e sperimentale) per risolvere la questione, conviene riportare un passo del lavoro di Zilitinkevich e al. (2008) che cerca di spiegare fenomenologicamente come la turbolenza possa persistere anche per valori supercritici di *Ri*:

> *Suppose that the buoyancy flux, $\beta\overline{w\theta}$, becomes so large that TKE considerably decrease. Then TTE is conserved, so that TPE increase and fluctuations of buoyancy strengthen. In other words, fluid elements acquire stronger accelerations and speed up toward their "equilibrium level", which cause re-establishment of TKE, and decrease of TPE. In its turn, too large TKE causes stronger displacements of fluid elements, hence stronger buoyancy fluctuations and therefore increase of TPE. Such oscillations are typical of intermittent turbulence.*

R_f e *Ri* sono entrambi piuttosto difficili da stimare direttamente dalle misure che possono essere fatte entro il *PBL*, soprattutto lontano dalla superficie. Proprio per questo nella pratica si usa una *versione alle differenze finite* di *Ri* detta *Numero di Richardson Bulk* R_B. Per la sua definizione si consideri la tipica situazione di un radiosondaggio (o di una torre strumentata a più livelli) e si considerino due quote qualsiasi z_1 e z_2 ($z_2 > z_1$) in corrispondenza delle quali sia noto il valore sia delle componenti cartesiane orizzontali medie della velocità del vento ($\overline{u}_1, \overline{v_1}$ e $\overline{u_2}, \overline{v_2}$) che della temperatura potenziale virtuale ($\overline{\theta_{v1}}$ e $\overline{\theta_{v2}}$). La definizione di R_B risulta allora la seguente:

$$Ri = \frac{g}{\overline{\theta_v}} \cdot (z_2 - z_1) \cdot \frac{\overline{\theta_{v2}} - \overline{\theta_{v1}}}{(\overline{u_2} - \overline{u_1})^2 + (\overline{v} - \overline{v_1})^2} \qquad [5.43]$$

Sfortunatamente, R_B è molto dipendente dalle quote utilizzate per la sua stima e quindi non costituisce un valido sostituto né per *Ri* né per R_f.

Infine, si consideri ancora una volta la relazione per E_k (5.33a), ma ci si *limiti ad applicarla nel SL*, in *condizioni orizzontalmente omogenee* e *stazionarie*, riferite ad un sistema cartesiano con asse *x* diretto nella direzione media del moto del flusso (secondo le linee di flusso). In questo caso essa si riduce alla forma seguente:

$$-\overline{uw}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{ew}}{\partial z} - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \overline{wp}}{\partial z} + \frac{g}{\overline{\theta_v}}\overline{w\theta_v} - \varepsilon = 0 \qquad [5.44a]$$

Ogni membro dell'equazione ha dimensioni ($m^2 \cdot s^{-3}$). Per renderla adimensionale è necessario dividere ogni membro per un *parametro* avente le medesime dimensioni. Se si considera che il *SL* ha come *velocità di scala* la *friction velocità* u_* e come *lunghezza di scala* la quota *z*, tale parametro altro non è che $P = -k\,z/u_*^3$, dove *k* è la costante di von Karman (che vale 0.4), introdotta solo per ragioni storiche. Dividendo ogni singolo membro dell'equazione per *P*, la (5.44a) diventa adimensionale e prende la forma:

$$\underbrace{\frac{kz}{u_*}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}_{\Phi_m} + \underbrace{\frac{kz}{u_*^3}\cdot\frac{\partial \overline{ew}}{\partial z} + \frac{kz}{u_*^3}\cdot\frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial \overline{wp}}{\partial z}}_{\Phi_l} \underbrace{-\frac{g}{\overline{\theta_v}}\cdot\frac{kz}{u_*^3}\overline{w\theta_v}}_{z/L} + \underbrace{\frac{kz}{u_*^3}\cdot}_{\Phi_\varepsilon}\varepsilon = 0 \qquad [5.44b]$$

dato che, per definizione, $u_*^2 = -\overline{uw}$. In questa relazione sono stati evidenziati alcuni *gruppi adimensionali*. Il primo termine adimensionale, indicato come Φ_m, è strettamente legato al gradiente verticale della velocità media del vento mentre l'ultimo, indicato come Φ_ε, è legato al tasso medio di dissipazione di energia cinetica turbolenta. Questi gruppi adimensionali non sono, ovviamente, delle costanti, ma sono funzioni dirette del livello di stabilità del *SL*. Tale dipendenza non emerge immediatamente da considerazioni puramente teoriche ed è stata ampiamente studiata sperimentalmente come vedremo quando tratteremo la Teoria della Similarità al Cap. 8. Il quarto termine è indicato come *z/L*, dove *L* ha le dimensioni di una lunghezza e prende il nome di *lunghezza di Monin Obukhov*, già introdotta al *Cap.2*. Dato che nel *SL* la quantità di moto ed il flusso turbolento di calore sensibile sono approssimativamente costanti con la quota, anche *L* lo sarà. La lunghezza di scala *L* può quindi essere interpretata fisicamente come una *lunghezza caratteristica* proporzionale alla quota in corrispondenza della quale i meccanismi di turbolenza convettiva dominano i meccanismi che producono la turbolenza meccanica. Per convenzione, l'equilibrio tra turbolenza meccanica e convettiva si ha a *z = -0.5 L*.

Nelle condizioni stabili, il bilancio di energia cinetica turbolenta è dominato dalla produzione di *shear* e dalla sua dissipazione, entrambi proporzionali a *z/L*. Il trasporto turbolento è piccolo e il termine di *buoyancy* è pure relativamente piccolo e comunque rappresenta una perdita di energia turbolenta. Nelle condizioni convettive, invece, tutti i termini sono significativi ed i loro valori numerici crescono proporzionalmente alla convettività, salvo il termine di *shear* che decresce con essa.

Per concludere, è interessante fare alcune osservazioni. Nello strato superficiale si è visto come la lunghezza di scala sia la quota stessa *z* e che la quantificazione della presenza di convettività è data da *L*. Viene quindi immediato considerare il rapporto adimensionale *z*/*L*. Il comportamento di tale grandezza adimensionale in funzione della stabilità è estremamente chiaro ed univoco e suggerisce il suo inserimento, assieme a R_f e R_i, nell'insieme degli indicatori locali di stabilità, come in effetti è accaduto, e finora è il parametro più in uso nelle applicazioni pratiche, in particolare nella Teoria della Similarità. Si è visto poco sopra che Φ_m e Φ_ε dipendono dal grado di stabilità del *SL* e, proprio per concretizzare questa dipendenza, le attività sperimentali realizzate nell'ambito della Teoria della Similarità hanno condotto all'individuazione di ben definite relazioni analitiche semiempiriche proprio tra *z*/*L* e Φ_m e Φ_ε (e non solo), ma di questo tratteremo diffusamente al Cap.8.

5.4 IL PROBLEMA DELLA CHIUSURA

A questo punto appare chiaro come ci siano due strategie modellistiche per descrivere matematicamente l'evoluzione nello spazio e nel tempo delle grandezze fisiche che caratterizzano l'atmosfera: la prima fa riferimento alle equazioni prognostiche relative ai valori istantanei di queste variabili, mentre la seconda considera le equazioni scritte per i momenti centrali delle stesse. Il risultato ottenuto è che mentre il primo metodo risulta costituito da un insieme chiuso di equazioni tra le variabili istantanee, il secondo è costituito da un sistema di equazioni in cui vengono utilizzate le variabili meteorologiche medie, ma che non è chiuso. Sarebbe auspicabile poter ottenere almeno una risoluzione numerica del primo modello, quello relativo alle variabili meteorologiche istantanee, proprio per la sua caratteristica di essere formalmente un sistema chiuso e di non richiedere, quindi, informazioni aggiuntive esterne. Tuttavia, perché la sua risoluzione numerica sia corretta, è necessario che il metodo numerico impiegato sia in grado di *risolvere* l'enorme varietà di scale spazio-temporali tipiche dei vortici presenti nel *PBL*. Viceversa, il *metodo alle differenze finite* ed il *metodo ai volumi finiti* impiegati usualmente per approssimare le derivate

spaziali e temporali in una griglia quadridimensionale di calcolo, determinano *in maniera naturale* un filtraggio sulla soluzione ottenuta, essendo in grado di risolvere solo i vortici con dimensioni paragonabili al doppio della dimensione tipica della griglia e non inferiori. Una griglia di calcolo in grado di risolvere l'intero spettro della turbolenza richiederebbe, come detto, circa 10^{21} nodi, un'enormità anche per i calcolatori attuali. Questa *sfida* è ovviamente stata accolta dai vari ricercatori, nonostante le evidenti difficoltà, e ciò ha condotto allo sviluppo di modelli noti come *DNS* (*Direct Numerical Simulation*). Una trattazione dettagliata di ciò la si può trovare in Pope (2003) e dall'analisi di quanto lì riportato si nota immediatamente come tali modelli, più che strumenti per simulare l'evoluzione nello spazio e nel tempo dell'atmosfera in situazioni reali, siano in realtà dei sofisticati *laboratori numerici* entro cui studiare la turbolenza del *PBL* in situazioni altamente idealizzate, ma tipiche. Queste simulazioni sono estremamente preziose perché consentono di studiare ciò che ancora oggi non è possibile misurare in atmosfera (o in laboratorio) come la *statistica Euleriana* e *Lagrangiana* (funzioni di densità di probabilità, momenti di vario ordine, correlazioni, covarianze, ecc.) delle variabili meteorologiche.

L'unico metodo effettivamente impiegato ed impiegabile è l'integrazione numerica delle equazioni differenziali relative alle variabili meteorologiche medie che, però non costituiscono un sistema chiuso, dato che il numero di variabili presenti è superiore al numero di equazioni. Per aggirare questo problema si potrebbe pensare di inserire tra le equazioni del modello anche tutte le equazioni prognostiche dei momenti del secondo ordine presenti (e alcune di tali equazioni sono state introdotte in precedenza e per le rimanenti si faccia riferimento a Stull (1988) e Sorbjan (1989) che le descrivono nella loro forma generale). A questo punto non solo il modello si è complicato in maniera preoccupante, ma soprattutto, come già visto, sono comparsi i momenti del terzo ordine nelle equazioni dei momenti del secondo ordine. Se, ipoteticamente, scrivessimo ed aggiungessimo al modello anche le equazioni prognostiche dei momenti del terzo ordine, scopriremmo che nelle mostruose equazioni ottenute sono comparsi i momenti del quarto ordine e così all'infinito. Questa situazione è del tutto *generale* e si può dimostrare che, *per la non linearità delle equazioni della Fluidodinamica, non è possibile chiudere il sistema da esse costituito: ogni volta che si aggiunge un'equazione che descrive un momento di ordine qualsiasi, in tale equazione compariranno sempre momenti di ordine superiore*. Ma non è solo questo il problema. Ipotizziamo, per semplicità, che il modello fluidodinamico del *PBL* sia costituito dalle sole equazioni medie del moto (e trascuriamo, quindi l'equazione della temperatura potenziale virtuale e dell'umidità) oltre a tutto in situazioni paradigmatiche di spiccata omogeneità orizzontale. In queste 3 equazioni compaiono 6 momenti distinti del secondo ordine. Se si individuano le 6 equazioni prognostiche per tali momenti e le si aggiungono alle 3 equazioni originarie dei valori medi otteniamo un modello costituito da 9 equazioni differenziali in cui compaiono 10 momenti del terzo ordine. Se individuiamo le 10 equazioni per i momenti del terzo ordine e le aggiungiamo alle equazioni finora considerate, otterremo un modello di 19 equazioni differenziali in cui compaiono 15 momenti del quarto ordine. Come si vede, più si considerano esplicitamente nel modello momenti di ordine elevato, più il numero di equazioni prognostiche che lo compongono aumenta più che proporzionalmente. L'unica speranza è che i termini nelle equazioni prognostiche che contengono i momenti di ordine elevato siano trascurabili, ma non c'è certezza in ciò, neppure dal punto di vista sperimentale vista l'enorme difficoltà insita nelle misure dei momenti di ordine superiore al secondo in situazioni di atmosfera reale.

Per rendere *trattabile* il problema della modellizzazione del *PBL*, l'approccio universalmente seguito è quello di *considerare* un *numero limitato di equazioni prognostiche* (normalmente quelle per le variabili medie e, al più, per i momenti del secondo ordine) ed *approssimare le rimanenti incognite* (i momenti di ordine superiore) basandosi sulle variabili medie e sui momenti esplicitamente previsti nelle equazioni del modello. *Questa operazione è chiamata la chiusura del sistema delle equazioni fluidodinamiche*. Per definizione, una chiusura che parametrizza *tutti* i momenti di ordine $n+1$ viene detta *chiusura di ordine* n. In particolare:

- una *chiusura del primo ordine* parametrizza *tutti* i momenti del secondo ordine (cioè varianze e covarianze). Quindi il modello è costituito dalle sole equazioni prognostiche per

i valori medi delle variabili meteorologiche;

- una *chiusura del secondo ordine* parametrizza *tutti* i momenti del terzo ordine e quindi nel modello si aggiungono alle equazioni delle variabili medie anche le equazioni relative ai momenti del secondo ordine, e così via.

Oltre a queste chiusure (di ordine intero) sono state introdotte anche chiusure di ordine frazionario. La più celebre ed utilizzata è la *chiusura di ordine 1.5* che parametrizza *solo* alcuni dei momenti del secondo ordine e *tutti* i momenti del terzo ordine che vengono introdotti nelle equazioni prognostiche di quei momenti del secondo ordine considerati esplicitamente.

Le chiusure si distinguono poi non solo per i momenti delle variabili meteorologiche descritti esplicitamente con equazioni prognostiche, ma anche per la *località* o meno della chiusura stessa. In particolare, una *chiusura* è *locale* quando in un certo punto dello spazio un momento (per es. una covarianza) viene parametrizzato da variabili (valori medi, gradienti di valori medi ecc.) *relativi al medesimo punto*. Per esempio, una chiusura che parametrizza, in un punto del *PBL*, la covarianza tra la temperatura potenziale virtuale e la componente verticale della velocità del vento col prodotto, *nel medesimo punto e nel medesimo istante*, tra il gradiente verticale della temperatura potenziale media e un coefficiente di diffusività turbolenta è una chiusura locale. Questo modo di procedere è molto naturale ma, come si vedrà, non sempre porta a simulazioni fisicamente corrette, specialmente nelle situazioni convettive, quando lo spettro delle dimensioni caratteristiche dei vari vortici presenti è enormemente ampio. Sono state introdotte anche *chiusure non locali* che verranno anch'esse descritte nel seguito per la loro importanza applicativa. In questo tipo di chiusura, un momento relativo ad un dato punto dello spazio viene parametrizzato impiegando quantità fisiche relative a *diversi punti del dominio spaziale*. Si abbandona, quindi, l'ipotesi che un momento di ordine superiore sia descrivibile in un punto dello spazio-tempo sulla base del valore assunto dalle variabili non in esubero sempre nel medesimo punto dello spazio. La presenza dei vortici turbolenti di così grandi dimensioni, soprattutto nelle situazioni convettive, determina contributi in un punto che provengono da gran parte del *PBL* stesso. Oggi, che si inizia a conoscere i *misteri* delle situazioni ad elevatissima stabilità, si intravede la possibilità/necessità di impiegare chiusure non locali anche in queste situazioni.

Prima di concludere, è necessario ancora fare alcune considerazioni sul concetto di media. Nella deduzione delle equazioni prognostiche per l'atmosfera si è estesamente impiegato il concetto di *media di insieme*. Anche se ineccepibile, tale scelta ai fini pratici risulta totalmente inutilizzabile. In pratica si è sfruttato l'apparato teorico messo a punto per i modelli stocastici, ma quando si deve passare all'utilizzo pratico delle relazioni individuate è giocoforza passare ad un altro tipo di media più *fisicamente realizzabile*. La scelta più spontanea, motivata anche dalle misure sperimentali oggi possibili, è quella della *media temporale*, più semplice e fisicamente realizzabile. Anche se i due concetti di media si equivalgono solo per i processi *ergodici*, processi in cui i momenti non variano nel tempo, la sostituzione della media d'insieme con la media temporale è del tutto accettabile nella pratica, anche se come vedremo la presenza dei moti submeso può creare notevoli problemi interpretativi. Tuttavia, anche i metodi numerici di risoluzione delle equazioni differenziali alle derivate parziali dettano le proprie leggi. Essi infatti, in particolare quello alle differenze finite, suddividono lo spazio in *celle di calcolo elementari* producendo i valori per le variabili considerate (per esempio la temperatura potenziale media) solo in corrispondenza di ciascuna cella. Di fatto, tale valore è il valore medio di cella e alla fine, la media spaziale nella cella. Quindi, a conti fatti, l'effettiva media impiegata è la combinazione della media temporale, rappresentata dalle equazioni analitiche del modello, e della media spaziale nella cella, dovuta al metodo risolutivo. Proprio per questo non è possibile ottenere informazioni su strutture turbolente aventi dimensioni inferiori al doppio della dimensione caratteristica della cella.

Esiste anche un altro modo di trattare le equazioni fluidodinamiche scritte per le variabili istantanee che, una volta risolte, dovrebbero fornire *una realizzazione* nello spazio e nel tempo delle variabili della cui prognosi si è interessati. Un tale *segnale* sicuramente contiene *fluttuazioni*

sovrapposte relative a tutte le scale, dalle più grandi (i grandi *thermals* turbolenti) alle più piccole. L'idea che sta alla base di una vasta famiglia di modelli, i modelli LES (*Large Eddy Simulation model*), è quella di dividere in due parti il segnale meteorologico relativo ad un punto dello spazio: la prima porzione di segnale contiene tutte le fluttuazioni aventi una dimensione di scala superiore ad un certo valore, mentre la seconda parte tutte le fluttuazioni di dimensioni inferiori. Ovviamente la somma istante per istante dei due semi-segnali costituisce il segnale originario. Questa scomposizione del segnale viene effettuata applicando al segnale stesso un *filtro passa basso*, cioè un filtro avente come caratteristica una *frequenza di taglio* (*cut-off*) tale da restituire solo la porzione di segnale con scale spaziali superiori al valore di *cut-off*. Di fatto ciò può essere ancora realizzato con una media spaziale, purché sia una media mobile. Senza entrare nei dettagli (Sorbjan, 1989), se si applica un tale filtro alle equazioni prognostiche istantanee, si ottengono delle nuove equazioni prognostiche formalmente identiche a quelle ottenute con l'applicazione della media temperale, con alcune differenze concettuali profonde. In primo luogo, la media che in esse compare è la media mobile o un qualunque altro filtro di tipo simmetrico. Quindi, una volta risolte, esse non forniranno l'evoluzione nello spazio e nel tempo del valore medio delle varie grandezze meteorologiche, ma l'evoluzione nello spazio e nel tempo delle varie armoniche che componevano il segnale meteorologico di cui il filtro passa basso ha permesso il passaggio. Il risultato notevole è che è stato possibile con questa tecnica *risolvere* almeno una parte dello spettro della turbolenza del *PBL*. Ciò significa che la descrizione delle situazioni convettive caratterizzate da vortici di grandi dimensioni risulta essere sicuramente accurata. Il secondo aspetto sta nel fatto che anche in queste equazioni sono presenti momenti del primo ordine. Il loro significato, tuttavia, è notevolmente differente da quello dei momenti derivati con l'ipotesi di Reynolds. Essi altro non sono che le covarianze tra le armoniche del segnale *bloccate dal filtro passa-alto*. Quali siano le armoniche che il filtro lascia passare e quali no dipende dalla *frequenza di taglio* del filtro adottato. È quindi possibile definire un filtro con caratteristiche dinamiche volute in modo che il segnale *non risolto* si riferisca a vortici di piccole dimensioni. In questo caso i termini delle equazioni contenenti i momenti sono meno influenti e comunque parametrizzabili in maniera pressoché universale visto che si riferiscono alla porzione di spettro della turbolenza atmosferica a maggior caratteristica universale. A tali tipi di parametrizzazione si dà il nome di *subgrid parameterization*. Non è il caso di aggiungere altro sui LES, salvo che essi costituiscono un laboratorio numerico privilegiato per lo studio di base della turbolenza atmosferica. Tuttavia, dati i notevoli costi computazionali, i LES ad oggi non costruiscono uno strumento modellistico di uso operativo nelle situazioni reali. Una descrizione introduttiva ai LES è riportata in Sorbjan (1989), mentre dettagli maggiori sulle applicazioni micrometeorologiche si trovano in Letteratura (Moeng,1984; Hechtel e al., 1990; Walko e al., 1992). Infine, in Pope (2003) e in Wyngaard (2010) l'argomento è trattato in maniera notevolmente approfondita ed esaustiva

Nei paragrafi che seguono ci si concentrerà esclusivamente sui vari tipi di chiusura che sono stati utilizzati nell'ambito dei modelli non *LES*. Il primo gruppo di chiusure che verranno trattate è quello delle *Chiusure Locali*, cioè di quelle chiusure che parametrizzano i momenti del secondo ordine presenti nelle equazioni prognostiche relativi ad un punto $P(x,y,z)$ sulla base di variabili medie (prevalentemente gradienti) relative allo stesso punto dello spazio. Il secondo gruppo, invece, è costituito dalle varie *chiusure non locali* ed è dedicato esclusivamente alla individuazione di meccanismi con cui esprimere i momenti presenti nelle equazioni prognostiche tenendo conto dell'intero spettro di vortici presenti all'interno del *PBL*, soprattutto nelle condizioni convettive. In generale, tutte le chiusure di cui si tratterà risultano adatte a trattare una vasta gamma di situazioni reali che vanno dalle situazioni altamente convettive alle situazioni debolmente stabili. Le situazioni altamente stabili costituiscono ancora una sfida sia per la ricerca sperimentale che, a maggior ragione, per la ricerca volta alla modellizzazione numerica della turbolenza del *PBL*. Dei problemi legati alle alte stabilità non si tratterà specificatamente. Come esempio significativo in proposito si rimanda a Zilitinkevich (2002), Mauritsen e al. (2007), Zilitinkevich e al. (2007; 2009; 2013) e Bass e al. (2018). Da quanto verremo ad esporre qui di seguito emerge come le possibili chiusure (locali o non locali) proposte sono numerosissime, spesso profondamente differenti tra loro e parecchie di esse sono state effettivamente usate nei modelli

meteorologici previsionali a medio-termine e a mesoscala con risultati contrastanti. Come si comportano effettivamente questi schemi di chiusura? Esiste una forma di chiusura universale? Molto è stato fatto nell'ultimo decennio per mettere a confronto le varie forme di chiusura in situazioni reali e tra i molti lavori presentati in Letteratura vale la pena citare almeno quelli di Zhong e al. (2007), Hu e al. (2010) e Banks e al. (2016). Da essi emerge come ad oggi non sia stato individuato uno schema di chiusura *universale valido in generale,* ma che ogni schema proposto presenta vantaggi e svantaggi. Alcuni schemi risultano più appropriati in situazioni costiere, altri in situazioni orografiche complesse, altri ancora in località dal clima particolarmente secco ed altre in località umide. Quello che è certo è che uno schema di chiusura locale del primo ordine, per poter sperare di rappresentare la realtà convettiva e stabile in maniera soddisfacente deve tener conto, come vedremo, almeno del *controgradiente* e che gli schemi non locali sono piuttosto efficaci nel rappresentare le situazioni convettive e sostanzialmente irrilevanti per rappresentare le situazioni di stabilità.

5.5 I METODI DI CHIUSURA LOCALE

5.5.1 LA CHIUSURA DI ORDINE ZERO

In accordo con Stull (1988), una *chiusura di ordine zero* implica che nel modello di *PBL* non sia presente alcuna equazione prognostica, neppure quelle per i valori medi. In altre parole, le componenti medie del vento, la temperatura potenziale virtuale media e le altre grandezze di interesse meteorologico risultano parametrizzate direttamente in funzione dello spazio e del tempo. Anche se a prima vista non si comprende come possa essere possibile ciò, nel seguito se ne vedranno gli sviluppi ed i vantaggi studiando la Teoria della Similarità.

5.5.2 LA CHIUSURA DI ORDINE UN MEZZO

Un modello che ammette una *chiusura di ordine un mezzo* è un modello composto da un sottoinsieme di equazioni prognostiche (quindi differenziali rispetto al parametro tempo) relative alle variabili medie. Non è un modello di uso generale e lo si può impiegare in alcuni casi particolari come nello studio del *PBL* convettivo. In questo caso, più che valutare l'evoluzione nello spazio e nel tempo delle grandezze medie (temperatura, componenti cartesiane del vento, umidità, ecc.), il modello considera come variabili rilevanti il valore delle principali grandezze meteorologiche mediate entro il *ML*. Nel Cap. 8 questi modelli verranno usati e descritti nel dettaglio e ne vedremo l'utilità.

5.5.3 LA CHIUSURA DEL PRIMO ORDINE

Alla base di una *chiusura del primo ordine* (nota come <u>*Chiusura di tipo K*</u>) c'è il concetto di <u>*diffusività*</u> o <u>*viscosità turbolenta*</u> (*eddy viscosity*) introdotto da Boussinesq nel 1877 e sviluppato da Schmidt e Prandtl che la formularono nel lontano 1925. Essa ipotizza che, in analogia con gli *stress* viscosi nel moto laminare, gli *stress* di Reynolds siano proporzionali ai gradienti locali delle componenti cartesiane della velocità media. In termini teorici, questa ipotesi può essere formulata matematicamente da Boussinesq nel modo seguente (Sorbjan, 1989):

$$-\overline{u_\iota u_j} = K_m \left[\left(\frac{\partial \overline{u_\iota}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \overline{u_\alpha}}{\partial x_\alpha} \right] - \frac{2}{3} \frac{\overline{u_\alpha u_\alpha}}{2} \delta_{ij} \qquad [5.45a]$$

dove K_m è il coefficiente di diffusività (o di viscosità) turbolenta. In pratica, questa equazione viene drasticamente semplificata e, in caso di incomprimibilità e di omogeneità orizzontale, le covarianze tra le componenti orizzontali del moto e la componente verticale sono direttamente

proporzionali al gradiente verticale della velocità media secondo le relazioni:

$$\overline{uw} = -K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \qquad \overline{vw} = -K_m \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \qquad [5.45b]$$

Un concetto analogo può essere sviluppato anche quando si devono parametrizzare i flussi di un generico scalare *c* (per esempio la temperatura potenziale). Infatti, introducendo il concetto di *diffusività turbolenta relativa ad uno scalare* K_h, si ha che:

$$\overline{wc} = -K_h \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \qquad [5.45c]$$

In sostanza, la divergenza dei vari flussi viene parametrizzata come abbiamo anticipato al paragrafo 5.2.7. Più precisamente, questo tipo di chiusura ipotizza che, se consideriamo per esempio il flusso verticale di uno scalare generico *c*, tale flusso, in analogia con la diffusione molecolare, è direttamente proporzionale al gradiente locale del valor medio *C*.

5.5.3.1 I coefficienti di diffusività turbolenta

La chiusura del primo ordine *postula*, in analogia con la legge di Fourier per la trasmissione del calore e con gli sforzi viscosi, una *relazione diretta e lineare tra il flusso di una grandezza ed il rispettivo gradiente locale*. I vari coefficienti di proporzionalità prendono il nome di *coefficienti di diffusività turbolenta*. Anche se la relazione da considerare dovrebbe essere la (5.45a), è più conveniente semplificare il tutto nei termini fatti al punto 5.2.7 dove si è visto che:

- sono individuabili sei coefficienti di diffusività turbolenta K_{mxx}, K_{myy}, K_{mzz}, K_{mxy}, K_{mxz}, K_{mzz} che consentono di esprimere i vari termini della Matrice di Varianza-Covarianza per gli stress di Reynolds;
- sono stati individuati tre coefficienti K_{hxx}, K_{hyy}, K_{hzz} per esprimere la covarianza tra temperatura potenziale virtuale e componenti cartesiane del vento;
- dovrebbero essere individuati analoghi coefficienti di diffusività turbolenta per esprimere i flussi delle altre grandezze scalari; tuttavia, la mancanza di riscontri sperimentali di fatto obbliga ad adottare per ogni scalare gli stessi coefficienti del flusso di calore.

In pratica si è verificato che:

- tutti i coefficienti di diffusività turbolenta relativi ai flussi verticali di quantità di moto possono essere ritenuti uguali tra loro, cioè $K_{mxz} = K_{myz} = K_{mzz} = K_m$
- il coefficiente di diffusività turbolenta per il flusso verticale degli scalari presenta valori differenti dagli analoghi coefficienti per i flussi orizzontali. Essi verranno considerati tutti uguali ed indicati sinteticamente come K_h,
- poco si sa dei coefficienti di diffusività turbolenta relativi ai flussi orizzontali sia della quantità di moto che delle grandezze scalari. L'ipotesi più usata è che siano tutti uguali e tale coefficiente si indica come K_H,
- tutti *questi coefficienti* ***non*** *sono proprietà chimico-fisiche legate al fluido che si sta considerando* (nel nostro caso l'aria della Troposfera), ma dipendono dal tipo di campo di moto e dal livello di turbolenza che si instaura nel fluido. Ciò inevitabilmente deriva dal fatto che essi avrebbero il compito (o meglio la pretesa) di assorbire tutte le complessità derivanti proprio dalla turbolenza.

Come esempio concreto, si consideri un fluido pressoché incomprimibile, come normalmente viene considerato il *PBL*. Partendo dalle relazioni più generali che si possono scrivere, si giunge alle relazioni approssimate seguenti:

- i flussi orizzontali di quantità di moto, in forma cinematica, possono essere espressi da una relazione del tipo:

$$\overline{u_i u_j} = -K_H \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \qquad i,j = 1,2 \qquad [5.46a]$$

- i flussi verticali di quantità di moto, ipotizzando una completa omogeneità orizzontale, come detto, sono pari a:

$$\overline{uw} = -K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \qquad \overline{vw} = -K_m \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \qquad [5.46b]$$

- i flussi verticali di calore e di umidità dell'aria sono espressi come:

$$\overline{w\theta_v} = -K_h \frac{\partial \theta_v}{\partial z} \qquad \overline{wq} = -K_h \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \qquad [5.46c]$$

È importante sottolineare ancora una volta che, a *differenza del caso molecolare, la diffusività turbolenta non è una proprietà del fluido ma del regime di flusso* e quindi *può essere funzione di varie grandezze, posizione e velocità del fluido comprese*.

In questa formulazione ci sono due ordini di problemi. Il primo è legato alla *realisticità* di questa formulazione ed il secondo *alla determinazione* di K_m, K_h, K_H *e* K_q. Per quanto riguarda il primo aspetto, le sperimentazioni numeriche fatte ed alcune considerazioni teoriche portano ad affermare che questo tipo di chiusura è abbastanza realistico nelle situazioni debolmente stabili e neutre, in cui la scala dei meccanismi di diffusione risulta inferiore alla scala del moto medio. Nelle situazioni convettive, invece, la lunghezza di scala dei vortici dominanti è molto maggiore di quella dei moti medi e ciò rende praticamente inutilizzabile questo tipo di chiusura. Infine, per quanto riguarda la determinazione dei coefficienti di diffusività turbolenta appropriati, due sono le strade seguite: la prima si rifà alla *Teoria della Lunghezza di Rimescolamento di Prandtl* e l'altra è totalmente semiempirica.

Teoria della Lunghezza di Rimescolamento (mixing length theory)

La prima strada è stata proposta da Prandtl nel 1925 e tratta la diffusione turbolenta in analogia a quella molecolare. Essa sfrutta il fatto che le dimensioni di un generico coefficiente di diffusione turbolenta K sono m^2s^{-1} e perciò ci si può aspettare che tale grandezza sia il prodotto tra due grandezze di scala: una *velocità caratteristica* ed una *lunghezza caratteristica*, quest'ultima in qualche modo legata alla dimensione dei vortici dominanti.

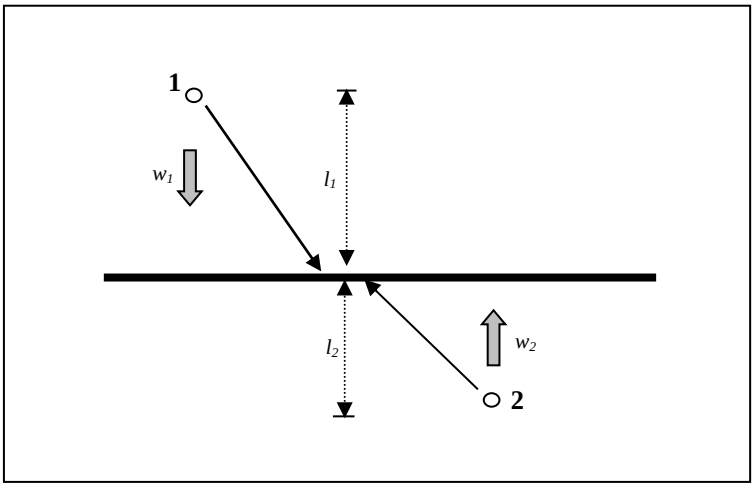


Fig. 5.10: meccanismo esplicativo della lunghezza di mescolamento.

Per sviluppare questo concetto ragioniamo nel modo seguente. Si consideri un fluido (per esempio l'aria) con moto medio prevalentemente orizzontale in direzione *x* ed una sua variabile scalare

media q (per esempio la concentrazione di una sostanza chimica, l'umidità o la temperatura potenziale virtuale) la cui distribuzione nel fluido non presenti irregolarità particolari (sia cioè *smooth*). Sia inoltre nullo il moto verticale medio di tale fluido. Dato che si è interessati prevalentemente ai flussi verticali, si focalizzi l'attenzione su un unico vortice (**Fig. 5.10**) di cui vengono individuate due particelle generiche, la prima (*Particella 1*) alla quota $z_1 > z_r$ e la seconda (*Particella 2*) alla quota $z_2 < z_r$ e sia z_r una data quota di riferimento del tutto generica. Dato che stiamo considerando un vortice, queste particelle avranno anche una componente verticale che di fatto è una fluttuazione in seno al fluido rispetto al moto medio. Immaginiamo, poi, che entrambe le particelle siano dirette verso la quota di riferimento e che, una volta raggiuntala, perdano la propria individualità, miscelandosi completamente col fluido circostante. Il vortice preso a riferimento sia, poi, di piccole dimensioni, di tipo meccanico e quindi generato dalla *shear* del vento. Per questa ipotesi, le due particelle che tendono a portarsi entrambe alla quota z_r, percorreranno cammini *molto piccoli* e, dovendo spostarsi di quota, saranno dotate di una velocità verticale che si ipotizza sia w_1 per la *Particella 1* alla quota z_1 e w_2 per la *Particella 2* a z_2 ed entrambe le velocità verticali decrescano fino ad annullarsi alla quota di riferimento z_r dove avviene la loro miscelazione con il fluido circostante e quindi la distruzione del vortice. Oltre a ciò, le due particelle conserveranno lo scalare q fino a che avviene la loro miscelazione con l'ambiente circostante. Vediamo ora di sfruttare tutte queste ipotesi di lavoro, decisamente forti, per ottenere informazioni su una possibile relazione che descriva la diffusione turbolenta dello scalare q.

Il valore della grandezza q per le due particelle alla posizione iniziale non è noto, ma se si ipotizzano vortici molto piccoli, una buona approssimazione la si può ottenere impiegando uno sviluppo di Taylor arrestato al primo termine. Con queste ipotesi, se $l_1 = |z_1 - z_r|$ e $l_2 = |z_2 - z_r|$ il valore di q per le due particelle è:

$$\begin{aligned} q_1 &= q(z_r) + (z_1 - z_r) \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = q(z_r) + l_1 \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \\ q_2 &= q(z_r) + (z_2 - z_r) \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = q(z_r) - l_2 \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \end{aligned} \qquad [5.47a]$$

Quando queste particelle raggiungeranno la quota z_r, apporteranno un contributo (*fluttuazione*) alla grandezza q pari, rispettivamente, a:

$$q'_1 = +l_1 \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \qquad q'_2 = -l_2 \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \qquad [5.47b]$$

Consideriamo ora le loro velocità verticali. A priori nulla è noto in proposito, però per come si è posto il problema, il moto del fluido è circa bidimensionale (nel piano xz) e *incomprimibile*; quindi, possiamo assumere che valga la legge seguente:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \qquad [5.48a]$$

che può essere approssimata ulteriormente sostituendo gli infinitesimi presenti nell'operatore derivata parziale con *piccoli incrementi*, cioè:

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta w}{\delta z} = 0 \qquad [5.48b]$$

Ma quando i vortici turbolenti sono veramente piccoli, una delle loro caratteristiche peculiari è una *isotropia locale* e ciò ci consente di dire che $\delta x \cong \delta y$, quindi:

$$\delta w \cong \delta u \qquad [5.48c]$$

Questa relazione permette di mettere in relazione la variazione su piccola scala della velocità verticale delle particelle con la corrispondente variazione della velocità orizzontale che dipende dal moto medio e che, in un fluido viscoso, è nullo in corrispondenza della frontiera (nel caso dell'atmosfera, nei pressi del suolo) e cresce con la quota. Sfruttando tutto ciò, si può dire che:

$$\delta w_1 = w_1(z_1) - w_1(z_r) = -u(z_1) + u(z_r) = -l_1 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$
$$\delta w_2 = w_2(z_2) - w_1(z_r) = -u(z_2) + u(z_r) = +l_2 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \qquad [5.48d]$$

Se immaginiamo poi che alla posizione finale le due particelle possiedano velocità nulla (visto che si rimescolano con il fluido circostante), avremo quindi che:

$$w_1 = -l_1 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \qquad w_2 = +l_2 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \qquad [5.48e]$$

A questo punto, il flusso verticale di q dovuto all'arrivo delle due particelle alla quota z_r (dove avviene la loro miscelazione, la prima dall'alto e la seconda dal basso), sarà pari a:

$$w_1 q'_1 = -l_1^2 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \qquad w_2 q'_2 = -l_2^2 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \qquad [5.49a]$$

Con tutto ciò siamo giunti ad un risultato notevole: qualunque sia la direzione di provenienza della generica particella *i*-esima (dall'alto o dal basso), il suo contributo al flusso verticale della grandezza q è dato dall'unica relazione:

$$w'_i q'_i = -l_i^2 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \qquad [5.49b]$$

dove con w_i' abbiamo indicato la velocità verticale della generica particella considerata. Il flusso verticale totale della grandezza q lo possiamo ottenere sommando i singoli contributi portati da tutte le particelle del vortice, quindi:

$$\overline{wq} = -\sum_i \left(l_i^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \right) = -\sum_i (l_i^2) \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \qquad [5.49c]$$

La somma di tutti i quadrati delle distanze l_i percorse dalle differenti particelle può essere interpretato come una *lunghezza di scala* ℓ cui è stato attribuito il nome di *mixing length* (lunghezza di rimescolamento). Introducendo questa lunghezza di scala, la relazione precedente diventa:

$$\overline{wq} = -\ell^2 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \qquad [5.49d]$$

È quindi possibile, a questo punto, definire un *coefficiente di diffusione turbolenta* K_q come:

$$K_q = \ell^2 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \qquad [5.49e]$$

e quindi, se si ipotizza valida questa teoria, il flusso turbolento verticale di q risulta direttamente proporzionale al gradiente medio locale di tale grandezza secondo la relazione seguente:

$$\overline{wq} = -K_q \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \qquad [5.49f]$$

Perciò, per avere un flusso positivo è necessario avere un gradiente negativo e viceversa. È immediato constatare come questa relazione sia quella proposta dalla chiusura del primo ordine. Ovviamente avremmo potuto fare un ragionamento analogo anche considerando la direzione y al posto della direzione z per ottenere il flusso turbolento di q nella direzione trasversale al moto e ragionamenti lievemente più complessi considerando un vortice totalmente tridimensionale. Tutta questa trattazione è stata condotta considerando una generica proprietà q del fluido, proprietà che può essere la temperatura potenziale virtuale, la concentrazione di una sostanza passiva o anche la quantità di moto. Per ognuna di esse avremmo un coefficiente di diffusività turbolenta in cui sarà presente un'appropriata lunghezza di rimescolamento tipica della grandezza in esame. Normalmente, il coefficiente di diffusione turbolenta per il flusso verticale di quantità di moto è indicato come K_m mentre per il flusso di calore o di altre sostanze passive viene indicato come K_h.

Entrambi sono espressi dalla relazione (5.49e) in cui però la *mixing length* ℓ assumerà in genere valori diversi per i due casi. L'esperienza ha dimostrato che non c'è coincidenza tra K_m e K_h e i risultati sperimentali ottenuti supportano la relazione $K_h = K_m/Pr$, dove *Pr* è il <u>*Numero turbolento di Prandtl*</u> che, nelle situazioni adiabatiche e stabili vale circa 0.75.

⇒ <u>*Coefficiente di diffusività turbolenta per la quantità di moto*</u>

L'espressione dei coefficienti di diffusione turbolenta per la quantità di moto richiede la determinazione unicamente della lunghezza di scala ℓ. Prima di dedicarsi alla sua parametrizzazione conviene fare un'ultima osservazione. La definizione di K_m coinvolge la lunghezza di rimescolamento che, in qualche modo, è proporzionale all'energia cinetica turbolenta E_k (e quindi al livello di turbolenza del moto). Un possibile modo, fisicamente piuttosto espressivo, per parametrizzare il coefficiente di diffusività turbolenta è dato dalla relazione:

$$K_m = c \cdot E_k^{1/2} \ell \qquad [5.50a]$$

in cui *c* è una costante. Questa relazione è scomoda da usarsi in un contesto di chiusura locale del primo ordine, visto che il modello fluidodinamico non prevede la presenza dell'equazione prognostica per l'energia cinetica turbolenta. Sarebbe possibile semplificare radicalmente tale equazione, anche se è più semplice riformulare l'espressione di K_m impiegando direttamente i gradienti verticali di velocità media del vento ed il *Gradient Richardson Number Ri* ottenendo:

$$K_m = \ell^2 \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} f(Ri) \qquad [5.50b]$$

dove *f*(*Ri*) è un fattore correttivo dipendente da *Ri* che tiene conto del grado di stabilità del *PBL*, ovviamente da parametrizzare. I numerosi lavori realizzati per individuare le espressioni analitiche per ℓ e per *f*(*Ri*) sono stati basati o su osservazioni sperimentali o su ricostruzioni numeriche ottenute con modelli LES ed hanno prodotto un rilevante numero di relazioni semi-empiriche diverse. Tutto ciò, a prima vista, potrebbe sconcertare se non ricordassimo che una chiusura del primo ordine di tipo *K* per sua stessa natura non può riprodurre accuratamente le situazioni convettive ed anche le situazioni ad elevata stabilità. Pertanto, i risultati ottenuti dai vari Autori sono strettamente legati all'insieme delle misure (o simulazioni LES) utilizzati dagli stessi come riferimento oggettivo. Consci di ciò, qui di seguito presentiamo alcune correlazioni per ℓ e per *f*(*Ri*) più frequentemente utilizzate (Sharan e Gopalakrishnan, 1997).

Per quanto riguarda la lunghezza di scala ℓ, molte sono state le formulazioni proposte e tutte, comunque, partono dal presupposto che la lunghezza di scala non sia costante entro l'intero *PBL*, ma vari con la quota in maniera che sia circa lineare nel *SL* e si avvicini ad un valore asintotico nel resto del *PBL*, come descritto dalla relazione di Blackadar (1962):

$$\ell = \frac{kz}{1 + kz/l_\infty} \qquad [5.51a]$$

dove *k* è la costante di von Karman (0.4). Il valore asintotico l_∞ non è definito in modo univoco e molte sono state le proposte presentate in Letteratura. Le più usate sono le due versioni date da Blackadar (1962):

$$l_\infty = 2.7 \cdot 10^{-4} \sqrt{u_g^2 + v_g^2} \qquad l_\infty = 0.009\, u_*/f \qquad [5.51b]$$

dove *f* il parametro di Coriolis e u_* è la *friction velocity*. Comunque, nelle applicazioni pratiche per evitare che il valore asintotico per la lunghezza di rimescolamento diventi eccessivamente piccolo si fa in modo che esso non sia inferiore ad un valore di soglia pari a 30 ÷ 200 m.

Molto usata è anche la relazione seguente (Mellor e Yamada, 1974) che lega la lunghezza di rimescolamento alla distribuzione verticale dell'energia cinetica turbolenta E_k:

$$l_\infty = \alpha \frac{\int_0^\infty \sqrt{E_k} \cdot z \, dz}{\int_0^\infty \sqrt{E_k} \, dz} \qquad [5.51c]$$

dove per il parametro α è stato proposto il valore 0.1. È evidente che l'utilizzo di questa correlazione presenta la difficoltà di richiedere la conoscenza dell'energia cinetica turbolenta E_k che si può ottenere o con una parametrizzazione spinta della relativa equazione prognostica o inserendo la stessa tra le equazioni differenziali da risolvere. Ciò, però, rende la chiusura di ordine più elevato e di tutto ciò si tratterà a proposito della chiusura di ordine 1.5.

Molte sono poi le correlazioni proposte per la funzione di correzione $f(R_i)$ e spesso differiscono molto tra loro, rispecchiando le differenze delle misure o delle simulazioni LES da cui sono state ottenute. Comunque, le più utilizzate in pratica sono le seguenti:

- <u>*Nelle Situazioni Stabili*</u>: alcune delle relazioni proposte sono le seguenti:

$$Blackadar\ (1979) \qquad f(Ri) = \begin{cases} 1.1 \cdot (1 - Ri/Ri_c) & 0 < Ri < Ri_c = 0.25 \\ 0 & Ri \geq Ri_c \end{cases} \qquad [5.52a]$$

$$Luis\ (1979) \qquad f(Ri) = (1 + 4.7 \cdot Ri)^{-2} \qquad [5.52b]$$

$$Estourel\ e\ Guedalia\ (1987) \qquad f(Ri) = \begin{cases} (1 - 5Ri)^2 & 0 < Ri < 0.16 \\ [(1 + 41Ri)^{-1}]^{1.68} & Ri \geq 0.16 \end{cases} \qquad [5.52c]$$

- <u>*Nelle Situazioni Convettive*</u>: è stata proposta la correlazione seguente (Blackadar, 1979):

$$f(Ri) = (1 - 18Ri)^{1/2} \qquad [5.51d]$$

  Questa metodologia di chiusura per la diffusività della quantità di moto ha ben poche conferme sperimentali entro il *PBL*, mentre viene spesso utilizzata quando si considera lo strato di *entrainment* e la libera atmosfera sovrastante.

⇒ <u>*Coefficiente di diffusività turbolenta per il calore e le grandezze scalari*</u>

Per quanto riguarda la *diffusività turbolenta per il calore*, poco è noto e, come si è detto, normalmente la si pone in relazione a K_m attraverso il Numero turbolento di Prandtl *Pr*. Osservazioni sperimentali hanno mostrato come *Pr* valga circa *0.74* in situazioni adiabatiche e stabili, mentre decresce con l'aumentare della convettività. Partendo, invece, dal presupposto che K_h sia esprimibile dalla (5.50a) divisa per *Pr* e semplificando in modo drastico l'equazione prognostica dell'energia cinetica turbolenta, Moussiopulos (1996) è giunto ad un'espressione algebrica per K_m funzione dei gradienti delle componenti medie orizzontali del moto, di *Ri*, di *Pr* e del flusso turbolento di quantità di moto considerato, data da:

$$K_m = \ell^2 \cdot \sqrt{0.5 \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - Pr^{-1} Ri} \qquad [5.52]$$

Data la scarsità endemica di dati sperimentali relativi all'umidità e agli altri scalari passivi, nelle applicazioni si assume operativamente che $K_q = K_h$.

Per concludere, la chiusura *K* delega alla definizione funzionale dei coefficienti di diffusività tutta l'informazione relativa allo stato della turbolenza atmosferica. È quindi intuitivo che quando i vortici turbolenti hanno ampiezze in un intervallo sufficientemente limitato (come avviene nelle situazioni debolmente stabili o adiabatiche), un tale approccio può avere un certo successo. Viceversa, in condizioni convettive, quando i vortici presentano uno spettro dimensionale molto ampio, i problemi sono molto maggiori. In effetti, gran parte della Letteratura disponibile è centrata sulla individuazione di una parametrizzazione dei coefficienti di scambio che riescano a rappresentare in modo non irrealistico tali condizioni abbandonando l'ipotesi della *mixing*

length ed introducendo argomentazioni decisamente semiempiriche.

L'Approccio semiempirico

a) Coefficiente di diffusione turbolenta per la quantità di moto
Un'alternativa seguita da molti Autori nel definire le relazioni per la stima dei coefficienti di diffusione turbolenta è quella di abbandonare la teoria della lunghezza di rimescolamento e le relative giustificazioni più o meno convincenti, proponendo in alternativa relazioni o totalmente semiempiriche, dedotte da misure ottenute in campagne sperimentali o in laboratorio, o relazioni dedotte dai risultati ottenuti da simulazioni realizzate con modelli LES o con chiusure di ordine elevato. Da tutte queste osservazioni emerge una descrizione qualitativa chiara del profilo verticale dei coefficienti di diffusività turbolenta (Wyngaard 1982):

- nei pressi del suolo (diciamo entro il *SL*) K_m cresce linearmente con la quota e in situazioni prossime all'adiabaticità il coefficiente di dispersione turbolenta è dato dalla relazione seguente (dove u_* è la *friction velocity* e *k* la costante di von Karman):

$$K_m = \frac{-\overline{uw}}{\partial \bar{u}/\partial z} = k u_* z \qquad [5.53]$$

  che giustificheremo quando tratteremo della Teoria della Similarità;

- alla sommità del *PBL* K_m diminuisce fino a raggiungere valori molto piccoli;
- nella parte intermedia del *PBL* K_m presenta un valore massimo in condizioni lontane dalla stabilità.

Tenendo conto di questo comportamento qualitativo, sono state sviluppate numerosissime correlazioni semiempiriche, alcune delle quali qui di seguito riportate. In tutte compare la dipendenza del coefficiente di diffusività da parametri che caratterizzano la turbolenza nel *PBL* quali la *friction velocity* u_*, la velocità convettiva di scala w_* e l'estensione verticale del *PBL*, sia convettivo (z_i) che stabile (h). Anche se per alcuni queste correlazioni sono da ritenersi *intrinsecamente non locali*, va comunque rilevato che ci sembra opportuno considerarle chiusure locali visto che vanno a definire dei coefficienti di diffusività turbolenta, coefficienti che non appaiono nelle chiusure non locali vere e proprie che tratteremo nel seguito. Vediamone ora alcuni esempi tra le innumerevoli proposte, distinte a seconda del tipo di turbolenza presente entro il *PBL*.

⇒ *Situazioni Convettive*, val la pena citare:

- la parametrizzazione di O'Brien (Garratt, 1992), che cerca di dare una forma funzionale a K_m tale da fornire i valori teorici attesi nel *SL*. Rimandando per i dettagli al Cap. 8, la Teoria della Similarità prescrive che nel *SL* valga la relazione:

$$K_m = k u_* z \cdot \Phi_m^{-1}(z/L) \qquad [5.54a]$$

  dove la Funzione Universale di Similarità Φ_m varia con la stabilità in funzione del parametro adimensionale *z/L*, come si vedrà al Cap. 8. Per l'intero *PBL*, invece, la forma funzionale di K_m è data da:

$$K_m(z) = K_m(z_i) + A_1[K_m(H_s) - K_m(z_i) + (z - h_s) \cdot A_2] \qquad [5.54b]$$

  dove z_i e h_s sono rispettivamente l'altezza di rimescolamento (cioè la quota corrispondente alla sommità del *PBL*) e l'altezza del *SL*, pari a circa il 10% di z_i, e dove:

$$A_1 = \frac{(z_i - z)^2}{(z_i - h_s)^2} \qquad A_2 = \left(\frac{\partial K_m}{\partial z}\right)_{z=h_s} + 2\frac{[K_m(h_s) - K_m(z_i)]}{(z_i - h_s)} \qquad [5.54c]$$

  Perché sia possibile utilizzare tale relazione è necessario stabilire quanto valga il

coefficiente *K* alla quota z_i che, in generale, si ipotizza nullo.

- la parametrizzazione di Moeng e Wyngaard (1984), derivata da esperimenti numerici LES e da osservazioni sperimentali, lega il coefficiente di diffusività turbolenta alla velocità convettiva di scala w_* ed all'estensione verticale del *PBL* secondo la relazione:

$$K_m(z) = 2.5 w_* z_i \cdot \frac{1 - z/z_i}{(z/z_i)^{1.5}} \qquad [5.55]$$

- Alapaty e al. (1997a) hanno proposto una correlazione simile, data da:

$$K_m(z) = \begin{cases} \dfrac{k u_* z}{(1 - 16\, z/L)^{-1/2}} & nel\ SL \\ \dfrac{k w_* z}{1 - z/z_i} & per\ z_i/L < -10 \end{cases} \qquad [5.56]$$

⇒ <u>*Situazioni Adiabatiche*</u>: una delle parametrizzazioni usate è quella di Wippermann (1973) dove $H = k u_*/f$:

$$K_m(z) = k u_* z \cdot exp(-7.6 \cdot (z/H)^{0.764}) \qquad [5.57]$$

⇒ <u>*Situazioni Stabili*</u>: una delle parametrizzazioni usate è quella di Brost e Wyngaard (1978) dove *h* è l'estensione verticale del *PBL* stabile:

$$K_m(z) = k u_* z \cdot \frac{(1 - z/h)^{1.5}}{(1 + 4.7\, z/L)} \qquad [5.58]$$

Sono state proposte anche alcune correlazioni di uso decisamente generale, proposte da Smagorinsky, che legano il coefficiente di diffusione turbolenta ai gradienti locali delle componenti del moto. La loro formulazione è decisamente atipica: esse, infatti, presuppongono che si stia operando entro un contesto modellistico in cui il dominio di calcolo è suddiviso in celle elementari identiche a forma di parallelepipedo i cui spigoli siano pari a Δx, Δy e Δz. In particolare (Tag, 1979) le due forme più interessanti proposte sono le seguenti:

- la forma <u>*deformation-related*</u> secondo cui:

$$K_m = (k_D \Delta)^2 \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 \right) \right]^{1/2} \qquad [5.59a]$$

dove $\Delta = (\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)^{1/3}$ e k_D è una costante da determinarsi in base alle evidenze sperimentali (in Tag (1979) il valore consigliato è 0.2). Come si vede, l'atipicità della formulazione sta nella loro dipendenza dal tipo di discretizzazione numerica usata;

- la forma <u>*buoyancy-related*</u> , anch'essa atipica nel senso sopra indicato, è formulata analiticamente nei termini seguenti:

$$K_m = \Delta^2 \cdot \left\{ k_D^2 \cdot \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 \right) \right]^{1/2} + k_B^2 \left| \frac{g}{\bar{\theta}_v} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z} \right|^{1/2} \right\} \qquad [5.59b]$$

in cui alla costante k_B è stato attribuito il valore 0.7.

Dato che in un modello operativo deve essere possibile trattare ogni tipo di *PBL* (stabile, neutro o convettivo) ed anche la porzione di atmosfera libera sovrastante il *PBL*, è necessario

scegliere un insieme di relazioni in grado, complessivamente, di descrivere K_m in ogni situazione. Se si considera, per esempio, Alapaty e al. (1997b), le possibili relazioni da selezionare sono:

- le (5.56) per le situazioni convettive entro il *PBL*;
- la (5.58) per le situazioni stabili entro il *PBL*, in cui, però, gli Autori hanno sostituito l'esponente 1.5 con 2.0;
- nell'atmosfera libera essi hanno adottato una parametrizzazione suggerita da Blackadar (1979) in cui K_m è funzione del *Richardson Number Ri* e dello *shear* del vento:

$$K_m = K_0 + \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)^2\right)^{1/5} (kl)^2 \frac{R_c - Ri}{R_c} \qquad [5.60]$$

  dove K_0 è il valore di *background* (1 m^2s^{-1}), l è una lunghezza di scala caratteristica (100 m) e R_c è il numero di Richardson critico che si può porre pari a 0.25.

Se si analizzano attentamente queste relazioni, sorgono immediate alcune considerazioni:

- innanzitutto, si vede come K_m cresca nel *SL* fino a raggiungere un massimo nella parte centrale del *PBL*, per poi decrescere a zero alla sua sommità. Questo è un comportamento del tutto generale e confermato dai dati sperimentali;
- inoltre, non è difficile rendersi conto che i valori assunti da K_m sono piccoli (dell'ordine di 1) per le situazioni stabili, un poco superiori (dell'ordine di 10) per le situazioni neutre e molto elevati (dell'ordine delle centinaia) per le situazioni convettive;
- l'altra considerazione, forse la più importante, è che il valore di K_m dipende a questo punto solo dalla conoscenza di parametri come u_*, L, H_0 (flusso turbolento di calore sensibile al suolo) e z_i, grandezze che possono essere *misurate realmente*. Quindi l'adozione di una chiusura *K* di questo tipo effettivamente porta ad un modello realmente utilizzabile, costituito dalle equazioni per le variabili medie, più le relazioni di chiusura in cui sono presenti i coefficienti di scambio turbolento. Perché tale modello possa essere utilizzato è necessario risolvere numericamente le equazioni differenziali del modello e misurare nel tempo (o stimare) i parametri caratteristici della turbolenza atmosferica e la sua estensione verticale.

b) <u>Coefficiente di diffusione turbolenta per il calore</u>

Una porzione rilevante di Letteratura è stata dedicata anche alla parametrizzazione semiempirica del coefficiente di diffusione verticale per il calore K_h e per le altre grandezze scalari, indispensabile alla maggior parte dei modelli di dispersione degli inquinanti di tipo Euleriano. In questo caso, le parametrizzazioni più frequentemente usate sono le seguenti:

- <u>*nelle Situazioni Stabili*</u>: Businger e Arya (1974) hanno proposto la correlazione:

$$K_h = \frac{ku_* z}{0.74 + 4.7 \cdot z/L} \cdot exp(-8\, fz/u_*) \qquad [5.61a]$$

- <u>*nelle Situazioni Adiabatiche*</u>: Shir (1973) ha proposto la correlazione:

$$K_h = ku_* z \cdot exp(-8\, fz/u_*) \qquad [5.61b]$$

  mentre Myrup e Rancieri (1976) hanno prodotto la correlazione:

$$K_h = \begin{cases} ku_* z & per\ z/z_i < 0.1 \\ ku_* z \cdot (1.1 - z/z_i) & per\ 0.1 < z/z_i < 1.1 \\ 0 & per\ z/z_i > 1.1 \end{cases} \qquad [5.61c]$$

- <u>*nelle Situazioni Convettive*</u>: anche se nelle situazioni convettive il concetto di diffusività

turbolenta per il calore è poco realistica, come vedremo subito dopo, comunque vale la pena almeno ricordare la correlazione di McRae e al. (1982) che, nel classico contesto *K-Theory*, esprime il coefficiente di diffusività turbolenta per il calore in funzione della velocità convettiva di scala w_* e del parametro $\zeta = z/z_i$:

$$K_h = \begin{cases} 2.5 w_* z_i (k \cdot \zeta) \cdot (1 - 15\, z/L) & \zeta \le 0.05 \\ w_* z_i \cdot (0.021 + 0.408\zeta + 1.351\zeta^2 - 4.096\zeta^3 + 2.560\zeta^4) & 0.05 < \zeta \le 0.6 \\ 0.2 w_* z_i \cdot exp(6 - 10\zeta) & 0.6 < \zeta \le 1.1 \\ 0.0013 \cdot w_* z_i & \zeta > 1.1 \end{cases} \quad [5.61d]$$

La chiusura di tipo *K* per il calore, pur avendo avuto in passato una notevole popolarità, risulta soddisfacente solo in condizioni adiabatiche o debolmente stabili, mentre, così come è formulata, non fornisce risultati attendibili durante le situazioni convettive. In effetti, Kaimal e al. (1976) e molte altre indagini sperimentali hanno confermato che nella parte centrale di un *PBL* convettivo il profilo della temperatura potenziale media evidenzia un gradiente o quasi nullo o addirittura leggermente positivo. In questo caso, secondo i criteri della chiusura del primo ordine, ciò comporterebbe un flusso discendente di calore, cosa che contrasta con le abbondanti osservazioni sperimentali. Quindi è inevitabile che la chiusura del primo ordine con coefficiente di diffusività turbolenta K_h non riesca a spiegare la complessità di un *PBL* convettivo. Per superare questo problema e per fondare i ragionamenti su solide basi teoriche, è necessario rifarsi alle considerazioni di Deardorff (1966) esposte alla fine del paragrafo 5.3.2. In sintesi, in condizioni convettive ed orizzontalmente omogenee, la relazione prognostica del flusso verticale di calore sensibile si riduce alla semplice relazione algebrica:

$$\overline{w\theta_v} = -\tau \left(\overline{w^2} \frac{\partial \overline{\theta_v}}{\partial x} - \frac{g}{\overline{\theta_v}} \overline{\theta_v^2} \right) \quad [5.62a]$$

dove con τ è stato indicato un opportuno tempo di scala. Analoghe considerazioni sono state fatte da Holtslag e Moeng (1991). Questa relazione evidenzia quindi che il flusso turbolento di calore sensibile ad una certa quota entro il *PBL* consta di due contributi distinti: un contributo concorde col gradiente verticale di temperatura potenziale media (e proporzionale ad esso) ed un contributo di segno opposto non dipendente dal gradiente locale di temperatura media, il ***controgradiente***. In sostanza un modo per migliorare la rappresentatività della diffusione turbolenta del calore e degli scalari in genere nelle situazioni convettive è quello di usare una relazione del tipo seguente in cui compare esplicitamente anche il controgradiente:

$$\overline{w\theta_v} = -K_h \left(\frac{\partial \overline{\theta_v}}{\partial x} - \gamma_\theta \right) \quad [5.62b]$$

dove:

$$K_h = -\tau \cdot \overline{w^2} \qquad \gamma_\theta = \frac{g}{\overline{\theta_v}} \overline{\theta_v^2} \quad [5.62c]$$

La (5.62b) è simile alla (5.46c) ma contente il *controgradiente* γ_θ che tiene conto del fatto che è evidente una dispersione turbolenta verticale di calore anche nel *ML* in cui il gradiente verticale di temperatura potenziale media è prossimo allo zero o addirittura leggermente positivo. Troen e Mahrt (1986), Bougeault e Lacarrére (198)), Holtslag e al. (1990), Holtslag e Moeng (1991), Holtslag e Boville (1993) e Hong e Pan (1996) hanno studiato, con l'ausilio di un modello LES e dei dati sperimentali disponibili, il problema, giungendo alle conclusioni seguenti:

- si può esprimere il coefficiente di diffusività turbolenta K_h presente nella (5.62b) come:

$$K_h = k w_s z \cdot (1 - z/z_i)^2 \quad [5.62d]$$

dove *k* è la costante di von Karman (0.4) e w_s è un'opportuna *velocità turbolenta di scala* che dipende dallo stato del *PBL*:

⇒ nelle situazioni stabili o adiabatiche, la velocità turbolenta di scala dipende dalla *friction velocity* u_* secondo la relazione seguente in cui compare la Funzione Universale di Similarità per il calore di cui si tratterà al Cap. 8:

$$w_s = u_* \Phi_h^{-1} \qquad [5.62e]$$

⇒ nelle situazioni convettive, l'espressione per la velocità turbolenta di scala è diversa per il *SL* e per la parte restante del *PBL*. Nel *SL* vale ancora la (5.62e) ma con il valore della Funzione Universale di Similarità per il calore appropriato alle situazioni convettive (si veda Cap. 8). Nella restante parte del *PBL*, invece, si ha che:

$$w_s = w_m/Pr \qquad w_m = (u_*^3 + 0.6w_*^3)^{1/3}$$
$$Pr = \frac{\Phi_h(z/L)}{\Phi_m(z/L)} + 7.2\frac{z}{z_i}\frac{w_*}{w_m} \qquad [5.62f]$$

Nella relazione per il numero di Prandtl compaiono le Funzioni Universali di Similarità per il gradiente della velocità media del vento (Φ_m) e per il gradiente della temperatura potenziale media (Φ_h) che incontreremo al Cap. 8.

- il controgradiente dipende dal flusso turbolento di calore sensibile al suolo e dall'estensione verticale del *PBL* secondo la relazione:

$$\gamma_\theta = 2w_* \frac{\overline{w\theta_v}}{\sigma_w^2 \cdot z_i} \qquad [5.62g]$$

dove la covarianza indicata è il flusso cinematico di calore sensibile al suolo. Nelle situazioni convettive, dalla Teoria della Similarità si ha che, se si considera il centro del *PBL* ($z/z_i = 0.5$), $\sigma_w^2 \cong 0.43u_*^2 + 0.29w_*^2$. Quindi, in situazioni tipiche con H_0 = 200 Wm^{-2}, u_* = 0.2 ms^{-1}, z_i = 1000 m e θ = 300 K, si ha che la velocità convettiva di scala w_*=1.76 ms^{-1}, σ_w^2 = 0.92 m^{2}s^{-2} e quindi un controgradiente γ_θ= 0.0006 Km^{-1}, molto prossimo al valore di 0.0007 Km^{-1} che è quello più frequentemente utilizzato.

Studi approfonditi, sia teorici, sia numerici, sia sperimentali fatti per l'interpretazione delle situazioni convettive hanno prodotto, tra l'altro, elementi utili per valutare e perfezionare la descrizione della dispersione turbolenta verticale, in particolare quella della temperatura potenziale virtuale media. Una sintesi interessante è stata fatta da Hamba (1993) che ha proposto anche una chiusura del primo ordine modificata che si può esprimere come:

$$\overline{w\theta_v} = -K_h \frac{\partial \overline{\theta_v}}{\partial z} + K_{h2} \frac{\partial^2 \overline{\theta_v}}{\partial z^2} \qquad [5.63a]$$

da cui si nota come il flusso turbolento verticale di calore sensibile sia costituito da due componenti di segno opposto, una proporzionale al gradiente della temperatura potenziale virtuale media e l'altro proporzionale alla sua derivata seconda che è un modo differente per esprimere il controgradiente. Utilizzando quanto prodotto dalla ricerca teorico-sperimentale relativamente alle situazioni convettive, Hamba (1993) è giunto ad individuare le seguenti relazioni per i due coefficienti di diffusione turbolenta:

$$K_h = w_* z \cdot (1-\zeta^2) \cdot \{1.3 + 22(\zeta-1)^2(1-\zeta) + 17exp[-43(\zeta-0.84)^2]\}$$
$$K_{h2} = w_* z^2 \cdot (1-\zeta^2) \cdot \{-0.85 + 13(\zeta+0.1)^2(1-\zeta) + 10exp[-36(\zeta-0.85)^2]\} \qquad [5.63b]$$

dove $\zeta = z/z_i$. Queste relazioni dovrebbero tener conto anche degli effetti del controgradiente.

Per concludere questa rassegna è interessante presentare un insieme di relazioni per i coefficienti di diffusività turbolenta sia delle componenti orizzontali del vento che della temperatura e dell'umidità, impiegate in un modello operativo di previsione meteorologica (Hong e Pan, 1996). La parametrizzazione proposta dagli Autori si riferisce, in particolare, alla diffusione turbolenta in direzione verticale. In questo caso, l'equazione prognostica che descrive l'evoluzione

temporale di una generica variabile C (le componenti u e v del moto o la temperatura oppure l'umidità), trascurando tutto ciò che non è diffusione turbolenta, diventa:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial z}\left[K_{zc}\left(\frac{\partial C}{\partial z} - \gamma_c\right)\right] \qquad [5.64a]$$

Come si nota, gli Autori considerano l'azione del controgradiente attiva per tutte le variabili meteorologiche considerate. Se inizialmente ci si occupa delle componenti orizzontali del vento nel *PBL*, il coefficiente di diffusività turbolenta viene espresso da una relazione dipendente dai principali parametri che caratterizzano la turbolenza del *PBL*, quali la sua estensione verticale h, la lunghezza di Monin-Obukhov L e la *friction velocity* u_*. In particolare, essa è data da:

$$K_{zc} = k w_s z \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \qquad w_s = u_* \Phi_m^{-1} \qquad [5.64b]$$

Φ_m è la Funzione di Similarità del profilo verticale del vento che incontreremo nello studio della Teoria della Similarità, valutata alla sommità del *SL*, cioè ad una quota pari a circa $0.1h$. Per quanto riguarda, invece, la temperatura e l'umidità, la velocità di scala w_s è ancora data dalla (5.64b) dove Φ_m è sostituito dalla Funzione Universale di Similarità Φ_h ed il coefficiente di diffusività per il calore K_{zh} è pari a K_{zm} moltiplicato per il Numero di Prandtl Pr dato da:

$$Pr = \frac{\Phi_h}{\Phi_m} + 7.8k\frac{0.1h}{h} \qquad [5.64c]$$

Per completare la parametrizzazione all'interno del *PBL* manca una relazione che esprima il controgradiente. Essa è data da:

$$\gamma_{m,c} = 7.8\frac{\overline{wc}}{w_s} \qquad [5.64d]$$

Nelle situazioni stabili e sopra il *PBL* i coefficienti di diffusività turbolenta assumono una forma più consueta e vengono espressi dalla relazione:

$$K_{m,c} = \ell^2 \cdot f(Ri) \cdot \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right| \qquad [5.64e]$$

dove:

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{kz} + \frac{1}{30} \qquad f(Ri) = e^{-8.5Ri} + \frac{0.15}{Ri + 3.0} \qquad [5.64f]$$

Infine, gli Autori hanno introdotto anche dei limiti entro cui possono variare i coefficienti di diffusività turbolenta: essi non possono essere inferiori a 1 m^2s^{-1} e superiori a 1000 m^2s^{-1}.

La Diffusività orizzontale

Non sarà certo sfuggito al lettore il fatto che finora si è trattato solo della diffusione verticale e solo per essa sono state presentate le parametrizzazioni per i coefficienti di diffusività turbolenta, anche se la diffusione orizzontale è presente in tutte le equazioni prognostiche. Purtroppo ben poco è noto in proposito e nei modelli meteorologici che inevitabilmente richiedono una descrizione quantitativa della diffusione turbolenta orizzontale sono stati introdotti alcuni schemi di parametrizzazione individuati normalmente in modo tale che le previsioni modellistiche riproducessero in maniera abbastanza fedele le misure disponibili. Analizzando la Letteratura si nota quanto poco sia stato trattato questo argomento. Se seguiamo Yamazawa (1989), possiamo fare le osservazioni seguenti:

- per la mancanza di dati sperimentali è necessario ipotizzare che in orizzontale il valore assunto dai coefficienti di diffusione turbolenta per le componenti medie del vento, per la temperatura potenziale virtuale e per l'umidità specifica sia il medesimo;
- detto K_x il coefficiente diffusivo nella direzione x e K_y quello relativo alla direzione y, tali coefficienti possono essere stimati con le relazioni seguenti:

$$K_x = 2c\Delta x \cdot \Delta y \cdot \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right| \qquad K_y = 2c\Delta x \cdot \Delta y \cdot \left|\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right| \qquad [5.65a]$$

dove *c* è una costante numerica dell'ordine di 0.01 e Δx e Δy sono le dimensioni orizzontali della griglia di calcolo usata nell'approssimazione numerica dell'equazione prognostica. In teoria, nell'equazione prognostica per *u* e *v* compaiono i termini:

$$\overline{u\overline{v}} = -K_{xy}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \qquad \overline{v\overline{u}} = -K_{xy}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \qquad [5.65b]$$

in cui il coefficiente di diffusione turbolenta è dato da una relazione simile alla (5.65a):

$$K_{xy} = 2c\Delta x \cdot \Delta y \cdot \left[\left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right|\right] \qquad [5.65c]$$

Un modo alternativo è lo schema proposto nel 1963 da Smagorinsky secondo cui il coefficiente di diffusione orizzontale $K_H = K_x = K_y$ varrebbe:

$$K_H = \frac{(c\Delta)^2}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2} \qquad [5.66]$$

dove $\Delta = (\Delta x \cdot \Delta y)^{1/2}$ e *c* è un coefficiente pari a 0.15.

Nelle situazioni convettive, sulla base dei risultati sperimentali ottenuti da Willis e Deardorff (1976b), Seinfeld e Pandis (1998) hanno proposto la correlazione:

$$K_H = 0.1 w_* z_i \qquad [5.67]$$

Di fatto l'incertezza su quale debba essere il valore da attribuire a K_H è elevata e spesso nelle applicazioni pratiche si usano valori costanti dell'ordine di $10^4 \div 10^7$ $m^2 s^{-1}$.

5.5.3.1 Alcune semplificazioni notevoli

L'introduzione della chiusura di tipo *K* rende le equazioni prognostiche per le componenti orizzontali medie del moto particolarmente semplici e ciò induce a cercare per esse delle soluzioni analitiche (sostanzialmente algebriche) in situazioni altamente idealizzate. Questa ricerca ormai storica, motivata inizialmente dalla allora scarsa disponibilità di strutture di calcolo, non ha consentito da un lato di ottenere modelli di utilizzabilità generale, ma, dall'altro, ha permesso di comprendere meglio l'importanza dei vari termini delle equazioni del moto nelle varie parti della Troposfera.

La prima semplificazione delle equazioni del moto è quella di limitarsi a considerare situazioni orizzontalmente omogenee. In questo caso, se il moto è incomprimibile, si ha che:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= +f\bar{v} - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u\overline{w}}}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= -f\bar{v} - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v\overline{w}}}{\partial z}\end{aligned} \qquad [5.68a]$$

equazioni che sono il punto di partenza di ogni ragionamento successivo.

Per prima cosa consideriamo l'atmosfera libera al di sopra del *PBL*. In essa gli *stress* di Reynolds sono praticamente nulli per la quasi totale assenza di turbolenza ed in condizioni stazionarie le relazioni del moto si riducono alla semplice forma seguente:

$$\begin{aligned}0 &= +f\bar{v} - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - 0 \\ 0 &= -f\bar{v} - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - 0\end{aligned} \qquad [5.68b]$$

Quindi *nell'atmosfera libera in condizioni circa stazionarie e in assenza di flussi turbolenti di*

quantità di moto, la forza di Coriolis bilancia esattamente la forza derivante dal gradiente medio orizzontale di pressione. Queste due equazioni, che si riferiscono ad uno stato di sostanziale equilibrio sopra il *PBL*, definiscono le caratteristiche che il vento deve avere nell'atmosfera libera (*vento geostrofico*). Esse consentono di determinarne le due componenti (u_g, v_g) che dipendono solo dai gradienti orizzontali di pressione e che sono definite come:

$$u_g = -\frac{1}{f \cdot \bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \qquad v_g = +\frac{1}{f \cdot \bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \qquad [5.68c]$$

e la *velocità* del vento geostrofico è data dal modulo $G = (u_g^2+v_g^2)^{1/2}$. Con la definizione di vento geostrofico è possibile riscrivere le relazioni del moto (5.68a) come:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= +f(\bar{v} - v_g) - \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= -f\overline{(\bar{u} - u)} - \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} \end{aligned} \qquad [5.68d]$$

La Spirale di Ekman e la situazione barotropica

Si consideri l'intero *PBL* in una situazione prossima all'adiabaticità, che è poi la situazione di riferimento dell'atmosfera. In questo caso, la sua situazione dinamica è fortemente influenzata dalla presenza della forza di Coriolis. Infatti, ipotizzando uno stato stazionario ed adottando una chiusura di tipo *K* per parametrizzare la divergenza dei flussi turbolenti verticali, le relazioni del moto (5.68d) si riducono alla semplice forma seguente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\left[K_m \frac{d\bar{u}}{dz}\right] + f(\bar{v} - v_g) &= 0 \\ \frac{d}{dz}\left[K_m \frac{d\bar{v}}{dz}\right] - f(\bar{u} - u_g) &= 0 \end{aligned} \qquad [5.69a]$$

ed esprimono il bilancio tra il gradiente di pressione, il termine di Coriolis e gli *stress* di Reynolds. Se, inoltre, si ipotizzano *costanti con la quota* K_m, u_g e v_g, si può ottenere una soluzione analitica del sistema precedente, anche se la costanza con la quota del coefficiente di diffusività costituisce una forte limitazione al ragionamento. Infatti, definita la nuova variabile $\Phi = (\bar{u} - u_g) + i(\bar{v} - v_g)$ ottenuta moltiplicando la seconda equazione per l'unità immaginaria *i* e sommandola alla prima e posto $a = (f/2K_m)^{1/2}$, si ottiene alla fine l'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine:

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} - 2ai\Phi = 0 \qquad [5.69b]$$

la cui soluzione generale è $\Phi = c_1 e^{a(1+i)z} + c_2 e^{-a(1+i)z}$. Ponendo le condizioni al contorno pari a:

$$\Phi = \begin{cases} -u_g - iv_g & per\ z = 0 \\ 0 & per\ z = \infty \end{cases} \qquad [5.69c]$$

si ottiene la soluzione compatta:

$$\bar{u} + i\bar{v} = (u_g + iv_g) \cdot (1 - e^{-a(1+i)z}) \qquad [5.69d]$$

In pratica, il profilo verticale delle componenti del vento nel *PBL* è dato dalle relazioni seguenti quando la situazione è stazionaria e quando il vento geostrofico e la diffusività turbolenta sono costanti con la quota:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u_g - e^{-az}(u_g \cos(az) + v_g \sin(az)) \\ \bar{v} &= v_g - e^{-az}(v_g \cos(az) - u_g \sin(az)) \end{aligned} \qquad [5.70a]$$

Ruotando il sistema di riferimento in modo da avere il vento geostrofico lungo l'asse *x*, le (5.70a) si riducono alla forma seguente:

$$\bar{u} = G \cdot (1 - e^{-az}\cos(az))$$
$$\bar{V} = G \cdot e^{-az}\sin(az) \qquad [5.70b]$$

È tipico usare le (5.70b) per realizzare dei grafici aventi sull'asse *x* il rapporto $\bar{u}/G$ e sull'asse *y* il rapporto $\bar{V}/G$ e collegare tutti i punti relativi alle quote crescenti. Il risultato è una linea a spirale che indica la progressiva rotazione della direzione del vento con la quota (*Spirale di Ekman*).

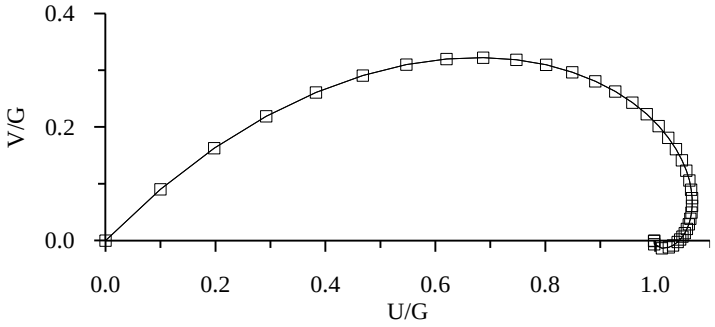


Fig. 5.11: esempio di spirale di Ekman

Nella **Fig. 5.11** è presentato un esempio di *spirale di Ekman* ottenuta con a = 0.001. Anche se estremamente affascinante, il modello di *PBL* così ottenuto è ben poco fisico, nel senso che è ben lontano dalla realtà dei fatti. L'ipotesi più critica introdotta è la costanza con la quota del coefficiente di diffusività turbolenta. Posto che tale parametro possa essere impiegato (e questa è già di per sé un'ipotesi discutibile), sappiamo che esso deve assumere valori nulli al suolo, molto piccoli alla sommità del *PBL* e deve avere un massimo a quote intermedie.

Ritornando alle relazioni individuate, è ora possibile ottenere una relazione che esprime l'angolo tra il vettore vento medio ed il vettore vento geostrofico che è dato da:

$$\tan(\alpha) = \frac{\bar{v}}{\bar{u}} = \frac{e^{-az}\sin(az)}{1 - e^{-az}\cos(az)} \qquad [5.70c]$$

Si può vedere che, quando *z* tende a 0, α tende a 45°. Alla sommità del *PBL* z_i, vento geostrofico e vento reale devono coincidere e ciò richiede che valga la relazione $\alpha z_i = \pi$, cioè che:

$$z_i = \pi\sqrt{\frac{2K_m}{f}} \qquad [5.70d]$$

Questa è la prima relazione che consente di stimare l'altezza del *PBL*, anche se, viste le ipotesi adottate, tale *PBL* non può essere convettivo, ma circa adiabatico.

Esercizio 5.5

Si consideri valida la teoria barotropica che ha condotto alla Spirale di Ekman. Quando il coefficiente di diffusività turbolenta K_m, costante con la quota, vale 12 m^2s^{-1}, il parametro di Coriolis f è pari a 10^{-4}, quanto è l'altezza del *PBL*?
Applicando la relazione (5.70d) si giunge immediatamente alla soluzione:

$$z_i = \pi\sqrt{\frac{2K_m}{f}} = \pi\sqrt{(2 \cdot 12) \cdot 10^4} = 1539m$$

Questo valore può rappresentare un ragionevole ordine di grandezza, anche se nella realtà, anche nelle situazioni altamente convettive, risulta inferiore almeno di circa un terzo.

Lo Strato Superficiale ed il vento logaritmico

Tornando alle equazioni del moto ed alla temperatura potenziale virtuale scritte in condizioni di omogeneità orizzontale (5.68d) ed indicando con F_u, F_v e F_T i gradienti verticali dei flussi turbolenti, è possibile fare interessanti considerazioni. Si consideri inizialmente F_u definito come:

$$F_u = -\frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} \qquad [5.71a]$$

Integrando questa equazione da 0 ad una quota z_*, si ha che (il pedice 0 si riferisce al valore del flusso all'interfaccia aria-suolo, mentre il pedice z_* al valore a tale quota):

$$\int_0^{z_*} F_u \, dz = \overline{uw}|_{z_*} - \overline{uw}|_0 \qquad [5.71b]$$

In linea di principio z_* può essere una quota qualunque; tuttavia, se la si sceglie in modo che il valore dell'integrale sia una frazione piccola e prefissata (per es. 0.1) del valore del flusso di quantità di moto all'interfaccia aria-suolo, la relazione precedente garantisce che nello strato di *PBL* prossimo al suolo (cioè nel *SL*) il flusso varia poco con la quota e quindi lo si può considerare a tutti gli effetti costante. Lo stesso si può fare per F_v *e* F_T. Ciò definisce di fatto z_* e quindi quello strato di *PBL* prossimo al suolo in cui tutti flussi turbolenti restano circa costanti (entro il 10% del valore assunto al suolo). Tale strato altro non è che il *SL* ed il suo spessore z_* tipicamente è nell'intervallo $10^0 \div 10^2$ metri. Vista l'arbitrarietà del sistema di riferimento adottato, si può eseguire una rotazione degli assi tale da portare l'asse *x* parallelo allo *stress* di Reynolds. In questo caso si ha che:

$$-\overline{uw} = u_*^2 \qquad -\overline{uw} = 0 \qquad -\overline{w\theta_v} = u_* T_* \qquad [5.72a]$$

Ora, se si ipotizza valida una chiusura di tipo *K*, si ha che:

$$-\overline{uw} = K_m \frac{d\bar{u}}{dz} = u_*^2 \qquad -\overline{w\theta_v} = K_h \frac{d\overline{\theta_v}}{dz} = u_* T_* \qquad [5.72b]$$

cioè:

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*^2}{K_m} \qquad \frac{d\overline{\theta_v}}{dz} = \frac{u_* T_*}{K_h} \qquad [5.72c]$$

Se si cerca di quantificare K_m con ragionamenti dimensionali, si nota come le sue dimensioni siano tali da giustificare il fatto che possa essere proporzionale al prodotto tra una *lunghezza di scala* (che nel *SL* non può che essere la quota stessa *z*) ed una *velocità di scala* (che nel *SL* è certamente u_*); ciò comporta quindi che:

$$K_m = k u_* z \qquad [5.72d]$$

dove *k* è una costante di proporzionalità nota come costante di von Karman. Utilizzando tutto ciò si giunge immediatamente alla relazione seguente che esprime il gradiente verticale della velocità media del vento in una condizione che, per le approssimazioni fatte, non può che essere stazionaria e circa adiabatica:

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{kz} \qquad [5.72e]$$

Una volta integrata, essa diventa:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \cdot \ln z + cost \qquad [5.73a]$$

Ricordando che la *no-slip condition* si ha non all'interfaccia aria-suolo ma ad una quota z_0 (*parametro di rugosità superficiale*) proporzionale alle dimensioni degli elementi di rugosità presenti sul terreno, la forma finale della relazione precedente diventa:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \qquad [5.73b]$$

cioè il ben noto *profilo logaritmico verticale del vento medio* nel *SL* in condizioni adiabatiche. In condizioni non adiabatiche e stazionarie il profilo verticale della velocità media del vento non potrà più essere logaritmico. Comunque, come vedremo al Cap. 8, esso potrà essere espresso ancora da una relazione analitica di tipo sostanzialmente logaritmico con una *correzione*

dipendente dal livello di turbolenza presente.

Analogo ragionamento si può fare per la temperatura potenziale media. In particolare, ricordando che il Numero di Prandtl $Pr = K_m/K_h$, si ha che:

$$\frac{d\overline{\theta_v}}{dz} = Pr\frac{T_*}{kz} \qquad [5.73c]$$

È difficile definire e soprattutto misurare la temperatura all'interfaccia aria-suolo. In realtà anche per la temperatura (come si vedrà) è definito un parametro di rugosità z_{0h} (differente da z_0) che rappresenta di fatto lo zero di riferimento per l'integrazione della relazione precedente dove la temperatura potenziale virtuale vale θ_0. Integrando si giunge quindi a:

$$\overline{\theta_v}(z) = \overline{\theta_0} + Pr\frac{T_*}{k}\cdot \ln\left(\frac{z}{z_{0h}}\right) \qquad [5.73d]$$

Il risultato ottenuto, che verrà confermato dalla Teoria della Similarità, è che nel *SL* le equazioni fluidodinamiche, opportunamente semplificate, hanno prodotto delle relazioni analitiche per il profilo verticale della velocità del vento e della temperatura potenziale, entrambe di tipo logaritmico con la quota. È facile verificare che si poteva giungere ad una relazione di profilo simile anche per il contenuto di vapor d'acqua in aria e per ogni altro scalare.

5.5.4 LA CHIUSURA DI ORDINE UNO E MEZZO E DUE

L'esagerata aggregazione con cui le informazioni relative alla turbolenza atmosferica sono presenti nei modelli con chiusura del primo ordine è senza dubbio la ragione del loro comportamento non sempre soddisfacente nella descrizione delle situazioni convettive reali. Sicuramente un sostanziale miglioramento lo si ha quando viene introdotta una chiusura del secondo ordine in cui ogni flusso turbolento presente nelle equazioni delle variabili medie, invece di essere parametrizzato, viene descritto dalle equazioni prognostiche (più o meno semplificate) viste al punto 5.3. Ovviamente un modello di questo tipo è piuttosto complesso sia perché consta di un numero rilevante di equazioni differenziali, sia perché nelle equazioni relative ai momenti del secondo ordine sono necessarie drastiche parametrizzazioni dei momenti del terzo ordine in esse presenti. Dettagli su tutto ciò possono essere trovati in Sorbjan (1989) e nella bibliografia ivi citata. In pratica è molto raro che venga utilizzata veramente una chiusura del secondo ordine (una chiusura che richieda la descrizione prognostica di tutti i momenti del secondo ordine). È molto più comune che si apportino ulteriori semplificazioni alla formulazione base della chiusura del secondo ordine, riducendo il numero di equazioni prognostiche relative ai momenti di ordine due. Chiusure di questo tipo non possono dirsi veramente del secondo ordine, ma sono intermedie tra il primo ed il secondo ordine. Per questo esse vengono classificate nella eterogenea famiglia delle *chiusure di ordine uno e mezzo*. Qui di seguito verranno forniti alcuni dettagli su due classi di chiusure di particolare importanza pratica. Va infine segnalato che nel libro di Sorbjan (1989), al paragrafo 6.5, viene presentata una descrizione minuziosa delle varie equazioni differenziali prognostiche dei momenti secondi in funzione di una loro possibile chiusura.

5.5.5.1 Le Chiusure di Mellor e Yamada

Il lavoro più celebre sulle chiusure locali del secondo ordine è quello fatto nell'arco di più di un decennio da G. L. Mellor e Tetsuji Yamada. Essi sono partiti dalla formulazione completa della Chiusura del secondo Ordine e da essa hanno dedotto versioni sistematicamente sempre più semplificate, generando un'intera famiglia di ordine intermedio tra il primo ed il secondo ordine. Per distinguere una formulazione dall'altra, gli Autori hanno introdotto il concetto di *Livello* (il Livello 4 è il più complesso e coincide con la Chiusura completa del Secondo Ordine, mentre il Livello 1 coincide con una chiusura del primo ordine). L'elemento caratteristico che sta alla base di queste continue semplificazioni è il concetto di *anisotropia* dell'atmosfera.

Qui di seguito introdurremo sinteticamente, una dopo l'altra, queste chiusure partendo dalla Chiusura di Livello 4. Prima di fare ciò, vista la complessità delle relazioni differenziali coinvolte, ci è parso opportuno, per quanto possibile, mantenere le ipotesi e la simbologia adottata in origine dagli Autori ed in particolare:

- con U, V, Θ e P vengono indicate rispettivamente la componente x e y medie del moto, la temperatura potenziale virtuale media e la pressione media;
- le fluttuazioni turbolente di queste grandezze vengono indicate con le rispettive lettere minuscole;
- va da sé che, in termini tensoriali, le fluttuazioni delle componenti del moto vengono indicate genericamente come u_j;
- viene usata la grandezza q al posto dell'energia cinetica turbolenta E_k. Tra le due grandezze vale la relazione $q^2 = 2E_k$, cioè $q = \sqrt{2E_k}$;
- per semplificare la scrittura delle relazioni differenziali si è usato l'operatore:

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + U_k \cdot \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_k} \qquad [5.74]$$

  che rappresenta in maniera compatta la somma del tasso di variazione temporale di una variabile media e della sua avvezione. Il lettore noterà una sorprendente somiglianza tra questo operatore e la derivata materiale, ma è solo una somiglianza visto che la derivata materiale si riferisce esclusivamente alle variabili meteorologiche istantanee;
- con f_j è stato indicato in maniera compatta il parametro di Coriolis, cioè $f_j = (0, f_y, f)$ e con g_j il vettore accelerazione di gravità, cioè $g_j = (0,0,-g)$;
- è stato introdotto il coefficiente di espansione termica β definito come $\beta = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial T}$;
- sono trascurati i termini di diffusività molecolare nelle equazioni delle variabili medie;
- si è ipotizzato che l'atmosfera fosse incomprimibile.

La presentazione che segue deriva totalmente dagli articoli pubblicati dai due Autori, in particolare, da Mellor e Yamada (1974 e 1982 e correzioni). Si rimanda poi a Janjic (2001) per i miglioramenti apportati a questi schemi di chiusura.

Prima di iniziare l'esposizione delle Chiusure di Mellor-Yamada è indispensabile fare alcune osservazioni importanti. Gli articoli su cui si basa l'esposizione di questa famiglia di chiusure non sono di semplice lettura e sono riservati prevalentemente agli *specialisti del settore*, quindi in essi ben poco si indulge alla didattica ed alla spiegazione puntuale di tutte le approssimazioni e le parametrizzazioni che di volta in volta vengono adottate. Anche la nostra esposizione dovrà essere necessariamente sintetica e sicuramente il lettore resterà perplesso nel continuo mutare della forma delle diverse equazioni che compongono le diverse chiusure della famiglia, soprattutto quando un'equazione inizialmente prognostica si trasforma in un'equazione diagnostica. Sicuramente ci si chiederà da dove vengono certe parametrizzazioni e che ragioni fisiche hanno certe semplificazioni. In realtà, tutte queste trasformazioni delle equazioni per i momenti secondi sono a prima vista sicuramente *criptiche* ed in una certa misura *magiche.* Inoltre, la complessità delle diverse relazioni non aiuta certo a dissipare le perplessità del lettore. In realtà, tutto ciò è la sintesi modellistica di un'enorme attività di ricerca fluidodinamica i cui riferimenti bibliografici non sono semplici da ritrovare, soprattutto per un lettore non specialista del settore. Nei punti che seguono, presenteremo le diverse chiusure ella famiglia Mellor-Yamada in maniera estremamente sintetica e quindi ben poco finalizzata alla comprensione del perché certe approssimazioni vengano adottate e da dove provengano certe parametrizzazioni. Tuttavia, per chi fosse interessato alla comprensione profonda di tutto ciò sarà sicuramente di notevole aiuto il fondamentale libro

di Sobjan (1989) che al Paragrafo 6.5 (pag. 201-215) considera una per una le equazioni prognostiche di tutti i momenti secondi e ne discute i vari termini mostrando come i vari specialisti del settore li hanno trattati, approssimati e parametrizzati, fornendo adeguati riferimenti bibliografici. Da questa lettura parallela sarà quindi possibile rendersi conto del perché certe approssimazioni siano state adottate e quali limitazioni le accompagnano e da dove nascano certe parametrizzazioni all'apparenza piuttosto magiche e misteriose.

Chiusura di Livello 4

Il più elevato grado di complessità lo si ha con una Chiusura completa del secondo Ordine in cui, però, devono essere parametrizzati tutti i momenti di ordine superiore. Per fare ciò, vengono invocate due ipotesi:

- l'ipotesi di Kolmogorov 1941, che richiede l'isotropia locale dei vortici di piccole dimensioni;
- l'ipotesi di Rotta 1951, che è cruciale nella parametrizzazione dei momenti di ordine superiore al secondo. Secondo tale ipotesi il termine:

$$\overline{p \cdot \left(\frac{\partial u_\iota}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_\iota}\right)}$$

  noto come *termine di ridistribuzione dell'energia*, può essere parametrizzato in funzione dei gradienti delle componenti medie del moto, degli stress di Reynolds e delle covarianze tra le componenti del moto e la temperatura potenziale virtuale secondo una relazione che qui non riportiamo e che può essere trovata in Yamada (1975).

In sostanza, il modello di *Livello 4* è costituito:

1. dalle equazioni prognostiche per le variabili medie, cioè da:

$$\frac{DU_\alpha}{Dx_\alpha} = 0 \qquad [5.75a]$$

$$\frac{DU_j}{Dt} + \varepsilon_{j\alpha l} f_\alpha U_l = \frac{\partial\left(-\overline{u_\alpha u_j}\right)}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial P}{\partial x_j} - g_j \beta \Theta \qquad [5.75b]$$

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \frac{\partial(-\overline{u_\alpha \theta})}{\partial x_\alpha} \qquad [5.75c]$$

2. dalle equazioni prognostiche per gli *stress* di Reynolds, cioè da:

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_\iota u_j}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k}\left[q\lambda_1\left(\frac{\partial \overline{u_\iota u_j}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_\iota u_k}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j u_k}}{\partial x_i}\right)\right] \\ = -\overline{u_k u_\iota}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_k u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\frac{q^3}{\Lambda_1}\delta_{ij} - \frac{q}{3l_1}\left(\overline{u_\iota u_j} - \frac{\delta_{ij}}{3}q^2\right) \\ + C_1 q^2\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) - \beta\left(g_j\overline{u_\iota\theta} + g_i\overline{u_j\theta}\right) \\ + C_2\beta\left(g_j\overline{u_\iota\theta} + g_i\overline{u_j\theta} - \frac{2}{3}\delta_{ij}g_k\overline{u_k\theta}\right) \end{aligned} \qquad [5.75d]$$

3. dalle equazioni prognostiche per le covarianze tra la temperatura potenziale virtuale e le componenti del moto, cioè da:

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_j\theta}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k}\left[q\lambda_3\left(\frac{\partial \overline{u_j\theta}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_k\theta}}{\partial x_j}\right)\right] \\ = -\overline{u_j u_k}\frac{\partial\Theta}{\partial x_k} - \overline{\theta u_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \beta g_j\overline{\theta^2} - \frac{q}{3l_2}\overline{u_j\theta} + C_3 g_j\beta\overline{\theta^2} \end{aligned} \qquad [5.75e]$$

4. dall'equazione prognostica per la varianza della temperatura potenziale virtuale, cioè:

$$\frac{D\overline{\theta^2}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k}\left[q\lambda_2 \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k}\right] = -2\overline{u_k\theta}\frac{\partial \Theta}{\partial x_k} - 2\frac{q}{\Lambda_2}\overline{\theta^2} \qquad [5.75f]$$

La parametrizzazione impiegata per i termini in cui erano presenti i momenti di ordine superiore al secondo contiene:

- i coefficienti C_1, C_2 e C_3 e le lunghezze di scala l_1 e l_2, parametri che derivano dall'aver adottato l'ipotesi di Rotta della ridistribuzione dell'energia;
- le lunghezze di scala Λ_1 e Λ_2, che derivano dall'adozione dell'ipotesi di isotropia locale di Kolmogorov,
- le lunghezze di scala λ_1, λ_2 e λ_3 presenti nei termini diffusivi.

Gli Autori propongono che:

- le lunghezze di scala siano tutte proporzionali ad un'unica lunghezza di scala l (*master length*) cioè $l_1 = A_1 l;\ \ l_2 = A_2 l;\ \ \Lambda_1 = B_1 l;\ \ \Lambda_2 = B_2 l$. Della lunghezza di scala l e delle costanti A_1, A_2, B_1 e B_2 parleremo nel seguito.
- le costanti C_2 e C_3 sono le uniche legate ai termini di buoyancy e vengono considerate nulle;
- le lunghezze di scala λ_1, λ_2 e λ_3 sono considerate identiche e pari a λ_1. Anche di λ_1 si parlerà nel seguito.

Ciò che salta subito all'occhio è la complessità delle equazioni prognostiche (5.75). Dato che è estremamente facile introdurre errori tipografici nel trascrivere equazioni così mostruose, chi le dovesse utilizzare è conveniente che le confronti con le equivalenti equazioni riportate negli articoli originali e nei relativi *errata-corrige*. Oltre a ciò, va rilevato che il modello di *Livello 4*, cioè il modello con Chiusura completa del Secondo Ordine, è costituito dal sistema composto dalle equazioni (5.75), cioè complessivamente da ben 13 equazioni differenziali alle derivate parziali. Vista la terribile complessità delle equazioni che costituiscono questo modello, l'opera degli Autori si è concentrata nella sistematica semplificazione o eliminazione dei termini presenti in esse. È da questa azione di semplificazione sistematica che hanno origine le chiusure di livello inferiore, che però non sono Chiusure del Secondo Ordine in senso stretto, ma chiusure intermedie tra il primo ed il secondo ordine. Collettivamente le indicheremo come *Chiusure di Ordine 1.5*.

Chiusura di Livello 3

Il punto di partenza è la constatazione che ogni equazione per i momenti del secondo ordine la si può scomporre in una *porzione isotropa* e in una *porzione non isotropa*. In particolare, i momenti secondi delle componenti del moto possono essere espressi nel modo seguente:

$$\overline{u_i u_j} = \left(\frac{\delta_{ij}}{3} + a_{ij}\right) q^2 \qquad [5.76a]$$

dove a_{ij} è *la misura adimensionale dell'asimmetria*. In effetti quando $i = j$, in condizioni di perfetta simmetria, la varianza di una delle componenti del moto sarà 1/3 del doppio dell'energia cinetica turbolenta. La lunga strada percorsa dagli Autori è tutta volta ad approssimare e a parametrizzare il più possibile l'asimmetria presente nelle varie relazioni del modello. Inserendo queste constatazioni nelle varie equazioni dei momenti secondi ed ignorando il tasso di variazione nel tempo, l'avvezione ed i termini diffusivi delle componenti anisotrope dei momenti secondi, l'intero insieme delle equazioni prognostiche per i momenti secondi si riduce alla sola equazione per l'energia cinetica turbolenta (cioè per q^2) e per la varianza della temperatura potenziale. I dettagli di

tutto ciò possono essere trovati in Mellor e Yamada (1974). Oltre a ciò, perché le due equazioni non contenessero momenti del terzo ordine, è stato necessario una loro drastica parametrizzazione. Ulteriori perfezionamenti a questa chiusura sono stati apportati poi da Nakamishi e Niino (2004; 2006) a cui si rimanda per i dettagli. Per dare un'idea di tutto ciò, prendiamo in considerazione l'equazione per l'energia cinetica turbolenta *E* scritta, per semplicità, in condizioni di omogeneità orizzontale:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\overline{uw}\frac{\partial U}{\partial z} - \overline{vw}\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{g}{\Theta}\overline{w\theta} - \frac{\partial}{\partial z}[w(p/\rho + E')] - \varepsilon \qquad [5.76b]$$

e consideriamo le varie parametrizzazioni fatte per i termini di ordine superiore al secondo:

- il quarto termine del membro di destra è stato parametrizzato nel modo seguente:

$$\frac{\partial}{\partial z}[w(p/\rho + E')] = \frac{\partial}{\partial z}\left[0.23\frac{5\cdot 2^{3/2}}{3} l \cdot E^{1/2}\frac{\partial E}{\partial z}\right] \qquad [5.76c]$$

  dove *l* è la stessa lunghezza turbolenta di scala incontrata in precedenza e di cui si tratterà nel seguito. Questa parametrizzazione ha sostituito le covarianze tra *w* e *p* e tra *w* e *E* con un'espressione dipendente direttamente da *E* e dal suo gradiente verticale;

- il quinto termine del membro di destra, cioè il tasso di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta, è stato parametrizzato nei termini seguenti:

$$\varepsilon = 2^{5/2}\frac{E^{3/2}}{B_1 l} \qquad [5.76d]$$

  In questo modo il tasso di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta risulta direttamente proporzionale ad *E* ed inversamente proporzionale alla lunghezza di scala *l*. Si noti che B_1 è una costante numerica.

L'equazione prognostica per la varianza della temperatura potenziale virtuale, sempre in condizioni di omogeneità orizzontale, risulta pari a:

$$\frac{\partial\overline{\theta^2}}{\partial t} = -2\overline{w\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial z} - \frac{\partial\overline{w\theta^2}}{\partial z} - 2\epsilon_\theta \qquad [5.77a]$$

in cui il secondo ed il terzo termine della parte destra dell'equazione richiedono anch'esse una parametrizzazione drastica. In particolare:

- il secondo termine, cioè il gradiente verticale del flusso di varianza, viene parametrizzato come:

$$\frac{\partial\overline{w\theta^2}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\sqrt{2}B_1^{-1/3} l \cdot E^{1/2}\frac{\partial\overline{\theta^2}}{\partial z}\right] \qquad [5.77b]$$

- l'ultimo termine, cioè la dissipazione della varianza di temperatura diventa:

$$\varepsilon_\theta = \sqrt{2}E^{1/2}\frac{\overline{\theta^2}}{B_2 l} \qquad [5.77c]$$

  dove B_2 è un'altra costante numerica. Questa parametrizzazione è decisamente drastica ed evidenzia una proporzionalità diretta tra la varianza della temperatura e la sua dissipazione viscosa.

A conti fatti e riproducendo fedelmente le equazioni riportate in Mellor e Yamada (1974), si ha che le dieci equazioni differenziali alle derivate parziali (5.75) che descrivevano i momenti del secondo ordine vengono sostituite dalle equazioni seguenti:

- l'equazione prognostica per l'energia cinetica turbolenta:

$$\frac{Dq^2}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{5}{3} q \lambda_1 \frac{\partial q^2}{\partial x_k}\right] = -2\overline{u_k u_\iota}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - 2\beta g_k \overline{u_k \theta} - 2\frac{q^3}{\Lambda_1} \qquad [5.78a]$$

- l'equazione prognostica per la varianza della temperatura potenziale virtuale:

$$\frac{D\overline{\theta^2}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k}\left[q\lambda_2 \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k}\right] = -2\overline{u_k \theta}\frac{\partial \Theta}{\partial x_k} - 2\frac{q}{\Lambda_2}\overline{\theta^2} \qquad [5.78b]$$

- le sei equazioni diagnostiche per gli stress di Reynolds:

$$\begin{aligned}\overline{u_\iota u_j} = {} & \frac{\delta_{ij}}{3}q^2 - \frac{3l_1}{q}\left[\left(\overline{u_k u_\iota} - C_1 q^2 \delta_{ki}\right)\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \left(\overline{u_k u_j} - C_1 q^2 \delta_{kj}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\overline{u_k u_l}\frac{\partial U_l}{\partial x_k}\right] \\ & - \frac{3l_1}{q}\beta\left(g_j\overline{u_\iota\theta} + g_i\overline{u_j\theta} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\overline{u_l\theta}\right) \\ & + \frac{3l_1}{q}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{q\lambda_1}{3}\left(\delta_{ik}\frac{\partial q^2}{\partial x_j} + \delta_{jk}\frac{\partial q^2}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial q^2}{\partial x_k}\right)\right]\end{aligned} \qquad [5.78c]$$

- le tre equazioni diagnostiche per le covarianze tra componenti del moto e temperatura potenziale virtuale:

$$\overline{u_{j\theta}} = -\frac{3l_2}{q}\left[\overline{u_j u_k}\frac{\partial \Theta}{\partial x_k} + \overline{u_k\theta}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \beta g_j \overline{\theta^2}\right] \qquad [5.78d]$$

Nonostante le apparenze, la chiusura di Livello 3 è di ordine uno e mezzo dato che le dieci equazioni differenziali originarie (5.80) per i momenti del secondo ordine si sono ridotte a solo due equazioni differenziali (per l'energia cinetica turbolenta e la varianza della temperatura potenziale virtuale), mentre gli altri momenti sono descritti da nove equazioni algebriche.

Chiusura di Livello 2.5

Un ulteriore passo verso la semplificazione, indicato dagli Autori come *Livello 2.5*, sta nel trascurare nel *Livello 3* la derivata materiale ed i termini diffusivi di tutte le equazioni prognostiche per i momenti secondi, conservando solo l'equazione per la variabile q^2 (quindi in pratica l'equazione prognostica dell'energia cinetica turbolenta) i cui termini vengono ora opportunamente semplificati e parametrizzati. Tutti gli altri momenti secondi, invece, che originariamente erano descritti da altrettante equazioni prognostiche, vengono ora descritti da altrettante equazioni diagnostiche dipendenti prevalentemente da q^2.

Prima di procedere è opportuno fare una precisazione. Per definizione, un campo meteorologico si dice *realizzabile* se le varianze delle diverse variabili sono sempre positive e se i flussi turbolenti si annullano all'annullarsi dell'energia cinetica turbolenta. Helfand e Labraga (1988) hanno mostrato però che l'introduzione delle semplificazioni che portano alla chiusura di livello 2.5, determinavano, in particolari situazioni, campi non realizzabili, per esempio varianze negative, creando problemi all'impiego generalizzato di questa chiusura nei modelli meteorologici a grande scala. Per ovviare a ciò, pur mantenendo sostanzialmente immutate le semplificazioni originarie, Helfand e Labraga (1988) e Janjic (2001) hanno apportato alcune modifiche allo schema di chiusura originario, rendendolo praticamente immune da questi problemi. Per i dettagli si rimanda ai lavori originari.

Il lato favorevole delle ipotesi alla base di questa chiusura sta nel fatto che, così come è formulato, il modello si applica nell'identica forma sia in un caso completamente tridimensionale che ad uno monodimensionale, purché entrambi idrostatici. Inoltre, dato che le relazioni differenziali diventano un poco più semplici, è ora possibile, senza esagerare nella complicazione, introdurre nel modello anche l'equazione di conservazione del vapor d'acqua rappresentato dal valor medio del rapporto di mescolanza *R*, la cui fluttuazione indicheremo come *r*. Nel caso monodimensionale e considerando trascurabili l'avvezione di umidità, le relazioni effettivamente considerate sono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= -f\left(V_g - V\right) - \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z}\\ \frac{\partial V}{\partial t} &= +f\left(U_g - U\right) - \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z}\\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + U\frac{\partial \Theta}{\partial x} + V\frac{\partial \Theta}{\partial y} &= -\frac{\partial \overline{w\theta}}{\partial z}\\ \frac{\partial R}{\partial t} &= -\frac{\partial \overline{wr}}{\partial z}\end{aligned} \qquad [5.79]$$

che diventerà il modello principe nelle sperimentazioni numeriche di un *PBL* convettivo.

In aggiunta a queste semplificazioni, gli Autori hanno introdotto quella che chiamano *Boundary Layer Approximation*. Essa consiste nell'utilizzare l'approssimazione idrostatica, oltre che nel trascurare i gradienti orizzontali delle variabili medie e la divergenza orizzontale dei flussi turbolenti. Il risultato di tutto ciò (Mellor e Yamada, 1974), è:

- un'equazione altamente parametrizzata per q^2 che presenta la forma seguente:

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{q^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{5}{3}lq\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{q^2}{2}\right)\right] = -\overline{uw}\frac{\partial U}{\partial z} - \overline{vw}\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{g}{\Theta}\overline{w\theta} - \frac{q^3}{\Lambda_1} \qquad [5.80a]$$

  dove Λ_1 è un'opportuna lunghezza di scala. Come si nota, l'evoluzione dell'energia cinetica turbolenta dipende dai gradienti verticali delle componenti medie del moto, dagli *stress* di Reynolds e dal flusso turbolento verticale di calore sensibile;

- anche se non immediatamente visibile dall'equazione precedente, la dissipazione di energia cinetica turbolenta è data dal termine:

$$\varepsilon = \frac{q^3}{\Lambda_1} \qquad [5.80b]$$

  e dipende solo dall'energia cinetica turbolenta stessa;

- i vari momenti del secondo ordine risultano, a questo punto, espressi solo da relazioni algebriche (diagnostiche, quindi) che li legano gli uni agli altri, ed in cui appaiono solo i gradienti verticali delle componenti orizzontali medie del moto ed il valor medio della temperatura potenziale virtuale. Tali relazioni sono:

$$\begin{aligned}\overline{u^2} &= \frac{q^3}{3} + \frac{l_1}{q}\cdot\left[-4\overline{uw}\frac{\partial U}{\partial z} + 2\overline{vw}\frac{\partial V}{\partial z} - 2\frac{g}{\Theta}\overline{w\theta}\right]\\ \overline{v^2} &= \frac{q^3}{3} + \frac{l_1}{q}\cdot\left[+2\overline{uw}\frac{\partial U}{\partial z} - 4\overline{vw}\frac{\partial V}{\partial z} - 2\frac{g}{\Theta}\overline{w\theta}\right]\\ \overline{w^2} &= \frac{q^3}{3} + \frac{l_1}{q}\cdot\left[+2\overline{uw}\frac{\partial U}{\partial z} + 2\overline{vw}\frac{\partial V}{\partial z} + 4\frac{g}{\Theta}\overline{w\theta}\right]\end{aligned} \qquad [5.80c]$$

$$\overline{\theta^2} = -\frac{\Lambda_2}{q}\cdot\overline{w\theta}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial z} \qquad [5.80d]$$

$$\begin{aligned}-\overline{uv} &= \frac{3l_1}{q}\cdot\left[\overline{uw}\frac{\partial U}{\partial z} + \overline{vw}\frac{\partial V}{\partial z}\right]\\ -\overline{uw} &= \frac{3l_1}{q}\cdot\left[\left(\overline{w^2} - C_1q^2\right)\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{g}{\Theta}\overline{u\theta}\right]\\ -\overline{vw} &= \frac{3l_1}{q}\cdot\left[\left(\overline{w^2} - C_1q^2\right)\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{g}{\Theta}\overline{v\theta}\right]\end{aligned} \qquad [5.80e]$$

$$-\overline{u\theta} = \frac{3l_2}{q}\cdot\left[\overline{uw}\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \overline{w\theta}\frac{\partial U}{\partial z}\right]$$
$$-\overline{v\theta} = \frac{3l_2}{q}\cdot\left[\overline{vw}\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \overline{w\theta}\frac{\partial V}{\partial z}\right] \qquad [5.80f]$$
$$-\overline{w\theta} = \frac{3l_2}{q}\cdot\left[\overline{w^2}\frac{\partial\Theta}{\partial z} - \frac{g}{\Theta}\overline{\theta^2}\right]$$

- per la varianza del rapporto di mescolanza del vapor d'acqua e per i relativi flussi turbolenti valgono le analoghe relazioni ottenute per la temperatura potenziale virtuale;

- uno dei risultati ottenuti da questo insieme di semplificazioni è che ora è possibile individuare per i flussi turbolenti una relazione ***formalmente*** simile a quelle della chiusura *K*, cioè una relazione di proporzionalità con il gradiente verticale delle componenti medie orizzontali del moto e della temperatura potenziale virtuale:

$$\overline{uw} = -K_m\frac{\partial U}{\partial z} \qquad \overline{vw} = -K_m\frac{\partial V}{\partial z} \qquad \overline{w\theta} = -K_h\frac{\partial\Theta}{\partial z} \qquad [5.81]$$

- i coefficienti di diffusività K_m e K_h ora dipendono dalla turbolenza presente nel *PBL*, cioè da q e da una *lunghezza caratteristica di scala l*. La loro definizione è:

$$K_m = lq\cdot S_M \qquad K_h = lq\cdot S_h \qquad [5.82]$$

  dove S_M e S_h sono funzioni che modificano la lunghezza di scala l per tener conto dello *shear* del vento e della *buoyancy*.

Anche se formalmente il modello di chiusura di Livello 2.5 sarebbe completo, restano da definire numerosi *dettagli*. In primo luogo, bisogna dare una forma funzionale a S_M e S_h. Se si definiscono i due *termini di produzione di turbolenza* meccanica G_M e convettiva G_h come:

$$G_M = \frac{l^2}{q^2}\cdot\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] \qquad G_h = \frac{l^2}{q^2}\cdot\frac{g}{\Theta}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial z} \qquad [5.83a]$$

le funzioni S_M e S_h sono date implicitamente dal sistema di equazioni:

$$S_M(6A_1A_2G_M) + S_h(1 - 3A_2B_2G_h - 12A_1A_2G_h) = A_2$$
$$S_M(1 + 6A_1^2G_M - 9A_1A_2G_h) - S_h(12A_1^2G_h + 9A_1A_2G_h) = A_1(1 - 3C_1) \qquad [5.83b]$$

Ponendo per semplicità di scrittura:

$$a_1 = 6A_1A_2G_M \qquad a_2 = 1 - 3A_2B_2G_h - 12A_1A_2G_h \qquad a_3 = A_2$$
$$b_1 = 1 + 6A_1^2G_M - 9A_1A_2G_h \qquad b_2 = 12A_1^2G_h + 9A_1A_2G_h \qquad b_3 = A_1(1 - 3C_1) \qquad [5.83c]$$

il sistema (5.83b) può essere risolto ottenendo i risultati seguenti:

$$S_M = \frac{a_3b_2 + a_2b_3}{a_1b_2 + a_2b_1} \qquad S_h = \frac{a_3b_1 - a_1b_3}{a_1b_2 + a_2b_1} \qquad [5.83d]$$

Per evitare situazioni fisicamente non realistiche, è necessario porre alcuni vincoli a queste relazioni. Seguendo Hassid e Galperin (1984), se si definiscono le due quantità:

$$\Phi = \frac{3l^2A_2}{q^2}\cdot\frac{g}{\Theta}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial z} \qquad \Xi = 6\left(\frac{A_1l}{q}\right)^2\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] \qquad [5.84a]$$

perché non si cada in situazioni non realistiche è necessario che:

$$\Phi \geq -\frac{1}{6A_1 + B_2} \qquad \Xi \leq \frac{1 + (7A_1 + B_2)\cdot\Phi + 3(4A_1 + B_2)\cdot A_1\Phi^2}{1 + (B_2 - 3A_2)\cdot\Phi} \qquad [5.84b]$$

Per comodità di utilizzo di questi vincoli, qui di seguito si presenta la formulazione dei coefficienti di diffusività turbolenta (5.82) espressi in termini di Φ e Ξ, del tutto equivalenti a quanto espresso in forma diversa in precedenza:

$$K_m = \frac{A_1 ql \cdot \{1 - 3C_1 + [B_2(1 - C_1) - 12A_1C_1 - 3A_2] \cdot \Phi\}}{1 + (7A_1 + B_2) \cdot \Phi + 3A_1(4A_1 + B_2) \cdot \Phi^2 + \Xi \cdot [1 + (B_2 - 3A_2) \cdot \Phi]}$$
$$K_h = \frac{A_2 ql \cdot (1 + 3A_1\Phi + 3C_1\Xi)}{1 + (7A_1 + B_2) \cdot \Phi + 3A_1(4A_1 + B_2) \cdot \Phi^2 + \Xi \cdot [1 + (B_2 - 3A_2) \cdot \Phi]} \qquad [5.84c]$$

Nelle relazioni precedenti sono state introdotte 5 lunghezze di scala diverse. Di tutte queste lunghezze, *l* è la *lunghezza di scala principale* (*master length scale*), mentre tutte le altre sono ad essa proporzionali. In particolare, le relazioni tra le diverse lunghezze di scala sono:

$$(l_1, l_2, \Lambda_1, \Lambda_2) = (A_1, A_2, B_1, B_2) \cdot l \qquad [5.85]$$

La lunghezza di scala principale

Il ruolo prioritario che la lunghezza di scala *l* gioca in questa chiusura e in tutte le altre della famiglia è evidente e molto è stato fatto nell'ultimo mezzo secolo per la sua modellizzazione e, per sopperire alla cronica mancanza di dati sperimentali con cui verificare le varie teorie proposte, sono state impiegate anche simulazioni numeriche dettagliate ottenute impiegando modelli *LES*. Il problema che sta alla base della determinazione di *l* è il fatto che questa lunghezza di scala la impieghiamo nelle varie parti dell'atmosfera, sia entro il *SL*, sia nel *PBL*, sia al di sopra e sia il *SL* che il *PBL* possono essere in condizioni sia stabili che convettive. Per tener conto di ciò, possiamo operare in vari modi. Inizialmente presentiamo la teoria proposta da Nakanishi (2001) e da Suselj e Sood (2010).

- entro il *SL*, *l* dipenderà sia dalla quota *z* dalla superficie che dalle condizioni di stabilità che si possono sintetizzare nel rapporto adimensionale $\zeta = z/L$, dove *L* è la lunghezza di Monin-Obukhov. È possibile definire una lunghezza di scala l_s , che eguaglia *l* entro il *SL* e che è funzione di questi parametri, come:

$$l_s = \begin{cases} kz/3.7 & \zeta \geq 1 \\ kz \cdot (1 + 2.7\zeta)^{-1} & 0 \leq \zeta < 1 \\ kz & \zeta = 0 \\ kz \cdot (1 - 100\zeta)^{0.2} & \zeta < 0 \end{cases} \qquad [5.86a]$$

- possiamo individuare altre due lunghezze di scala differenti, la prima l_T associata allo stato generale di turbolenza dell'atmosfera e la seconda l_B associata alla *buoyancy*, il cui ruolo è quello di vincolare *l* in un'atmosfera staticamente stabile, specialmente nella parte alta del *PBL*. Mentre la prima lunghezza di scala è intimamente legata al profilo verticale dell'energia cinetica turbolenta, cioè a *q*, la seconda è legata sia alla frequenza di Brunt-Vaisala *N* che al flusso turbolento di calore sensibile al suolo. In pratica l_T può essere espressa dalla relazione integrale seguente:

$$l_T = 0.23 \frac{\int_0^\infty qz\, dz}{\int_0^\infty q\, dz} \qquad [5.86b]$$

e l'estremo superiore dei due integrali può essere limitato alla quota z_i cui corrisponde la sommità del *PBL*. Per poter parametrizzare l_B conviene prima definire una *velocità verticale di scala* q_c come:

$$q_c = \left(\frac{g}{\Theta} \overline{w\theta}\Big|_{z=0} \cdot l_T\right)^{1/3} \qquad [5.86c]$$

A questo punto la lunghezza di scala l_B può essere data dalla relazione seguente:

$$l_B = \begin{cases} a_2\, q/N & \partial\Theta/\partial z > 0 \quad e \quad \zeta \geq 1 \\ a_2 q + a_3 q \cdot \dfrac{\sqrt{(q_c/l_T N)}}{N} & \partial\Theta/\partial z > 0 \quad e \quad \zeta < 1 \\ \infty & \partial\Theta/\partial z \leq 0 \end{cases} \qquad [5.86d]$$

in cui le costanti a_2 e a_3 valgono rispettivamente 1 e 5. A seconda delle varie condizioni in cui si trova l'atmosfera alla quota z (fuori dal *SL*), la lunghezza principale di scala l dipenderà più o meno da l_S, l_T e l_B. Per tener conto di ciò si è proposto che:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_s} + \frac{1}{l_T} + \frac{1}{l_B} \qquad [5.86e]$$

Questo è il modo adottato oggi nei principali modelli meteorologici, per esempio nel modello WRF (Powers et al., 2017). In precedenza, era stata impiegata la parametrizzazione diagnostica (Sun e Ogura, 1980):

$$l = \begin{cases} l_u & se\ \ \partial\Theta/\partial z \leq 0 \\ \dfrac{1}{l_u^{-1} + l_s^{-1}} & se\ \ \partial\Theta/\partial z > 0 \end{cases} \qquad [5.87a]$$

con:

$$l_u = kz/(1 + kz/l_0) \qquad [5.87b]$$

$$l_0 = 0.1 S_1 \frac{\int_0^\infty E^{1/2} z\, dz}{\int_0^\infty E^{1/2}\, dz} \qquad S_1 = \begin{cases} 0.75 + 1.25 \cdot z/z_i & se\ \ z < z_i \\ 2 & se\ \ z \geq z_i \end{cases} \qquad [5.87c]$$

Un modo alternativo per esprimere la lunghezza di scala principale l è stato proposto ed utilizzato da Liu e Leung (2001). Anche in questo caso le relazioni per ottenerla differiscono a seconda del livello di turbolenza presente nel *PBL* e, detta C_e una costante pari a 21.3, esse sono:

- nelle <u>*situazioni convettive*</u> e <u>*nel SL*</u> ($z \leq 0.1\ z_i$):

$$l = \frac{kz}{C_e}\left[\frac{(1 - 3\, z/L)^{2/3} + 2(6.2 - 052\, z_i/L)^{2/3}}{1 + 0.5|z/L|^{2/3}}\right]^{3/2} \qquad [5.88a]$$

- nelle <u>*situazioni convettive entro ML*</u> ($0.1\ z_i < z < 1.1\ z_i$) si ha:

$$l = \frac{\left[0.7 + 1.75(z/z_i)^{2/3} - 1.65(z/z_i)^{4/3}\right]^{3/2} z_i}{C_e[0.55(z/z_i)^{-1/3} - 0.3]} \qquad [5.88b]$$

- <u>*sopra il ML*</u> ($z \geq 1.1\ z_i$) si può usare la relazione:

$$l = MIN\left\{ l|_{z=1.1 z_i};\ 0.5 \cdot \left[\frac{q^2}{\beta g\ \ \partial\Theta/\partial z}\right]^{1/2} \right\} \qquad [5.88c]$$

- <u>*nelle situazioni adiabatiche e stabili*</u> si ha che:

$$l = MIN\left\{ \frac{kz}{MIN[1 + 3.3\, z/L\,;\, 4.3] + kz/A};\ 0.5 \cdot \left[\frac{q^2}{\beta g\ \ \partial\Theta/\partial z}\right]^{1/2} \right\} \qquad [5.88d]$$

$$A = 0.1 \cdot \int_0^\infty qz\, dz \Big/ \int_0^\infty q\, dz \qquad [5.88e]$$

Entrambi questi metodi prevedono una stima diagnostica della lunghezza di scala l. Tuttavia, in Mellor e Yamada (1982) si è proposta una strada alternativa del tutto prognostica. Senza entrare nei dettagli, il modello di Livello 2.5 si può arricchire di una nuova equazione differenziale alle derivate parziali per la variabile $q^2 l$ che risulta espressa come (Weng e Taylor, 2003):

$$\frac{\partial q^2 l}{\partial t} = E_1\left(-\overline{uw}\frac{\partial U}{\partial z} - \overline{vw}\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{g}{\Theta}\overline{w\theta}\right) - \frac{q^3}{B_1}\left[1 + E_2\left(\frac{l}{l_R}\right)^2\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(lqS_l\frac{\partial q^2 l}{\partial z}\right) \qquad [5.89]$$

dove la lunghezza di scala l_R è pari a kz. Nonostante l'introduzione di questa nuova equazione costituisca, almeno in teoria, un miglioramento nella descrizione fisica della lunghezza di scala l, nella pratica tuttavia si sono riscontrati numerosi problemi pratici nel suo utilizzo, facendo di fatto preferire la formulazione diagnostica.

Le costanti numeriche

Le costanti presenti in tutte queste relazioni sono state ottenute dal confronto con i dati sperimentali disponibili e con simulazioni *LES*. Nei vari lavori presentati dai vari Autori esiste una certa differenza nei valori numerici attribuiti alle varie costanti numeriche presenti nelle relazioni del modello. L'insieme di valori attualmente adottato più comunemente è:

$$(A_1, A_2, B_1, B_2, E_1, E_2, S_l) = (0.92, 0.74, 16.6, 10.1, 0.08, 1.8, 1.33, 02) \qquad [5.90]$$

Condizioni al contorno

Restano solo da porre le condizioni al contorno dell'equazione dell'energia cinetica turbolenta e della lunghezza di scala l. La disponibilità dei profili verticali delle componenti cartesiane medie del moto consente di calcolarne direttamente il valore alla sommità del dominio di calcolo. Per quanto riguarda, invece, la condizione al contorno inferiore, essa sarà data da:

$$q_0^2 = B_1^{2/3}u_*^2 \qquad q_0^2 l = 0 \qquad [5.91]$$

Una volta noto il profilo verticale della lunghezza di scala l, dei coefficienti di diffusione turbolenta K_m e K_h e di q^2, risulta possibile, mediante le (5.80c, d, e, f) ottenere il profilo verticale di tutti i momenti del secondo ordine.

Algoritmo applicativo

Per rendere più semplice l'impiego pratico di questa chiusura, presentiamo ora l'algoritmo operativo da impiegare una volta noto il campo medio delle componenti orizzontali del vento (U e V), della temperatura potenziale media Θ e dell'energia cinetica turbolenta E. Tale algoritmo, che tiene conto anche delle modifiche di Helfand e Labraga (1988) che garantiscono la realizzabilità dei campi ottenuti, si compone dei passi seguenti:

1. si calcoli la lunghezza di scala l in funzione dell'energia cinetica turbolenta usando la relazione (5.87);

2. si valutino i gradienti adimensionali delle componenti del vento e della temperatura potenziale G_u, G_v, G_m e G_h dati dalle relazioni:

$$G_u = \frac{1}{\sqrt{2E}}\frac{\partial U}{\partial z} \qquad G_v = \frac{1}{\sqrt{2E}}\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$G_M = G_u^2 + G_V^2 \qquad G_h = -\beta\frac{l^2}{2E}\frac{\partial \Theta}{\partial z}$$

3. si valuti il Numero di Richardson Gradiente Ri ed il Numero di Richardson Flusso R_f:

$$Ri = -\frac{G_h}{G_m}$$

$$Rf = \frac{1}{2}\frac{A_2}{A_1}\frac{E_5}{E_4}\left\{Ri + \frac{A_1}{A_2}\frac{E_3}{E_5} - \left[Ri^2 + 2\frac{A_1}{A_2}\frac{E_3E_5 - 2E_1E_4}{E_5^2}Ri + \left(\frac{A_1}{A_2}\frac{E_3}{E_5}\right)^2\right]^{1/2}\right\}$$

4. si calcolino i *valori all'equilibrio* delle diffusività turbolente $(S_h)_r$ e $(S_M)_r$ con le relazioni seguenti (che derivano dal Livello 2 di cui tratteremo tra poco):

$$(S_h)_r = C_h \frac{Rf_c - Rf}{1 - Rf} \qquad (S_M)_r = C_m \frac{Rf_1 - Rf}{Rf_2 - Rf} S_h$$

dove:

$$Rf_c = \frac{E_1}{E_2} \qquad Rf_1 = \frac{E_3}{E_4} \qquad Rf_1 = \frac{E_1}{E_5} \qquad C_h = \frac{A_2}{B_1} E_2 \qquad C_m = \frac{A_1}{A_2}\frac{E_4}{E_5}$$

con le costanti:

$$E_1 = B_1 - 6A_1 \qquad E_2 = 12A_1 + B_1 + 3B_2 \qquad E_3 = B_1(1 - 3C_1 - 6A_1)$$
$$E_4 = B_1(1 - 3C_1) + 12A_1 + 9A_2 \qquad E_5 = B_1 + 3A_1 + 3B_2$$

5. a questo punto si calcoli l'energia cinetica turbolenta all'equilibrio $(E)_r$:

$$(E)_r = \frac{B_1}{2} l^2 \left\{ (S_M)_r \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] - (S_h)_r \beta \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right\}$$

6. se $E < (E)_r$ siamo in condizioni di turbolenza in decadimento. In questo caso le diffusività adimensionali S_M e S_h verranno calcolate con le relazioni seguenti:

$$S_M = \frac{A_1\{1 - 3C_1 - 3A_2[B_2(1 - C_1) - 12A_1C_1 - 3A_2] \cdot G_h\}}{1 - 3A_2(7A_1 + B_1) \cdot G_h + 27A_1A_2^2(4A_1 + B_2) \cdot G_h^2 + 6A_1^2[1 - 3A_2(B_2 - 3A_2) \cdot G_h] \cdot G_M}$$

$$S_M = A_2 \frac{1 - 6A_1 S_M G_M}{1 - 3A_2(4A_1 + B_2) \cdot G_h}$$

7. se, invece $E > (E)_r$, siamo in condizioni di turbolenza crescente. In questo caso le diffusività adimensionali S_M e S_h verranno calcolate con le relazioni seguenti:

$$S_M = \sqrt{\frac{E}{(E)_r}}\,(S_M)_r \qquad S_h = \sqrt{\frac{E}{(E)_r}}\,(S_h)_r$$

8. in tutti i casi, usando il valore scelto per S_M e S_h, per il calcolo dei vari momenti del secondo ordine si utilizzeranno le relazioni seguenti

$$\begin{Bmatrix} \sigma_u^2 \\ \sigma_v^2 \\ \sigma_w^2 \end{Bmatrix} = 2E \left[\frac{1}{3} - 2A_1(S_M G_M + S_h G_h) + 6A_1 \begin{Bmatrix} S_M G_u^2 \\ S_M G_v^2 \\ S_M G_w^2 \end{Bmatrix} \right]$$

$$\sigma_\theta^2 = B_2 l^2 S_h \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right)^2$$

$$\begin{Bmatrix} -\overline{uw} \\ -\overline{vw} \end{Bmatrix} = lq S_M \begin{Bmatrix} \partial U/\partial z \\ \partial v/\partial z \end{Bmatrix}$$

$$-\overline{w\theta} = lq S_h \frac{\partial \Theta}{\partial z}\frac{S_h}{S_M}$$

Chiusura di Livello 2

Il Livello 2 è la forma più semplificata di questa famiglia di chiusure e parte dall'ipotesi che nell'equazione prognostica dell'energia cinetica turbolenta, nella forma del *livello 2.5*, i termini di *produzione* (il termine meccanico, proporzionale allo *shear* del vento ed il termine convettivo) bilancino *completamente* il termine dissipativo. In questo caso si può sostituire l'equazione prognostica per E con una sua approssimazione algebrica e ciò porta ad una semplificazione generale del problema. In effetti, introducendo questa drastica approssimazione, si ha che:

$$-\overline{uw}\frac{\partial U}{\partial z} - \overline{vw}\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{g}{\Theta}\overline{w\theta} - \varepsilon = 0 \qquad [5.92a]$$

e ricordando la definizione di Numero di Richardson flusso R_f, essa può essere riscritta come:

$$\left(-\overline{uw}\frac{\partial U}{\partial z}-\overline{vw}\frac{\partial V}{\partial z}\right)\cdot\left(1-R_f\right)=\varepsilon \qquad [5.92b]$$

Utilizzando le (5.80e) per esprimere i flussi turbolenti e la (5.80b) per sostituire al tasso di dissipazione di energia cinetica turbolenta una parametrizzazione dipendente da q, si ottiene la versione algebrica dell'equazione per l'energia cinetica turbolenta (o meglio per q^2):

$$q^2=l^2B_1S_M\left(\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right)\cdot\left(1-R_f\right) \qquad [5.92c]$$

da cui si ottiene immediatamente q^2 una volta noto R_f, l ed i gradienti verticali delle componenti orizzontali medie del moto.

Dato che la conoscenza dei profili verticali medi delle componenti orizzontali del moto e della temperatura potenziale virtuale consentono di calcolare facilmente il *Gradient Richardson Number Ri*, è necessaria una relazione tra i due parametri di stabilità *Ri* e R_f, scritta nel contesto delle parametrizzazioni fatte al *Livello 2.5* che risulta data da (Yamada, 1975):

$$R_f=\frac{1}{2}\frac{A_2}{A_1}\frac{E_5}{E_4}\left\{Ri+\frac{A_1E_3}{A_2E_5}-\left[Ri^2+2\frac{A_1}{A_2}\frac{E_3E_5-2E_1E_4}{E_5^2}Ri+\left(\frac{A_1E_3}{A_2E_5}\right)^2\right]^{1/2}\right\} \qquad [5.92d]$$

dove:

$$E_1=B_1-6A_1 \qquad E_2=B_1+12A_1+3B_2 \qquad E_3=B_1(1-3C_1)-6A_1$$
$$E_4=B_1(1-3C_1)+12A_1+9A_2 \qquad E_5=B_1+3A_1+3B_2 \qquad [5.92e]$$

Questa equazione, una volta introdotti i valori numerici appropriati per le varie costanti, si riduce alla semplice forma seguente:

$$R_f=0.659\left\{Ri+0.178-\left[Ri^2+0.322Ri+(0.0316)^2\right]^{1/2}\right\} \qquad [5.92f]$$

Noto R_f, il problema si sposta all'individuazione di K_m e K_h. Anche in questo caso valgono le (5.80e) in cui sono presenti S_M e S_h. Per quanto riguarda la prima delle due funzioni si ha che:

$$S_M=C_M\frac{\left(Rf_c-R_f\right)\cdot\left(Rf_1-R_f\right)}{\left(1-R_f\right)\cdot\left(Rf_2-R_f\right)} \qquad [5.93a]$$

dove il *Critical Richardson Number* R_{fc} e gli altri parametri sono definiti come:

$$Rf_c=\frac{E_1}{E_2} \qquad Rf_1=\frac{E_3}{E_4} \qquad Rf_2=\frac{E_1}{E_5} \qquad C_M=\frac{A_1}{B_1}\frac{E_2E_4}{E_5} \qquad [5.93b]$$

Per quanto riguarda, invece, la quantità S_H la relazione che la esprime è:

$$S_H=C_H\frac{\left(Rf_c-R_f\right)}{\left(1-R_f\right)} \qquad [5.93c]$$

con:

$$C_H=\frac{A_2}{B_1}E_2 \qquad [5.93d]$$

Dal punto di vista pratico, una volta noto il profilo verticale di U, V e Θ, per ottenere q^2 si può procedere impiegando il seguente metodo iterativo:

1. si inizializza la lunghezza di scala l con una semplice funzione dell'altezza come indicato in precedenza;
2. si calcola il profilo di *Ri* e di R_f con la relazione (5.92d);
3. si calcolano le diffusività adimensionali S_M e S_H con le (5.93a) e (5.93b)
4. si calcola q^2 con la (5.92c);

5. si ricalcola la lunghezza di scala *l*;

6. si ripete il processo fino a quando non si notano più variazioni significative nel profilo della lunghezza di scala *l*.

A questo punto, noto q^2 ed i coefficienti di diffusione turbolenta, risulta immediato con le (5.87) ottenere il profilo di tutti i momenti del secondo ordine.

Nel contesto del *Livello 2* è utile ottenere anche il profilo del tasso di dissipazione di energia cinetica turbolenta ε. Seguendo Enger (1990b), esso risulta espresso come:

$$\varepsilon = \frac{q^3}{B_3 \lambda} \qquad [5.94a]$$

con $B_3 = 27$ e con la lunghezza di scala λ che dipende dalla stabilità e dalla quota *z* come:

- nelle situazioni convettive e nel *SL* quando $z \leq 0.1\ z_i$:

$$\lambda = \frac{kz}{B_3}\left[\frac{2\cdot(7+0.52\,z_i/|L|)^{2/3}+1.7\cdot(1+3\,z/|L|)^{2/3}}{7+0.5\,z/|L|}\right] \qquad [5.94b]$$

- nelle situazioni convettive quando $0.1z_i \leq z \leq 1.1z_i$:

$$\lambda = \frac{\left(0.75+1.75\cdot(z_i/|L|)^{2/3}-1.65\cdot(z_i/|L|)^{4/3}\right)^{3/2}}{B_1(0.55\cdot(z_i/|L|)^{-1/3}-0.3)} \qquad [5.94c]$$

- quando $z > 1.1z_i$ e nelle situazioni stabili:

$$\lambda = MIN\left[\lambda(z=1.1z_i);\ 0.5\cdot\left(q^2/\left(\frac{g}{\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)\right)^{1/2}\right] \qquad [5.94d]$$

Osservazioni conclusive

I modelli meteorologici che utilizzano chiusure del tipo Mellor-Yamada sono ormai numerosissimi, specialmente quelli che usano la chiusura di Livello 2.5. In tutti questi anni (ormai più di 50) molti ricercatori hanno continuamente perfezionato queste chiusure, soprattutto nel renderle sempre più immuni da situazioni meteorologiche *patologiche*. È impossibile elencare la vastissima Bibliografia in merito e qui di seguito daremo solo alcune indicazioni che ci paiono importanti e che abbiamo utilizzato per questa presentazione.

Per i dettagli relativi alle relazioni dei vari livelli di chiusura e alla loro derivazione si è fatto riferimento a Mellor Yamada (1974), Yamada (1975), Yamada (1979), Mellor e Yamada (1982), Hassid e Galperin (1984) e Sun e Ogura (1980). Come già detto, un utile complemento alla comprensione di tutto ciò è costituito dal paragrafo 6.5 di Sorbjan (1989).

Tra le molteplici applicazioni del metodo di chiusura, qui si citano solo pochi riferimenti ed in particolare: Mellor (1973), Mellor e Yamada (1975), Yamada (1977), Yamada (1979), Yamada (1983), Yamada e Bunker (1988; 1989), Liu e Leung (2001), Yamazawa (1989) e Foster e Brown (1994). Queste sono solo poche citazioni bibliografiche di un metodo di chiusura tra i più usati nel mondo, soprattutto nei modelli a mesoscala dedicati alle previsioni meteorologiche e allo studio del *PBL*. Inoltre, è interessante citare i lavori di Lobocki (1992, 1993) in cui le chiusure di Mellor e Yamada sono state impiegate per studiare il *SL* e per stendere un ponte teorico tra il modello fluidodinamico del *PBL* e la Teoria della Similarità di Monin-Obukhov. Non va poi dimenticato che questo tipo di chiusura è stato utilizzato per simulare la dispersione in aria di inquinanti e alcuni esempi di questo genere sono rappresentati da Enger (1986, 1990a, 1990b) e da Hassid e Galperin (1984).

Per concludere è interessante mostrare quanto siano accurati i modelli dotati di chiusure di questo tipo. La Letteratura presenta un'infinità di lavori sul tema ma, semplicemente per dare un'idea quantitativa, è interessante vedere le **Figg. 5.12** e **5.13** in cui sono confrontati i dati

sperimentali disponibili con le simulazioni di un modello con chiusura Mellor-Yamada 2.5 in situazioni convettive. Dalle figure si vede come siano ben rappresentate dal modello sia la componente orizzontale e verticale dell'energia cinetica turbolenta, che il profilo verticale del flusso turbolento di calore sensibile e della temperatura potenziale.

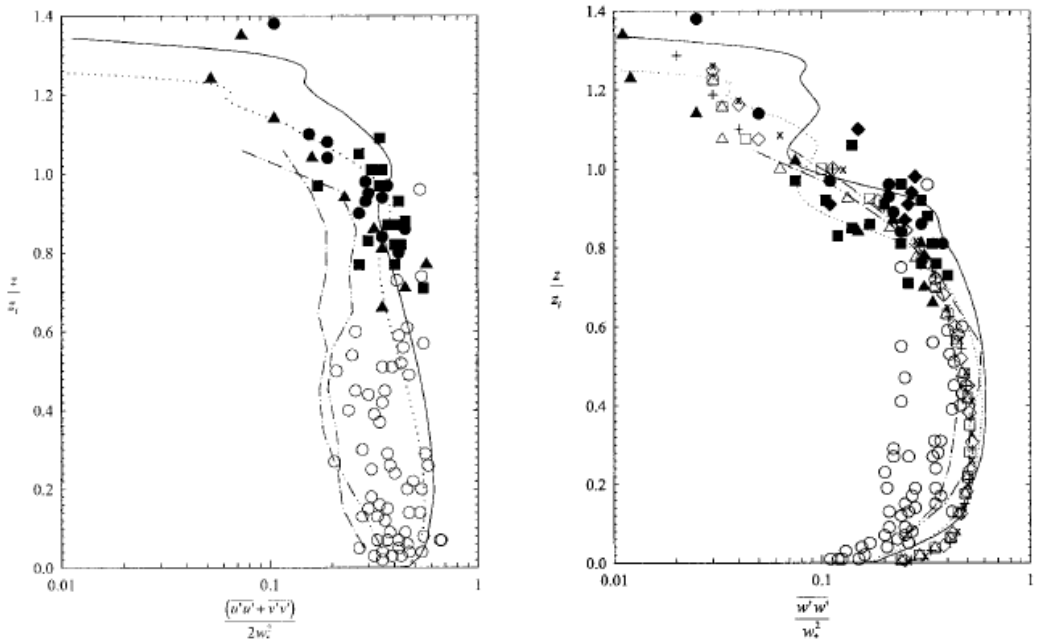


Fig. 5.12: confronto tra dati sperimentali e simulazioni con chiusura di Livello 2.5. A sinistra: componente orizzontale dell'energia cinetica turbolenta. A destra: componente verticale dell'energia cinetica turbolenta (Liu e Leung, 2001)

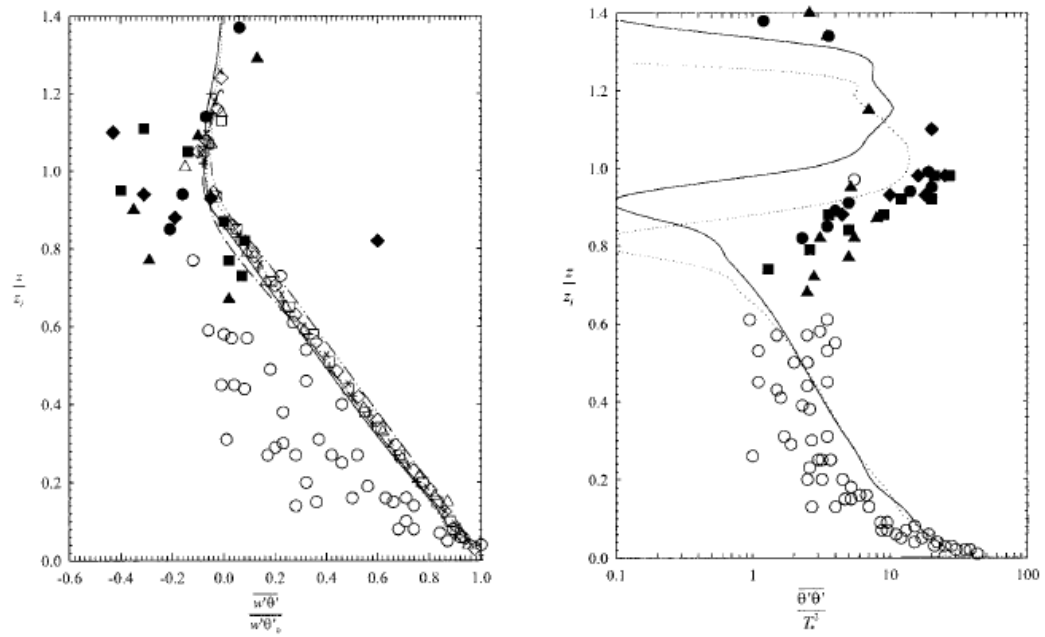


Fig. 5.13: confronto tra dati sperimentali e simulazioni con chiusura di Livello 2.5. A sinistra: flusso di calore turbolento. A destra: varianza della temperatura potenziale (Liu e Leung, 2001)

5.5.5.2 La chiusura E-ε

Un approccio alternativo alla famiglia di chiusure Mellor-Yamada è una chiusura che prevede la presenza sia dell'equazione prognostica per l'energia cinetica turbolenta che dell'equazione, sempre prognostica, per la sua dissipazione. Pur essendo questo tipo di chiusura uno standard nei calcoli fluidodinamici di interesse ingegneristico, non è molto impiegata nei modelli meteorologici. Essa prende il nome di C*hiusura E-ε* (Etling, 1996; Koo e Reible, 1995) o anche *k-ε* . Limitando al massimo le complicazioni formali, essa può essere illustrata facilmente nel caso monodimensionale. Nell'esposizione successiva faremo ampio riferimento al lavoro di Duynkerke (1988). Il modello monodimensionale che adotta questo tipo di chiusura è costituito:

- dalle equazioni per le variabili medie, cioè le due componenti del vento (*U, V*) e la temperatura potenziale virtuale media Θ. Anche in questo caso supporremo valida l'ipotesi di incomprimibilità dell'atmosfera e trascureremo la presenza esplicita di vapor d'acqua nell'aria. Tali equazioni, indicando con U_g e V_g le componenti del vento geostrofico, sono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} + f\left(V - V_g\right)\\ \frac{\partial V}{\partial t} &= -\frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} + f\left(U - U_g\right)\\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= -\frac{\partial \overline{w\theta}}{\partial z}\end{aligned} \qquad [5.95a]$$

- dalle espressioni che descrivono i momenti secondi presenti nelle equazioni precedenti. Tali espressioni mettono in relazione i momenti secondi verticali di una variabile con il gradiente verticale del rispettivo valor medio:

$$-\overline{uw} = K\frac{\partial U}{\partial z} \qquad -\overline{vw} = K\frac{\partial V}{\partial z} \qquad -\overline{w\theta} = K\frac{\partial \Theta}{\partial z} \qquad [5.95b]$$

- dal coefficiente di diffusione *K* che è legato all'energia cinetica turbolenta *E* ed alla sua dissipazione ε dalla relazione di chiusura (c_μ è una costante pari a 0.033):

$$K = c_\mu \frac{E^2}{\varepsilon} \qquad [5.95c]$$

- dall'equazione prognostica relativa all'energia cinetica turbolenta *E* che, nel caso monodimensionale, risulta pari a:

$$\underbrace{\frac{\partial E}{\partial t}}_{} = \underbrace{-\overline{uw}\frac{\partial U}{\partial z}}_{S} - \underbrace{\overline{vw}\frac{\partial V}{\partial z}}_{} + \underbrace{\frac{g}{\Theta}w\theta}_{B} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{wE'} + \frac{\overline{pw}}{\rho}\right)}_{T} - \varepsilon \qquad [5.95d]$$

dove sono stati evidenziati nel membro di destra sia la componente di produzione meccanica (*S*) che quella di buoyancy (*B*). Il quarto termine (*T*) può essere parametrizzato in termini di gradiente verticale di energia cinetica turbolenta nel modo seguente:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{wE'} + \frac{\overline{pw}}{\rho}\right) = \frac{K}{\sigma_E}\frac{\partial E}{\partial z} \qquad [5.95e]$$

dove σ_E è una costante numerica prossima a 1.

- dall'equazione prognostica per ε che presenta una forma altamente parametrizzata e può essere così espressa:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{w\varepsilon'}}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{E}\left(c_{i\varepsilon}P - c_{2\varepsilon}\varepsilon\right) \qquad [5.95f]$$

in cui *P* rappresenta la produzione di energia cinetica turbolenta e i due coefficienti

numerici $c_{1\varepsilon}$ e $c_{2\varepsilon}$ valgono rispettivamente 1.46 e 1.83. Per quanto riguarda il termine *P*, facendo riferimento ai termini evidenziati nella (5.95a), si è giunti alla conclusione che:

$$P = S + max(0, B) + max(0, T) \qquad [5.95g]$$

Il primo termine a destra della relazione (5.95f) è un momento di ordine superiore a due e quindi deve essere parametrizzato. La parametrizzazione adottata fa sì che il flusso turbolento verticale di ε sia proporzionale al rispettivo gradiente verticale ed il coefficiente di proporzionalità è ancora *K*. Tale parametrizzazione può essere così espressa:

$$-\overline{w\varepsilon'} = \frac{K}{\sigma_E}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \qquad [5.95h]$$

dove σ_ε è una costante numerica pari a 2.38. Una forma differente per l'equazione prognostica del tasso di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta è stata proposta da Ramanathan e al. (1995). In questo caso, introdotte le costanti C_1, C_2 e σ (pari rispettivamente a 1.44, 1.92 e 1.3), l'equazione prognostica assume la forma seguente:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{K}{\sigma}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right) - C_1\frac{\varepsilon}{E}\left(\overline{uw}\frac{\partial U}{\partial z} + \overline{vw}\frac{\partial V}{\partial z}\right) + \frac{\varepsilon}{E}\frac{g}{\Theta}\overline{w\theta} - C_2\frac{\varepsilon^2}{E} - W\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \qquad [5.95i]$$

Anche se all'apparenza questo schema di chiusura pare molto accurato, tuttavia si può vedere facilmente come la sua complessità computazione sia almeno dello stesso ordine di grandezza di quella del Livello 3 di Mellor-Yamada. Nonostante ciò, questa è la chiusura adottata dal moderno codice meteorologico TAPM (Hurley e al., 2005, 2008).

5.5.5.3 Osservazioni

Le chiusure di ordine uno e un mezzo e due sono state molto utilizzate nell'ultimo mezzo secolo con buoni risultati, soprattutto la chiusura Mellor-Yamada di Livello 2.5. Dal confronto tra le simulazioni fatte e le misure sperimentali disponibili si può concludere che:

- questi schemi creano una situazione di rimescolamento durante le ore diurne, cosa che non avveniva con i modelli con chiusura del primo ordine;
- durante le ore notturne tali modelli ricostruiscono, concordemente con le misure sperimentali, un jet di vento a bassa quota;
- l'intensità della turbolenza sale a valori elevati durante le ore diurne per poi ridimensionarsi drasticamente nelle ore notturne.

Tutto ciò porta a dire che questi tipi di chiusura forniscono previsioni decisamente più realistiche rispetto alle chiusure del primo ordine. Va sottolineato però il fatto che, essendo aumentato il numero di equazioni, la risoluzione numerica del sistema risulta piuttosto complessa. Tuttavia, viste la realisticità richiesta ai modelli di previsione meteorologica ad area limitata ed ai modelli che preparano i campi meteorologici e di turbolenza per la simulazione della dispersione degli inquinanti in aria, questi schemi di chiusura diventano decisivi ed irrinunciabili anche a costo di notevoli appesantimenti dei tempi di calcolo.

5.5.5 LE CHIUSURE LOCALI DI ORDINE SUPERIORE

Lo sviluppo di chiusure di ordine più elevato è andato al passo con l'evoluzione dei supercomputer e la motivazione del loro sviluppo è stata la ricerca di un maggior realismo nelle previsioni della turbolenza atmosferica, specialmente in situazioni di elevata convettività e di elevata stabilità. Come si è visto, dalle equazioni di bilancio relative ai valori istantanei delle varie grandezze meteorologiche non solo è possibile dedurre analoghe equazioni per i rispettivi valori medi, ma anche equazioni che descrivono il comportamento dinamico delle fluttuazioni e dei momenti di ordine superiore. È quindi pensabile costruire un modello di *PBL* costituito non solo dalle equazioni

prognostiche per i valori medi, ma anche da equazioni prognostiche per i momenti di ordine superiore (anche superiori al secondo). Ciò è stato effettivamente fatto (Briere, 1987; Bougeault, 1981 e 1985; Moeng e Randall, 1984), ottenendo però modelli molto complessi, usati solo per scopi di ricerca. Oltre alle difficoltà formali che tali modelli presentano (il numero di equazioni e di variabili cresce vertiginosamente), esiste il problema di dover parametrizzare i momenti di ordine superiore al secondo, problema acuito dal fatto che in termini sperimentali è molto difficile disporre di misure sufficientemente precise per la loro stima.

5.6 METODI DI CHIUSURA NON LOCALE

A differenza della chiusura locale che assume i flussi turbolenti proporzionali alle *proprietà locali* del moto del fluido, una *chiusura non locale* è basata sul concetto che tutti i vortici turbolenti possono trasportare porzioni di fluido (e quindi loro proprietà) per distanze finite. In sostanza, questo tipo di chiusura *ipotizza che la turbolenza abbia prevalentemente una natura avvettiva e non diffusiva*, cosa che, del resto, emerge nelle situazioni convettive dai dati ottenuti sperimentalmente in campo (pochi), dalle simulazioni fisiche in laboratorio (Willis e Deardordf 1974, 1976a e b, 1978, 1981) e dalle simulazioni realizzate dai modelli LES (Ebert e al, 1989).

Si consideri, per esempio, l'equazione di conservazione di una data variabile meteorologica *S* (uno scalare o una componente della quantità di moto) e si ipotizzi che sia applicabile l'ipotesi di Reynolds secondo cui il suo valore istantaneo, ottenibile come sovrapposizione di un valor medio e di una fluttuazione, ubbidisca all'equazione:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial S}{\partial x_\alpha} = \cdots + \nu \frac{\partial^2 S}{\partial x_\alpha^2} \qquad [5.96a]$$

mentre per la componente media valga l'equazione di conservazione:

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial \overline{u'_\alpha S'}}{\partial x_\alpha} + \cdots + \nu \frac{\partial^2 S}{\partial x_\alpha^2} \qquad [5.96b]$$

dove:

- il primo termine rappresenta il tasso di variazione nel tempo del valor medio di *S*,
- il secondo termine di sinistra costituisce l'avvezione dovuta al vento medio,
- il primo termine di destra è la divergenza del flusso turbolento.

La divergenza del flusso turbolento, come è noto, deriva dal termine avvettivo e dall'ipotesi di Reynolds ed il problema sta nell'individuare un modello conveniente di parametrizzazione di tale termine. Mentre la chiusura locale del primo ordine, di fatto, tenta di parametrizzarlo in modo diffusivo, assimilandolo quindi alla diffusione molecolare, una modellizzazione ai limiti delle possibilità degli attuali strumenti di calcolo (per esempio i modelli *LES* o la risoluzione diretta delle equazioni istantanee) evidenzia che, diminuendo le dimensioni della griglia di calcolo ed il *time step*, quello che sembrava essere un fenomeno di tipo diffusivo diventa progressivamente e sempre più chiaramente un processo avvettivo. Si potrebbe pensare che ciò derivi esclusivamente dalle procedure di calcolo, anche se molto sofisticate; tuttavia, ci sono molte evidenze della presenza in atmosfera (soprattutto nelle situazioni convettive) di strutture turbolente coerenti e di grandi vortici. Esempi di ciò sono i *thermals* che si originano alla superficie, ben visibili nel facsimile *SODAR*, il *looping* dei pennacchi delle ciminiere ed altri fenomeni ancora. Tali vortici, o meglio tali strutture coerenti, sono presenti massicciamente durante le situazioni convettive e sono le responsabili dell'apporto sistematico e continuo di energia cinetica turbolenta al sistema *PBL*. Analizzandone lo spettro, è evidente come in tali strutture sia concentrata la maggior parte di energia cinetica turbolenta e come la loro dimensione sia paragonabile a quella del *PBL* stesso. I

modelli di chiusura non locale che presenteremo cercano di modellizzare soprattutto questa tipologia di fenomeni.

5.6.1 LE BASI LOGICHE DI UNA CHIUSURA NON LOCALE

Per poter rappresentare l'effetto della dinamica delle strutture coerenti di un *PBL* convettivo nell'ambito di una chiusura locale è stato necessario aumentarne l'ordine inserendo nel modello almeno tutti i momenti del secondo ordine e possibilmente momenti di ordine superiore (Stull, 1989) ottenendo, alla fine, un modello estremamente complesso, la cui implementazione numerica richiede, per la descrizione di situazioni reali, tempi di calcolo eccessivi. A fronte di ciò, è stata esplorata una possibilità alternativa che in qualche modo era già apparsa in alcuni lavori teorici presentati in Letteratura. L'*idea chiave* di ciò era quella di *abbandonare il concetto di proporzionalità tra un flusso turbolento e le proprietà che il moto dell'aria presentava localmente* e di ritenere invece che un flusso turbolento in un dato punto dello spazio fosse il risultato congiunto di azioni la cui sede operativa era, di fatto, tutto il *PBL*. Questi concetti hanno avuto inizialmente una serie di sviluppi sfociati in attività teoriche di ricerca, come si può vedere in Stull (1984), Stull e Hasegawa (1984) e Stull (1986), tutti poco operativi soprattutto perché si cercavano soluzioni nel continuo, abituati a ciò dalla consuetudine operativa adottata nelle chiusure locali. La soluzione operativa è apparsa chiara e semplice appena si è discretizzato il problema, cosa che comunque era inevitabile fare risolvendo numericamente le equazioni fluidodinamiche.

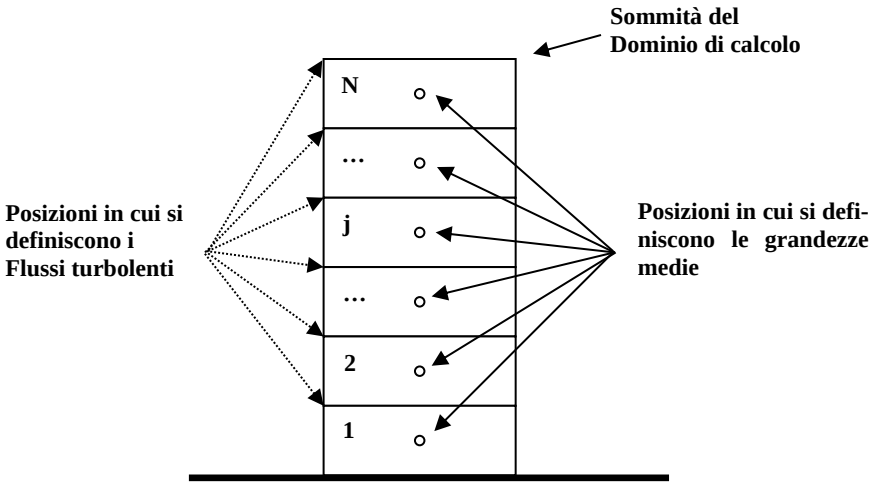


Fig. 5.14: dominio monodimensionale e griglia di calcolo per una chiusura non locale

Anche se è possibile affrontare il problema tridimensionale, conviene, per semplicità, considerare esclusivamente la *diffusione turbolenta verticale* di una generica grandezza q (temperatura potenziale, concentrazione di un inquinante, quantità di moto, ecc.). Nel seguito, con q si intende il valore medio di una generica grandezza, mentre con q' la sua fluttuazione turbolenta. Il dominio di indagine e di calcolo (che in questo caso coincidono) è quindi *monodimensionale* ed è costituito, come mostrato in **Fig. 5.14**, da una colonna d'aria con base unitaria che si estende dal suolo fino alla sommità del dominio di calcolo (quota sicuramente superiore alla sommità del *PBL*). Questa colonna viene poi suddivisa in *N celle elementari* per semplicità tutte identiche. Esse hanno quindi una base unitaria ed un'altezza pari a Δz e al suo centro viene definito il valor medio delle varie grandezze q e quindi il profilo verticale di q non risulta più una funzione continua, ma una serie discreta di valori q_j, j =1, 2,.., N, per ciascuna delle quote $z_j = \Delta z/2 + (j\text{-}1)\Delta z$. Il flusso turbolento di q è più logico che venga rappresentato da uno scambio di proprietà fisiche tra una cella e l'altra e che, quindi, sia relativo al piano orizzontale che separa una cella j da quella immediatamente sovrastante j+1. Quindi, il flusso verticale turbolento di q sarà relativo ai vari livelli j localizzati alle quote $z_j = j\cdot\Delta z$, j = 1, 2,…, N. In pratica, anticipando quanto verrà detto in

un Capitolo successivo, si è adottata una *griglia di calcolo sfalsata* (*staggered grid*). Un'altra discretizzazione necessaria è quella relativa al tempo. In questo senso il fenomeno verrà seguito da un tempo t_0 ad un tempo t e l'intervallo temporale considerato verrà suddiviso in sottointervalli elementari (*time step*) uguali e di durata Δt.

L'ipotesi di base, adottata da ogni modello di chiusura non locale, è che il valore medio che una variabile di interesse assume all'istante $t+\Delta t$ in una cella j (Cella di destinazione), cioè $q_j(t+\Delta t)$, sia il risultato di una serie di *scambi fisici di materia* che provengono, a priori, da ogni altra cella della colonna e che hanno luogo nell'intervallo di tempo Δt. Ogni apporto d'aria da una cella k (Cella di provenienza) alla cella j, porta con sé l'informazione dello stato della cella k e, tra l'altro, l'informazione del valore originario del valor medio di q in quella cella. Dal *rimescolamento* di tutte queste informazioni provenienti da tutta la colonna d'aria, relative a tutte le scale possibili (la dimensione di scala massima sarà pari all'altezza dell'intera colonna), avrà origine lo stato della generica cella j al tempo $t+\Delta t$. In pratica:

$$q_j(t+\Delta t) = \sum_{k=1}^{N} c_{jk}(t,\Delta t)\cdot q_k(t) \qquad [5.97a]$$

Quindi i valori assunti dalla variabile q al tempo $t+\Delta t$ nelle N celle della colonna, indicati sinteticamente dal vettore $\mathbf{q}(t+\Delta t)$, si ottengono da quelli assunti al tempo t $\mathbf{q}(t)$ moltiplicati per la *Transilient Matrix* $\mathbf{C}$, cioè:

$$\boldsymbol{q}(t+\Delta t) = \boldsymbol{C}(t,\Delta t)\cdot \boldsymbol{q}(t) \qquad [5.97b]$$

È necessario fare subito alcune considerazioni di base:

1. i coefficienti c_{jk} della *Transilient Matrix* $\mathbf{C}$ rappresentano lo scambio di massa che ha luogo tra il tempo t ed il tempo $t+\Delta t$ dalla cella k (cella di provenienza) alla cella j (cella di destinazione). A priori il loro valore potrebbe variare sia con t che con Δt e quindi sarebbe opportuno ricordare tale dipendenza, come si è fatto nella relazione (5.97a), anche se nel seguito, per ragioni tipografiche, li si indicherà semplicemente come c_{jk}.

2. è necessario esprimere la *conservazione della massa dell'aria* in questo nuovo contesto. Essa è data, per ogni cella di destinazione j, da:

$$\sum_{k=1}^{N} c_{jk}(t,\Delta t) = 1 \qquad [5.98a]$$

   Per rendersi conto di ciò (Stull, 1984), si consideri il caso particolare di una colonna d'aria nelle cui celle il valore di q sia costante. L'unico modo per cui le (5.97) possano valere è che valga la relazione precedente.

3. è necessario esprimere *la conservazione dello stato*, per esempio la conservazione di una sostanza inquinante. Tale principio è dato dalla relazione seguente:

$$\sum_{j=1}^{N} c_{jk}(t,\Delta t) = 1 \qquad [5.98b]$$

   valida per ogni cella di provenienza k. Per rendersi conto della validità di tale relazione, consideriamo una situazione in cui q sia nullo in tutte celle tranne in una. Dopo un processo di rimescolamento durato Δt, l'aria della cella con valore non nullo di q avrà raggiunto, a priori, ogni altra cella della colonna; tuttavia, la quantità complessiva di q nella colonna non potrà che essere quella iniziale se, come si è ammesso, non ci sono sorgenti di q. E ciò non potrà che richiedere la validità della relazione precedente. Ciò è rigorosamente vero solo quando l'altezza di ogni cella è uguale e vale Δz. Se l'altezza delle varie celle fosse differente e pari a Δz_j per la cella di destinazione e Δz_k per quella di provenienza, la (5.98b) si modificherebbe come:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\Delta z_j}{\Delta z_k} c_{jk}(t, \Delta t) = 1 \qquad [5.98c]$$

4. è immediato vedere come $c_{jk} = 0$ significhi che non c'è scambio d'aria tra la cella *k* e la cella *j*, mentre $c_{jk} = 1$ comporta che tutta l'aria contenuta nella cella *k* viene scambiata con la cella *j*. I coefficienti c_{jj} sono, quindi, la frazione di massa che non abbandona la cella *j*.

Queste considerazioni comportano che:

- la matrice **C** è *bistocastica*, cioè la somma degli elementi di ogni singola riga e la somma degli elementi di ogni singola colonna è sempre pari a 1;
- i coefficienti c_{jk} sono tali che $0 \leq c_{jk} \leq 1$;
- dall'algebra lineare si ha che il più grande degli autovalori $|\lambda|$ di una matrice **C** non può eccedere nessuno dei due limiti:

$$\|C\|_\infty = \max_i \sum_j c_{ij} \qquad \|C\|_1 = \max_j \sum_i c_{ij}$$

  Viste le caratteristiche dei coefficienti della *Transilient Matrix* risulta che il modulo di ogni suo autovalore non può mai superare l'unità, proprietà che sarà utile per assicurare la stabilità numerica del metodo esplicito di risoluzione nel tempo.

La matrice **C** dipende dunque da *t* e da Δt e, come si nota dalle relazioni (5.97), i suoi coefficienti sono adimensionali. A volte, però, può essere opportuno definire scambi di materia da cella a cella nell'unità di tempo e ciò porta a definire una *Matrice di Transizione* **M** i cui elementi m_{jk}, aventi dimensione s^{-1}, sono legati agli analoghi coefficienti c_{jk} da: $m_{jk} = c_{jk}/\Delta t$.

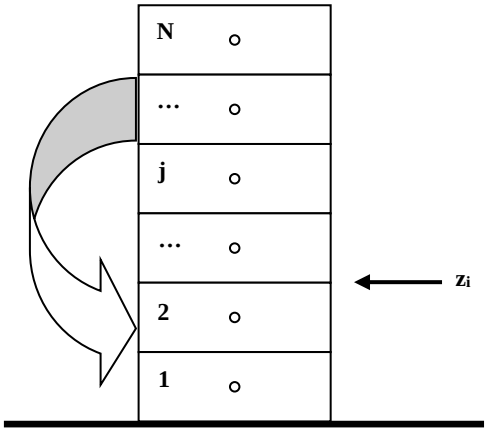


Fig. 5.15: un esempio di cambio d'aria che contribuisce ai flussi non locali al livello z_i

Consideriamo ora i flussi turbolenti. Essi, come detto, vengono definiti ad ogni quota z_i che rappresenta il confine tra la cella *i* e la cella *i*+1. Visto il tipo di contesto in cui operiamo, *questi flussi sono turbolenti ma non locali*. Un flusso F_i della variabile *q* al livello $z_i = i\Delta z$ è la somma algebrica di tutti gli scambi di materia che, partendo da una cella *k* ed arrivando alla cella *j*, attraversano la quota z_i; pertanto, F_i dipende solo dai vortici che hanno origine *sotto* z_i e terminano *sopra* z_i e viceversa. Nella **Fig. 5.15** viene illustrato un esempio di scambio d'aria che contribuisce (negativamente) al flusso alla quota z_i. Invece, un flusso dalla cella *j* (indicata in figura) alla cella *N* o dalla cella 1 alla cella 2 non contribuisce al flusso alla quota z_i. In termini matematici, si ha che:

$$F_i(t,\Delta t) = \frac{\Delta z}{\Delta t}\sum_{j=1}^{k}\sum_{k=1}^{N} c_{jk}(t,\Delta t)\cdot\left[q_j(t) - q_k(t)\right] \qquad [5.99a]$$

È facile dimostrare che la relazione precedente può essere riscritta in termini ricorsivi come:

$$F_i(t,\Delta t) = F_{i-1}(t,\Delta t) + \frac{\Delta z}{\Delta t}\sum_{k=1}^{N} c_{jk}(t,\Delta t)\cdot\left[q_j(t) - q_k(t)\right] \qquad [5.99b]$$

e, se ogni cella avesse altezza differente, essa diventerebbe:

$$F_i(t,\Delta t) = F_{i-1}(t,\Delta t) + \frac{\Delta z_i}{\Delta t}\sum_{k=1}^{N} c_{jk}(t,\Delta t)\cdot\left[q_j(t) - q_k(t)\right] \qquad [5.99c]$$

Ulteriore elemento di interesse, utile soprattutto quando si tratterà la dispersione turbolenta orizzontale, è il concetto non locale di *lunghezza di rimescolamento*, che può essere definita come la distanza media percorsa dall'aria nel processo di rimescolamento. Nel contesto non locale adottato è possibile attribuire ad ogni cella *k* una lunghezza di rimescolamento l_k che rappresenta il valore medio delle distanze percorse dai flussi di materia in arrivo o in partenza da tale cella. In termini matematici l_k è dato da:

$$l_k = \frac{\Delta z}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[c_{ik}(t,\Delta t) + c_{ki}(t,\Delta t)\right]\cdot|i-k| \qquad [5.100]$$

Con questi elementi è possibile ora adattare la chiusura non locale, che è del primo ordine, alla dispersione turbolenta verticale espressa dalle equazioni differenziali per le variabili medie *U*, *V*, Θ, *Q*, *C* che sono il valore medio delle due componenti orizzontali del moto, della temperatura potenziale virtuale, dell'umidità e della concentrazione di una specie chimica. In particolare, ignorando le varie forzanti presenti ed i fenomeni dissipativi, le equazioni prognostiche medie del *PBL* si riducono alla semplice forma seguente:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{w\theta}}{\partial z}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{wq}}{\partial z} \qquad \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{wc}}{\partial z} \qquad [5.101a]$$

dove *u*, *v*, θ, *q* e *c* sono le rispettive fluttuazioni turbolente. Indicando poi con *S* una generica delle variabili considerate, si vede immediatamente che il prototipo di equazione prognostica del *PBL* privata dei termini di sorgente e dell'avvezione è:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{ws}}{\partial z} = -\frac{\partial F}{\partial z} \qquad [5.101b]$$

dove *F* è il flusso turbolento verticale di *S*. Nel contesto spaziale discreto in cui si opera, considerando una generica cella *j*, la relazione precedente diventa:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{F_j - F_{j-1}}{\Delta z} \qquad [5.101c]$$

Dato che anche il tempo è discretizzato, una possibile trasformazione di questa relazione è:

$$S_j^{n+1} = S_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta z}\left[F_j - F_{j-1}\right] \qquad [5.101d]$$

che, ricordando la (5.99c), diventa:

$$S_j^{n+1} = S_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta z}\sum_{k=1}^{N} c_{jk}\left[S_j - S_k\right] \qquad [5.101e]$$

Nello scrivere le (5.101 d, e) non si è chiarito se i flussi coinvolti debbano essere quelli riferiti al

tempo t^n o al tempo t^{n+1}. Si possono adottare tre strategie:

- una <u>*strategia esplicita*</u> che rappresenta la maniera operativa usata dal metodo di Eulero per la risoluzione delle equazioni differenziali secondo cui:

$$S_j^{n+1} = S_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta z}\left[F_j^n - F_{j-1}^n\right] \qquad [5.102a]$$

  Questo metodo fornisce un risultato immediato visto che i valori al tempo t^{n+1} dipendono solo da quelli al tempo t^n. Tuttavia, maggiore è Δt, minore è la precisione del risultato.

- una <u>*strategia implicita*</u> secondo cui:

$$S_j^{n+1} = S_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta z}\left[F_j^{n+1} - F_{j-1}^{n+1}\right] \qquad [5.102b]$$

  Questo metodo garantisce una maggiore precisione di previsione ma richiede come contropartita la soluzione di un sistema di equazioni algebriche che può risultare dispendioso dal punto di vista computazionale.

- una <u>*strategia semi-implicita*</u> che combina le due precedenti e che mostra ottime caratteristiche numeriche. Secondo essa:

$$S_j^{n+1} = S_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta z}\left[\alpha\left(F_j^{n+1} - F_{j-1}^{n+1}\right) + (1-\alpha)\left(F_j^n - F_{j-1}^n\right)\right] \qquad [5.102c]$$

  dove α è un parametro minore di 1. Quando $\alpha = 0.5$, lo schema prende il nome di schema di Crank-Nicholson, ben noto nell'Analisi Numerica.

La chiusura non locale, qui presentata sinteticamente, sarebbe operativamente applicabile se fosse nota la *Transilient Matrix* **C** o la *matrice di transizione* **M**. Ma è proprio qui che si concentra la fisica della chiusura ed è proprio in questo aspetto che si differenziano i tre principali metodi di chiusura finora proposti.

5.6.2 LO SCHEMA DI BLACKADAR

Il primo schema veramente non locale proposto in Letteratura è quello di Blackadar (1978), descritto da Zhang e Anthes (1982). Questo schema, oltre a costituire un esempio interessante di applicazione dei concetti di chiusura non locale, ha avuto anche un impiego operativo nei modelli meteorologici MM4 e MM5 (Lee S-M, H.S. Fernando, 2004). Va subito detto che il limite principale di questo schema di chiusura è il fatto che è in grado di trattare solo il *PBL* convettivo e quindi, quando deve essere impiegato in un modello operativo, deve convivere con altri schemi di chiusura incaricati di descrivere le situazioni di un *PBL* adiabatico, di un *PBL* stabile e dell'atmosfera libera. Per descriverlo, inizialmente si considererà solo l'equazione della dispersione verticale della temperatura potenziale virtuale media e solo successivamente si estenderanno i risultati alle altre equazioni (5.101a). Inoltre, come fatto in precedenza, condurremo una descrizione *discreta* secondo cui la dispersione verticale interessa una colonna d'aria a base unitaria, suddivisa in tante celle sovrapposte, ognuna di altezza Δz (**Fig. 5.14**).

La cella a diretto contatto col suolo è la Cella 1. La cella alla quota più elevata è la Cella *N*. Le ipotesi su cui si basa lo schema di chiusura non locale di Blackadar sono che:

- le forzanti del sistema, relative alla sola dispersione verticale, sono localizzate tutte all'interfaccia aria-suolo e quindi nella Cella 1 e sono: il flusso turbolento di calore sensibile H_0 per l'equazione della temperatura potenziale, u_*^2 per le equazioni del moto ed il flusso turbolento di calore latente H_E per l'equazione dell'umidità;

- la perturbazione dello stato della Cella 1, indotta dalle forzanti a suolo, si propaga verso

l'alto attraverso scambi di porzioni di aria che hanno origine dalla Cella 1 e si dirigono verso tutte le altre celle sovrastanti, interne al *PBL*;

- le celle coinvolte dai vari processi convettivi sono solo quelle entro il *PBL*. Pertanto, delle *N* celle della colonna d'aria, vengono considerate dallo schema di Blackadar solo le celle 1, 2,…, *K*, dove $K \leq N$ e, detto z_i l'altezza del *PBL*, $K\Delta z \leq z_i \leq (k+1)\Delta z$;
- queste circolazioni che vanno dalla Cella 1 alle varie celle *j*, con $j = 2, 3,\ldots, K$, per la conservazione della massa generano analoghi flussi in direzione opposta (cioè in discesa verso la Cella 1) (**Fig. 5.16**). Di fatto, questo schema sta cercando di modellizzare gli scambi d'aria derivanti dai vortici convettivi di grandi dimensioni ed ipotizza che questa circolazione turbolenta di masse d'aria sia *totalmente simmetrica*;
- ogni flusso d'aria che parte dalla Cella 1 e giunge ad una delle *K* celle sovrastanti è caratterizzato da una frazione di aria scambiata costante;
- tra le varie celle della colonna non è consentito alcun flusso locale.

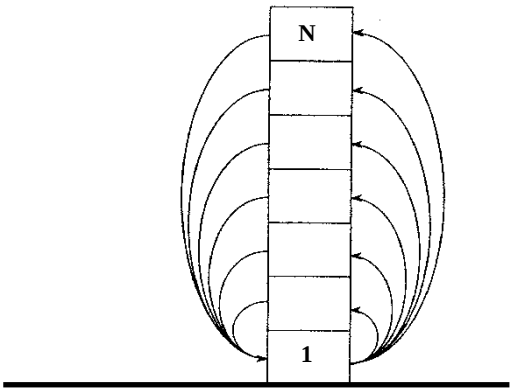


Fig.5.16: flussi d'aria tra le varie celle di una colonna d'aria in una situazione convettiva secondo il modello di Blackadar

Se consideriamo le equazioni prognostiche monodimensionali (cioè riferite solo alla diffusione turbolenta verticale) per le diverse variabili meteorologiche medie ed in particolare quella relativa alla temperatura potenziale virtuale Θ, possiamo pensare di riscriverle in forma discreta, congruentemente con quanto evidenziato nella **Fig. 5.16**. In generale, per ogni generica Cella *j*, questa equazione può essere riscritta come:

$$\frac{\partial \Theta_j}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{K} m_{jk}(t)\left[\Theta_j(t) - \Theta_k(t)\right] \qquad [5.103]$$

dove si è messo in evidenza lo scambio discreto di porzioni di aria tra le diverse celle. In questa relazione (ed in tutte le altre relative alle diverse variabili meteorologiche medie) tale meccanismo è stato introdotto in maniera del tutto generale attraverso i coefficienti della *Matrice di Trasferimento* m_{jk}, senza, per ora, preoccuparci di specificarne le caratteristiche. Se, però, adottiamo lo schema di Blackadar, risulta subito evidente come per ogni coppia di Celle *j* e *k* si abbia che:

$$m_{1k} = M_u \qquad m_{j1} = M_u \qquad [5.104]$$

dove M_u, per ora incognito, è la frazione di aria che, nell'unità di tempo, viene trasferita dalla Cella 1 ad ogni cella *j*, $j = 2, 3,\ldots, K$ entro il *PBL* convettivo. Dato che tra ogni generica coppia di celle della colonna non è consentito alcun scambio di aria (a meno che una delle due celle sia la Cella 1), ogni m_{ij}, $i \neq 1$ $j \neq 1$ sarà nullo. Per stimare il coefficiente di scambio M_u, concentriamo la nostra attenzione sul solo flusso verticale di calore ed ipotizziamo di conoscere il profilo

verticale di temperatura potenziale media. In questo caso dobbiamo ricordare che:

- all'interfaccia aria-suolo, cioè entro la Cella 1, è attiva la sorgente di calore rappresentata dal flusso turbolento di calore sensibile H_0;
- dato che nella colonna non sono attive altre sorgenti di calore, ad ogni quota il flusso di calore potrà essere determinato sulla base della legge di conservazione dell'energia:

$$H(z) = H_0 - M_u \int_0^z \rho C_p \left[\Theta_0 - \Theta_z\right] \cdot dz \qquad [5.105a]$$

- quando il limite di integrazione dell'equazione precedente corrisponde alla sommità del *PBL* (z_i), il flusso di calore corrispondente sarà nullo, quindi:

$$M_u = \frac{H_0}{\int_0^z \rho C_p \left[\Theta_0 - \Theta_z\right] \cdot dz} \qquad [5.105b]$$

Questa relazione per M_u deve essere un po' adattata alla visione discreta utilizzata. In primo luogo, si deve individuare Θ_0. Ci sono diverse possibilità operative, ma la più semplice implica la conoscenza al tempo *t* della radiazione ad onda lunga (infrarosso) emessa dal suolo. Dall'impiego della legge di Stefan-Boltzmann (che incontreremo al Cap. 6), è immediato poi ottenere Θ_0. Sono quindi disponibili Θ_0 e ρC_p all'interfaccia aria-suolo (cioè a $z = 0$) e la temperatura potenziale Θ_j e $(\rho C_p)_j$ al centro delle varie celle *j* e perciò si può impiegare uno dei metodi numerici di integrazione (per esempio il metodo dei trapezi) per approssimare l'integrale nella relazione (5.105b). Fatto ciò, si giunge immediatamente al valore per il coefficiente di scambio M_u.

Una volta ottenuto il valore del coefficiente di scambio M_u, non resta che integrare la (5.103) per esempio in termini espliciti. In questo caso, la versione discreta della relazione (5.103) per la Cella 1 diventa:

$$\frac{\Theta_1^{n+1} - \Theta_1^n}{\Delta t} = -\frac{M_u}{\Delta z}\left[(K\Delta z - \Delta z)\Theta_1^n - \sum_{k=2}^{K} \Delta z \Theta_k^n\right] \qquad [5.106a]$$

mentre per tutte le altre Celle *j* della colonna d'aria si ha che:

$$\frac{\Theta_j^{n+1} - \Theta_j^n}{\Delta t} = -M_u\left[\Theta_j^n - \Theta_1^n\right] \qquad [5.106b]$$

Se le celle avessero altezze differenti, tutte queste relazioni si trasformerebbero nel modo seguente:

$$\frac{\Theta_1^{n+1} - \Theta_1^n}{\Delta t} = -\frac{M_u}{\Delta z_1}\left[(Z - \Delta z_1)\Theta_1^n - \sum_{k=2}^{K} \Delta z_k \Theta_k^n\right] \qquad [5.106c]$$

$$\frac{\Theta_j^{n+1} - \Theta_j^n}{\Delta t} = -M_u \frac{\Delta z_1}{\Delta z_j}\left[\Theta_j^n - \Theta_1^n\right] \qquad [5.106d]$$

Per le altre equazioni prognostiche, si giungerà allo stesso sistema di equazioni algebriche in cui si sostituirà di volta in volta Θ con *U*, *V*, *Q*.

Questo schema, totalmente non locale, ha fornito ottimi risultati nelle in situazioni convettive, anche se non può essere l'unico schema di chiusura per un modello meteorologico, essendo applicabile solo alla porzione convettiva del *PBL*. Inoltre per essere applicato richiede la conoscenza dell'altezza z_i della porzione convettiva del *PBL*. Come determinare questa grandezza è un problema che affronteremo nel seguito, anche se nel prossimo paragrafo presenteremo un metodo impiegato proprio nei modelli che adottano chiusure non locali.

5.6.3 LO SCHEMA DI PLEIM E CHANG

La chiusura non locale di Pleim e Chang (1992), nota come *ACM (Asymmetrical Convective Model*), prende le mosse dallo schema proposto originariamente da Blackadar (1978) e rispetto ad esso differisce per una visione ancora più realistica dei movimenti verticali delle masse d'aria. In effetti lo schema di Blackadar era basato sull'ipotesi che il rimescolamento turbolento nel *PBL* fosse isotropico (cioè simmetrico), tuttavia le osservazioni e le simulazioni *LES* (Schulman, 1989) indicavano che i processi di rimescolamento nel *boundary layer* convettivo erano essenzialmente asimmetrici (la turbolenza non era quindi isotropa) con correnti ascendenti che si muovevano con velocità ascensionali elevate e correnti discendenti più lente. Per tener conto di tutto ciò, Pleim e Chang (1992) e Pleim e Xiu (1995) hanno rivisto il modello di Blackadar introducendo un rimescolamento asimmetrico. Questo schema di chiusura ha avuto un notevole successo nelle applicazioni pratiche, ma con l'aumentare della disponibilità di potenza di calcolo e con l'aumentare della risoluzione verticale considerata, tale schema ha mostrato la necessità di essere rivisto (Pleim, 2007a, b; Nielsen-Gammon e al. 2010). Qui di seguito presenteremo prima la versione originaria della chiusura non locale di Pleim e Chang e successivamente la versione più recente della stessa.

5.6.3.1 La formulazione originale

Anche in questo caso adottiamo una *visione discreta* della diffusione turbolenta verticale e consideriamo, come prima, una colonna d'aria con base unitaria, suddivisa in celle con Δz costante. Questo modello, noto come modello *ACM* (*Asymmetric Convective Model*), ipotizza che i flussi di materia abbiano luogo durante la diffusione turbolenta in verticale nel modo in cui sono evidenziati nella **Fig. 5.17**. Ipotizziamo, poi, per semplicità che la Cella 1 sia la cella a diretto contatto col suolo e la Cella *N* sia alla sommità del *PBL*.

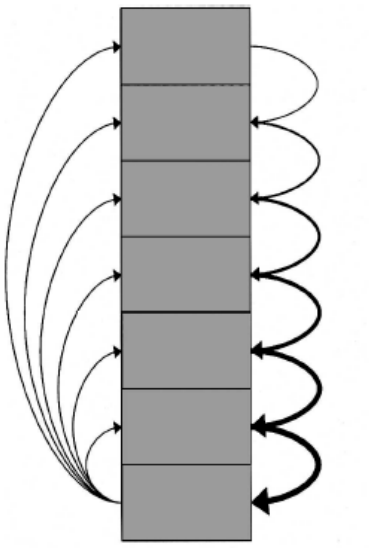


Fig. 5.17: vortice turbolento nel modello ACM di Pleim e Chang.

Una situazione convettiva è caratterizzata dal fatto che al suolo si viene a stabilire un flusso turbolento di calore sensibile H_0 positivo e tale situazione determinerà il generarsi di un vortice convettivo che si propagherà alle quote superiori. Analizziamo ora la situazione rappresentata nella figura. L'immissione di calore sensibile H_0 nella Cella 1 la destabilizzerà e, come reazione a tale destabilizzazione, da tale cella partiranno flussi d'aria diretti verso tutte le celle sovrastanti. L'*ipotesi chiave* del modello di Pleim e Chang è che i flussi d'aria originati dalla Cella 1 verso ognuna delle celle sovrastanti siano *tutti uguali*. Se Θ_1 è il valore medio della temperatura potenziale virtuale nella Cella 1 dopo la sua destabilizzazione, la quantità di calore

nell'unità di tempo da essa *inviata* ad ognuna delle celle sovrastanti risulta pari a:

$$Q^{in} = \rho C_p \Theta_1 \Delta z M_u \qquad [5.107]$$

dove M_u è *il tasso di rimescolamento verso l'alto* (*upward mixing rate*) espresso in s^{-1}. Una volta destabilizzata, la cella invierà verso l'altro questa quantità di calore distribuendolo simmetricamente a tutte le celle sovrastanti. Questo è *il meccanismo di salita* del vortice turbolento che viene visto come l'insieme di vortici di dimensioni caratteristiche pari a multipli interi della dimensione verticale Δz della cella. Questo meccanismo *mima* straordinariamente bene le caratteristiche spettrali di un *PBL* convettivo, in cui sono presenti vortici di tutte le dimensioni, incluso anche vortici con dimensioni caratteristiche dell'ordine dell'altezza del *PBL*.

Il *ritorno al suolo* del vortice ha una storia decisamente differente. Dalla cella più elevata (Cella *N*), per la conservazione della massa, partirà una quantità di aria pari a:

$$Q^N = M_u \Delta z \qquad [5.108a]$$

che giungerà *solamente* alla cella *N*-1. Ancora a causa della conservazione della massa, dalla Cella *N*-1 partirà una nuova quantità di aria, diretta esclusivamente alla cella sottostante *N-2*, la cui entità sarà pari alla somma dell'aria in arrivo dalla Cella 1 (*aria in salita*) e dell'aria in arrivo dalla Cella *N* (*aria in discesa*), cioè:

$$Q^{N-1} = M_u \Delta z + Q^N \qquad [5.108b]$$

e quindi, per la (5.108a):

$$Q^{N-1} = 2M_u \Delta z \qquad [5.108c]$$

Quanto visto per la cella *N*-1 si riproporrà per tutte le celle sottostanti. Questo meccanismo di discesa del vortice può essere efficacemente rappresentato da una discesa a cascata, che *mima* ancora una volta il processo di *energy cascade* che sta alla base dell'Ipotesi di Kolmogorov. Se si considera una generica cella *j*-esima, si avrà in generale che:

$$Q^j = (N - j + 1) M_u \Delta z \qquad [5.108d]$$

Introducendo il *tasso di rimescolamento verso il basso* (*downward mixing rate*) M_{dj} dalla Cella *j* alla Cella *j*-1, se le celle sono di ugual altezza è immediato ottenere dalla (5.108d) che:

$$M_{dj} = M_u + M_{dj+1} = M_u \frac{(N - j + 1)\Delta z}{\Delta z} \qquad [5.109]$$

Se consideriamo ora una qualunque proprietà dell'aria, per esempio il valore medio della temperatura potenziale virtuale Θ, il tasso di variazione relativo per la cella *j* risulta pari a:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = M_u \Theta_1 - M_{dj} \Theta_j + M_{dj+1} \Theta_{j+1} \qquad [5.110]$$

che è la *versione discretizzata* dell'equazione prognostica per la temperatura potenziale virtuale media, in cui è stato considerato solo il meccanismo di dispersione verticale. Per poterla impiegare effettivamente, bisogna individuare un'espressione per il tasso di rimescolamento M_u. A tal proposito consideriamo inizialmente la Cella 1. Se la situazione è convettiva, tale cella riceverà un flusso turbolento di calore sensibile H_0 incrementando quindi il calore posseduto. Nell'unità di tempo, il calore ricevuto dalla Cella 1 verrà ridistribuito a tutte le altre celle sovrastanti attraverso il movimento asimmetrico del vortice descritto in precedenza. Se consideriamo le varie celle, dalla *N-esima* alla *seconda*, l'incremento di calore nell'unità di tempo sarà:

Cella *N* $\Rightarrow \Delta Q_N = \rho C_p (M_u \Theta_1 - M_{dN} \Theta_N) \cdot \Delta z$

Cella *N-1* $\Rightarrow \Delta Q_{N-1} = \rho C_p (M_u \Theta_1 - M_{dN-1} \Theta_{N-1} + M_{dN} \Theta_N) \cdot \Delta z$

……. ……..

Cella *j* $\Rightarrow \Delta Q_j = \rho C_p \left(M_u \Theta_1 - M_{dj} \Theta_j + M_{dj+1} \Theta_{j+1}\right) \cdot \Delta z$

……. ……..

Cella 2 $\Rightarrow \Delta Q_2 = \rho C_p (M_u \Theta_1 - M_{d2} \Theta_2 + M_{d3} \Theta_3) \cdot \Delta z$

La somma degli incrementi di calore nell'unità di tempo di tutte le celle sovrastanti la prima deve eguagliare H_0 e ciò comporta che:

$$H_0 = \rho C_p M_u (z_N - z_1)(\Theta_1 - \Theta_2) \quad [5.111a]$$

e quindi che:

$$M_u = \frac{H_0}{\rho C_p (z_N - z_1)(\Theta_1 - \Theta_2)} = \quad [5.111b]$$

Noto M_u, lo schema di chiusura è completo e la (5.110) può effettivamente essere risolta. È ovviamente possibile scrivere equazioni analoghe anche per le componenti medie del vento, per l'umidità specifica media e per la concentrazione di specie inquinanti.

Facciamo ora un ulteriore passo operativo e *discretizziamo la derivata temporale* presente nella (5.110). Se Δt è il passo temporale di discretizzazione, se per generalità si consentono altezze differenti per le varie celle e se si adotta un approccio esplicito, si ha:

- per la Cella 1:

$$\frac{(\Theta_1^{n+1} - \Theta_1^n)}{\Delta t} = -M_u \frac{(z_N - z_1)}{\Delta z} [\Theta_1^n - \Theta_2^n] \quad [5.112a]$$

- per la generica Cella *i*-esima:

$$\frac{(\Theta_i^{n+1} - \Theta_i^n)}{\Delta t} = M_u \cdot \left(\Theta_1^n - \frac{(z_N - z_{i-1})}{\Delta z} \Theta_i^n + \frac{(z_N - z_i)}{\Delta z_i} \Theta_{i+1}^n \right) \quad [5.112b]$$

Anche questo schema *può essere impiegato solo nelle situazioni convettive* e l'unico problema che presenta è la necessità dell'altezza del *PBL* che può essere determinata diagnosticamente dal profilo della temperatura potenziale media, come vedremo in seguito. Questo schema di chiusura, oltre ad essere impiegato con molto successo in modelli di *PBL* (Alapaty e al., 1997), risulta fondamentale anche in molti modelli che trattano la dispersione degli inquinanti in aria ed i relativi processi di trasformazione chimica e fotochimica. Per concludere va ricordato anche uno schema *ACM* modificato da Mihailovic et al. (2008) e denominato VUR. In sostanza, tale schema è ancora lo schema ACM in cui, però, i coefficienti di rimescolamento M_u diminuiscono con la quota e dipendono dall'energia cinetica turbolenta. Per i dettagli si rimanda al riferimento citato.

5.6.3.2 La formulazione attuale

Lo svantaggio della chiusura *ACM* di Pleim e Chang sta nel fatto che una delle ipotesi su cui si fonda è la totale assenza di diffusione locale verso l'alto. Gli effetti negativi di una tale ipotesi sono risultati visibili quando la risoluzione verticale dei modelli è aumentata. Per eliminare questo potenziale problema Pleim (2007a, b) ha proposto una correzione a tale schema, noto come *ACM2* in cui viene aggiunta una componente locale di diffusione verticale alla originaria componente non locale. Ciò è illustrato nella **Fig.5.18**. Lo schema di chiusura viene qui presentato nella sua forma più generale. Consideriamo sempre una colonna d'aria a base unitaria, suddivisa in celle di altezza non necessariamente uguale. Le grandezze scalari medie di cui consideriamo le equazioni prognostiche (temperatura potenziale, vapor d'acqua, forme condensate dell'acqua, specie chimiche e componenti orizzontali del moto) sono definite al centro di ogni cella e vengono indicate con l'indice *i*. L'altezza di ogni cella, in generale variabile da cella a cella, è Δz_i. I flussi verticali, le velocità verticali e le diffusività turbolente sono localizzati all'interfaccia tra le celle e quindi indicate con un indice frazionario: per esempio il generico flusso $F_{i+1/2}$ è il flusso che ha luogo alla sommità della Cella *i*. In Analisi Numerica, una griglia di questo tipo prende il nome di griglia *staggered*. Se introduciamo come fatto in precedenza i coefficienti di rimescolamento convettivo verso l'alto M_u (che rappresentano il tasso di materia che parte dalla Cella 1 e giunge ad ogni cella superiore) e verso il basso M_{di} (che rappresentano il tasso di materia che lascia la generica Cella

i), l'equazione prognostica per uno scalare *C* alla quota della Cella *i*, trascurando la componente locale di diffusione, è data da:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = M_u C_1 - Md_i C_i + Md_{i+1} C_{i+1} \frac{\Delta z_{i+1}}{\Delta z_i} \qquad [5.113a]$$

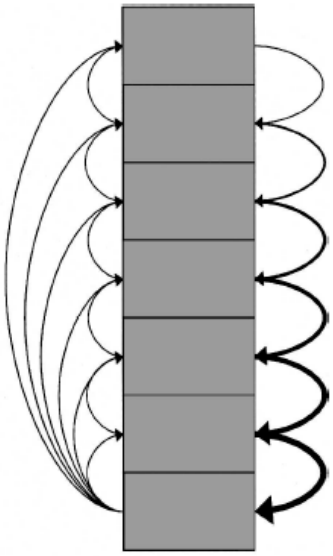


Fig. 5.18: vortice turbolento nel modello ACM2 di Pleim

Come abbiamo visto in precedenza:

$$M_{di} = M_u \cdot \frac{h - z_{i-1/2}}{\Delta z_i} \qquad [5.113b]$$

dove con *h* abbiamo indicato l'altezza del *PBL*. Così, il flusso della grandezza *C* ad ogni interfaccia tra cella e cella (*i* +1/2) è data da:

$$F_{i+1/2} = M_u \cdot \left(h - z_{i+1/2}\right) \cdot C_1 - Md_{i+1} \Delta z_{i+1} C_{i+1} \qquad [5.114a]$$

cioè:

$$F_{i+1/2} = M_u \cdot \left(h - z_{i+1/2}\right) \cdot (C_1 - C_i) \qquad [5.114b]$$

Così, nel caso in cui la grandezza *C* sia la temperatura potenziale virtuale, il coefficiente di rimescolamento M_u può essere definito in termini di flusso di calore cinematico alla sommità della cella inferiore $B_{1.5}$ come:

$$M_u = \frac{B_{1.5}}{\left(h - z_{i+1/2}\right) \cdot (\Theta_1 - \Theta_2)} \cdot \qquad [5.114c]$$

Assumiamo che la sommità della Cella 1 sia sufficientemente vicina al suolo (entro il *SL*) da far sì che i flussi siano dominati dai vortici a piccola scala. In questo caso la Teoria della Similarità nel *SL* (Cap. 8) ci garantisce che la diffusività turbolenta di calore K_h ad una quota *z* è data da:

$$K_h(z) = k \frac{u_*}{\Phi_h(z/L)} \cdot z \cdot (1 - z/h)^2 \qquad [5.115a]$$

dove Φ_h è la Funzione Universale di Similarità per il trasferimento di calore (Cap. 8). Questa considerazione porta, quindi, a dire che:

$$B_{1.5} = K_h\left(z_{1+1/2}\right) \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Delta z_1} \qquad [5.115b]$$

cioè che:

$$M_u = \frac{K_h\left(z_{1+1/2}\right)}{\Delta z_1 \left(h - z_{1+1/2}\right)} \qquad [5.115c]$$

Se ora consentiamo alla diffusione locale di agire assieme alla componente di diffusione non locale, la relazione (5.113a) si trasforma nel modo seguente:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = M2uC_1 - M2d_iC_i + M2d_{i+1}C_{i+1}\frac{\Delta z_{i+1}}{\Delta z_i} + \frac{1}{\Delta z_i}\left[\frac{K_{i+1/2}(C_{i+1}-C_i)}{\Delta z_i} + \frac{K_{i-1/2}(C_i-C_{i-1})}{\Delta z_i}\right] \quad [5.116a]$$

in cui ora appaiono i coefficienti di rimescolamento *M2u* e *M2d*$_i$. Si nota immediatamente come la relazione precedente esprima il fatto che il tasso di variazione dello scalare *C* per diffusione turbolenta verticale sia rappresentato dalla somma di una componente non locale di diffusione e da una componente locale. L'ipotesi chiave dello schema di chiusura *ACM2* è che:

$$M2u = f_{cov}M_u \cdot K \quad [5.116b]$$

e che la diffusività turbolenta *K* è data da:

$$K(z) = K_z(z)(1 - f_{cov}) \quad [5.116c]$$

In sostanza si ipotizza che la diffusione turbolenta verticale di uno scalare *C* sia una combinazione lineare di una diffusione locale e di una diffusione non locale.

La diffusione locale è caratterizzata dal coefficiente di diffusività K_z che, per le componenti orizzontali del moto, è data da:

$$K_z = K_m(z) = k\frac{u_*}{\Phi_m(z_s/L)}z(1 - z/h)^2 \quad [5.116d]$$

e per gli altri scalari da:

$$K_z = K_h(z) = k\frac{u_*}{\Phi_h(z_s/L)}z(1 - z/h)^2 \quad [5.116e]$$

In queste relazioni $z_s = \min(z, 0.1h)$ e le espressioni per le funzioni di Similarità Φ_m e Φ_h verranno presentate al Cap. 8.

Il parametro chiave di tutta la chiusura è f_{conv} che determina il peso tra la componente non locale e la componente locale. Tale coefficiente non assumerà un valore fisso, ma varierà con il livello di convettività del *PBL* e con l'estensione verticale dell'atmosfera rimescolata *h*. Pleim (2007a), partendo dai risultati ottenuti da Holtslag e Moeng (1991), è giunto alla conclusione che:

$$f_{conv} = \left[1 + \frac{k^{-2/3}}{0.72}\left(-\frac{h}{L}\right)^{-1/3}\right]^{-1} \quad [5.117]$$

Anche lo schema di chiusura *ACM2* ha bisogno di conoscere l'altezza *h* del *PBL*. Nel seguito tratteremo questo problema nel dettaglio. Tuttavia, dato che stiamo presentando uno schema di chiusura che verosimilmente opererà all'interno di un modello meteorologico numerico, seguendo Pleim (2007a) è possibile definire una metodologia diagnostica per la determinazione di questa grandezza dal profilo verticale di temperatura potenziale. In primo luogo, si determina l'estensione massima dello Strato Rimescolato (*ML*) z_{mix} che è la quota per cui la relativa temperatura potenziale è data da (Nielsen-Gammon et al. 2010):

$$\Theta(z_{mix}) = \Theta_1 + 8.5\frac{\overline{w\theta}\big|_{z=0}}{(u_*^3 + 0.6w_*^3)^{1/3}} \quad [5.118a]$$

Se poi si definisce il Numero di Richardson Bulk come:

$$Ri_b = \frac{g[\Theta(h) - \Theta(z_{mix})](h - z_{mix})}{\overline{\Theta}\big(U(h) - U(z_{mix})\big)^2} \quad [5.118b]$$

la sommità *h* del *PBL* è quella quota, sopra z_{mix}, per cui Ri_b raggiunge il valore critico 0.25.

Anche lo schema *ACM2* può operare, come quelli visti in precedenza, solo all'interno del *PBL*. Nelle situazioni stabili e al di sopra del *PBL* è necessario utilizzare schemi diversi, di natura

locale. Come esempio, Pleim (2007b) ha adottato nelle situazioni stabili e sopra il *PBL* una chiusura locale del primo ordine con coefficiente di diffusività turbolenta pari a:

$$K_z = K_{z0} + \left|\frac{\partial U}{\partial z}\right| \left(1 - \frac{Ri}{Ri_c}\right)^2 l^2 \quad per\ Ri > 0$$
$$K_z = K_{z0} + \left|\frac{\partial U}{\partial z}\right| (1 - 25Ri)^2 l^2 \quad per\ Ri \leq 0 \qquad [5.119a]$$

in cui è presente la lunghezza di scala *l* data da:

$$l = \left(\frac{kz\lambda}{kz + \lambda}\right)^2 \qquad [5.119b]$$

con $\lambda = 80$ m e $K_{z0} = 0.05\ m^2 s^{-1}$. Altri dettagli modellistici possono essere trovati in Pleim (2007b) e in Nielsen-Gammon et al (2010), assieme ai risultati ottenuti impiegando questo schema di chiusura.

5.6.4 LO SCHEMA DI STULL

Lo schema proposto da Roland Stull è sicuramente lo schema di chiusura non locale più generale e completo, applicabile sia alle situazioni convettive che a quelle stabili entro o fuori il *PBL*. I principali riferimenti di Letteratura sull'argomento sono: Stull (1984, 1986, 1987, 1988, 1990a e b, 1991, 1993), Stull e Hasegawa (1984), Stull e Driedonks (1987), Raymond e Stull (1990) e Alapaty e al. (1997a). La teoria su cui si basa è esattamente quella presentata in precedenza e le relazioni (5.97*a*, *b*) ne sono l'espressione base. Lo schema, a priori, non è monodimensionale come i precedenti, ma può essere generalizzato anche per tener conto della dispersione turbolenta in orizzontale. Anche se ciò è ben poco documentato in Letteratura, alla fine della discussione se ne darà cenno per poterne evidenziare gli aspetti implementativi. Comunque, vista l'importanza fondamentale che riveste la dispersione turbolenta verticale e date le peculiarità dei metodi numerici che potranno essere utilizzati per la risoluzione delle equazioni fluidodinamiche, la maggior parte dell'esposizione si riferirà alla sola diffusione turbolenta verticale. Quindi il dominio di indagine è esattamente la colonna d'aria a base unitaria, suddivisa in celle di uguale altezza Δz rappresentata nella **Fig. 5.14**.

5.6.5.1 La Transilient Matrix

Le basi teoriche descritte in precedenza si possono riassumere completamente nelle equazioni (5.97*a*, *b*) e da esse emerge la necessità di individuare i valori degli elementi della *Transilient matrix* **C** le cui caratteristiche sono riassunte graficamente in **Fig. 5.19** e le proprietà che i suoi elementi devono soddisfare sono ancora una volta le relazioni (5.97*a* e *b*) che rappresentano la conservazione della massa e dello stato. Oltre a ciò, nello schema di Stull si introduce un ulteriore caratteristica che devono rispettare i vari elementi della matrice. Lo schema prevede *un'ipotesi di scambio* (*exchange hypothesis*) secondo cui $c_{ij} = c_{ji}$, cioè *la matrice* **C** *è simmetrica*. Dal punto di vista fisico ciò sta a significare che se una certa porzione di aria proveniente dalla Cella *j* si rimescola nella Cella *i*, allora un'uguale porzione di aria partirà da *i* per rimescolarsi in *j*. Questa ipotesi, ovviamente, non muta le caratteristiche intrinseche alla *Transilient Matrix*, per esempio resta valido il fatto che i suoi autovalori in modulo non possono mai superare l'unità. Anche se sia lo schema di Blackadar che quello di Pleim e Chang possono essere inquadrati a buon diritto nella teoria generale delle chiusure non locali discrete del primo ordine, si nota immediatamente come entrambe abbiano stabilito a priori la forma della *Transilient Matrix*. Nello schema di Stull, invece, ciò non avviene ed i vari coefficienti verranno ricavati tenendo conto dello stato del *PBL* che si sta trattando.

La *Transilient Matrix* non può essere misurata direttamente con la strumentazione meteorologica attualmente disponibile; tuttavia, l'impiego dei modelli *LES* ne ha consentito un calcolo realistico che è servito da confronto per verificare la bontà della ricostruzione operata dalla

parametrizzazione proposta in questo schema di chiusura. Nella **Fig. 5.20** ne è presentato un esempio desunto da una simulazione *LES* confrontata con un disegno che evidenzia il significato dei vari termini che la compongono. Come si può notare, la matrice individuata è asimmetrica ed evidenzia il fatto che le parti di aria nella parte media ed alta del *PBL* si muovono lentamente verso il basso, mentre una quantità inferiore di aria si muove molto più rapidamente verso l'alto, partendo dalla superficie, cosa consistente con le misure di velocità verticale dell'aria in condizioni di forte convettività ed anche col modello di Pleim e Chang, presentato al paragrafo precedente. Quindi il ritenere completamente simmetrica la *Transilient Matrix* come fa il metodo di Stull è una semplificazione della realtà, semplificazione normalmente non eccessiva. A fronte di questo aspetto non completamente soddisfacente, Stull ha individuato metodologie oggettivamente fisiche per l'individuazione dei vari elementi della matrice, basate sul livello di turbolenza presente nel *PBL*, sia esso convettivo, che adiabatico o stabile.

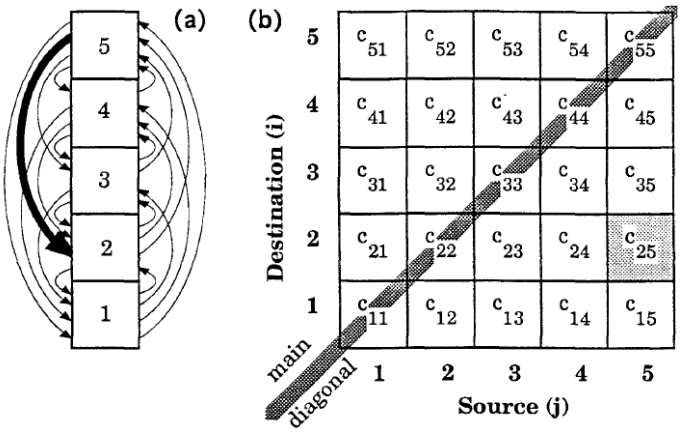


Fig. 5.19: schematizzazione del modello di chiusura non locale di Stull (1993)

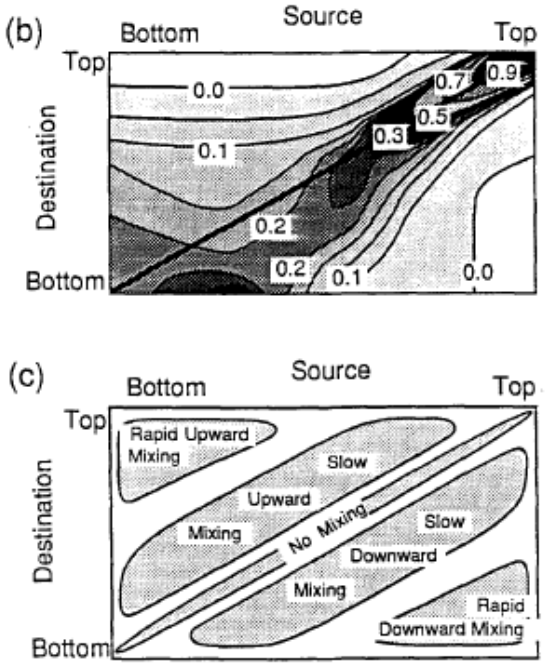


Fig.5.20: struttura della Transilient Matrix (da Stull, 1993)

5.6.5.2 La determinazione dei coefficienti della Transilient Matrix

Mentre negli schemi di Blackadar e Pleim e Chang le ipotesi fatte sul meccanismo di generazione dei vortici determinavano direttamente la forma della *Transilient Matrix* (che risultava essere una matrice fortemente sparsa) e quindi individuavano in maniera univoca i suoi coefficienti, lo schema di Stull, non facendo alcun tipo di ipotesi a priori sul tipo di rimescolamento in atto nell'atmosfera, richiede inevitabilmente un modello specifico per la determinazione dei coefficienti della *Transilient Matrix*. Tra i vari modelli possibili, si è scelto di utilizzare concetti già ampiamente utilizzati in fluidodinamica, adattati però al contesto non locale tipico di questo schema. Di fatto due sono i principali modelli proposti ed utilizzati.

Metodo dell'energia cinetica turbolenta.

Il punto di partenza sta nell'individuare un opportuno *potenziale* che descriva gli scambi turbolenti che hanno luogo in atmosfera. A tale scopo sia A_{ij} il potenziale responsabile del rimescolamento dell'aria tra le Celle *i* e *j* che si assume responsabile del rimescolamento che ne deriva. Per poter utilizzare tale parametrizzazione nella determinazione degli elementi della *Transilient Matrix*, si definisca la *norma di riga* RN_i:

$$RN_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \qquad [5.120a]$$

e la *norma di matrice*:

$$\|A\|_\infty = \max_i(RN_i) \qquad [5.120b]$$

Dal rapporto tra un potenziale e la norma di matrice, si può costruire un *Transilient Coefficient* che soddisfa i vincoli di conservazione della massa. Gli elementi non diagonali sono definiti come:

$$c_{ij} = \frac{A_{ij}}{\|A\|_\infty} \qquad [5.121a]$$

e, dato che ciascuna riga della matrice deve dare come somma 1 per la conservazione della massa, si ha che gli elementi diagonali possono essere ottenuti con la relazione:

$$c_{ii} = 1 - \sum_{i=1, j\neq i}^{N} c_{ij} \qquad [5.121b]$$

Il potenziale di mescolamento, e quindi anche la *Transilient Matrix*, sono funzioni del tempo, cosa che richiede il loro ricalcolo ad ogni *time step* per rispondere alle perturbazioni ricevute dal sistema.

Stull e Driedonks (1987) hanno usato un'analogia non locale dell'equazione dell'energia cinetica turbolenta per parametrizzare il potenziale di mescolamento per le coppie di Celle *i* e *j* (non coincidenti). In particolare, il punto di partenza è l'equazione prognostica dell'energia cinetica turbolenta riferita a condizioni di forte omogeneità orizzontale. Se con *U* e *V* si indicano le componenti orizzontali del moto e con Θ il valor medio della temperatura potenziale virtuale, mentre *u*, *v* e θ sono le fluttuazioni turbolente relative, detta *E* l'energia cinetica turbolenta e ε il suo tasso di dissipazione, l'equazione in forma semplificata risulta essere:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\overline{uw}\frac{\partial U}{\partial z} - \overline{vw}\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{g}{\Theta}\overline{w\theta} + \varepsilon \qquad [5.122a]$$

Si supponga, ora, che ogni instabilità statica o dinamica tra due celle qualsiasi *i* e *j* di una colonna d'aria generi energia cinetica della stessa scala $|j\text{-}i|\cdot\Delta z$ destinata a rimuovere tale instabilità, oltre che, in parte, a dissiparsi in calore (cosa descritta dal termine ε). Indicando con E_{ij}, $\overline{uw}_{ij}$, $\overline{vw}_{ij}$, $\overline{w\theta}_{ij}$ e ε_{ij} rispettivamente l'energia cinetica turbolenta, le due componenti cartesiane del flusso di quantità di moto, il flusso cinematico di calore sensibile ed il tasso di dissipazione di energia cinetica turbolenta tutti relativi alla scala $|j\text{-}i|\cdot\Delta z$, la relazione (5.122a) può essere riscritta in

termini discreti nel modo seguente:

$$\frac{\Delta E_{ij}}{E_{ij}} = \left[-\frac{\overline{uw}_{ij}}{E_{ij}} \cdot \left(\frac{\Delta U}{\Delta z}\right) - \frac{\overline{vw}_{ij}}{E_{ij}} \cdot \left(\frac{\Delta V}{\Delta z}\right) + \frac{g}{\Theta}\frac{\overline{w\theta}_{ij}}{E_{ij}} - \frac{\varepsilon_{ij}}{E_{ij}} \right] \cdot \Delta t \qquad [5.122b]$$

Per poter impiegare in qualche modo questa equazione è necessario parametrizzare i vari flussi non locali in essa presenti. A tale scopo si pone:

$$\begin{aligned} -\frac{\overline{uw}_{ij}}{E_{ij}} &= T_0 \left(\frac{\Delta U}{\Delta z}\right)_{ij} = T_0 \frac{U_i - U_j}{z_i - z_j} \\ -\frac{\overline{vw}_{ij}}{E_{ij}} &= T_0 \left(\frac{\Delta V}{\Delta z}\right)_{ij} = T_0 \frac{V_i - V_j}{z_i - z_j} \\ -\frac{\overline{w\theta}_{ij}}{E_{ij}} &= \frac{T_0}{R_c}\left(\frac{\Delta \Theta}{\Delta z}\right)_{ij} = T_0 \frac{\Theta_i - \Theta_j}{z_i - z_j} \\ +\frac{\varepsilon_{ij}}{E_{ij}} &= \frac{D}{T_0} \end{aligned} \qquad [5.123]$$

dove T_0 è un tempo caratteristico di scala, R_c è un parametro adimensionale che mette in relazione la *buoyancy* con lo *shear* (l'equivalente non locale del Numero di Richardson critico) e D è un fattore adimensionale di dissipazione. I valori numerici attribuiti a questi parametri sono rispettivamente 1000 s, 0.21 e 1. Come si nota, questa parametrizzazione è del primo ordine.

Dato che il termine sinistro dell'equazione (5.122b) è una misura dello scambio di energia cinetica associato al rimescolamento turbolento sulla scala $|i\text{-}j|\cdot\Delta z$, la parte destra della relazione, a questo punto, può essere interpretata come il meccanismo che guida questo cambio. Per esempio, se, in assenza di forze esterne un flusso turbolento di un fluido diviene non turbolento in un intervallo di tempo Δt perché lo *shear* e le instabilità vengono ridotte dal processo di rimescolamento stesso, allora la parte destra dell'equazione precedente è una misura dell'abilità delle instabilità a causare rimescolamento prima che cessi la turbolenza. Questo concetto può essere esteso fino a definire il membro di destra dell'equazione un potenziale di rimescolamento. In effetti, introducendo le parametrizzazioni indicate, si ha che:

$$Y_{ij} = \frac{\Delta t}{(\Delta z)_{ij}^2}\left[(\Delta U)_{ij}^2 + (\Delta V)_{ij}^2 - \frac{g \cdot (\Delta z)_{ij}\Delta\Theta_{ij}}{\Theta \cdot R_c}\right] - \frac{D \cdot \Delta t}{T_0} \qquad [5.124a]$$

Pur rimandando ai riferimenti originali per i particolari, va sottolineato che, dato che l'ipotesi più forte fatta nello schema di Stull è l'ipotesi di scambio, cioè il fatto che la *Transilient Matrix* sia simmetrica, inevitabilmente dovrà essere che $Y_{ij} = Y_{ji}$. Oltre a ciò, considerazioni teoriche e sperimentali richiedono che gli elementi Y_{ij} della matrice **Y** crescano monotonicamente dai bordi della matrice verso la sua diagonale principale e che gli elementi Y_{ii} sulla diagonale principale abbiano il valore maggiore di tutta la riga. Essi, tra l'altro, rappresentano il rimescolamento interno che ha luogo entro ciascuna cella e che, in qualche modo, trova una sua parametrizzazione nella definizione di un potenziale di riferimento Y_{ref} il cui valore è risultato dell'ordine di 1000. Pertanto, i coefficienti Y_{ii} saranno dati dalla relazione:

$$Y_{ij} = max\left[Y_{i,i-1}, Y_{i,i+1}\right] \qquad [5.124b]$$

Con le (5.124), noti i profili verticali delle componenti medio orizzontali del moto e della temperatura potenziale media, si ottengono tutti gli elementi della matrice potenziale **Y**. Dato che $Y_{ij} = A_{ij}$, mediante le (5.120) si ottengono anche i coefficienti della *Transilient Matrix*. Se il potenziale di mescolamento è nullo o negativo, allora c_{ij} è posto pari a zero indicando assenza di turbolenza.

Metodo del Numero di Richardson non locale

L'analogo non locale del Numero di Richardson può essere definito come:

$$r_{ij} = \frac{g \cdot (\Delta z)_{ij} \Delta\Theta_{ij}}{\Delta U_{ij}^2 + \Delta V_{ij}^2} \qquad [5.125a]$$

dove $r_{ij} = r_{ji}$. Se $r_{ij} > R_c$ allora non ci sono le condizioni per la presenza della turbolenza e quindi $Y_{ij} = Y_{ji} = A_{ij}$ è posto a zero. In caso contrario, si assume che la turbolenza agisca rimescolando la colonna d'aria finché si è raggiunto un Numero di Richardson R_T (stimato in 2). Da tutto ciò risulta, alla fine, che per ogni $i \neq j$:

$$A_{ij} = A_{ji} = Y_{ij} = w_{ij} \cdot \left[1 - r_{ij}/R_T\right] \qquad [5.125b]$$

dove w_{ij} è una funzione peso definita come:

$$w_{ij} = w_{ji} = U_0 \cdot \frac{\Delta t}{|i - j| \cdot \Delta z} \qquad [5.125c]$$

dove U_0 è una velocità di scala pari a 0.5 ms^{-1}. Sia w_{ij} che A_{ij} vengono troncati in modo tale che i loro valori restino nell'intervallo 0÷1. Noti gli A_{ij}, gli elementi della *Transilient Matrix* non diagonali vengono individuati dalla relazione:

$$c_{ij} = c = \frac{A}{N_d} \qquad [5.125d]$$

dove con N_d si è indicato il numero di celle della colonna che risultano turbolente, mentre gli elementi diagonali vengono ancora una volta calcolati con la (5.120b).

Il metodo del Numero di Richardson è equivalente al metodo dell'energia cinetica? Come ci si poteva aspettare la risposta è negativa, anche se ciò si riflette principalmente nell'estensione del *SL* che è maggiore (a volte troppo) se si usa il metodo dell'energia cinetica. L'analisi condotta da Zhang e Stull (1992) ha evidenziato come il Metodo del Numero di Richardson non presenti queste controindicazioni.

5.6.5.3 Implementazione del modello di Stull

Una volta noti gli elementi della *Transilient Matrix*, risulta possibile l'applicazione pratica dello schema di chiusura e l'integrazione delle equazioni prognostiche per le variabili medie. La metodologia proposta è sostanzialmente quella ben nota in Analisi Numerica dello *splitting in time* (o *fractional time step*) che si compone di una serie di azioni elementari, ognuna delle quali sfrutta i risultati ottenuti dalla precedente. Una volta noti i profili delle variabili medie al tempo *t*, per calcolare gli stessi a $t+\Delta t$ sono necessari i passi operativi seguenti (Raymond e Stull, 1990) che verranno descritti in un generale contesto tridimensionale.

Passo 1: introduzione delle forzanti esterne e interne

Per prima cosa, vengono realizzati i convenzionali calcoli che non implicano la turbolenza, come il calcolo delle avvezioni orizzontali, l'introduzione dell'effetto della forza di Coriolis, gli eventuali effetti di impoverimento e gli effetti della divergenza radiativa. Gli algoritmi da utilizzarsi a questo scopo possono essere quelli che verranno presentati in un Capitolo successivo. Oltre a ciò, è necessario applicare le forzanti al suolo nelle celle ad esso adiacenti. L'introduzione di queste forzanti, che danno origine alla turbolenza, avviene con un processo di destabilizzazione dei profili nelle celle al suolo. Si ignori inizialmente l'interazione orizzontale tra le varie celle adiacenti al suolo e quindi si ritorni a considerare una colonna d'aria verticale e la sua cella inferiore. L'introduzione in questa cella delle forzanti al suolo genererà una destabilizzazione dei profili delle grandezze medie nella colonna, cosa che determinerà una perturbazione nell'energia cinetica turbolenta e quindi anche nel potenziale di rimescolamento. A tale alterazione il sistema reagirà cercando un nuovo punto di equilibrio. Da questo ritorno ad una situazione di stabilità si dedurrà quantitativamente la *Transilient Matrix*. Di fatto si ipotizza che possa essere applicato il *Principio di Le Chatelier* secondo cui, se si

applica una perturbazione ad un sistema in equilibrio determinandone un cambiamento, si otterrà un'evoluzione dello stesso che tenderà ad annullare l'effetto della perturbazione. Si supponga che ad un certo istante arrivi alla superficie terrestre del calore di provenienza solare che riscaldi il suolo e determini un allontanamento dallo stato di equilibrio raggiunto in precedenza dal sistema *PBL*. In risposta a tale instabilità statica si svilupperà una circolazione turbolenta che muoverà dell'aria calda verso l'alto. Una volta che tale aria calda sarà salita agli strati alti del *PBL*, il sistema raggiungerà l'equilibrio e la circolazione turbolenta cesserà. Una simile evoluzione capita anche quando lo *shear* del vento cresce al punto tale da far cadere il numero di Richardson al di sotto del valore critico, determinando una instabilità dinamica del flusso. Si svilupperà in risposta una turbolenza tale da rimescolare gli strati di aria, in modo da ristabilire la stabilità dinamica senza turbolenza. Nel *PBL* non ci sono queste perturbazioni a delta di Dirac, ma continue iniezioni di energia e ciò comporta che il sistema *PBL* sia continuamente chiamato a rispondere a queste forzanti senza comunque poter ritornare immediatamente ad uno stato di equilibrio. In pratica in ogni *time step* ha origine un processo destabilizzante in cui agiscono le forzanti attive, costituite sia dagli apporti dovuti ai flussi turbolenti sia dalle altre forzanti di contorno (forzanti dinamiche) rappresentate, nelle equazioni fluidodinamiche, da tutti i termini esclusi quelli di diffusione turbolenta. Il risultato di tale processo è l'alterazione dei profili verticali della temperatura e della velocità del vento. Se tali variazioni sono sufficienti, si verrà a generare della turbolenza come risposta a tale perturbazione. Subito dopo ha luogo il secondo processo che comporta un rimescolamento verticale dell'atmosfera e quindi una parziale soppressione della turbolenza che riduce gli *shear* e i gradienti di temperatura. Il processo di destabilizzazione, che deriva dall'immissione nel sistema dei vari flussi turbolenti superficiali, determina un'alterazione delle proprietà medie della cella inferiore della colonna d'aria. Siano:

- U, V, Θ e Q rispettivamente le due componenti medie della velocità orizzontale del vento, la temperatura potenziale e l'umidità media della cella inferiore;
- $\overline{uw}, \overline{vw}, \overline{w\theta}, \overline{wq}$ i flussi turbolenti che si instaurano al suolo tra t e $t+\Delta t$;
- Δt il *time step* e Δz la dimensione verticale di ogni cella

Il valore assunto dalle variabili meteorologiche medie della cella inferiore al termine del processo di destabilizzazione sarà dato dalle semplici relazioni seguenti (Stull e Driedonks, 1987):

$$U_d = \frac{\Delta t}{\Delta z} \cdot \overline{uw} + U_1 \qquad V_d = \frac{\Delta t}{\Delta z} \cdot \overline{vw} + V_1$$
$$\Theta_d = \frac{\Delta t}{\Delta z} \cdot \overline{w\theta} + \Theta_1 \qquad Q_d = \frac{\Delta t}{\Delta z} \cdot \overline{wq} + Q_1 \qquad [5.126]$$

dove U_1, V_1, Θ_1 e Q_1 sono i valori assunti dalle variabili medie nella cella 1 dopo l'introduzione delle forzanti non turbolente mentre le stesse variabili con pedice d sono i valori assunti dopo la destabilizzazione. Ciò viene ripetuto per ogni singola colonna d'aria e alla fine del primo passo operativo si dispone dei campi tridimensionali di tutte le variabili medie dopo aver loro applicato tutte le forzanti interne ed esterne.

Passo 2: calcolo degli elementi della Transilient Matrix

Considerando separatamente ogni singola colonna d'aria, viene calcolata, sulla base dei profili medi destabilizzati ottenuti al passo precedente, la *Transilient Matrix*. I dettagli numerici per fare ciò sono riportati in Stull (1987) dove si possono trovare anche le *routine* base per realizzare correttamente il calcolo che dovranno essere corrette secondo le indicazioni riportate in Stull (1993). Si è quindi pronti per calcolare il

rimescolamento verticale in tutto il dominio di calcolo.

Passo 3: **calcolo del rimescolamento verticale**

Sempre operando su ogni singola colonna, l'applicazione della (5.97) consente di ottenere il nuovo profilo verticale delle variabili medie che tengono conto non solo delle forzanti interne e esterne, ma anche del rimescolamento verticale. L'insieme di tutti questi profili determina la conoscenza degli interi campi medi di interesse. A differenza dei metodi di Blackadar e Pleim e Chang, visto che la *Transilient Matrix* non è una matrice sparsa, è conveniente adottare un metodo esplicito di integrazione temporale. Dato che tutti gli autovalori della *Transilient Matrix* non possono in modulo superare l'unità, il metodo è intrinsecamente stabile e sufficientemente preciso. Sperimentazioni numeriche hanno dimostrato che è opportuno che tra Δz e Δt sussista la relazione seguente: $\Delta t < 0.1\ \Delta z$.

Passo 4: **calcolo del rimescolamento orizzontale**

Di ciò si parlerà al punto successivo. Va comunque detto che sicuramente questo è il passo meno influente sui risultati finali.

5.6.5.4 Il rimescolamento orizzontale

Calcolata la *Transilient Matrix* per ogni colonna verticale che compone il dominio di calcolo, si avrà che le varie celle del dominio potranno essere classificate in *turbolente* o *non turbolente*. Di fatto, una cella *j* di una colonna d'aria è turbolenta se l'elemento c_{jj} della relativa *Transilient Matrix* è diverso da zero. Nella **Fig.5.21** è presentata una semplice rappresentazione bidimensionale in cui le celle contrassegnate dal simbolo X sono celle in cui è presente la turbolenza. Se una cella non possiede turbolenza, ovviamente non potrà scambiarla con le celle adiacenti. Se ci si pone ad una certa quota, due celle adiacenti appartenenti a due diverse colonne potranno generare un rimescolamento turbolento tra loro se entrambe possiedono turbolenza. Sempre considerando la **Fig.5.21**, le celle che oltre ad essere contrassegnate da X sono grigie sono sede di un rimescolamento orizzontale reciproco.

		X	X		X
X		X		X	X
X	X	X		X	
	X	X	X	X	X
	X	X	X		X

Fig.5.21: visione schematica bidimensionale della presenza di celle turbolente (contrassegnate da una X). Le celle in grigio sono anche sede del rimescolamento orizzontale (*da Raymond e Stull, 1990*)

La procedura per realizzarlo consiste nell'esaminare una colonna la volta. Per comodità, indichiamo la colonna esaminata con l'indice $i = 0$ e ciascuna delle quattro colonne adiacenti con gli indici 1, 2, 3, 5. Esaminiamo ora una quota la volta. Se la cella della colonna 0 a quella quota e la cella adiacente della colonna *i* non è turbolenta allora non sarà possibile alcun rimescolamento orizzontale tra le due celle e attribuiremo ad un potenziale di rimescolamento orizzontale il valore $P_{01} = 0$. Se invece entrambe sono sede di turbolenza, allora il potenziale di rimescolamento orizzontale sarà pari a:

$$P_{01} = \frac{h_{0i}\Delta t}{\tau \cdot \Delta x} \qquad [5.127a]$$

dove τ è un tempo di scala proporzionale al tempo di evoluzione tipico delle strutture turbolente. Si è visto che un valore opportuno è pari a 100 s. Con Δx, poi, si è indicata la dimensione orizzontale della cella di calcolo e con h_{oi} una lunghezza di scala proporzionale all'estensione orizzontale tipica della struttura coerente che ha originato il rimescolamento verticale nella colonna 0 a quella quota. In pratica tale parametro risulta pari a Δz se sopra e sotto la quota in esame le celle adiacenti non sono entrambe sede di turbolenza o $M \cdot \Delta z$ se ci sono complessivamente M-1 delle adiacenti, sopra e sotto la quota considerata, entrambe sede di turbolenza. Dopo aver individuato i valori P_{0i} per ogni cella i della colonna d'aria verticale, detto S il valor medio di una generica variabile di interesse (per esempio una delle due componenti orizzontali del moto) prima di realizzare il rimescolamento orizzontale e S^h il suo valore dopo, si ha che:

$$S_i^h = \frac{\sum_{i=1}^{4} P_{0i} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^{4} P_{0i}} \qquad [5.127b]$$

È opportuno memorizzare in un vettore separato questo profilo corretto di S. Dopo aver operato separatamente su ogni colonna d'aria del dominio di calcolo, il campo finale per la variabile media S sarà l'insieme di tutti questi vettori contenenti i profili modificati dal rimescolamento orizzontale ottenuti in precedenza e salvati allo scopo nei vettori temporanei di cui si è detto.

5.7 VARIE FORME DELLA COORDINATA VERTICALE

Tutte le relazioni fluidodinamiche sviluppate fin qui sono state scritte in coordinate cartesiane ortogonali, che è la scelta più semplice e più immediata, anche se non sempre è la più opportuna. Per esempio, quando le equazioni fluidodinamiche dell'atmosfera devono essere applicate ad un dominio sinottico, la curvatura della terra rende difficile l'impiego delle coordinate cartesiane e per questo tutti i modelli a scala sinottica o globale impiegano le coordinate sferiche che sono, in questo caso, la scelta più naturale. Dato che il nostro obiettivo è la descrizione dell'atmosfera a mesoscala, non tratteremo questo argomento, rimandando chi fosse interessato a Dutton (1995) e Holton (2004). Si segnala, poi, che in Pielke (2002) il problema della scrittura delle equazioni fluidodinamiche in termini di coordinate generalizzate è trattato in maniera approfondita (e piuttosto complessa) e lì si rimanda chi fosse interessato ad approfondire l'argomento. Qui si tratterà, invece, un problema decisamente più semplice legato all'impiego delle equazioni fluidodinamiche in un dominio a mesoscala quando in esso sia presente l'orografia. In questo caso l'impiego delle coordinate cartesiane ortogonali risulta piuttosto difficile, visto che le superfici ad eguale quota intersecano l'orografia. Per questo caso sono stati introdotti sistemi di coordinate particolari, dette *coordinate terrain-following* di cui tratteremo qui di seguito e con cui esprimeremo le equazioni fluidodinamiche dell'atmosfera. Un prezioso aiuto alla comprensione sono per esempio i lavori di Kasahara (1974), McNider e Pielke (1984), Davis e al. (1984), Chen (1991), Kondo (1995) e Liu e Carroll (1996), oltre alla documentazione a corredo dei principali modelli meteorologici (Yamada e Bunker 1988, Yamazawa 1989, Hurley 2008).

5.7.1 LE COORDINATE TERRAIN-FOLLOWING

In generale, le coordinate *terrain-following* sono coordinate che *seguono* l'orografia. Dal punto di vista matematico, le normali coordinate x, y e z vengono *sostituite* da un'altra terna di coordinate x_1, y_1, s che presentano le seguenti caratteristiche:

$$x_1 = x \qquad y_1 = y \qquad s = f(x, y, z) \qquad [5.128]$$

dove $f(x,y,z)$ è, a priori, una qualsiasi funzione continua e derivabile. In sostanza, le coordinate orizzontali restano inalterate, mentre si introduce una nuova coordinata verticale e proprio nella definizione di tale coordinata sta la descrizione implicita dell'orografia. Per comprendere ciò,

conviene riferirsi al dominio bidimensionale (*x*, *z*) della **Fig. 5.22** in cui è presente una collina di forma estremamente regolare. In figura sono evidenziate chiaramente le coordinate *x* e *z*.

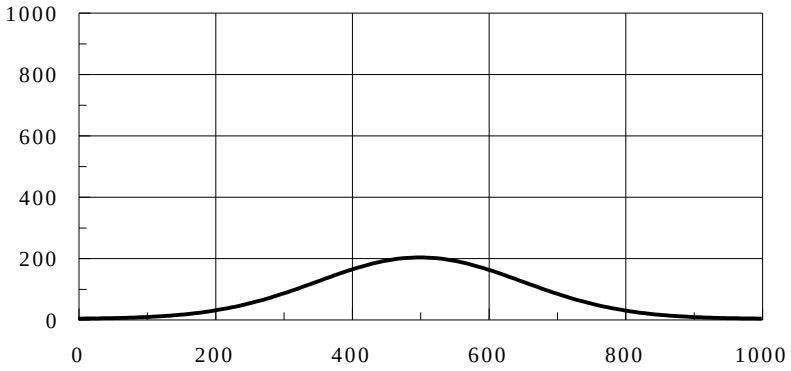


Fig.5.22: orografia in un dominio bidimensionale con coordinate cartesiane

La coordinata *terrain-following* la si potrebbe esprimere con moltissime funzioni differenti; tuttavia, qui considereremo solo tre tipi diversi di funzioni che sono le più diffuse nelle applicazioni pratiche:

$$s = H_t \cdot \frac{z - h(x,y)}{H - h(x,y)} = H_t \cdot \frac{z - h(x,y)}{Z_t(x,,y)} \qquad [5.129a]$$

$$s = \frac{H - z}{H - h(x,y)} = \frac{H - z}{Z_t(x,,y)} \qquad [5.129b]$$

$$s = z - h(x,y) \qquad [5.129c]$$

In esse $h(x,y)$ è la quota orografica riferita ad una quota di riferimento (per esempio il livello del mare), mentre *z* è la normale coordinata cartesiana verticale che indica la quota relativa alla quota di riferimento di un generico punto del dominio di indagine. Oltre a ciò, nelle prime due relazioni sono presenti due lunghezze di scala, H e H_t in generale coincidenti con la sommità del dominio di calcolo. Consideriamo in primo luogo queste relazioni dal punto di vista dimensionale. Che in un sistema di riferimento cartesiano, le coordinate *x*, *y* e *z* siano delle lunghezze è del tutto evidente, come è evidente che le coordinate x_1 e y_1 restano sempre delle lunghezze in coordinate *terrain-following.* Però così non è in generale per la coordinata *verticale s*. Infatti, mentre *s* è una lunghezza quando si considerano le relazioni (5.129a) e (5.129c), è un numero adimensionale quando si considera la relazione (5.129b).

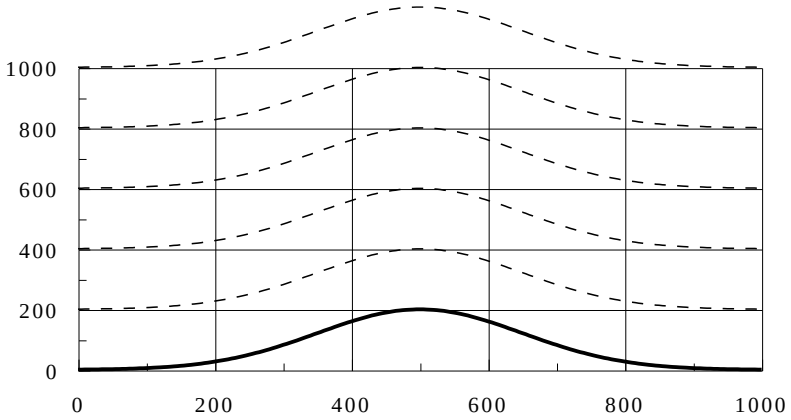


Fig.5.23: coordinate terrain-following secondo la relazione (5.129c)

Con l'adozione della (5.129c) si vede immediatamente come le superfici a *s* costante siano rappresentate da superfici aventi la *stessa* forma dell'orografia sottostante, come indicato

nella **Fig. 5.23.** Questo tipo di coordinata verticale è estremamente semplice da comprendere ed è concettualmente comoda perché rappresenta direttamente la distanza verticale (espressa in metri) che separa il generico punto considerato dal livello del suolo.

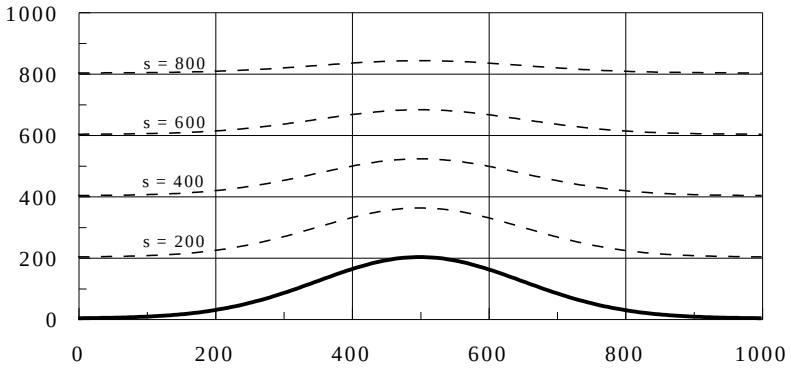


Fig.5.24: coordinate terrain-following secondo la relazione (5.129a)

La definizione (5.129a), invece, è concettualmente più complessa. Con H si è indicata l'estensione verticale del dominio di interesse, cioè la dimensione verticale del parallelepipedo che rappresenta in normali coordinate cartesiane il dominio stesso. Quindi il denominatore, indicato sinteticamente come $Z_t(x,y)$, rappresenta la distanza *cartesiana* tra la superficie del terreno e la sommità del dominio. Il numeratore $z - h(x,y)$, invece, rappresenta la distanza verticale che separa il generico punto del dominio ed il suolo. Il loro rapporto è, evidentemente, un numero adimensionale non superiore a 1. Il prodotto con H_t (che dimensionalmente è una lunghezza) fa sì che s torni ad essere dimensionalmente una lunghezza e non un numero puro. Spesso, numericamente, H_t e H sono uguali, cosa che ne semplifica apparentemente la comprensione. Questa definizione di s comporta che le superfici ad s costante siano diverse tra loro. Quando $s = 0$, la superficie a s-costante corrispondente ricalca fedelmente l'orografia. Quando $s = H_t$, la superficie è il piano corrispondente alla sommità del dominio e quando s assume valori intermedi, la corrispondente superficie assume una forma che all'aumentare di s *perde* il ricordo dell'orografia. Nella **Fig. 5.24** sono state tracciate le curve per s pari a 200, 400, 600 e 800.

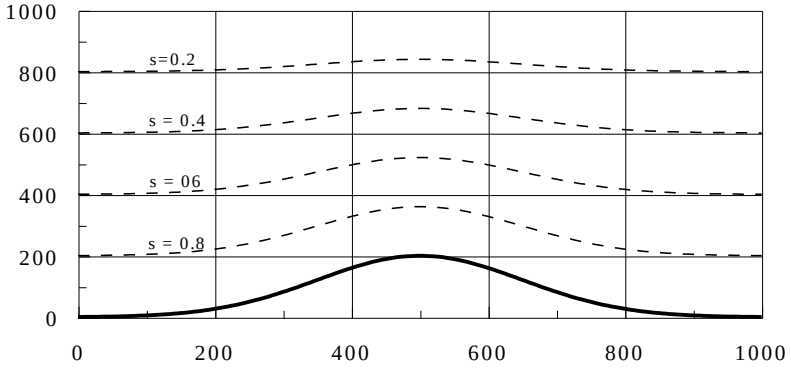


Fig.5.25: coordinate terrain-following secondo la relazione (5.129b)

La definizione (5.129b) è decisamente la più strana. Infatti, si nota come s sia dimensionalmente un numero puro variabile nell'intervallo $0 \div 1$. In particolare, si ha $s = 0$ quando $z = H$ e quindi la corrispondente superficie ad eguale s è un piano coincidente con la sommità del dominio di calcolo. Quando invece $s = 1$, la superficie ad eguale s ricalca fedelmente l'orografia. Mano a mano che s diminuisce numericamente dal valore 1 al valore 0, la superficie ad eguale s perde sempre più il ricordo dell'orografia sottostante fino a degenerare in un piano ad $s = 0$. In **Fig. 5.25** sono state disegnate le superfici ad s pari a 0.8, 0.6, 0.4 e 0.2.

5.7.2 ALCUNE RELAZIONI PRELIMINARI

Prima di evidenziare le trasformazioni che le varie equazioni del modello fluidodinamico dell'atmosfera subiscono con l'introduzione di un sistema di coordinate *terrain-following*, è indispensabile ricordare un importante risultato dell'Analisi Matematica, la *Chain Rule* (vedi anche l'**Appendice 2**). Si consideri una funzione *f*(*x*,*y*,*z*) definita e differenziabile nel normale sistema cartesiano (*x*,*y*,*z*) e si consideri, inoltre, un generico sistema di coordinate *terrain-following* caratterizzato dalla proprietà espresse dalla (5.128). Secondo il Teorema della *Chain Rule* la derivata parziale di *f* rispetto alle coordinate *x* e *y* è data dalle relazioni seguenti:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y_1}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} \qquad [5.130a]$$

e quindi l'operatore derivazione parziale rispetto ad una delle coordinate orizzontali del sistema cartesiano originale può essere trasformato nel sistema *terrain-following* nel modo seguente:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial}{\partial s}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial}{\partial s} \qquad [5.130b]$$

La variabile *s* è una funzione di (*x*,*y*,*z*) e quindi il suo differenziale esatto è:

$$ds=\frac{\partial s}{\partial x}dx+\frac{\partial s}{\partial y}dy+\frac{\partial s}{\partial z}dz \qquad [5.130c]$$

Dividendo entrambi i membri per *dt*, si ottiene nella parte sinistra dell'equazione *la componente verticale del vento w** in coordinate *terrain-following*, mentre nella parte destra compaiono le componenti cartesiane del moto *u*, *v* e *w*. La relazione che ne risulta è:

$$w^*=\frac{\partial s}{\partial x}u+\frac{\partial s}{\partial y}v+\frac{\partial s}{\partial z}w \qquad [5.130d]$$

e quindi, ricordando dall'Analisi che $1/(\partial s/\partial z)=\partial z/\partial s$, si ottiene:

$$w=\frac{\partial z}{\partial s}w^*-\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial x}u+\frac{\partial s}{\partial y}v\right) \qquad [5.130e]$$

È quindi evidente come la componente verticale del moto in coordinate *terrain-following* interiorizzi spontaneamente l'informazione dell'orografia presente nel dominio. A questo punto è possibile ottenere le espressioni di *w* e *w** specifiche di ciascuna delle trasformazioni (5.129):

- se si considera la definizione (5.129a) e si applicano queste relazioni, si ha che:

$$\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial x}\cdot\left(\frac{s-H_t}{Z_t}\right)\qquad\frac{\partial s}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial y}\cdot\left(\frac{s-H_t}{Z_t}\right)\qquad\frac{\partial s}{\partial z}=\frac{H_t}{Z_t} \qquad [5.131a]$$

  e quindi la velocità verticale del moto, in coordinate *terrain-following* ed in coordinate cartesiane è data rispettivamente dalle relazioni:

$$w^*=\left(\frac{s-H_t}{Z_t}\right)\cdot\left(\frac{\partial h}{\partial x}\cdot u+\frac{\partial h}{\partial y}\cdot v\right)+\frac{H_t}{Z_t}w$$
$$w=\frac{Z_t}{H_t}w^*-\left(\frac{s-H_t}{H_t}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial x}u+\frac{\partial h}{\partial y}v\right) \qquad [5.131b]$$

- se, invece, si considera la definizione data dalla (5.129b) si giunge immediatamente alle relazioni seguenti:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \left(\frac{s}{Z_t}\right) \qquad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \left(\frac{s}{Z_t}\right) \qquad \frac{\partial s}{\partial z} = -\frac{1}{Z_t} \tag{5.132a}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} w^* &= \left(\frac{s}{Z_t}\right) \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial y} v\right) - \frac{1}{Z_t} w \\ w &= s\left(\frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial y} v\right) - Z_t w^* \end{aligned} \tag{5.132b}$$

- se, infine, consideriamo la semplice trasformazione data nella (5.129c) otteniamo:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{\partial h}{\partial x} \qquad \frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial y} \qquad \frac{\partial s}{\partial z} = 1 \tag{5.133a}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} w^* &= w - \left(\frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial y} v\right) \\ w &= w^* + \left(\frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial y} v\right) \end{aligned} \tag{5.133b}$$

5.7.3 LA NUOVA FORMA DELLE EQUAZIONI FLUIDODINAMICHE

L'impiego delle coordinate *terrain-following* altera la forma delle varie equazioni che compongono il modello fluidodinamico dell'atmosfera e nei punti che seguono vengono dedotte le loro forme funzionali per le tre definizioni date. Come esempi concreti, si consiglia di analizzare con attenzione i lavori di Yamada (1983), Yamada e Bunker (1988), Yamazawa (1989) e di Hurley (2008) in cui le varie equazioni prognostiche sono state scritte in coordinate *terrain-following*.

5.7.3.1 L'equazione di continuità

Per rendere semplice e chiara la trattazione conviene considerare inizialmente l'equazione di continuità nella forma incomprimibile, secondo cui la divergenza delle componenti medie del moto è nulla. Da quanto visto si ha che per le componenti orizzontali del moto valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} + \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_1} + \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial \bar{v}}{\partial s} \end{aligned} \tag{5.134a}$$

mentre per la componente verticale, dalla relazione (5.130e) risulta che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial s} \cdot w^*\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial z}{\partial s} \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial x}\bar{u} + \frac{\partial s}{\partial y}\bar{v}\right)\right] \\ &= \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial z} - \left[\bar{u}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\right) + \bar{v}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}\right) + \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} + \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\overline{\partial v}}{\partial s}\right] \end{aligned} \tag{5.134b}$$

Introducendo queste relazioni nell'equazione diagnostica di continuità in forma incomprimibile si ottiene l'espressione seguente:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_1} + \frac{\partial w^*}{\partial s} - \left[\bar{u}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\right) + \bar{v}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}\right)\right] \tag{5.134c}$$

A questo punto è necessario specializzare questa relazione per ognuna delle trasformazioni *terrain-following* considerate. Se la trasformazione considerata è la (5.129a), l'equazione di

continuità diventa:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_1} + \frac{\partial w^*}{\partial s} - \frac{1}{Z_t}\left[\bar{u}\frac{\partial h}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial h}{\partial y}\right] = 0 \qquad [5.135a]$$

Se, invece, consideriamo la (5.129b), è facile dimostrare che l'equazione di continuità in forma incomprimibile è ancora espressa dalla relazione precedente. Se, invece, si considera la trasformazione (5.129c), l'equazione di continuità in forma incomprimibile diventa semplicemente:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_1} + \frac{\partial w^*}{\partial s} = 0 \qquad [5.135b]$$

Una volta individuata la forma per l'equazione di continuità in forma incomprimibile, è immediato ottenere la stessa in forma anelastica, che è data da:

$$\frac{\partial \rho_0 \bar{u}}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho_0 \bar{v}}{\partial y_1} + \frac{\partial \rho_0 w^*}{\partial s} - \rho_0\left[\bar{u}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\right) + \bar{v}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}\right)\right] = 0 \qquad [5.136a]$$

ed in forma elastica da:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\rho}\cdot\bar{u}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\rho}\cdot\bar{v}}{\partial y_1} + \frac{\partial \bar{\rho}\cdot w^*}{\partial s} - \bar{\rho}\left[\bar{u}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\right) + \bar{v}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}\right)\right] = 0 \qquad [5.136b]$$

5.7.3.2 Le equazioni di Navier-Stokes

Le equazioni di Navier-Stokes sono composte da alcuni *blocchi* caratteristici: la derivata materiale della componente del moto, il termine di gradiente di pressione, il termine di Coriolis e la divergenza dei flussi turbolenti. Per quanto possibile, tutti questi *blocchi* vengono presi in considerazione uno per uno, tranne il termine di Coriolis che non si modifica. Per la complessità delle relazioni, non verrà presentato il termine di divergenza dei flussi turbolenti per l'equazione della componente verticale del moto. In realtà molto spesso ci si trova ad operare con modelli idrostatici in cui tale equazione non compare. A volte il termine di dispersione turbolenta è semplificato, mantenendo solo la divergenza verticale che può essere facilmente dedotta in coordinate *terrain-following* applicando le relazioni presentate.

La derivata materiale

Tutte le tre equazioni del moto contengono la derivata materiale relativa alla componente media del moto. A rigore, dovremmo parlare di derivata materiale solo quando si considerano variabili istantanee, tuttavia, per comodità, detta *a* una qualsiasi grandezza (per es. le componenti orizzontali medie del moto), definiamo (impropriamente) derivata materiale la relazione seguente:

$$\mathfrak{F}_1 = \frac{\partial a}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial a}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial a}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial a}{\partial z} \qquad [5.137a]$$

in cui abbiamo aggregato, come nella derivata materiale vera, il tasso di variazione di *a* ed il suo *trasporto*. Utilizzando le (5.133b) e la (5.133d) si ha che:

$$\mathfrak{F}_1 = \frac{\partial a}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial a}{\partial x_1} + \bar{v}\frac{\partial a}{\partial y_1} + w^*\frac{\partial a}{\partial s} \qquad [5.137b]$$

Se applicata alle due componenti orizzontali del moto, si ottiene:

$$\mathfrak{F}_{1x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + w^*\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \qquad [5.138a]$$

$$\mathfrak{F}_{1y} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_1} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y_1} + w^*\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \qquad [5.138b]$$

L'applicazione di queste relazioni al caso delle trasformazioni *terrain-following* considerate è del tutto immediata. Per ottenere una relazione analoga anche per la componente verticale del moto

è necessario ricordare la trasformazione (5.130e) della velocità verticale nelle nuove coordinate. Il risultato che si ottiene è piuttosto complesso ed è dato da:

$$\mathfrak{F}_{1z} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial}{\partial y} + w^*\frac{\partial}{\partial s}\right)\cdot\left[\frac{\partial z}{\partial s}w^* - \frac{\partial z}{\partial s}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\bar{u} + \frac{\partial s}{\partial y}\bar{v}\right)\right] \qquad [5.138c]$$

I termini di gradiente di pressione.

Nelle equazioni di Navier Stokes sono presenti i termini di gradiente della pressione media. Se si considera in particolare:

$$\mathfrak{F}_{2x} = \frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \qquad [5.139a]$$

impiegando la (5.130b) diventa:

$$\mathfrak{F}_{2x} = \frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial s}\right) \qquad [5.139b]$$

Analoghi ragionamenti conducono alla relazione seguente:

$$\mathfrak{F}_{2y} = \frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = \frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial s}\right) \qquad [5.139c]$$

Se si considera il termine relativo al gradiente verticale di pressione media, è immediato constatare che vale la relazione:

$$\mathfrak{F}_{2z} = \frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial z}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial s}\right) \qquad [5.139d]$$

Se si considerano, nello specifico, le trasformazioni (5.129):

- per la trasformazione (5.129a) si ottengono le relazioni:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{2x} &= \frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \left(\frac{s - H_t}{Z_t}\right)\frac{\partial h}{\partial x}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial s}\right)\\ \mathfrak{F}_{2x} &= \frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \left(\frac{s - H_t}{Z_t}\right)\frac{\partial h}{\partial y}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial s}\right)\\ \mathfrak{F}_{2z} &= \frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\left(\frac{H_t}{Z_t}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial s}\right)\end{aligned} \qquad [5.140a]$$

- per la trasformazione (5.129b):

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{2x} &= \frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \left(\frac{s}{Z_t}\right)\frac{\partial h}{\partial x}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial s}\right)\\ \mathfrak{F}_{2x} &= \frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \left(\frac{s}{Z_t}\right)\frac{\partial h}{\partial y}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial s}\right)\\ \mathfrak{F}_{2z} &= \frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\left(-\frac{1}{Z_t}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial s}\right)\end{aligned} \qquad [5.140b]$$

- per la trasformazione (5.129c):

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{2x} &= \frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial s}\right)\\ \mathfrak{F}_{2x} &= \frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial y}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial s}\right)\\ \mathfrak{F}_{2z} &= \frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial s}\end{aligned} \qquad [5.140c]$$

La divergenza dei flussi turbolenti

Ognuna delle equazioni di Navier Stokes presenta tre termini che tengono conto della divergenza dei flussi turbolenti. Consideriamo inizialmente l'equazione relativa alla componente *u*. I termini presenti sono:

$$\mathfrak{F}_{3x} = \frac{\partial \overline{uu}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} \qquad [5.141a]$$

Per poter trasformare questi termini, in cui non si è ipotizzato alcun tipo di chiusura, è necessario utilizzare le relazioni (5.130b) per trasformare le derivate rispetto alle coordinate orizzontali e trasformare la derivata rispetto a *z* applicando ancora una volta la *Chain Rule*. Il risultato è:

$$\mathfrak{F}_{3x} = \frac{\partial \overline{uu}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{uv}}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial z}\cdot\frac{\partial \overline{uw}}{\partial s} + \frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial \overline{uu}}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{\partial \overline{uv}}{\partial x} \qquad [5.141b]$$

Relazioni analoghe si possono ottenere anche per i termini presenti nelle altre due equazioni di Navier Stokes. Se poi si utilizza una chiusura del primo ordine o di ordine uno e mezzo, la (5.141a) diventa:

$$\mathfrak{F}_{3x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_{xy}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_{xz}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) \qquad [5.142a]$$

Anche in questo caso, l'uso delle (5.130b) consente di riscrivere questa equazione in termini di coordinate *terrain-following* ottenendo la relazione seguente alquanto complessa:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{3x} = {} & \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\right]\cdot\left\{K_{xx}\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial \bar{u}}{\partial s}\right]\right\} + \left[\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\right]\cdot\left\{K_{xy}\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{\partial \bar{u}}{\partial s}\right]\right\} \\ & + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2\frac{\partial}{\partial s}\left(K_{xz}\frac{\partial \bar{u}}{\partial s}\right)\end{aligned} \qquad [5.142b]$$

Operando in maniera del tutto analoga per i corrispondenti termini dell'equazione relativa alla componente orizzontale *v*, si ottiene una relazione del tutto simile.

La complessità di queste relazioni ha condotto a tralasciare i termini ritenuti trascurabili, ottenendo alla fine le relazioni seguenti:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{3x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_{xy}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2\frac{\partial}{\partial s}\left(K_{xz}\frac{\partial \bar{u}}{\partial s}\right) \\ \mathfrak{F}_{3y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xy}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2\frac{\partial}{\partial s}\left(K_{xz}\frac{\partial \bar{v}}{\partial s}\right)\end{aligned} \qquad [5.142b]$$

Per quanto riguarda, infine, l'equazione relativa alla componente verticale del moto, presente solo quando il modello fluidodinamico non è idrostatico, l'espressione che si ottiene è decisamente troppo complessa e non è il caso di riprodurla qui. Per essa si rimanda a Jacobson (2000).

5.7.3.3 Le equazioni prognostiche per gli scalari

Per quanto riguarda le equazioni prognostiche per gli altri scalari (temperatura potenziale virtuale, umidità e specie chimiche) non c'è molto da aggiungere. Infatti, la derivata materiale presente in ciascuna di esse è trasformabile semplicemente impiegando la (5.137b), mentre i termini che rappresentano la divergenza dei flussi turbolenti possono essere espressi o dalla (5.141b) oppure dalla (5.142a) se viene adottata una chiusura del primo ordine. L'unico appunto da fare è relativo ai termini di sorgente presenti in esse. In generale è necessario che essi vengano esplicitati con precisione e quando in essi si rinviene un operatore differenziale (tipicamente una derivata parziale in *z*), la si trasforma con le regole appena introdotte. Ciò è vero in particolare per il termine di sorgente dell'equazione della temperatura potenziale virtuale in cui è sicuramente presente, tra l'altro, la divergenza verticale della radiazione netta, cioè:

$$D = \frac{\partial R_N}{\partial x} \qquad [5.143a]$$

che, secondo le regole viste, si trasformerà in:

$$D = \frac{\partial s}{\partial z} \cdot \frac{\partial R_N}{\partial s} \qquad [5.143b]$$

5.8 OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

I paragrafi precedenti hanno indicato come l'adozione di una visione stocastica della turbolenza atmosferica porti, a rigore, ad un sistema di infinite equazioni differenziali. Tuttavia, l'esperienza maturata in questi decenni assicura che normalmente possono essere considerare le sole equazioni delle variabili medie ed eventualmente, quando si vuole riprodurre in modo realistico le situazioni convettive, anche le equazioni prognostiche dei momenti del secondo ordine. Questo lo si può fare, però, adottando opportune forme di chiusura, cioè opportune relazioni semiempiriche con cui esprimere le variabili presenti nelle equazioni, ma di cui non si sia considerata la rispettiva equazione prognostica. A questo punto, con opportune condizioni iniziali ed al contorno, questo sistema di equazioni differenziali può essere integrato. In pratica il vero modello matematico del *PBL* è un sistema di equazioni basate sulle leggi di conservazione e di equazioni, sempre algebriche, che sono o la semplificazione di alcune delle relazioni prognostiche o semplici relazioni semiempiriche derivate dalle misure. Nel Cap. 8 si presenterà la Teoria della Similarità che rappresenta un semplice apparato semiempirico in grado di descrivere molte delle caratteristiche della turbolenza atmosferica basandosi semplicemente sull'analisi dimensionale e sulle misure sperimentali. Spesso i risultati della Teoria della Similarità consentono di ottenere relazioni di chiusura e, a volte, di fronte a situazioni reali particolarmente semplici, addirittura possono sostituire il modello differenziale del *PBL* con relazioni decisamente più maneggevoli.

Per quanto riguarda i metodi con cui integrare tali equazioni, non è questo il momento di parlarne. Lo faremo con un certo dettaglio al Cap. 7. Va comunque anticipato che lo schema di risoluzione numerica di queste equazioni riveste una importanza almeno pari alla scelta del metodo di chiusura. Infatti, metodi numerici non appropriati possono introdurre nelle soluzioni errori tali da mascherare addirittura il fenomeno fisico che si sta indagando. Pertanto, scegliere i metodi numerici più appropriati per risolvere il modello matematico del *PBL* è un'impresa delicata e difficile e non a torto alcuni hanno affermato che è quasi una forma di *arte*.

La cosa, però, di maggiore importanza che ci preme sottolineare è la seguente. Siamo partiti inizialmente affermando che per la descrizione della turbolenza del *PBL* era necessaria la conoscenza degli infiniti momenti centrali delle variabili che ne descrivono la dinamica ed ora, alla fine del Capitolo, possiamo affermare che, con una buona approssimazione, per questa descrizione possono bastare pochi momenti: i valori medi ed eventualmente i momenti secondi. È un indubbio successo, rafforzato dal fatto che anche le condizioni iniziali ed al contorno si riferiscono a tali momenti, e quindi più facilmente misurabili o stimabili. Ovviamente non è pensabile misurare, con la tecnologia attualmente disponibile, il campo tridimensionale del vento, della temperatura potenziale e delle altre variabili di interesse in un dato istante per poter dare le condizioni iniziali e nemmeno è agevole determinare nel tempo il loro valore al contorno (al suolo e all'estremo superiore del dominio di calcolo). Tuttavia, se non è possibile misurare, è però possibile stimare, per esempio con metodi interpolativi più o meno raffinati, come è consuetudine nelle diverse applicazioni geofisiche, o con tecniche di Similarità. La cosa interessante però è considerare con attenzione le relazioni di chiusura. Tutte, in una forma o in un'altra, richiedono le informazioni seguenti: il valore delle variabili medie ed i flussi verticali di quantità di moto e di calore sensibile misurati al suolo, oltre, naturalmente all'estensione verticale del *PBL*. In sostanza tutto ciò ci assicura che lo studio dettagliato di quello che avviene nei pressi del suolo è di importanza primaria nella modellizzazione dell'intero *PBL*.

PROBLEMI

P05.01 Supponiamo che le componenti del vento geostrofico u_g e v_g valgano ciascuna 5 ms^{-1} ad ogni quota, che u_* sia pari a 0.3 ms^{-1} e che valga la relazione:

$$\overline{u'w'} = -(u_* + cz)^2$$

dove c = 0.001 s^{-1}. Inoltre f = 10^{-4} s^{-1} e $\overline{v'w'} = 0$. Trovare l'accelerazione dell'aria nella direzione *x* ad una quota di 100 m entro il *PBL*, assumendo che a quella quota il valore medio delle componenti medie del moto *U* e *V* valgano rispettivamente 4 ms^{-1} e 2 ms^{-1}.

P05.02 Si consideri una situazione di omogeneità orizzontale alla latitudine di 44°. Se si riscontra che la velocità media *U* del vento presenta un'accelerazione di 5 ms^{-1} in un'ora, trascurando la variazione con la quota degli Stress di Reynolds, quale deve essere lo scostamento geostrofico della componente media *V*, cioè la differenza tra v_g e V?

P05.03 Se si misura un gradiente di pressione di 10 mbar in direzione Est lungo una distanza di 500 km, determinare il vento geostrofico posto che la densità dell'aria sia pari a 1.2 $kg \cdot m^{-3}$ e f = 10^{-4} s^{-1}.

P05.04 Se ci si trova a 30° N di latitudine e la densità dell'aria è pari a 0.76 $kg \cdot m^{-3}$, a fronte di un gradiente di pressione di 4 mbar per 150 km nella direzione Sud-Nord, determinare la componente u_g del vento geostrofico.

P05.05 Qual è l'accelerazione in direzione Est-Ovest del vento a 300 m di quota per il trasferimento verticale di quantità di moto dalla quota di 400 m sotto le seguenti ipotesi: u_1 = 10 ms^{-1}, z_1 = 300 m, u_2 = 12 ms^{-1}, z_2 = 350 m, u_3 = 15 ms^{-1}, z_3 = 400 m? Si assuma che il valore tipico del coefficiente di diffusività turbolenta sia di 50 m^2s^{-1} e che la densità dell'aria ed il coefficiente di diffusività turbolenta restino costanti con la quota.

P05.06 Qual è la decelerazione della componente Est-Ovest del vento nella direzione Nord-Sud a causa del trasferimento di quantità di moto quando valgono le seguenti condizioni: u_1 = 10 ms^{-1} a y_1 = 0, u_2 = 9 ms^{-1} a y_2 = 500 m, u_3 = 7 ms^{-1} a y_3 = 1000 m, K_z = 100 m^2s^{-1} e K_z e densità dell'aria costanti con la quota?

P05.07 Qual è la fluttuazione di densità corrispondente ad una fluttuazione di temperatura di 0.1 K? Assumere che il valor medio della temperatura è 300 K e la densità dell'aria è 1.1 $kg \cdot m^{-3}$.

P05.08 Immaginiamo di stare negli Stati Uniti poco prima che un tornado si abbatta sulla vostra casa. Immaginiamo che voi abbiate un box per l'automobile e che al suo interno la densità dell'aria sia di 1 kg·10-3. Immaginate poi di aver dimenticato aperto l'ingresso del box e che un vento di 100 $m \cdot s^{-1}$ entra dall'ingresso da Ovest, ma l'aria entrata nel box non può uscire da Est per la mancanza di ogni apertura. Inoltre, per il momento il vostro box è intatto e quindi non permette all'aria entrata di fuoriuscire. Se il vostro box è lungo 8 m nella direzione Est Ovest, quale variazione di pressione si avrà nel vostro box nel primo secondo? (Stull, 2000).

P05.09 Ipotizziamo che il profilo del gradiente verticale della temperatura potenziale media θ e della velocità media del vento *u* siano date dalle relazioni seguenti:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_*}{kz}\Phi_m(z/L) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{T_*}{kz}\Phi_h(z/L)$$

dove *k* è la costante di von Karman, z è la quota nel SL, u_* è la *friction velocity*, T_* è la temperatura di scala, *L* è la lunghezza di Monin-Obukhov, individuare la relazione che esiste tra il Numero di Richardson Flusso R_f, il Numero di Richardson Gradiente *Ri* e *z*/*L* nel caso che:

$$a) \quad \Phi_h(z/L) = \Phi_m^2(z/L)$$
$$b) \quad \Phi_h(z/L) = \Phi_m(z/L)$$

P05.10 Consideriamo un *PBL* prossimo alla adiabaticità in cui il profilo verticale della velocità media del vento e della temperatura potenziale media siano pari a:

$$u(z) = \frac{u_*}{k} ln(z/z_0) \qquad \theta(z) = \theta_0 + \frac{T_*}{k} ln(z/z_{0h})$$

dove u_* è la *friction velocity*, T_* è la temperatura di scala, z_0 e z_{0h} rappresentano le rugosità superficiali per la quantità di moto e per il calore, k è la costante di von Karman e θ_0 è la temperatura superficiale. Individuare una relazione analitica per il Numero di Richardson Gradiente e per il Numero di Richardson Flusso (N.B. Si ricordi anche la definizione di Lunghezza di Monin-Obukhov).

P05.11 Si determini il profilo verticale del Numero di Richardson Gradiente *Ri* dai seguenti profili di temperatura potenziale e di velocità media del vento

z (m)	θ (K)	U (m/s)
0	293	2
10	292	4
20	292	6
30	295	8
40	297	10
50	301	14
60	302	15
70	304	17
80	306	18

P05.12 Calcolare il profilo verticale da 0 a 1000 m della lunghezza di scala l espressa dalla relazione (5.51a) se il modulo del vento geostrofico risulta pari a 25 m/s.

P05.13 Come si riduce il profilo della lunghezza di scala l se, pur mantenendo le relazioni per le varianze delle componenti del vento date al problema precedente, il *PBL* si trova in condizioni stabili?

P05.14 Dati i seguenti profili verticali di flusso di calore e di gradienti di temperatura potenziale, trovare e graficare K_h in funzione di z/z_i e commentare i risultati.

z (m)	$\overline{w'\theta'}$ (Km/s)	$\partial\theta/\partial z$ (K/m)
0	0.20	-0.020
0.2	0.15	-0.005
0.4	0.10	-0.001
0.6	0.05	0.001
0.8	0.00	0.005
1.0	-0.05	0.020

P05.15 Si consideri la seguente Transilient Matrix (Stull 1989):

$$C = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0.0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 & 0.2 \\ 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Cosa c'è di sbagliato in essa?

P05.16 Data la seguente Transilient Matrix (Stull 1989):

$$C = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.2 & ? & 0.2 & 0.0 \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Trovare gli elementi mancanti.

P05.17 Si consideri un *PBL* convettivo in cui:

$$\sigma_u^2(z) = \sigma_v^2(z) = 4.5u_*(1 - z/h)^{3/2} + 0.33w_*^2$$

$$\sigma_w^2 = 1.7u_*^2(1 - z/h)^{3/2} + 1.3w_*^2(z/h)^{2/3}(1 - 0.8\,z/h)$$

Si individui una relazione analitica per profilo verticale della lunghezza di scala l espressa dalla (5.51c) tra le $z/h = 0$ e $z/h = 1$, dove h è l'estensione verticale del *PBL*. Individuare poi numericamente il profilo quando la temperatura potenziale è di 300 K, u_* =0.3 m/s e H_0 = 200 W/m^2.

P05.18 Dati i seguenti coefficienti della Transilient Matrix (Stull 1989):

$$c_{ij}(\Delta t = 10min) = \begin{matrix} 0.1 & 0.9 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.05 & 0.75 & 0.0 & 0.0 \\ 0.25 & 0.05 & 0.2 & 0.5 & 0.0 \\ 0.25 & 0.0 & 0.05 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.6 \end{matrix}$$

a) verificare che sia conservata la massa e lo stato;

b) dato il seguente profilo iniziale di una variabile *S* nel *PBL*:

Indice di Cella	z (m)	S
1	100	500
2	300	0.0
3	500	0.0
4	700	0.0
5	900	0.0

prevedere il profilo della variabile *S* ogni 10 min da t = 0 a t = 90 min (assumere un *PBL* di 1000m discretizzato con 5 celle centrate alle altezze indicate in tabella e di spessore verticale pari a Δz = 200 m)

c) Trovare e graficare il profilo del flusso verticale della variabile *S* tra il primo ed il secondo time step.

6. ANALISI ENERGETICA DEL PBL

Perché sia possibile che le masse d'aria si muovano e che in esse sia presente la turbolenza è necessaria la presenza di un apporto energetico che si incarichi di mantenere in continua evoluzione questo complesso sistema fisico. Incredibilmente l'uomo, dagli albori della propria esistenza, ha sempre individuato senza ombra di dubbio nel Sole questa fonte primaria di energia e l'ha sempre ritenuta, a ragione, l'elemento condizionante della vita sulla Terra. E l'uomo fin da subito ha anche intuito che il rapporto Sole-Terra doveva essere un rapporto complesso, per l'uomo primitivo addirittura un rapporto misterioso, tanto da ritenere la *nostra stella preferita* addirittura una divinità cui attribuire ogni sorta di deferenza. Il lento cammino della scienza ha coinciso, in pratica, con la progressiva conoscenza di questo rapporto che non ha smesso con gli anni di affascinare l'uomo.

Sulla base delle conoscenze scientifiche che si sono via via accumulate, è ormai un dato di fatto che l'atmosfera terrestre, e quindi il *PBL*, riceva dal Sole la maggior parte dell'energia necessaria a mantenere in moto le masse d'aria e a mantenere viva la propria turbolenza, elemento essenziale per la vita sulla terra, e questo trasferimento energetico ha luogo per via radiativa. Pertanto, dal punto di vista energetico, si può affermare che il *PBL* è un'enorme macchina termica alimentata dall'energia solare (Sorbjan, 1989). Data la geometria sferica che contraddistingue la Terra e la sua atmosfera, le caratteristiche geometriche del moto relativo della Terra attorno al Sole e la rotazione della Terra attorno al proprio asse, è inevitabile che la presenza di radiazione solare in un punto della superficie terrestre presenti le caratteristiche ciclicità giornaliere e stagionali. Inoltre, il fatto che l'energia radiante di origine solare si distribuisca sulla superficie terrestre in maniera non uniforme nello spazio e nel tempo, vuoi per la sfericità della Terra, vuoi per la presenza di irregolarità sulla sua superficie (montagne e quindi ombre, coperture vegetali differenti, presenza di superfici liquide come laghi e mari), vuoi anche e soprattutto per la presenza della copertura nuvolosa, produce i gradienti orizzontali di temperatura che determinano il movimento delle masse d'aria a tutte le possibili scale.

In questo Capitolo viene studiata per prima cosa la radiazione solare (la radiazione ad *onda corta*, come vedremo). Una volta introdotti i principi base della propagazione radiativa di energia, vengono illustrati i fattori astronomici che concorrono a tale trasferimento energetico in modo da quantificare l'energia solare disponibile alla sommità dell'atmosfera stessa (TOA, *Top Of Atmosphere*). Successivamente, passeremo allo studio dell'interazione diretta tra l'aria che costituisce l'atmosfera e la radiazione solare, per poterne quantificare la porzione disponibile in corrispondenza dell'interfaccia aria-suolo. A prima vista, l'atmosfera potrebbe sembrare trasparente alla radiazione solare, ma vedremo che ciò non è completamente vero; di fatto l'atmosfera controlla quanta dell'energia solare giunge al suolo e, allo stesso tempo, controlla quanta di questa radiazione viene restituita allo spazio.

Come noto dalla Fisica, qualsiasi corpo (anche gassoso) ad una temperatura superiore allo zero assoluto emette energia sotto forma di onde elettromagnetiche. Non dimentichiamo che questa semplice affermazione rappresenta una delle tappe più importanti della Fisica moderna. Essa è vera per ogni corpo materiale e quindi anche per l'interfaccia aria-suolo e per l'aria nel suo complesso. In pratica, l'immissione energetica apportata direttamente dal Sole genera un flusso di radiazione elettromagnetica ad onda corta (praticamente nello spettro del visibile) diretto *verso il basso* (ovviamente per un osservatore posto sulla superficie terrestre) e la riflessione dello stesso da parte della superficie terrestre produce un flusso di radiazione ad onda corta diretto *verso l'alto.* Tuttavia, l'irraggiamento dell'aria e della superficie terrestre derivanti dall'essere *corpi caldi* produce sia un *flusso verso l'alto* che un *flusso verso il basso* di radiazione che, viste le temperature

in gioco, è ad *onda lunga* (praticamente nello spettro dell'infrarosso). Tutti questi flussi radiativi verranno qui studiati nel dettaglio, così come il *bilancio radiativo* che da essi deriva e che determina l'ammontare di energia che in un punto della superficie terrestre ed in un certo istante è disponibile all'interfaccia aria-suolo. Questa disponibilità energetica viene usata in parte per riscaldare, per conduzione, il suolo, in parte per evaporare l'acqua ivi presente ed in parte per attivare i moti turbolenti del *PBL*, meccanismi che vengono presentati e studiati al termine del Capitolo, inquadrati nel contesto di un *bilancio energetico superficiale*.

Al di là degli aspetti legati alla definizione quantitativa del bilancio radiativo e del bilancio energetico superficiale, è anche importante capire come lo studio energetico dell'atmosfera possa portare elementi utili al modello operativo del *PBL* descritto al Cap.5. Infatti, tra le varie equazioni differenziali alle derivate parziali che descrivono l'evoluzione nello spazio e nel tempo delle variabili atmosferiche, troviamo anche l'equazione prognostica per la temperatura potenziale virtuale. Come in ogni equazione prognostica, anche in questa è presente un termine di sorgente che tiene conto delle trasformazioni di fase dell'acqua atmosferica ma soprattutto del riscaldamento o del raffreddamento dell'aria derivante dalla divergenza (soprattutto verticale) della radiazione ad onda corta (di origine solare) e ad onda lunga (di origine atmosferica e terrestre). Ciò che esporremo in questo Capitolo porterà anche ad individuare questo termine di sorgente che, di fatto, è il motore di tutta l'atmosfera. Ma per poter quantificare questi termini di divergenza è anche necessario conoscere i profili verticali dei vari componenti dell'atmosfera, cioè delle sostanze gassose che la compongono, principalmente acqua (in forma gassosa, liquida e solida), anidride carbonica ed ozono, che si incaricano di assorbire, diffondere e trasmettere la radiazione solare incidente ed anche di emettere radiazione elettromagnetica essendo essi stessi dei corpi caldi. Ciò comporta che il termine di sorgente dell'equazione prognostica della temperatura potenziale virtuale, legato strettamente alle equazioni del moto delle masse d'aria, costituisca il collegamento tra queste ultime e le equazioni prognostiche che descrivono la conservazione delle varie specie presenti in atmosfera, tema dei Capitoli finali del libro.

L'argomento che ci accingiamo a trattare non solo è estremamente affascinante, ma è anche notevolmente complesso. Manterremo l'esposizione entro ragionevoli limiti di accettabilità, basandoci prevalentemente sui bellissimi libri di Liou (1992 e 2002) e di Bohren e Clothiaux (2006), cui si rimanda per ulteriori approfondimenti.

6.1 LA PROPAGAZIONE RADIATIVA DI ENERGIA

L'apporto energetico solare, praticamente l'unico di cui disponga il sistema Terra-Atmosfera, è costituito da un flusso continuo di onde elettromagnetiche di tutte le possibili frequenze. Quindi, il primo passo è quello di presentare gli elementi di base della propagazione radiativa di energia. C'è un'abbondanza di testi universitari che, a vari livelli di dettaglio, trattano questo argomento nel contesto della Fisica Classica e ad essi si rimanda per approfondire l'argomento. Qui di seguito ne vengono richiamati i concetti base necessari alla comprensione della propagazione in atmosfera dell'energia radiante.

6.1.1 ELEMENTI DI BASE

Tutti gli oggetti emettono onde elettromagnetiche senza eccezione alcuna. Per illustrare intuitivamente ciò, si consideri (Jacob, 1999) un generico oggetto materiale (solido, liquido o gassoso) che inevitabilmente è composto da un numero enorme di particelle (atomi e molecole) in continuo moto attorno alla propria posizione media. Una di esse, carica elettricamente, oscillando in maniera sinusoidale con una frequenza ν, induce un campo elettrico oscillante che si propaga al di fuori dell'oggetto stesso alla velocità della luce *c*. Il campo elettrico, insieme al campo magnetico associato, costituisce un'onda elettromagnetica di lunghezza d'onda $\lambda = c/\nu$ che viene quindi

emessa dall'oggetto stesso. Quindi, per la Fisica Classica la radiazione elettromagnetica consiste nella variazione nello spazio e nel tempo dell'intensità di un campo elettrico e dell'associato campo magnetico, entrambi vettoriali e tra loro ortogonali, con conseguente trasporto di energia. Dal punto di vista della Meccanica Quantistica, invece, la radiazione elettromagnetica possiede una natura duale: a volte si presenta come una vera e propria onda elettromagnetica, a volte può essere vista come un insieme di *fotoni* (pacchetti di energia) che si propagano nello spazio alla velocità della luce, comportandosi come vere proprie particelle prive di massa e dotate di energia e di quantità di moto che possono assumere solo valori multipli di un *quanto elementare*.

Se consideriamo la radiazione elettromagnetica come la propagazione di un campo elettrico e magnetico di forma sinusoidale e tra loro ortogonali, è possibile definire:

- una *velocità di propagazione* dell'onda c ($m \cdot s^{-1}$): per un'onda elettromagnetica questa è la velocità di propagazione della luce pari a $c = 2.99793 \cdot 10^8$ $m \cdot s^{-1}$ nel vuoto (ed in prima approssimazione, anche in atmosfera);
- una *frequenza di oscillazione* ν (espressa in Hz = $cicli \cdot s^{-1}$), cioè il numero di cicli per secondo caratteristici dell'onda;
- una *frequenza angolare* ω ($radianti \cdot s^{-1}$) legata alla frequenza ν dalla relazione $\omega = 2\pi \cdot \nu$;
- una *lunghezza d'onda* λ ($m \cdot ciclo^{-1}$) legata a c e ν dalla relazione $\lambda = c/\nu$:
- un *numero d'onda* k ($cicli \cdot m^{-1}$) definito come $k = 1/\lambda$.

La visione classica della propagazione delle onde elettromagnetiche ha subito una profonda rivoluzione con il lavoro di Max Planck (1900) e di Einstein (1905) secondo i quali la radiazione elettromagnetica totale, emessa o assorbita da un corpo, oltre che come una normale onda elettromagnetica, può anche essere vista come un insieme di *pacchetti di energia* chiamati da Gilbert Lewis nel 1926 *fotoni*. Quindi, secondo la Fisica Moderna, il flusso di radiazione elettromagnetica può essere visto anche come un *flusso di fotoni* che sono una sorta di *particelle* ciascuna caratterizzata da un contenuto energetico elementare E_p e da una quantità di moto p definiti rispettivamente come:

$$E_p = h\nu = h\,c/\lambda = hck \qquad p = h/\lambda = h\nu/c \qquad [6.1a]$$

dove h è la *costante di Planck* ($6.626075 \cdot 10^{-34}$ J·s). È interessante notare come l'energia trasportata da un fotone sia direttamente proporzionale alla frequenza ν della radiazione elettromagnetica.

Esercizio 6.1

Una lampada con potenza P di 100 W emette luce con una lunghezza d'onda $\lambda = 0.5$ μm. Quanti fotoni al secondo emette la lampada?
Dato che ogni fotone trasporta un quanto di energia dato dalla (6.1), si ha che il numero N di fotoni per unità di tempo emessi dalla lampada alla lunghezza d'onda data risulta pari a:

$$N = \frac{P}{hc/\lambda} = \frac{100 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6}}{6.6260755 \cdot 10^{-34} \cdot 2.99793 \cdot 10^{8}} = 2.5171 \cdot 10^{20}\ (fotoni \cdot s^{-1})$$

che è un numero enorme!

La radiazione elettromagnetica può coprire un intervallo di frequenze teoricamente infinito e l'intero campo delle frequenze (o, che è lo stesso, delle lunghezze d'onda) prende il nome di *spettro elettromagnetico*, mentre si definisce *banda* un intervallo di tale spettro che presenti caratteristiche particolari. Normalmente, lo spettro della radiazione elettromagnetica si ripartisce nel modo indicato in **Tab. 6.1**.

Come vedremo, il Sole emette la propria radiazione nell'intero spettro elettromagnetico,

anche se la maggior parte dell'energia radiativa emessa si concentra nella banda 0.29÷3.0 μm. In particolare, il 97% dell'energia radiante solare è localizzata in una banda ancora più piccola (da 0.4÷0.7 μm) che è poi la *regione ottica o banda del visibile* dello spettro e che si estende alla banda dell'ultravioletto, del visibile e del vicino infrarosso. Se analizziamo più nel dettaglio la *banda del visibile*, cioè della radiazione percepita dall'occhio umano, nella **Tab. 6.2** vengono evidenziate le sotto-bande caratteristiche corrispondenti ai principali colori.

BANDA	**FREQUENZA** (Hz)	**LUNGHEZZA D'ONDA** (μm)
Onde Elettriche	$0 \div 10^{4}$	$\infty \div 3{\cdot}10^{10}$
Onde Radio	$10^{4} \div 10^{11}$	$3{\cdot}10^{10} \div 3{\cdot}10^{3}$
Infrarosso	$10^{11} \div 4{\cdot}10^{14}$	$3{\cdot}10^{3} \div 7.5{\cdot}10^{-1}$
Visibile	$4{\cdot}10^{14} \div 7.5{\cdot}10^{14}$	$7.5{\cdot}10^{-1} \div 4{\cdot}10^{-1}$
Ultravioletto	$7.5{\cdot}10^{14} \div 3{\cdot}10^{16}$	$4{\cdot}10^{-1} \div 10^{-2}$
Raggi X	$3{\cdot}10^{16} \div 3{\cdot}10^{20}$	$10^{-2} \div 10^{-6}$
Raggi γ	$3{\cdot}10^{20} \div 3{\cdot}10^{21}$	$10^{-6} \div 10^{-7}$

Tab. 6.1: lo spettro elettromagnetico.

COLORE	**TIPICA LUNGHEZZA D'ONDA** λ (μm)
Violetto	0.430
Blu scuro	0.470
Blu chiaro	0.495
Verde	0.530
Giallo-Verde	0.560
Giallo	0.580
Arancio	0.600
Rosso	0.640

Tab. 6.2: corrispondenza tra colori e lunghezze d'onda.

La superficie terrestre, invece, è caratterizzata da temperature medie tali per cui le emissioni si concentrano nella *banda dell'infrarosso* (*IR*) caratterizzata da lunghezze d'onda comprese tra 3 e 100 μm. In particolare, il 99.99% della radiazione di origine terrestre ha lunghezza d'onda superiore a 3.0 μm ed il 99% di essa ha lunghezza d'onda superiore a 5 μm. Come è evidente, non c'è una sovrapposizione apprezzabile tra la banda spettrale legata all'emissione solare e la banda spettrale in cui hanno luogo le emissioni terrestri e ciò è importante nella pratica sia nel trattare e modellizzare i due tipi di apporti radiativi che nel misurarli praticamente. Convenzionalmente la radiazione di origine solare viene indicata come *radiazione ad onda corta* (*shortwave radiation*), mentre la radiazione di origine terrestre viene indicata col termine *radiazione ad onda lunga* (*longwave radiation*).

L'importanza della banda dell'ultravioletto (UV), che si estende da 0.100 μm a 0.400 μm, deriva, da un lato, dal fatto che questo tipo di radiazione ha effetti prevalentemente negativi sull'ambiente e sulla salute umana e dall'altro perché è il motore privilegiato delle varie reazioni fotochimiche che hanno luogo nel *PBL*. Tradizionalmente la banda UV viene suddivisa in tre distinte sotto-bande:

- UV-A: è la banda che comprende le radiazioni con lunghezza d'onda compresa nell'intervallo 0.315 ÷ 0.400 μm. La radiazione di questo tipo è la meno attiva dal punto di vista biologico e la sua intensità alla superficie terrestre non varia apprezzabilmente con il

contenuto di ozono atmosferico;

- UV-B: è la banda che comprende le radiazioni con una lunghezza d'onda nell'intervallo 0.280 ÷ 0.315 μm. La radiazione UV con queste caratteristiche è biologicamente molto attiva ed è responsabile di molte gravi patologie soprattutto di tipo eritemale. La sua presenza alla superficie terrestre dipende dal contenuto di ozono presente nella colonna di atmosfera sovrastante;
- UV-C: è la banda che comprende le radiazioni a lunghezza d'onda compresa nell'intervallo 0.100 ÷ 0.280 μm. ed è la meno importante dal punto di vista biologico, dato che è quasi completamente assorbita dall'atmosfera.

La radiazione elettromagnetica viene *emessa* dalla materia quando un elettrone *salta* ad un livello energetico inferiore rispetto al suo livello originario. In questo caso viene emesso un fotone con energia pari alla differenza Δε tra il livello energetico iniziale e finale, energia che è legata alla frequenza della radiazione emessa dalla relazione:

$$\Delta\varepsilon = h\nu = h\,c/\lambda \qquad [6.1b]$$

Quando Δε è grande, la frequenza del fotone emesso è elevata (quindi la lunghezza d'onda è piccola) e la radiazione si colloca nella banda dei raggi X o della radiazione gamma. La (6.2) vale anche per quantificare l'*assorbimento* di un fotone da parte di una molecola. Così una molecola può assorbire energia radiante solo se la lunghezza d'onda della radiazione corrisponde alla differenza tra due dei suoi livelli energetici. Dato che la differenza tra due livelli energetici varia a seconda della composizione e della forma delle diverse molecole, l'assorbimento di energia radiante dalle molecole avviene in regioni diverse dello spettro elettromagnetico.

6.1.2 CONSIDERAZIONI GEOMETRICHE E NOMENCLATURA

Per studiare i processi radiativi in atmosfera è indispensabile fare alcune considerazioni geometriche ed introdurre la nomenclatura impiegata per definire i flussi di energia dovuti alla propagazione delle onde elettromagnetiche. Dato che è difficile immaginarsi visivamente come si propaga un'onda, conviene, per semplicità, utilizzare il concetto di fotone. Adottando questo punto di vista, si può quindi dire che l'emissione di radiazione da un punto qualsiasi è del tutto equivalente all'emissione di un gran numero di fotoni che abbandonano il punto di emissione dirigendosi in ogni direzione percorrendo traiettorie rettilinee a velocità costante. Il problema è stabilire un sistema di riferimento con cui definire l'emissione di fotoni e quindi l'emissione di energia radiante. Il problema è sostanzialmente identico se ci si pone in un punto dello spazio e si studiano i fotoni (e quindi l'energia radiante) in arrivo. Quindi, la propagazione dei fotoni è direzionale, nel senso che una volta emessi, essi si muovono nello spazio alla velocità della luce *c* in linea retta ed il nostro interesse è stabilire delle regole per quantificare questa direzionalità.

Immaginiamo un osservatore posto all'origine O di un sistema di assi cartesiani con asse *x* diretto verso Est e asse *y* diretto verso Nord (e asse *z* diretto in verticale) ed ipotizziamo che tale punto stia sulla superficie terrestre. L'osservatore vede attorno a sé l'intera semisfera da cui provengono fotoni da ogni direzione. Il primo elemento per stabilire la direzionalità della radiazione in arrivo (e quindi la direzione di provenienza del flusso di fotoni) è la definizione di *angolo solido* Ω (**Fig. 6.1**). A tale scopo, si consideri la semisfera di raggio *R* che circonda il punto di osservazione O e la porzione *a* della superficie della semisfera che risulta dalla sua intersezione con un cono con vertice in O. Si definisce angolo solido Ω il rapporto:

$$\Omega = a/R^2 \qquad [6.2]$$

L'unità di misura con cui si esprime un angolo solido è lo *steradiante* (*sr*). L'angolo solido corrispondente all'intera semisfera vista dall'osservatore è pari a 2π steradianti, mentre, se l'osservatore si trovasse nello spazio, vedrebbe un angolo solido corrispondente all'intera sfera di spazio

che lo circonda e quindi l'angolo solido corrispondente sarebbe pari a 4π steradianti.

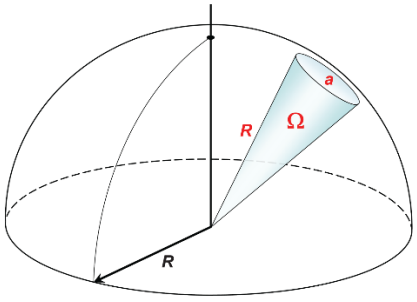


Fig.6.1: definizione di angolo solido

Ma come si colloca l'angolo solido nello spazio? Anche se basterebbe il sistema di riferimento cartesiano, conviene adottare un sistema di coordinate sferiche in cui un punto *P* dello spazio è completamente definito dalla distanza dall'origine *r*, dall'angolo di zenit θ e dall'angolo di azimut Φ come evidenziato nella **Fig. 6.2**. Le relazioni tra il sistema cartesiano ed il sistema di coordinate sferiche sono:

$$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi \qquad y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\Phi \qquad z = r \cdot \cos\theta \qquad [6.3]$$

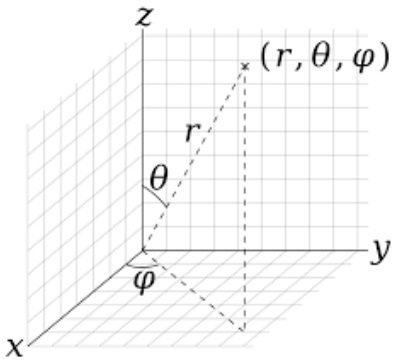


Fig. 6.2: coordinate cartesiane e coordinate sferiche

Inoltre, per meglio comprendere le relazioni che verranno presentate qui di seguito, è sicuramente utile considerare anche la **Fig. 6.3** proposta da Liou (2002).

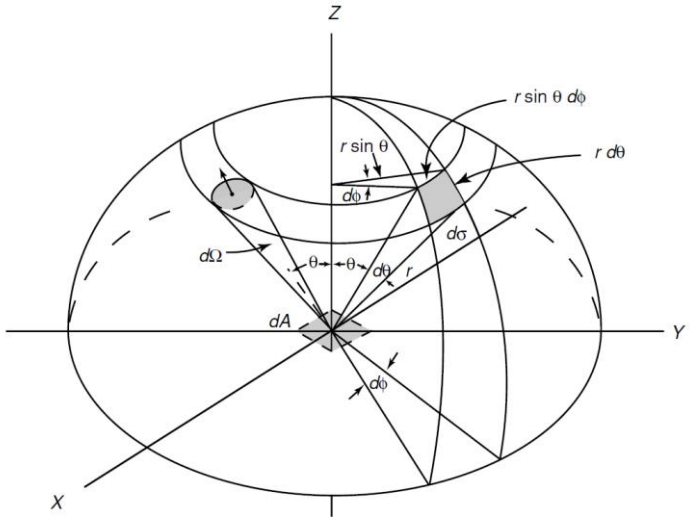


Fig. 6.3: la geometria considerata nei processi radiativi (Liou 2002)

Ipotizziamo che l'osservatore, posto all'origine del sistema di riferimento, sia interessato ai flussi radiativi provenienti da una certa direzione dello spazio. Ciò significa che è interessato alla direzione caratterizzata da uno specifico angolo di zenit θ e da uno specifico angolo di azimut ϕ. Più esattamente l'osservatore è interessato alla radiazione proveniente dall'*angolo solido differenziale* $d\Omega$ in cui la superficie intersecata dal cono è infinitesima. Si può mostrare che:

$$d\Omega = \sin\theta \cdot d\theta d\phi \qquad [6.4]$$

Se si integra l'angolo differenziale per ϕ tra 0 e 2π e per θ tra 0 e π si ottiene come è facile verificare un angolo di 2π steradianti, cioè l'intera semisfera che sovrasta l'osservatore. Definiti in maniera univoca i sistemi di riferimento utilizzati nello studio dei processi di trasferimento radiativo, è ora il momento di introdurre in maniera chiara e formalmente rigorosa le varie grandezze che quantificano il flusso di energia radiante.

Immaginiamo che dallo spazio giunga un flusso di onde elettromagnetiche di lunghezza d'onda compresa tra λ e $\lambda+d\lambda$ e che si possa visualizzare la loro propagazione come la propagazione di *raggi* rettilinei di radiazione. Ci poniamo il problema di quantificare quanta di questa radiazione giungerà, nell'intervallo di tempo *dt*, sulla superficie orizzontale infinitesima *dA* posta nell'origine O degli assi e proveniente da un angolo solido incrementale $d\Omega$ con angolo di *zenit* θ e con angolo di *azimut* ϕ (**Fig. 6.3**). In queste condizioni, l'energia (espressa in J) raccolta dalla superficie infinitesimale *dA* sarà pari a:

$$dE_\lambda = I_\lambda \cos\theta \cdot dA \cdot d\Omega \cdot d\lambda \cdot dt \qquad [6.5a]$$

dove $\cos\theta \cdot dA$ è l'effettiva area che raccoglie l'energia della data lunghezza d'onda proveniente dall'angolo solido incrementale considerato. Da questa relazione è possibile definire la *Radianza o Intensità Monocromatica* I_λ come:

$$I_\lambda = \frac{dE_\lambda}{\cos\theta \cdot dA \cdot d\Omega \cdot d\lambda \cdot dt} \qquad [6.5b]$$

espressa in ($W \cdot m^{-2} \mu m^{-1} sr^{-1}$). Per definizione, la radianza è l'energia per unità di superficie e di tempo ricevuta dalla superficie, derivante da una radiazione elettromagnetica che proviene da un ben preciso angolo solido e che possiede una lunghezza d'onda compresa nell'intervallo $\lambda \pm d\lambda/2$. In generale, la radianza dipende dalle coordinate del punto dello spazio in cui la si osserva, dalla direzione di provenienza della radiazione, dalla lunghezza d'onda della radiazione e dal tempo di osservazione. Così, essa dipende da 7 variabili: le 3 coordinate del punto di osservazione, i due angoli (*zenit* e *azimut*) con cui si definisce la direzione di provenienza della radiazione, la lunghezza d'onda ed il tempo. La radianza, come funzione della posizione e della direzione di provenienza, fornisce una descrizione locale completa del campo elettromagnetico. Va subito detto che il campo elettromagnetico si dice *isotropo* se la radianza non dipende dalla direzione di provenienza e si dice *omogeneo* se la radianza non varia nello spazio.

Se integriamo la componente verticale della radianza monocromatica sull'intera semisfera vista dall'osservatore posto al suolo, otteniamo il *Flusso Radiativo o Irradianza Monocromatica* F_λ ($Wm^{-2}\mu m$) realmente misurabile e definita come:

$$F_\lambda = \int_\Omega I_\lambda \cos\theta \, d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} I_\lambda(\theta,\phi) \cos\theta \sin\phi \cdot d\theta \qquad [6.5c]$$

Spesso si può ritenere *isotropa* (cioè uguale in ogni direzione) l'irradianza emessa nello spazio e ciò significa che i fotoni si muovono su traiettorie che hanno la medesima probabilità di essere dirette in ogni possibile direzione. In questo caso è immediato constatare che l'irradianza monocromatica è legata alla radianza monocromatica dalla semplice relazione:

$$F_\lambda = I_\lambda \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\phi \cdot d\theta \cdot d\phi = \pi \cdot I_\lambda \qquad [6.5d]$$

L'*Irradianza Totale* F dovuta a fotoni di tutte le lunghezze d'onda (energia per unità di tempo) la si ottenere integrando l'irradianza monocromatica sull'intero spettro elettromagnetico, ottenendo:

$$F = \int_0^\infty F_\lambda \, d\lambda \qquad [6.5e]$$

L'irradianza totale F è dovuta sia al flusso di fotoni che partono dal punto di osservazione e vanno verso lo spazio (flusso verso l'*alto*), che indichiamo come $F^\uparrow$ che dal flusso di fotoni $F^\downarrow$che *arrivano* dallo spazio (flusso verso il *basso*). Quindi il flusso netto di radiazione elettromagnetico alla lunghezza d'onda λ è:

$$F = F^\uparrow - F^\downarrow \qquad [6.6]$$

Una grandezza simile all'irradianza monocromatica, molto utile nello studio della chimica dell'atmosfera, è l'*Irradianza Attinica* E_λ che è l'integrale della radianza monocromatica su tutta una sfera che circonda il punto di osservazione. Essa è data dalla relazione:

$$E_\lambda = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I_\lambda \sin\phi \cdot d\theta \cdot d\phi \qquad [6.7]$$

che, nel caso di radianza monocromatica isotropa, si riduce a $E_\lambda = 4\pi \cdot I_\lambda$, cioè $E_\lambda = 4F_\lambda$.

Tutte queste relazioni sono state scritte considerando la lunghezza d'onda λ della radiazione elettromagnetica. Esse possono essere riscritte anche in termini di frequenza ν (oppure in termini di numero d'onda k) ricordando che la radianza o l'irradianza in un intervallo spettrale infinitesimo deve essere la stessa, sia che tale intervallo venga espresso in termini di frequenza che in termini di lunghezza d'onda, cioè: $I_\lambda d\lambda = I_\nu d\nu$.

6.1.3 NOZIONI MINIME DI OTTICA ATMOSFERICA

Per comodità, immaginiamo che la radiazione elettromagnetica, per esempio la luce, si propaghi nello spazio per raggi rettilinei, cosa del tutto naturale quando è vista come un insieme di fotoni che viaggiano nello spazio. Immaginiamo ora che questo *raggio* raggiunga una superficie. Se E^* è la radianza incidente, la radianza E che effettivamente è vista dalla superficie risulta pari a:

$$E = E^* \sin\theta \qquad [6.8a]$$

dove θ è l'angolo tra la normale alla superficie e la direzione di propagazione del raggio di radiazione, detto anche *angolo di elevazione*.

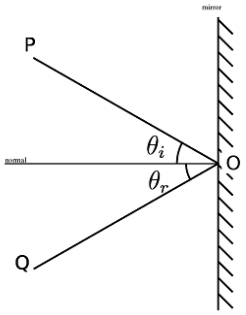


Fig. 6.4: riflessione della luce

Questo *pennello* di radiazione, una volta che *incide* sulla superficie che fine fa? Se immaginiamo che la superficie di incidenza sia costituita da un materiale che non consente l'assorbimento della radiazione, i fotoni del fascio di radiazione dovranno *rimbalzare indietro* in qualche modo. Questa superficie sarà, quindi, uno *specchio* ed il raggio incidente non potrà che essere *riflesso*, cioè

allontanato dalla superficie di incidenza. Per poter fare ragionamenti quantitativi, consideriamo la **Fig. 6.4**. Il raggio *PO*, che incide su di una superficie totalmente riflettente nel punto *O*, viene riflesso lungo la direzione *OQ*. Se proiettiamo una retta immaginaria dal punto *O* perpendicolarmente allo specchio (la normale alla superficie riflettente), possiamo misurare l'angolo di incidenza θ_i e l'angolo di riflessione θ_r. Senza entrare nei dettagli, l'Ottica afferma che:

- l'angolo di incidenza e l'angolo di riflessione sono uguali, cioè $\theta_r = \theta_i$;
- il raggio incidente e quello riflesso si pongono ai lati opposti della normale alla superficie di riflessione;
- il raggio incidente, il raggio riflesso e la normale alla superficie giacciono tutti nello stesso piano.

Tutto ciò non dipende dal fatto che la radiazione sia monocromatica o meno.

Si consideri ancora una volta un raggio di radiazione incidente su una superficie che separa due mezzi di natura fisico-chimica differente; un esempio sono i raggi del sole che giungono all'interfaccia tra l'aria ed uno specchio d'acqua. Non sempre la superficie che separa i due mezzi differenti riflette completamente la radiazione incidente. Più spesso, una parte di radiazione incidente viene riflessa ed una parte *entra* nel nuovo materiale (nell'acqua, se consideriamo l'esempio precedente). In pratica, siamo nelle condizioni in cui, per una certa parte della propria traiettoria, il raggio si propaga in un mezzo *1* con una velocità di propagazione c_1 ed in parte in un mezzo *2* con velocità di propagazione c_2 normalmente differenti tra loro. Si definisce allora *indice di rifrazione* n_i di un generico mezzo *i* il rapporto tra la velocità della luce nel vuoto c_0 e la velocità della radiazione nel mezzo considerato c_i (dipendente dalla lunghezza d'onda della radiazione):

$$n_i = \frac{c_0}{c_i} \qquad [6.8b]$$

Se limitiamo il nostro ragionamento alla sola radiazione visibile, l'indice di rifrazione dipenderà dal colore della luce e dal mezzo considerato. Nella **Tab. 6.3** vengono raccolti alcuni tipici indici di rifrazione nel visibile validi per l'aria, l'acqua ed il ghiaccio.

Lunghezza d'Onda		**Indice di Rifrazione *n***		
λ (μm)	**Colore**	**aria**	**ghiaccio**	**acqua**
0.4	Violetto	1.0002817	1.320	1.345
0.5	Verde-Blu	1.0002781	1.314	1.339
0.6	Giallo-Arancio	1.0002763	1.310	1.333
0.7	Rosso	1.0002753	1.307	1.329

Tab. 6.3: alcuni esempi di indice di rifrazione nel visibile

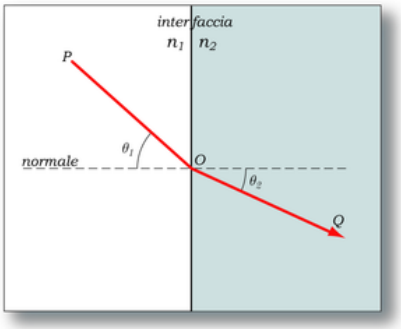


Fig. 6.5: fenomeno della rifrazione della luce

Il fatto che la velocità di propagazione del raggio cambi passando da un mezzo ad un altro comporta che la radiazione che penetra nel nuovo mezzo si propaghi ancora in maniera rettilinea, ma

la sua direzione risulta deviata rispetto a quella originale (**Fig. 6.5**). Questo fenomeno prende il nome di *rifrazione*. Se consideriamo la figura, la relazione tra i due angoli θ_1 (l'angolo con cui il raggio raggiunge l'interfaccia tra i due mezzi provenendo dal mezzo *1*) e θ_2 (la direzione che il raggio prende propagandosi nel mezzo *2*) è data dalla *Legge di Snell* secondo cui:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} \qquad [6.8c]$$

Esercizio 6.2

Si calcoli l'angolo di rifrazione di un raggio di luce rossa (λ = 0.7 μm) e di luce violetta (λ=0.4 μm) che giunge dall'aria ad una superficie d'acqua con un angolo di incidenza pari a 60°.
Consideriamo per primo il caso di un raggio di luce rossa. In questo caso, n_1 = 1.0002753 (indice di rifrazione nell'aria) e n_2 = 1.329 (indice di rifrazione nell'acqua). Dalla Legge di Snell (6.8c) si ha che:

$$\theta_2 = \sin^{-1}\left[\frac{n_1}{n_2}\cdot\sin\theta_1\right] = \sin^{-1}\left[\frac{1.0002753}{1.329}\cdot\sin 60°\right]$$

Sviluppando i conti si giunge facilmente al risultato θ_2 = 40.68°.
Calcoli analoghi per un raggio di luce violetta portano a dire che θ_2 = 40.10°.
Come si vede, in entrambi i casi l'angolo di rifrazione è molto diverso dall'angolo di incidenza ed è evidente come un raggio di luce rossa sia deflesso meno di un raggio di luce violetta.

Oltre alla riflessione ed alla rifrazione, in atmosfera è importante anche la *diffrazione* delle onde elettromagnetiche. Rimandando ai testi di Ottica per una descrizione dettagliata della diffrazione, qui ci limitiamo a sottolineare che, quando un'onda elettromagnetica incontra un ostacolo lungo la direzione di propagazione (per esempio una particella o una goccia d'acqua), essa devia dalla direzione di propagazione originaria *girando attorno* all'ostacolo incontrato.

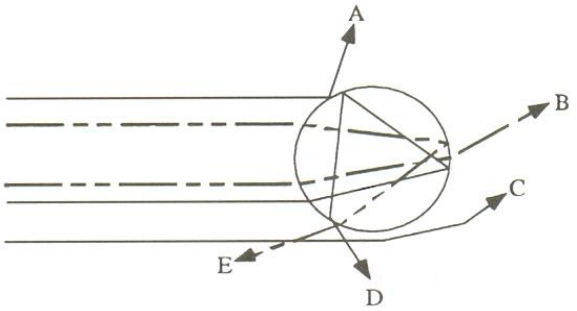


Fig. 6.6: scattering radiativo da parte di una particella sferica. Il raggio A è riflesso; B è rifratto due volte; C è diffratto; D è rifratto, riflesso due volte e quindi rifratto; E è rifratto, riflesso una volta e quindi rifratto. I raggi A,B,C,D sono diffusi in avanti o di lato, mentre il raggio E è retrodiffuso (Jacobson, 2000)

Tutti questi fenomeni ottici risultano importanti quando si considera l'interazione di un'onda elettromagnetica con una particella. Infatti, un'onda, incontrando una particella sferica come una goccia d'acqua in una nuvola, può venire riflessa dalla particella, oppure può subire una diffrazione (cioè l'onda può deviare la propria direzione di propagazione) o può entrare al suo interno. Una volta entrata, l'onda può essere assorbita, può essere trasmessa attraverso la stessa e rifratta o può essere riflessa nel suo interno una o più volte e di nuovo rifratta. La **Fig. 6.6** illustra schematicamente tutti questi processi tranne l'assorbimento. Lo *scattering* dovuto alle particelle (cioè la diffusione dei raggi che incidono su di una particella) è la somma degli effetti della riflessione, rifrazione e diffrazione.

6.1.4 IL CONCETTO DI ESTINZIONE

Anche se solamente in termini qualitativi, si è visto che la radiazione elettromagnetica, propagandosi in atmosfera, interagisce con le particelle presenti in essa (molecole di gas, aerosol, particelle ed idrometeore) subendo uno *scattering* (cioè i fotoni del fascio incidente vengono deviati dalla traiettoria originaria uscendo dal fascio stesso e prendendo nuove direzioni di propagazione) ed un *assorbimento* (cioè i fotoni del fascio vengono catturati dalle particelle che incontrano lungo la direzione di propagazione e spariscono dal fascio radiativo originario). In sostanza, l'intensità di un raggio che si propaga in atmosfera viene *attenuato* proprio a causa di questi processi. Pertanto, si indica col termine *estinzione* o *attenuazione* la diminuzione dell'intensità di un pennello di radiazione elettromagnetica che subisce uno *scattering* e un *assorbimento* durante la sua propagazione. Ciò è vero se nel mezzo attraversato non esiste una *sorgente* di radiazione elettromagnetica alla medesima lunghezza d'onda. In particolare, è vero per una radiazione monocromatica di origine solare che attraversa l'atmosfera, mentre, come vedremo, non sarà così per una radiazione infrarossa. La legge fondamentale che descrive il processo di estinzione è la *Legge di Beer-Bouguer-Lambert* secondo cui il processo di estinzione di un fascio di radiazione è direttamente proporzionale all'intensità della radiazione e all'ammontare del materiale attraversato dalla radiazione stessa, a patto che lo stato fisico del mezzo attraversato (cioè la sua pressione, temperatura e composizione, se il mezzo è gassoso) si mantenga costante.

Quantitativamente, si consideri un volumetto di materiale (es. aria) a forma di parallelepipedo di lunghezza infinitesima *dx* lungo la direzione di propagazione della radiazione (**Fig. 6.7**).

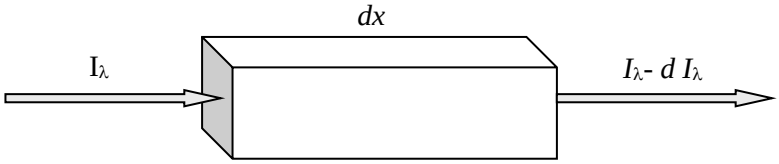


Fig. 6.7: processo di estinzione

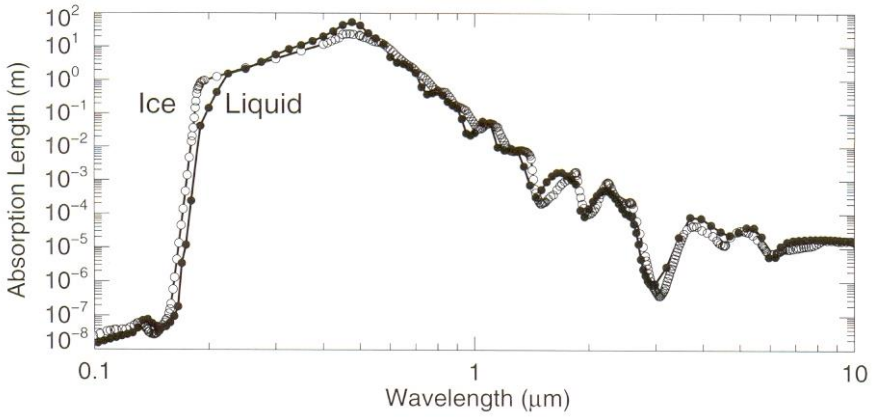


Fig. 6.8: lunghezza di estinzione (di assorbimento) per l'acqua liquida ed il ghiaccio (Bohren e Clothiaux, 2006)

Su questo volumetto, contenente *N* particelle per unità di volume, incide una radianza monocromatica I_λ e da esso emerge una radianza monocromatica $I_\lambda - dI_\lambda$, inferiore a quella incidente. Sperimentalmente si vede che la radianza monocromatica si riduce di un ammontare dI_λ, direttamente proporzionale a I_λ, a *dx* ed alle caratteristiche ottiche del materiale riassunte complessivamente nel *coefficiente volumetrico di estinzione* $\beta_{e,\lambda}$ (il pedice *e* indica che si tratta di estinzione ed il pedice λ ricorda la dipendenza dalla lunghezza d'onda della radiazione incidente). In pratica:

$$dI_\lambda = -\beta_{e,\lambda} I_\lambda dx \qquad [6.9a]$$

che è la forma differenziale della Legge di Beer-Bouguer-Lambert. Come si vede, l'unità di misura di $\beta_{e,\lambda}$ è l'inverso di una lunghezza (cm^{-1} o m^{-1}) e il suo inverso $1/\beta_{e,\lambda}$ ha le dimensioni di una lunghezza, la *lunghezza di estinzione*. L'indicare esplicitamente la dipendenza del coefficiente volumetrico di estinzione dalla lunghezza d'onda non è un'inutile pedanteria: in effetti è abbastanza frequente che tale parametro vari drasticamente con λ. Se, per esempio, si considera l'acqua liquida, la lunghezza di estinzione è dell'ordine di 10^{-8} m per $\lambda < 0.15$, ma diventa dell'ordine di $10 \div 10^2$ quando λ varia da 0.2 a 0.5 μm, come si può vedere nella **Fig. 6.8**.

Il coefficiente volumetrico di estinzione così com'è definito tiene conto complessivamente sia dello *scattering* che dell'*assorbimento* della radiazione che hanno luogo nel volumetto di controllo e per questo può essere riscritto come somma del contributo all'estinzione dovuto all'*assorbimento* ed allo *scattering*, cioè:

$$\beta_{e,\lambda} = \beta_{a,\lambda} + \beta_{s,\lambda} \qquad [6.9b]$$

dove $\beta_{a,\lambda}$ è il *coefficiente volumetrico di assorbimento* e $\beta_{s,\lambda}$ è il *coefficiente volumetrico di scattring.* Per tener conto meglio delle caratteristiche ottiche del materiale attraverso cui si propaga la radiazione, i coefficienti volumetrici $\beta_{e,\lambda}$, $\beta_{a,\lambda}$ e $\beta_{s,\lambda}$ possono essere espressi in modo da evidenziare la densità ρ del materiale (cioè la sua concentrazione se il materiale è gassoso). In questo caso:

$$\beta_{e,\lambda} = \rho\beta^*_{e,\lambda} \qquad \beta_{a,\lambda} = \rho\beta^*_{a,\lambda} \qquad \beta_{s,\lambda} = \rho\beta^*_{s,\lambda} \qquad [6.9c]$$

dove $\beta^*_{e,\lambda}$, $\beta^*_{a,\lambda}$ e $\beta^*_{s,\lambda}$ sono rispettivamente il *coefficiente di massa di estinzione, di assorbimento e di scattering*, espressi in $[m^2\,Kg^{-1}]$. Se, poi, indichiamo con *N* la *concentrazione in numero* (*Concentration Number*), cioè il numero di particelle (molecole) presenti nell'unità di volume, allora il coefficiente di estinzione, di assorbimento e di *scattering* possono essere espressi come:

$$\beta_{e,\lambda} = \sigma_{e,\lambda}N \qquad \beta_{a,\lambda} = \sigma_{a,\lambda}N \qquad \beta_{s,\lambda} = \sigma_{s,\lambda}N \qquad [6.9d]$$

dove $\sigma_{e,\lambda}$, $\sigma_{a,\lambda}$ e $\sigma_{s,\lambda}$ sono, rispettivamente, la *sezione d'urto* (*cross section*) *di estinzione, assorbimento e scattering.* Si vede immediatamente come l'unità di misura di una generica sezione d'urto sia $[m^2]$.

Si consideri, ora, un fascio di radiazione elettromagnetica che si propaga lungo l'asse *x* e si identifichino due punti x_1 e x_2 ($x_1 < x_2$). Si definisce *spessore ottico* (*optical thickness, optical depth, optical path*) la quantità adimensionale:

$$\tau_\lambda(x_2; x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \beta_{e,\lambda}(x)\,dx \qquad [6.9e]$$

Se, però, il coefficiente volumetrico di estinzione non varia con la posizione (cioè se il campo di radiazione è omogeneo), allora la relazione precedente si semplifica in:

$$\tau_\lambda(x_2; x_1) = \beta_{e,\lambda} \cdot (x_2 - x_1) \qquad [6.9f]$$

In questo caso la Legge di Beer, che è differenziale, può essere integrata lungo il percorso rettilineo da x_1 a x_2, riducendosi alla forma seguente:

$$I_\lambda = I_{0,\lambda} \cdot exp(-\tau_\lambda) = I_{0,\lambda} \cdot exp\left(-\beta_{e,\lambda}\Delta x\right) \qquad [6.10]$$

dove con $I_{0,\lambda}$ si è indicata la radianza caratteristica del punto x_1 e $\Delta x = x_2 - x_1$. Questa è la classica legge di estinzione esponenziale. Nell'ambito della sua validità, si può dire che:

- la capacità di trasmissione radiativa (*transmittance*) dello strato tra x_1 e x_2 è definibile come $T_\lambda = I_\lambda / I_{0,\lambda}$;
- la capacità di assorbimento (*absorbance*) dello strato tra i due punti x_1 e x_2 è definibile

come $A_\lambda = \frac{I_{0,\lambda} - I_\lambda}{I_{0,\lambda}}$;

Finora abbiamo considerato una radiazione monocromatica che attraversa uno spessore di atmosfera in cui sono presenti particelle di un ben preciso tipo, caratterizzate da coefficienti di estinzione, assorbimento e scattering che dipendono solo dalla lunghezza d'onda λ della radiazione incidente. Se, invece, la radiazione monocromatica attraversasse un volumetto in cui sono presenti *M* tipi di particelle, ciascuno dei quali caratterizzato da un diverso coefficiente di estinzione $\beta^i_{e,\lambda}$ ($i = 1, 2, .., M$) e da un differente *Concentration Number* N_i, allora l'*optical depth* sarà espresso dalla relazione seguente:

$$\tau_\lambda = \sum_{i=1}^{M} \int_{x_1}^{x_2} \beta^i_{e,\lambda}(x)\, dx = \sum_{i=1}^{M} \int_{x_1}^{x_2} N_i \sigma^i_{e,\lambda}(x)\, dx \qquad [6.11]$$

Esercizio 6.3

Supponiamo che i fumi di scarico di un'automobile siano ricchi di particolato che presenta una concentrazione pari a $N = 10^7$ particelle m^{-3} ed immaginiamo che i fumi emessi generino un pennacchio di fumo dietro l'automobile che si estende in verticale per 20 m. Immaginiamo, poi, che la concentrazione in numero *N* di particelle resti costante in tutto il pennacchio. Se la sezione d'urto risulta pari a $\sigma_e = 10^{-9}$ m^2 e se il sole invia alla superficie terrestre un flusso di energia elettromagnetica di 1376 $W \cdot m^{-2}$, trovare l'attenuazione del flusso di energia radiativa attraverso il pennacchio

Vista l'omogeneità verticale del pennacchio di fumo, possiamo utilizzare la Legge di Beer-Bouguer-Lambert nella forma (6.10). Quindi, il flusso di energia radiativa solare, una volta entrata nell'estremo superiore del pennacchio ($x = 0$) viene attenuata ed il suo valore al termine del pennacchio, cioè a $x = 20$ m risulterà pari a:

$$I(x=20) = I(x=0) \cdot \exp(-\sigma_e N \Delta x) = 1376 \cdot \exp\left(-10^{-9} \cdot 10^7 \cdot 20\right) = 1127 \ \ W \cdot m^2$$

Quindi la riduzione del flusso di radiazione elettromagnetica attraverso il pennacchio di fumo risulta pari a 249 $W \cdot m^2$.

6.2 LA RADIAZIONE DI CORPO NERO

Il Sole è senza dubbio la sorgente energetica primaria di energia elettromagnetica e la sua interazione col sistema Terra-Atmosfera fa sì che tale sistema sia un *insieme di corpi caldi* di cui dobbiamo studiare il comportamento in relazione all'emissione ed all'assorbimento di energia elettromagnetica. Dobbiamo, quindi, studiare come un generico corpo in condizioni di equilibrio termodinamico (cioè a temperatura, pressione e densità costante) emetta ed assorba energia elettromagnetica, perché il fatto che la materia ad una certa temperatura emetta ed assorba energia è un'evidenza sperimentale. Per fare ciò, conviene procedere ad un'*astrazione* ed usare il concetto di <u>*corpo nero*</u> (*black body*) introdotto nel 1860 da Gustav Kirchhoff che lo definisce come *quel corpo ideale che assorbe completamente tutta la radiazione incidente senza rifletterla*. Una visione semplicistica del corpo nero è la seguente. Si immagini di costruire una cavità con pareti fatte di un materiale che non permette alla radiazione esterna di entrare e a quella interna di uscirne. Le pareti siano termicamente isolate e la cavità sia a temperatura e pressione uniforme e costante. Sia, inoltre, presente un piccolo foro da cui può entrare della radiazione elettromagnetica. La maggior parte della radiazione a differenti lunghezze d'onda che riesce ad entrare nel foro verrà intrappolata nella cavità, indipendentemente dal tipo di materiale e dalle caratteristiche superficiali delle pareti. Potranno aver luogo, poi, riflessioni interne ripetute finché la radiazione verrà assorbita dalle pareti. La probabilità che la radiazione, una volta entrata nella cavità, se ne riesca attraverso il foro è talmente piccola che l'interno della cavità appare totalmente nero.

Tuttavia, è un'evidenza sperimentale che le pareti che hanno assorbito la radiazione la riemettono nella cavità. In pratica, il flusso di radiazione elettromagnetica emesso da ogni piccola area superficiale delle pareti è continuamente riflesso e ad ogni incontro con le pareti il flusso si affievolisce per l'assorbimento e si irrobustisce per le nuove emissioni. Quindi, alla fine si stabilizza nella cavità una situazione di equilibrio termodinamico in cui si origina e si mantiene un campo elettromagnetico costituito da un insieme infinito e caratteristico di radiazioni monocromatiche il cui peso dipende solo dalla temperatura a cui è mantenuta la cavità. La radiazione viene continuamente emessa e continuamente assorbita dalle pareti della cavità e si può dimostrare che nessun corpo reale può emettere o assorbire in misura maggiore di quanto faccia un corpo nero. Se si abbandona il concetto di onda elettromagnetica e si adotta la visione quantistica, nella cavità si stabilirà un *gas di fotoni* ognuno dei quali è caratterizzato da un ben preciso livello di energia. Questi livelli energetici, tutti espressi dalla (6.2a), saranno i più vari e la loro distribuzione statistica è stata ben studiata ed ubbidisce alla Legge Statistica di Bose-Einstein.

Da tutto ciò, parrebbe che la presenza di una cavità sia essenziale per l'esistenza di un corpo nero. In realtà non è così, come ha dimostrato Einstein nel 1917, perché se si isolasse un volumetto infinitesimo contenente un numero elevato di molecole di un gas, la cui temperatura è costante ed uniforme, e se fosse possibile impedire che tale volumetto sia *illuminato* da radiazione esterna, nel volumetto si instaurerebbe un campo elettromagnetico del tutto identico a quello di un corpo nero. Quindi il campo elettromagnetico che si viene a generare in un corpo nero è quel campo caratteristico emesso ed assorbito dalla materia in equilibrio termodinamico.

La radiazione di corpo nero, cioè la radiazione emessa ed assorbita dalla superficie di un corpo nero, è isotropa, omogenea e non polarizzata. Inoltre, l'ammontare di radiazione emessa (o assorbita) ad una lunghezza d'onda dipende solo dalla lunghezza d'onda stessa. Due corpi neri alla stessa temperatura emettono ed assorbono la stessa quantità complessiva di radiazione elettromagnetica e la distribuzione rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione emessa dai due corpi neri coincide perfettamente, ma nessun corpo reale può emettere o assorbire più di quanto faccia un corpo nero alla stessa temperatura.

L'atmosfera a rigore non è in equilibrio termodinamico perché la sua pressione e temperatura sono funzioni della posizione sia orizzontale che, soprattutto, verticale. Per questo, quando si trattano i processi radiativi in atmosfera, viene fatta una suddivisione della stessa in piccole porzioni, ciascuna delle quali è molto vicina all'essere isoterma ed isobara e quindi in *equilibrio termodinamico locale*. In questo modo, potremo applicare a ciascuna porzione in cui abbiamo suddiviso l'atmosfera le leggi del corpo nero che presenteremo nei punti che seguono.

6.2.1 LA LEGGE DI PLANCK

Per descrivere quantitativamente tale situazione di equilibrio è conveniente ricordare che i fotoni sono dei *bosoni*, cioè delle particelle a *spin* intero, tra loro indistinguibili e come tali debbono ubbidire alla Statistica Quantistica di Bose-Einstein. Una trattazione abbastanza rigorosa della radiazione di corpo nero è presentata in Alonso e Finn (1971) cui si rimanda per i dettagli. Liou (2002, pag. 10-11 e App. A) presenta la trattazione data nel classico lavoro di Planck del 1901.

Lo studio della radiazione di corpo nero prende le mosse dai lavori di Gustav Kirchhoff che, sulla base di osservazioni sperimentali, nel 1860 formulò la prima legge relativa all'emissione e all'assorbimento di radiazione elettromagnetica dalla materia. Si consideri una situazione di equilibrio termico. Definiamo potere assorbente la frazione di radianza incidente che viene assorbita dal corpo, mentre definiamo potere emissivo (emissività) del corpo la frazione della radiazione che il corpo emette. Detto ciò, la legge proposta da Kirchhoff asserisce che: *ad una data temperatura T e per una data frequenza* ν*, il rapporto tra il potere emissivo e quello di assorbimento è il medesimo per ogni corpo e dipende solo dalla temperatura T e dalla frequenza* ν. Impiegando la legge di Kirchhhoff, applicandola ad un corpo nero, utilizzando opportune considerazioni elettromagnetiche e termodinamiche e ritenendo valida la Statistica di Boltzmann, Wien nel 1896 giunse ad una relazione per la radianza monocromatica emessa da un corpo nero

alla temperatura T nell'intervallo di frequenza tra ν e $\nu + d\nu$ che sperimentalmente era verificata solo alle alte frequenze. D'altro canto, Rayleigh e Jeans, utilizzando le leggi dell'elettromagnetismo e limitando l'attenzione alle basse frequenze, giunsero ad una differente espressione per la radianza monocromatica di corpo nero.

Le due relazioni erano inconciliabili e richiedevano una riformulazione completa del problema che avvenne grazie al lavoro di Max Planck (1901), anche se la deduzione fornita da Einstein nel 1917 (*La teoria quantistica della radiazione*) presenta un'eleganza formale e una concisione ignota al lavoro di Planck. Senza entrare nei dettagli, la *radianza emessa da un corpo nero* (per esempio un piccolo strato d'aria di spessore infinitesimo in equilibrio termodinamico) alla temperatura T nell'intervallo di lunghezza d'onda $\nu \div \nu + d\nu$, è espressa dalla *Legge di Planck*:

$$B_\nu(T) = \frac{2h}{c^2}\frac{\nu^3}{exp\left[\frac{h\nu}{k_B T}\right] - 1} \qquad [6.12a]$$

dove k_B è la costante di Boltzmann ($1.38062 \cdot 10^{-23}$ J·K^{-1}). $B_\nu(T)$ è una radianza monocromatica ed è quindi espressa in [W·m^{-2}Hz^{-1}sr^{-1}]. Dato che il campo radiante di corpo nero è isotropo, ricordando la (6.5d), la rispettiva irradianza monocromatica o *flusso radiativo di corpo nero* risulta pari a:

$$F_\nu(T) = \frac{2\pi h}{c^2}\frac{\nu^3}{exp\left[\frac{h\nu}{k_B T}\right] - 1} \qquad [6.12b]$$

Quindi un corpo nero ad una temperatura T presenta, in emissione ed in assorbimento, una distribuzione in frequenza della *radianza* che dipende solo dalla temperatura T ed è data dalla (6.12a), mentre l'*irradianza* relativa (o flusso radiativo da corpo nero) è data dalla (6.12b). Essa quantifica la massima energia emessa ed assorbita alla frequenza ν da un corpo alla temperatura assoluta T. Per i nostri scopi, il tipico corpo nero che considereremo è un sottile strato d'aria in equilibrio termodinamico con le esatte caratteristiche di un corpo nero.

La definizione data, a rigore, non è esatta. In realtà, la legge di Planck asserisce più correttamente che la radianza, nell'unità di tempo e per angolo solido unitario, nell'intervallo di frequenze $\nu \div \nu + d\nu$ è pari a:

$$dI_\nu = B_\nu(T) \cdot d\nu \qquad [6.12c]$$

Le relazioni di Planck per la radianza (6.12a) e per l'irradianza (6.12b) sono state scritte in termini di frequenza ν. Molto spesso, però, è più utile esprimere queste relazioni in termini di lunghezza d'onda λ. Per effettuare la conversione da frequenza a lunghezza d'onda è fondamentale ricordare l'osservazione (6.12c) ed operare come mostrato nell'*Esercizio 6.4*. Il risultato finale è che:

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5\left(exp\left[\frac{hc}{k_B\lambda T}\right] - 1\right)} = \frac{C_1}{\lambda^5\left(exp\left[\frac{C_2}{\lambda T}\right] - 1\right)} \qquad [6.12d]$$

$$F_\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left(exp\left[\frac{hc}{k_B\lambda T}\right] - 1\right)} = \frac{\pi C_1}{\lambda^5\left(exp\left[\frac{C_2}{\lambda T}\right] - 1\right)} \qquad [6.12e]$$

Nelle due relazioni precedenti, per semplificare l'uso pratico delle due relazioni sono state introdotte due costanti $C_1 = 1.191 \cdot 10^{-16}$ (Wm^{2}sr^{-1}) e $C_2 = 1.4388 \cdot 10^{-2}$ m·K.

Esercizio 6.4

Si ottenga la relazione di Planck in termini di lunghezza d'onda.
Consideriamo l'integrale della radianza spettrale di corpo nero B_ν (6.12a) tra due frequenze ν_1 e ν_2. Eseguiamo un cambio di variabili in cui ν è sostituito da λ. Secondo un noto Teorema di Analisi Matematica si ha che:

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} B_\nu(T)d\nu = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} B_\lambda(T)\frac{d\nu}{d\lambda}d\lambda = -\int_{c/\nu_2}^{c/\nu_1} B_\lambda(T)\cdot\left(-\frac{c}{\lambda^2}\right)d\lambda$$

In questa relazione $B_\lambda(T)$ è la funzione di Planck scritta in termini di lunghezza d'onda. Lo Jacobiano dν/dλ come si vede è negativo, ma l'integrale dove essere positivo e perché lo sia è necessario invertire l'ordine in cui compaiono gli estremi di integrazione. Sfruttando il risultato ottenuto è immediato giungere alla relazione (6.12d).

La distribuzione della radianza di corpo nero espressa dalla legge di Planck è valida in tutto l'intervallo infinito di frequenza (e di lunghezza d'onda) a differenza della relazione proposta da Wien (1896), che è valida alle alte frequenze, e da quella proposta da Rayleigh e Jeans, che è valida invece alle basse frequenze. È', però, possibile vedere che forma assume la legge di Planck in queste due situazioni asintotiche:

- quando $\lambda \to 0$, le relazioni di Planck si riducono alla relazione di Wien:

$$B_\lambda(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}exp\left[\frac{h\nu}{k_B T}\right] \qquad B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}exp\left[\frac{hc}{k_B\lambda T}\right] \qquad [6.13a]$$

- quando, invece, $\lambda \to \infty$, le relazioni della radianza di corpo nero si riducono alla forma seguente, nota come distribuzione di Rayleigh-Jeans:

$$B_\lambda(T) = \frac{2k_B T\nu^2}{c^2} \qquad B_\lambda(T) = \frac{2k_B Tc}{\lambda^4} \qquad [6.13b]$$

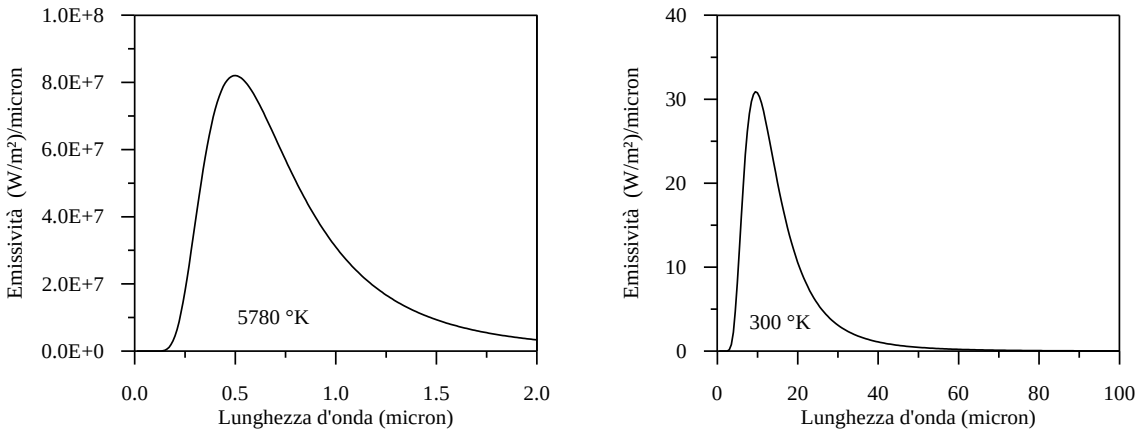


Fig.6.9: irradianza monocromatica di corpo nero per due temperature tipiche.

Siamo giunti alla legge di Planck considerando un sistema fisico ideale quale è il corpo nero. Per poter, però, applicare questi concetti fondamentali al trasferimento radiativo in atmosfera è necessario fare alcune considerazioni importanti. Se consideriamo una porzione unitaria della *superficie* del Sole (o meglio della sua fotosfera) caratterizzata da una ben precisa temperatura T_S (che di fatto si può considerare invariabile nel tempo e che ipotizziamo sia almeno in equilibrio termodinamico locale), sulla base di quanto abbiamo visto finora possiamo asserire che da questa superficie unitaria verrà emessa una radianza ed un'irradianza a tutte le frequenze possibili, la cui distribuzione in frequenza è data dalla legge di Planck. In realtà, visto che la superficie solare è un *oggetto reale* e non ideale, essa emetterà *al massimo* quanto previsto dalla legge di Planck. Considerazioni analoghe possono essere fatte anche per una porzione unitaria di superficie terrestre in equilibrio termodinamico locale ad una temperatura *T*. Anche in questo caso la radianza emessa alle varie frequenze sarà prossima a quella prevista dalla legge di Planck. Dato che, da osservazioni astronomiche, il Sole presenta una temperatura superficiale di circa 5780 K

ed è noto che la superficie terrestre ha una temperatura dell'ordine di circa 300 K, è interessante mettere a confronto l'irradianza monocromatica di due corpi a tali temperature supposti corpi neri, come viene mostrato nella **Fig. 6.9**. Per la temperatura di 5780 K si ha un picco di irradianza monocromatica in corrispondenza della banda del visibile, mentre per la temperatura di circa 300 K tale picco è localizzato nell'infrarosso. Dato che il sole presenta il picco di irradianza monocromatica nella banda delle onde corte, la *radiazione solare* è normalmente indicata col termine *radiazione ad onda corta*, mentre la *radiazione terrestre* viene normalmente indicato come *radiazione ad onda lunga*.

Fin qui abbiamo calato nel contesto atmosferico la legge di Planck assumendo che le varie parti del sistema Terra-Atmosfera siano esattamente dei corpi neri, cioè emettano esattamente secondo la legge di Planck. In realtà così non è: i corpi reali emettono radiazione elettromagnetica alle varie frequenze (o lunghezze d'onda) con una distribuzione che ha come estremo superiore la distribuzione di Planck. Più precisamente, se E_λ è la radianza emessa da un corpo reale con temperatura di equilibrio T alla lunghezza d'onda λ e $B_\lambda(T)$ è la radianza prevista alla stessa lunghezza d'onda da un corpo nero alla medesima temperatura di equilibrio, si definisce ***emissività monocromatica*** la grandezza seguente:

$$\varepsilon_\lambda = \frac{E_\lambda}{B_\lambda} \qquad [6.14]$$

che rappresenta la riduzione di radianza emessa dal corpo reale considerato rispetto a quella emessa da un corpo nero alla medesima temperatura di equilibrio. Ovviamente, se $\varepsilon_\lambda = 1$ per ogni lunghezza d'onda, il corpo considerato è esattamente un corpo nero. Se invece, l'emissività del corpo è inferiore all'unità per tutte le possibili frequenze, si sta considerando un *corpo grigio*, mentre un *corpo bianco* è un corpo che riflette uniformemente in tutte le direzioni l'intero ammontare di energia radiante incidente

6.2.2 LA LEGGE DI WIEN

La legge di Planck applicata all'intero intervallo di lunghezza d'onda dello spettro elettromagnetico (in linea di principio da 0 a ∞) consente di determinare la distribuzione di irradianza da corpo nero relativa ad una data temperatura e la **Fig. 6.9** ne è un esempio concreto. Si nota facilmente, però, che tra tutte le possibili lunghezze d'onda, ne esiste una, λ_{max}, cui corrisponde l'irradianza massima e che dipende solo dalla temperatura del corpo che irradia. Per renderci conto che ciò è vero in generale, basta trovare il massimo della relazione per il flusso radiativo da corpo nero:

$$F_\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left(exp\left[\frac{hc}{k_B\lambda T}\right]-1\right)} \qquad [6.15a]$$

cosa che si ottiene derivando questa relazione rispetto a λ ed eguagliando la derivata a zero. Si ottiene, così, l'equazione trascendente:

$$5\cdot(e^x-1) = x\cdot e^x \qquad [6.15b]$$

dove $x = hc/(\lambda k_B T)$. La soluzione di questa equazione si ottiene per via numerica e vale $x = 4.961$. Pertanto, λ_{max} è legata alla temperatura di emissione T dalla relazione:

$$\lambda_{max} = \frac{a}{T} \qquad [6.15c]$$

dove la costante numerica a è pari a 2897 (μm·K). Quindi la lunghezza d'onda all'emissione massima è inversamente proporzionale alla temperatura del corpo emittente, cosa che conferma la **Fig. 6.9**. Questa legge è nota come Legge di Wien.

C'è comunque un mistero in tutto ciò. Nulla vieta di ripetere il ragionamento precedente e cercare la frequenza cui corrisponde il valore massimo della (6.12b), cioè della legge di Planck

espressa in termini di frequenza. In questo caso, ripetendo il ragionamento precedente e ponendo $x = h\nu/k_BT$, si ottiene l'equazione trascendente:

$$3 \cdot (e^x - 1) = x \cdot e^x \qquad [6.15d]$$

la cui la soluzione, ottenuta per via numerica, vale $x = 2.819$. Pertanto, l'analogo della legge di Wien nel dominio delle frequenze risulta sempre dato dalla relazione:

$$h\nu_{max} = 2.819 \cdot k_BT \qquad [6.15e]$$

Come si può facilmente verificare, se cerchiamo la frequenza cui corrisponde λ_{max} ottenuta dalla (6.15c), tale frequenza non coincide con ν_{max} ottenuta dalla (6.15e). Questo piccolo mistero deriva dal fatto che il significato profondo della distribuzione di Planck è quello di funzione di distribuzione e, come noto, le funzioni di distribuzioni non presentano massimi invarianti rispetto ad una trasformazione di coordinate.

6.2.3 LA LEGGE DI STEFAN-BOLTZMANN

La legge di Planck descrive la distribuzione della radianza monocromatica in funzione della lunghezza d'onda (o della frequenza) e da essa si ottiene la relativa irradianza. Spesso però siamo interessati anche (e soprattutto, in molte applicazioni pratiche) alla radianza totale, cioè quella derivante da tutte le possibili lunghezze d'onda dello spettro elettromagnetico. Oltre a tutto, in moltissime applicazioni pratiche, è necessario conoscere l'irradianza totale emessa da un corpo nero. A tal fine consideriamo la relazione dell'irradianza monocromatica espressa in funzione della lunghezza d'onda λ (6.15a) ed integriamola su tutto lo spettro elettromagnetico. Ciò che otterremo è l'*irradianza totale di corpo nero* espressa dalla relazione:

$$F(T) = \int_0^\infty F_\lambda(T) \cdot d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left(exp\left[\frac{hc}{k_B\lambda T}\right] - 1\right)} \cdot d\lambda \qquad [6.16a]$$

Introducendo ora la nuova variabile $x = hc/(k_B\lambda T)$, questa relazione diventa:

$$F(T) = \frac{2k_B^4T^4}{h^3c^2} \int_0^\infty \frac{x^3}{(e^x - 1)} \cdot dx \qquad [6.16b]$$

L'integrale che qui compare a prima vista non appare risolvibile analiticamente, anche se è stato risolto con differenti tecniche analitiche, tutte piuttosto complesse. Landau e al. (1986, pag. 194-195), dimostrano che:

$$J = \int_0^\infty \frac{x^n}{(e^x - 1)} \cdot dx = \Gamma(n + 1) \cdot \zeta(n + 1) \qquad [6.16c]$$

cioè il prodotto della funzione Γ(n+1) e della funzione Zeta di Rienmann ζ(n+1). Nel caso specifico di $n = 3$ si ha che:

$$J = \Gamma(4) \cdot \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} 6 = \frac{\pi^4}{15} \qquad [6.16d]$$

Introducendo tutto ciò nella (6.16b), si ottiene l'espressione per l'*irradianza totale da corpo nero*, descritta dalla semplice relazione:

$$F = \sigma_B T^4 \qquad [6.16e]$$

nota come legge di Stefan-Boltzmann, in cui il coefficiente σ_B (pari a $5.67051 \cdot 10^{-8}$ $J \cdot m^{-2}K^{-4}$) è conosciuto come costante di Stefan-Boltzmann. In sostanza si è ottenuta una relazione estremamente importante per gli usi pratici: infatti, *data la temperatura assoluta T di un corpo (non necessariamente solido), l'irradianza massima di tale corpo (e quindi anche il suo massimo*

assorbimento radiativo) è pari all'irradianza totale di corpo nero che è proporzionale alla quarta potenza di T dove il coefficiente di proporzionalità è la costante di Boltzmann. Se, per esempio, si ipotizza che il Sole sia un corpo nero alla temperatura efficace di 5780 K, l'applicazione della legge di Stefan-Boltzmann porta ad un'irradianza totale di $63.28 \cdot 10^6$ W·m^{-2}; l'irradianza totale solare è, quindi, enorme, soprattutto se confrontata a quella terrestre che, in base alla (6.16e) e ad una temperatura media di 300 K, è di circa 459 W·m^{-2}.

Esercizio 6.5

Si consideri l'equazione di Stefan-Boltzmann. Individuare una relazione che evidenzi l'incremento di radiazione elettromagnetica emessa in funzione di un incremento di temperatura.
Differenziamo l'equazione di Stefan-Boltzmann ed otteniamo:

$$dF = 4\sigma_B T^3 dT$$

Quindi, per un dato incremento fissato *dT*, l'incremento di radiazione elettromagnetica emessa cresce proporzionalmente al cubo della temperatura assoluta.

6.2.4 LA LEGGE DI KIRCHOFF

Mentre un corpo nero emette ed assorbe una radianza monocromatica $B_\lambda(T)$ dipendente dalla temperatura di equilibrio a cui si trova, un corpo non nero, ma opaco (cioè che non consente una trasmissione di radiazione al suo interno), in equilibrio con la radiazione circostante, emette ed assorbe una radianza inferiore a quella caratteristica di un corpo nero alla stessa temperatura.

Consideriamo un corpo opaco in equilibrio termico con un campo di radiazione. Essendo in equilibrio, se della radianza giunge su una sua piccola porzione superficiale, parte di essa verrà assorbita e parte verrà riflessa. Dato che la massima radianza monocromatica che un corpo non nero può assorbire ed emettere è quella di corpo nero $B_\lambda(T)$, tale corpo ne emetterà una frazione, cioè $\varepsilon_\lambda \cdot B_\lambda(T)$ dove ε_λ è l'*emissività monocromatica* e ne assorbirà anche una parte che corrisponderà ad una frazione α_λ di quella assorbita dal corpo nero (che è pari a quella emessa). Quindi la radianza monocromatica assorbita sarà pari a $\alpha_\lambda\ B_\lambda(T)$, dove α_λ è *coefficiente di assorbimento monocromatico* del corpo. Ma, perché il corpo non aumenti la propria temperatura, è necessario che la radianza emessa sia pari a quella assorbita. Quindi:

$$B_\lambda(T) = \varepsilon_\lambda B_\lambda(T) + (1 - \alpha_\lambda) B_\lambda(T) \qquad [6.17a]$$

dove la componente $(1\text{-}\alpha_\lambda)\ B_\lambda(T)$ è la parte di radianza monocromatica *riflessa* dalla superficie del corpo. Questa relazione deve essere valida per ogni λ, anche se α_λ e ε_λ possono variare con la lunghezza d'onda λ. Comunque, è immediato rendersi conto che, per ogni lunghezza d'onda:

$$\alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda \qquad [6.17b]$$

cioè il coefficiente di assorbimento è uguale all'emissività. Questa relazione ovviamente vale anche per un corpo nero e, visto che un corpo nero emette quanto assorbe, α_λ e ε_λ sono uguali ad 1 per ogni lunghezza d'onda e la componente di radianza riflessa da un corpo nero è nulla. Questa è una proprietà fondamentale che il corpo rispetta quando è in *equilibrio termodinamico*. Sostanzialmente ciò è quanto afferma la ***legge di Kirchoff*** che richiede le condizioni di equilibrio termodinamico e ciò non è vero per tutta l'atmosfera. Tuttavia, se consideriamo la sua parte bassa (cioè quote inferiori a 60÷70 km) allora essa risulta applicabile con un elevato grado di confidenza.

I corpi reali presentano comportamenti che si discostano più o meno da quelli del corpo nero. Quando avviene ciò, essi vengono indicati col termine *corpi grigi* e sono caratterizzati dal possedere emissività e coefficienti di assorbimento sempre uguali tra loro (secondo la legge di Kirchhoff), ma inferiori all'unità. In particolare, un *corpo bianco* è un corpo che riflette completamente ed uniformemente tutta la radianza incidente. I corpi reali presentano, in generale,

emissività e coefficienti di assorbimento che variano con la lunghezza d'onda. Sarebbe importante ai fini pratici poter definire un'*emissività media* ed un *coefficiente di assorbimento medio* per un corpo di interesse. Anche se sembrerebbe banale tutto ciò, comunque l'operazione di media presenta una pericolosa caratteristica come viene evidenziato da Bohren e Clothiaux (2006, pag.20). Senza entrare nei particolari, mentre le emissività ed i coefficienti di assorbimento monocromatico rispettano la legge di Kirchoff, così non è per l'emissività ed il coefficiente di assorbimento medio.

Fin qui abbiamo considerato solo l'emissione e l'assorbimento di energia radiativa. Se però consideriamo un generico corpo (per esempio un piccolo strato d'aria atmosferica) non opaco su cui incide della radiazione ad una data lunghezza d'onda λ, vediamo che parte di essa viene *riflessa* e parte viene *trasmessa*. Per *trasparenza* di un corpo si intende il fatto che parte (o tutta) dell'energia incidente su di esso viene trasmessa al suo interno. È quindi possibile definire un *coefficiente di trasmissione* t_λ definito come la frazione di radiazione incidente con lunghezza d'onda λ che viene trasmessa attraverso il corpo. Se parte della radiazione viene trasmessa attraverso il corpo, una parte viene anche riflessa dal corpo stesso. Quindi è possibile definire *riflettività* r_λ (normalmente indicata col termine di *albedo*) la frazione di radiazione a lunghezza d'onda λ che viene riflessa dal corpo in esame. Per la conservazione dell'energia è necessario che:

$$\alpha_\lambda + r_\lambda + t_\lambda = 1 \qquad [6.17c]$$

Come sempre, abbiamo ragionato in *termini monocromatici*, cioè abbiamo considerato una radiazione elettromagnetica ad una ben precisa lunghezza d'onda λ. Quindi, l'emissività, il coefficiente di assorbimento, il coefficiente di riflessione r_λ ed il coefficiente di trasmissione t_λ sono funzioni della lunghezza d'onda considerata e quindi potranno variare, in generale, con essa. Per esempio, la neve fresca riflette circa il 90% della radiazione incidente nella banda dell'ultravioletto e del visibile, ma molto poco nella banda dell'infrarosso. Ai fini pratici, invece di considerare una singola lunghezza d'onda, è anche possibile e conveniente esaminare l'effetto complessivo su una banda più o meno vasta di lunghezze d'onda. Risulta quindi possibile, come detto e con le controindicazioni sopra sottolineate, definire un *coefficiente di emissività integrale* ed un *coefficiente di albedo integrale*. Nella **Tab. 6.4** viene riportato il valore di emissività integrale (riferito alla temperatura di 20°C) tipico di alcune superfici naturali.

Tipo di Superficie	Emissività Integrale
Acqua	0.86
Ghiaccio	0.92
Neve	0.99
Vegetazione	0.94
Terreno nudo	0.97

Tab.6.4: alcuni esempi di coefficiente di emissività integrale.

Nelle applicazioni che riguardano il trasferimento radiativo in atmosfera, bisogna distinguere tra l'*emissività di una superficie* (per esempio, quella caratteristica del suolo con le sue diverse coperture vegetali o meno) e l'*emissività di un volume di atmosfera*.

L'emissività di una superficie dipende in generale dalla direzione dell'emissione, dalla temperatura della superficie, dalla lunghezza d'onda della radiazione emessa e da alcune proprietà ottiche della superficie stessa (per esempio l'indice di rifrazione). Tuttavia, vista la temperatura tipica delle superfici interessanti ai fini meteorologici, le emissioni saranno tutte nella banda dell'infrarosso ($\lambda > 4$ μm). In questa banda praticamente tutte le superfici sono emettitori efficienti con emissività indipendente dalla direzione e con coefficiente di emissività $\varepsilon > 0.8$ come si può vedere dalla **Tab. 6.5** in cui sono raccolti i coefficienti di emissività propri per una lunghezza d'onda compresa tra 10 e 12 μm. Perciò, l'intensità emessa da una superficie unitaria ad una data lunghezza d'onda λ risulta pari a:

$$I_\lambda = \varepsilon_\lambda \cdot B_\lambda(T) \qquad [6.18a]$$

Tipo di Superficie	Emissività (λ tra 10 e 12 μm)
Acqua	0.993÷0.998
Ghiaccio	0.98
Vegetazione verde	0.975÷0.986
Sabbia	0.949÷0.962
Neve	0.969÷0.997
Granito	0.898

Tab. 6.5: emissività nell'intervallo di lunghezza d'onda compreso tra 10 e 12 μm

Per quanto riguarda, invece, l'*emissività di una porzione di atmosfera*, si deve far riferimento alla Legge di Kirchhoff e quindi l'emissione termica associata sarà pari a:

$$j = \beta_{\alpha,\lambda} \cdot B_\lambda(T) \qquad [6.18b]$$

dove $\beta_{a,\lambda}$ è il coefficiente di assorbimento.

6.3 SCATTERING E ASSORBIMENTO

Consideriamo una direzione arbitraria *x* lungo cui immaginiamo che si propaghi un'onda elettromagnetica piana di lunghezza d'onda λ o, che è lo stesso, un fascio collimato di fotoni la cui traiettoria individuale è una retta parallela all'asse *x* (**Fig. 6.11**).

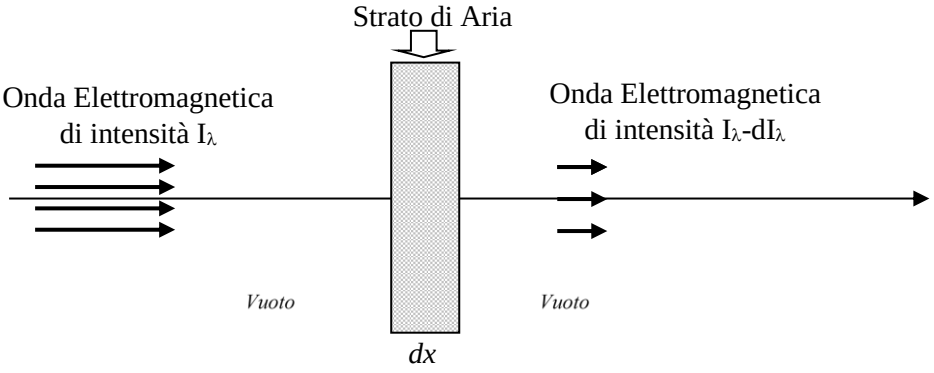


Fig. 6.11: assorbimento e scattering

Immaginiamo, inoltre, che i fotoni viaggino nel vuoto fino a giungere alla posizione $x = 0$, dove incontrano una piccola porzione di atmosfera di spessore *dx*. Sia I_λ l'intensità del flusso di fotoni fino alla posizione $x = 0$, che non varierà perché nel vuoto i fotoni non hanno avuto alcun tipo di interazione. Nello strato di aria *dx* che essi attraversano in genere sono presenti non solo gas differenti (per esempio, azoto ed ossigeno), ma anche particelle di vario genere e di varie dimensioni come vere e proprie particelle solide, prodotte dalla combustione o dall'erosione dei suoli, o gocce d'acqua (idrometeore) come quelle che si trovano nelle nubi e nella nebbia. Ovviamente quando i fotoni incontrano o le molecole di gas o le particelle *solide* ha luogo una qualche forma di interazione reciproca. Il risultato finale è che il fascio di fotoni emergerà dallo strato d'aria nella posizione *dx* diminuito d'intensità per un ammontare dI_λ secondo la Legge di Beer-Bouguer-Lambert, sempre che nello strato d'aria non sia presente una sorgente di radiazione della medesima lunghezza d'onda. Se la radiazione considerata è ad onda corta, cioè di origine solare, ciò è vero, mentre non lo è nel caso di radiazione ad onda lunga. Le cause della diminuzione

dell'intensità dell'onda piana e quindi all'asportazione di alcuni fotoni dal fascio collimato originario dovute dalla presenza dei componenti gassosi dell'atmosfera sono l'argomento che ci accingiamo a trattare per primo. Solo successivamente ci occuperemo delle analoghe interazioni con le particelle solide e le idrometeore.

Conviene, però, anticipare che queste cause sono sostanzialmente di due tipi. Una possibilità è che uno dei fotoni del fascio venga assorbito da una delle molecole che incontra lungo il cammino. In questo caso, il fotone sparisce definitivamente dal fascio e la propria energia viene completamente trasferita alla molecola con cui è entrato in collisione, che aumenterà la propria energia interna (*assorbimento della radiazione elettromagnetica*). Un'altra possibilità, invece, è che l'interazione tra fotone e molecola comporti solo una deviazione del fotone rispetto alla sua traiettoria originale. In questo caso, il fotone sparirà dal fascio originario, ma continuerà la propria vita percorrendo una nuova direzione di propagazione fuori dal fascio originario (*scattering* o *diffusione* della radiazione elettromagnetica).

Possiamo aspettarci che nei due processi le molecole dei gas atmosferici si comportano in maniera decisamente differente dalle particelle solide e per questo tratteremo separatamente i due casi. Comunque, al di là degli aspetti specifici relativi al processo di assorbimento e di *scattering*, ciò che più ci importa è il loro peso sulla riduzione della radiazione elettromagnetica incidente. A questo proposito, ricordando il Punto 6.1.4, l'effetto netto della presenza dell'aria può essere scomposto nei contributi seguenti:

- riduzione dell'intensità per scattering dei gas: $dI_{s,g,\lambda}$
- riduzione dell'intensità per assorbimento dovuto ai gas: $dI_{a,g,\lambda}$
- riduzione dell'intensità per scattering delle particelle solide: $dI_{s,p,\lambda}$
- riduzione dell'intensità per l'assorbimento dovuto alle particelle solide: $dI_{a,p,\lambda}$
- riduzione dell'intensità per lo scattering delle idrometeore: $dI_{s,h,\lambda}$
- riduzione dell'intensità per l'assorbimento dovuto alle idrometeore: $dI_{a,h,\lambda}$

Tutte queste cause di riduzione opereranno indipendentemente una dall'altra e quindi possiamo ritenere valido il principio della sovrapposizione degli effetti, secondo cui:

$$dI_\lambda = dI_{s,g,\lambda} + dI_{a,g,\lambda} + dI_{s,p,\lambda} + dI_{a,p,\lambda} + dI_{s,h,\lambda} + dI_{a,h,\lambda} \qquad [6.19]$$

Qui di seguito cercheremo di quantificare le varie riduzioni per *scattering* e per assorbimento dovute ai gas atmosferici, al particolato ed alle idrometeore. L'argomento è molto complesso e non sarà possibile affrontarlo col giusto grado di approfondimento. Ci si limiterà a presentare i risultati cui sono giunte le varie teorie proposte in merito, rimandando a Liou (2002) per eventuali dettagli.

In atmosfera sono presenti due gruppi di sostanze gassose (**Tab. 6.6**): tutti quei gas la cui concentrazione è praticamente sempre costante nel tempo (i *costituenti permanenti*) e le sostanze gassose la cui concentrazione varia nello spazio e nel tempo (i *costituenti variabili*). In questo gruppo di sostanze sono presenti quelle sostanze che normalmente denominiamo *sostanze inquinanti*. Come si nota, l'azoto, l'ossigeno e l'argon costituiscono da soli il 99.96% del totale dei gas atmosferici, mentre la presenza dei costituenti variabili è generalmente molto ridotta, ad eccezione dell'acqua presente in quantità relativamente elevata, ma distribuita nello spazio e nel tempo in modo irregolare. Infatti l'umidità specifica dell'aria decresce rapidamente con la quota in modo praticamente esponenziale: più del 50% dell'acqua è concentrata al di sotto degli 850 mbar e circa il 90% è confinata nello strato di atmosfera tra il livello del suolo e 500 mbar. Inoltre varia anche con la latitudine presentando il valore massimo nelle zone tropicali. Tutti questi costituenti atmosferici gassosi interagiscono con la radiazione elettromagnetica ad onda corta di provenienza solare e con la radiazione ad onda lunga di origine atmosferica e terrestre, producendo *scattering* ed assorbimento.

COSTITUENTI PERMANENTI		COSTITUENTI VARIABILI	
Costituente	**% in Volume**	**Costituente**	**% in Volume**
N_2	78.084	H_2O	0 - 0.04
O_2	20.948	O_3	$0 – 12 \times 10^{-4}$
Ar	0.934	SO_2	0.001×10^{-4}
CO_2	0.036	NO_2	0.001×10^{-4}
Ne	18.18×10^{-4}	NH_3	0.004×10^{-4}
He	5.24×10^{-4}	NO	0.0005×10^{-4}
Kr	1.14×10^{-4}	H_2S	0.00005×10^{-4}
Xe	0.089×10^{-4}	HNO_3	Tracce
H_2	0.5×10^{-4}	Clorofluorocarburi	Tracce
CH_4	1.7×10^{-4}		
N_2O	0.3×10^{-4}		
CO	0.08×10^{-4}		

Tab. 6.6: costituenti atmosferici gassosi (da Liou, 2002)

6.3.1 SCATTERING DELLA RADIAZIONE DA PARTE DEI GAS ATMOSFERICI

6.3.1.1 Generalità

Consideriamo ora la propagazione in aria di una radiazione elettromagnetica che immaginiamo come una sequenza di fotoni che percorrono traiettorie rettilinee. L'aria, a sua volta, è costituita da particelle di vario tipo: le molecole dei gas che la costituiscono (con dimensione caratteristica dell'ordine di 10^{-4} μm), gli aerosol (con dimensione caratteristica dell'ordine di 1 μm), le gocce d'acqua (con dimensione caratteristica dell'ordine di 10 μm), i cristalli di ghiaccio (con dimensioni caratteristiche dell'ordine di 100 μm) e le idrometeore di maggior dimensione (con dimensioni caratteristiche dell'ordine di 1 cm). Se un treno di fotoni (cioè un flusso di energia radiante) percorre una data traiettoria, è molto probabile che venga in collisione con una di queste particelle e che tale interazione determini la ***diffusione*** (***scattering***) della radiazione incidente. Il risultato complessivo è che il treno di fotoni, originariamente ben caratterizzato direzionalmente, viene *diffuso*, cioè che la traiettoria dei vari fotoni viene deviata in modo variabile a seconda della frequenza della radiazione incidente e della dimensione della particella che ha determinato lo *scattering*. Quindi, se ci si pone in un punto specifico dello spazio, solo una parte della radiazione raggiunge tale punto direttamente, mentre un'altra parte lo raggiunge in maniera indiretta a causa dello *scattering*. Se guardiamo il processo in maniera più precisa, possiamo affermare che lo *scattering* è un processo fisico per cui una generica particella (una molecola o una particella macroscopica) che viene a trovarsi lungo la linea di propagazione della serie di fotoni) *asporta con continuità* energia dall'onda incidente e, comportandosi come una sorgente puntuale, *re-irradia* tale energia in tutte le possibili direzioni in maniera non necessariamente isotropa.

L'effetto che particelle di dimensioni differenti hanno sullo *scattering* è legato al parametro adimensionale *x* noto come ***size parameter***. Se immaginiamo, per semplicità, che una qualunque particella sia sferica di raggio a (e quindi di circonferenza $2\pi a$), e che la radiazione elettromagnetica incidente abbia lunghezza d'onda λ, il parametro adimensionale x è pari a:

$$x = \frac{2\pi a}{\lambda} \qquad [6.20]$$

Come ci si può immaginare, questo parametro consente di evidenziare modi di *scattering* differenti a seconda del suo valore. Per mostrare come la dimensione della particella influenzi lo *scattering*, consideriamo la **Fig. 6.12** in cui viene illustrato schematicamente lo *scattering* di una radiazione elettromagnetica di 0.5 μm che *illumina* una particella di 10^{-4} μm (*a*), di 0.1 μm (*b*) e di 1 μm (*c*). Quando la particella ha dimensione molto inferiore alla lunghezza d'onda λ, la radiazione viene diffusa in maniera sostanzialmente uguale sia *in avanti* (*forward*) che all'*indietro*

(*backward*). Se $x << 1$, cioè se il raggio della particella è di molto inferiore alla lunghezza d'onda della radiazione incidente, lo *scattering* conseguente prende il nome di <u>*Scattering di Rayleigh*</u>. Un esempio concreto di questo tipo è rappresentato dallo *scattering* della luce visibile (0.4-0.7 μm) dovuta alle molecole che costituiscono l'atmosfera. La luce così diffusa, che giunge ai nostri occhi, è la ragione del fatto che vediamo il cielo azzurro.

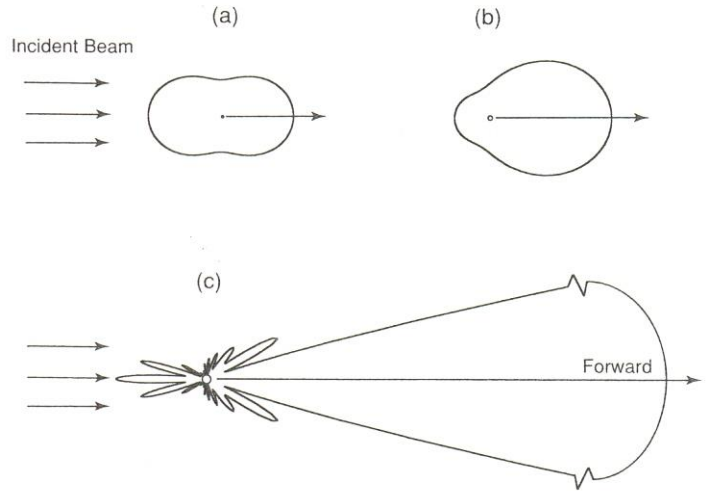


Fig. 6.12: tipi differenti di scattering della radiazione: a) scattening con $x << 1$, b) scattering con $x \sim 1$, c) scattering con $x > 1$ (Liou, 1992b)

Quando però la dimensione della particella è dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda della radiazione, lo *scattering* è prevalentemente *forward* e lo *scattering* che essa determina prende il nome di <u>*Scattering di Lorenz-Mie*</u>. Quando poi la dimensione della particella è molto maggiore della lunghezza d'onda, lo *scattering* è sempre *forward*, ma con una distribuzione spaziale tanto più complessa e bizzarra quanto maggiore è il valore di *x*. Ovviamente abbiamo semplificato molto le cose, visto che abbiamo ritenuto tutte le particelle di forma sferica, cosa che non è, soprattutto per le particelle di ghiaccio presenti nelle nubi; comunque per i nostri scopi, questa semplificazione è più che accettabile.

Dato che le particelle responsabili dello *scattering* sono molto distanti l'una dall'altra, ognuna di esse diffonderà la radiazione elettromagnetica come se fosse la sola particella presente (*independent scattering*) e la radiazione diffusa manterrà la stessa lunghezza d'onda della radiazione incidente visto che gli urti tra particelle e fotoni sono di tipo elastico. Tenendo conto di questa ipotesi, possiamo almeno qualitativamente descrivere ciò che avviene in atmosfera.

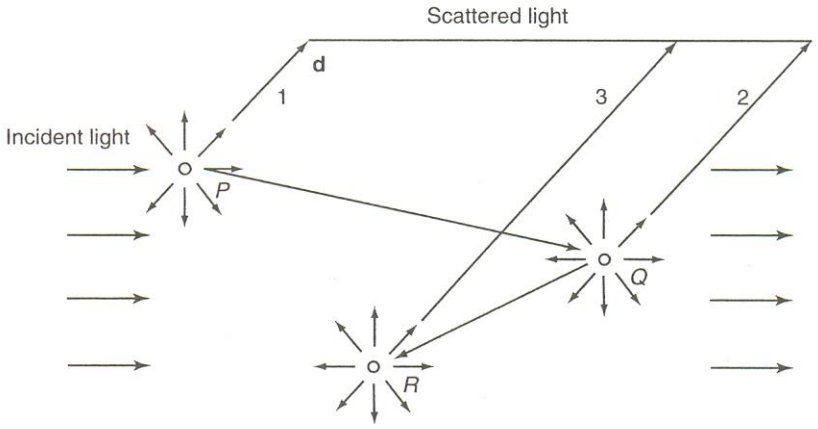


Fig. 6.13: visione schematica dello scattering multiplo (da Liou 1992b)

Consideriamo un generico volume di aria in cui sono presenti numerosissime particelle e ciascuna di esse è *illuminata* dalla radiazione incidente. Quindi ogni particella, indipendentemente dalle altre, diffonderà a sua volta anche la radiazione che è già stata diffusa da altre particelle. Questo meccanismo è mostrato schematicamente in **Fig. 6.13**. Se consideriamo tale figura, una particella posta nella posizione *P* rimuove energia da un fascio monocromatico di radiazione incidente e la diffonde in tutte le direzioni. Questo è uno *scattering singolo*. Nel frattempo, una porzione di questa radiazione diffusa raggiunge anche la particella nella posizione *Q*, dove viene ulteriormente diffusa in tutte le direzioni. Questo è uno *scattering secondario*. Comunque, un'altra porzione della radiazione incidente raggiunge direttamente *Q* dove avviene uno *scattering* singolo. Se consideriamo, poi, la particella nella posizione *R*, vediamo che anch'essa diffonde la radiazione che già era stata diffusa in *Q*, parte della quale proveniva dallo *scattering* primario in *P*. Lo scattering di questo tipo, ovviamente il più comune, è lo *scattering multiplo* che avviene soprattutto quando le particelle sono costituite dagli aerosol e dalle idrometeore nelle nubi. Lo *scattering* comporta quindi la ridirezione dell'energia radiante incidente, anche se, come vedremo poco oltre, spesso l'energia radiante che raggiunge un oggetto (visto come un insieme di particelle) oltre che diffondere energia radiante, in parte l'assorbe anche, in generale a particolari lunghezze d'onda. Per esempio, un prato ci appare verde perché diffonde la luce verde ed assorbe la radiazione di colore rosso e blu necessaria alla sintesi clorofilliana.

Fin qui abbiamo trattato il processo di *scattering* in generale. Se ci focalizziamo sullo *scattering* dovuto ai soli costituenti gassosi dell'atmosfera, è evidente che siamo sempre nelle condizioni in cui $x << 1$, quindi è lo *scattering di Rayleigh* quello che si viene ad instaurare. Le considerazioni relative allo *scattering* di Rayleigh sono piuttosto complesse e si basano sull'Elettromagnetismo Classico. Rimandiamo chi fosse interessato ad approfondire il tema al libro di Liou (2002) ed in particolare ai Capitoli 3 e 5.

6.3.1.2 Lo scattering di Rayleigh

Consideriamo il caso in cui la lunghezza d'onda della radiazione incidente sia maggiore della dimensione di una particella posta lungo la sua direzione di propagazione. Questo è il caso in cui le molecole di gas dell'atmosfera (principalmente N_2 e O_2) o le particelle di dimensioni piccolissime si interpongono alla radiazione incidente. Dal punto di vista dell'Elettromagnetismo Classico, il campo elettrico ed il campo magnetico, che costituiscono l'onda elettromagnetica, inducono nella particella, che viene ritenuta omogenea e di forma sferica, un momento di dipolo che re-irradia in tutte le direzioni onde elettromagnetiche secondarie. La trattazione teorica di questo processo di interazione viene fatta applicando le equazioni di Maxwell opportunamente semplificate ed adattate alla geometria costituita da un'onda piana incidente e da una particella da essa illuminata praticamente puntiforme. Qui di seguito ci limiteremo a riassumere i risultati ottenuti in una forma che sia direttamente applicabile al problema del trasferimento radiativo in atmosfera.

Si consideri, ora, la situazione di **Fig. 6.14** in cui si mostra un fascio di radianza I_0 e di lunghezza d'onda λ che illumina una singola particella. Si consideri inoltre un punto caratterizzato dal vettore posizione **r**, posto quindi ad una distanza *r* dalla particella che sta producendo la diffusione del fascio di fotoni e sia θ l'angolo tra **r** e la direzione di propagazione del fascio.

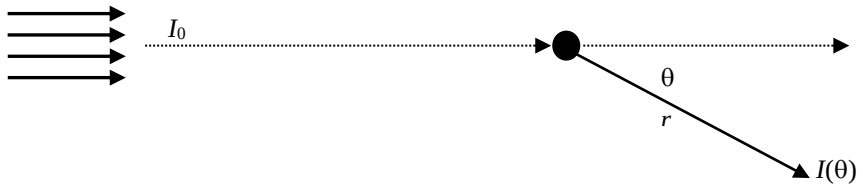


Fig. 6.14: scattering di una particella

Se registriamo la radianza $I(r,\theta)$ nel punto **r** deviata di un angolo θ rispetto alla direzione di propagazione originaria dell'onda, la teoria assicura che essa è data dalla relazione seguente:

$$I(r,\theta) = \frac{I_0}{r^2}\alpha^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 \frac{1+\cos^2\theta}{2} \qquad [6.21a]$$

che evidenzia come l'attenuazione della radiazione per *scattering* dovuto alle molecole dei costituenti gassosi dell'atmosfera risulti inversamente proporzionale alla quarta potenza della lunghezza d'onda della radiazione stessa. Essa può anche essere riscritta come:

$$I(r,\theta) = \frac{I_0}{r^2}\alpha^2 \frac{128\pi^5}{3\lambda^4}\frac{P(\cos\theta)}{4\pi} \qquad [6.21b]$$

in cui è stata evidenziata la *funzione di fase P*(cosθ), parametro adimensionale che vale:

$$P(\cos\theta) = \frac{3}{4}(1+\cos^2\theta) \qquad [6.21c]$$

e che descrive la dispersione angolare dei raggi secondari che si diffondono da una particella *illuminata* da un'onda elettromagnetica. Come si può notare, questa funzione presenta un massimo sia nelle direzioni *forward* che nella direzione *backward* (per angoli θ di 0° e 180°) ed un minimo per gli angoli 90° e 270°. Un altro elemento importante è che se la radiazione incidente è di origine solare, essa non è polarizzata e ciò implica che la funzione di fase nell'intero spazio (e non ristretta al piano rappresentato in **Fig.6.14**) altro non è che il solido di rotazione ottenuto facendo ruotare la (6.21c) attorno all'asse di simmetria giacente lungo la direzione di propagazione originario dell'onda.

Nella (6.21a) è presente il coefficiente α (*polarizzabilità* delle molecole) che ha le dimensioni di un volume e che può essere derivato dalle leggi dell'elettromagnetismo, ottenendo:

$$\alpha = \frac{3}{4\pi N_{a0}}\left(\frac{m^2-1}{m^2+1}\right) \qquad [6.22a]$$

dove N_{a0} è il numero totale di molecole di aria per unità di volume a temperatura e pressione standard (288 K e 1013 mbar) ed *m* è l'indice di rifrazione della molecola considerata. Al Cap. 1 abbiamo mostrato come calcolare N_{a0} (che vale $2.55\cdot10^{19}$ molecole cm^{-3}) e quindi l'unico elemento necessario per determinare la polarizzabilità delle molecole dell'aria è l'indice di rifrazione. Invece di considerare le singole molecole che costituiscono l'atmosfera, è più conveniente considerarle nel loro insieme, attribuendo all'aria un indice di rifrazione complessivo, dell'ordine di 1, la cui dipendenza dalla lunghezza d'onda della radiazione incidente è:

$$m-1 = 10^{-8}\left(6432.8 + \frac{2949810}{146-\lambda^{-2}} + \frac{25540}{41-\lambda^{-2}}\right) \qquad [6.22b]$$

In pratica, dato che *m* è molto prossimo a 1, la (6.22a) può essere approssimata come (Liou, 2002):

$$\alpha = \frac{3}{4\pi N_{a0}}\left(\frac{m^2-1}{m^2+1}\right) \cong \frac{1}{4\pi N_{a0}}(m^2-1) \qquad [6.22c]$$

Se si integra la (6.21a) su un angolo solido di 4π (tutta la sfera che attornia il punto di *scattering*), si ottiene la radianza complessiva che è stata rimossa dal fascio incidente a causa della diffusione operata dalla singola molecola.

La relazione (6.21b) può essere riscritta anche evidenziando la *sezione d'urto di singolo scattering* $\sigma_{s,g,\lambda}$ (*single scattering cross-section*), ottenendo:

$$I(r,\theta) = I_0\frac{\sigma_{s,g,\lambda}}{r^2}\cdot\frac{P(\cos\theta)}{4\pi} \qquad [6.23a]$$

A conti fatti, la sezione d'urto risulta pari a:

$$\sigma_{s,g,\lambda} = \frac{8\pi^3(m^2-1)^2}{3\lambda^4 N_{a0}^2}\cdot f(\delta) \qquad [6.23b]$$

dove con la funzione $f(\delta)$ si è indicato il *termine di correzione anisotropa* che tiene conto della deviazione dello *scattering* di Rayleigh dallo *scattering* perfettamente isotropo. Senza entrare nei dettagli, $\delta \approx 0.035$ e quindi $f(\delta)$ vale circa 1.06.

Risulta ora possibile determinare il *coefficiente di estinzione per lo scattering singolo delle molecole gassose* $\beta_{s,g,\lambda}$ che, in presenza di una concentrazione di particelle gassose *N* (particelle per unità di volume), è dato da:

$$\beta_{s,g,\lambda} = N \cdot \sigma_{s,g,\lambda} \qquad [6.23c]$$

Quindi lo spessore ottico relativo all'intera atmosfera derivante esclusivamente dallo *scattering* delle singole molecole di gas risulta pari a:

$$\tau(\lambda) = \sigma_{s,g,\lambda} \int_0^{z_\infty} N(z) \cdot dz \qquad [6.23d]$$

dove $N(z)$ è il profilo verticale del *concentration number* delle molecole d'aria.

A questo punto abbiamo raggiunto il primo risultato pratico. Se conosciamo la lunghezza d'onda λ della radiazione incidente, è immediato conoscere la sezione d'urto per *scattering* dovuta ai costituenti gassosi dell'atmosfera. L'attenuazione dell'intensità della radiazione incidente la possiamo calcolare una volta noto il *concentrazion number N* alle varie quote *z* che può essere calcolato una volta nota a quella quota la temperatura e la pressione.

Esercizio 6.6

Perché il cielo ci appare blu?
Come detto, la maggior parte dell'energia solare è costituita da radiazione elettromagnetica nella banda tra il blu ($\lambda \approx 0.425$ μm) ed il rosso ($\lambda \approx 0.650$ μm). Se consideriamo la relazione (6.23b) possiamo constatare che:

$$\frac{\sigma_{blu}}{\sigma_{rosso}} = \left(\frac{0.650}{0.425}\right)^4 = 5.47$$

Dato che ai nostri occhi al suolo arriverà la radiazione diffusa dallo scattering dei costituenti gassosi dell'atmosfera, la luce blu presenta una dispersione 5.5 volte maggiore della luce rossa e quindi arriverà ai nostri occhi un flusso radiativo blu 5.5 volte superiore a quello rosso e quindi il cielo ci sembra blu. Dato che il coefficiente di estinzione è proporzionale alla concentrazione di molecole gassose che diminuiscono drasticamente con l'aumentare della quota, il cielo diventerà sempre più scuro quanto più ci si innalza nell'atmosfera.

6.3.2 ASSORBIMENTO DELLA RADIAZIONE DA PARTE DEI GAS ATMOSFERICI

Lo *scattering* di un fascio di radiazione elettromagnetica con le particelle presenti in atmosfera può essere rappresentato come l'urto elastico dei fotoni che costituiscono tale raggio con le singole particelle incontrate lungo la direzione di propagazione. I fotoni, dopo l'urto, proseguiranno lungo traiettorie diverse da quelle originarie ed il risultato macroscopico di tutto ciò è la *diffusione* del raggio. L'energia totale posseduta dal raggio non diminuisce a causa dello *scattering,* ma viene solo ridistribuita nei raggi diffusi e tutto ciò è descritto nell'ambito dell'Elettromagnetismo Classico. Tuttavia la presenza di particelle lungo la direzione di propagazione di un fascio di radiazione elettromagnetica può anche produrre una *rimozione* di energia da parte di esse. Di fatto, in certe condizioni, queste particelle rimuovono una porzione di energia dal fascio di radiazione e la utilizzano per incrementare la propria energia interna e questo è ciò che intendiamo per *assorbimento*. Questa *cattura di energia esterna* da parte delle particelle è quasi esclusivo appannaggio delle molecole dei gas presenti in atmosfera, visto che l'unico apprezzabile assorbimento di energia radiante da parte di particelle non gassose è rappresentato dalle particelle di *Black*

Carbon (agglomerato di particelle carboniose di circa 1 μm di diametro, prodotte durante la combustione quando la quantità di ossigeno è insufficiente ad ossidare completamente gli idrocarburi in CO_2 ed acqua, oppure quando la temperatura di fiamma è bassa). È abbastanza intuitivo che questa rimozione di energia radiante da parte delle molecole dei gas presenti in atmosfera dovrà fare i conti con la struttura interna delle molecole stesse e quindi potrà essere descritta solo dalla Meccanica Quantistica cui si rimanda per approfondimenti. Qui di seguito si presenteranno solo pochi elementi in proposito.

Va innanzitutto ricordato che una molecola di un gas è una struttura complessa costituita da neutroni, protoni ed elettroni. Viste le energie in gioco in atmosfera, l'interazione tra la radiazione elettromagnetica e le molecole dei gas si limiterà ad un'interazione tra i fotoni e gli elettroni presenti nelle molecole in un insieme finito di orbitali. In condizioni normali, cioè in assenza di perturbazioni esterne, i vari elettroni si collocano in un insieme di orbitali, ciascuno caratterizzato da un livello quantizzato di energia, tali da consentire alla molecola di possedere la minima energia interna possibile. Se, però, dall'esterno la molecola viene colpita da un fotone di opportuna energia, uno degli elettroni viene estratto dall'orbitale originario e portato ad un nuovo orbitale a maggior energia. Perché ciò sia effettivamente possibile, bisogna che l'energia posseduta dal fotone incidente $E_f = h\nu$ sia pari alla differenza tra l'energia caratteristica dell'orbitale su cui viene sbalzato l'elettrone E_2 e l'energia dell'elettrone nel suo orbitale originario E_1, cioè bisogna che:

$$h\nu = E_2 - E_1 \qquad [6.24]$$

A questo punto la molecola ha assorbito l'intera energia posseduta dal fotone incidente (che quindi viene eliminato dal fascio di radiazione) e si pone in uno *stato energetico eccitato*. Non essendo in uno *stato naturale*, dopo un certo tempo il sistema cercherà di riacquistare lo stato fondamentale a minima energia e per fare ciò dovrà liberarsi del *surplus* di energia acquisita a causa dell'interazione con il fotone esterno. L'elettrone eccitato ritornerà al suo orbitale originario e ciò sarà accompagnato dall'*emissione* di un fotone la cui energia sarà esattamente pari al *surplus* acquisito nella fase di eccitazione.

Questo processo di assorbimento di un fotone e della sua emissione successiva non sembrerebbe produrre un effettivo assorbimento da parte della molecola del gas. In effetti, per poter spiegare l'esistenza dell'assorbimento, è necessario ricordare, almeno a sommi capi, alcuni concetti di Statistica di Boltzmann. Infatti, se la porzione di atmosfera considerata è in equilibrio termodinamico almeno locale, allora le varie molecole dei gas presenti si trovano in tutti i possibili stati energetici (quindi non necessariamente tutte allo stato fondamentale) e la distribuzione del numero delle varie molecole nei diversi stati energetici sarà descritta esattamente dalla Statistica di Boltzmann. L'arrivo di un fotone ed il suo assorbimento selettivo spostano la molecola in uno stato eccitato e così la distribuzione statistica di Boltzmann viene alterata. Necessariamente le condizioni statistiche devono essere ristabilite e ciò può avvenire in due soli modi, se si escludono la decomposizione della molecola o le reazioni chimiche. Il primo modo è la *termalizzazione* della molecola eccitata. In sostanza, la molecola collide con le altre molecole vicine così rapidamente che l'eccesso di energia posseduta è trasformato in energia cinetica e la molecola ritorna ad uno stato di equilibrio con un'energia interna lievemente superiore. Questo è in effetti l'assorbimento. Il secondo modo è costituito dall'emissione spontanea di un fotone e ciò riporta la molecola allo stato originario. Il fotone emesso è energeticamente identico a quello incidente, con però direzione e polarizzazione differente. E questo è di fatto uno *scattering coerente*. In Troposfera l'assorbimento è il meccanismo dominante per le molecole dei costituenti gassosi sia permanenti che variabili.

Anche se fin qui sono stati utilizzati concetti estremamente elementari di Meccanica Quantistica, ciò che immediatamente emerge è il fatto che il processo di assorbimento di energia radiante da parte delle molecole dei gas è un processo *estremamente selettivo*: perché un fotone di energia $E = h\nu$ possa essere assorbito, e quindi rimosso dal fascio di fotoni incidenti, è necessario che la sua energia corrisponda esattamente ad un possibile *salto* di un elettrone da un orbitale all'altro. Dato che il numero di orbitali in una molecola è finito e che l'energia di ciascun orbitale

è quantizzata, solo quei fotoni la cui energia corrisponde ad uno dei possibili salti energetici tra orbitali verranno assorbiti, mentre tutti gli altri resteranno inalterati e potranno interagire con la molecola solo con un urto elastico, cioè concorreranno allo *scattering*. Ciò comporterà che, mentre lo *scattering* è un processo continuo se riferito alla frequenza della radiazione incidente, il processo di assorbimento avrà luogo solo ad alcune frequenze che saranno in numero discreto (lo spettro di assorbimento non potrà essere continuo ma, concettualmente, a *righe*) e dipenderà dal tipo di molecola di gas considerato, visto che la struttura degli orbitali elettronici all'interno della molecola dipenderà inevitabilmente dalla forma e dalla costituzione della molecola stessa, come si vede in **Fig. 6.15** in cui è mostrata la sezione d'urto di assorbimento di una molecola di acqua.

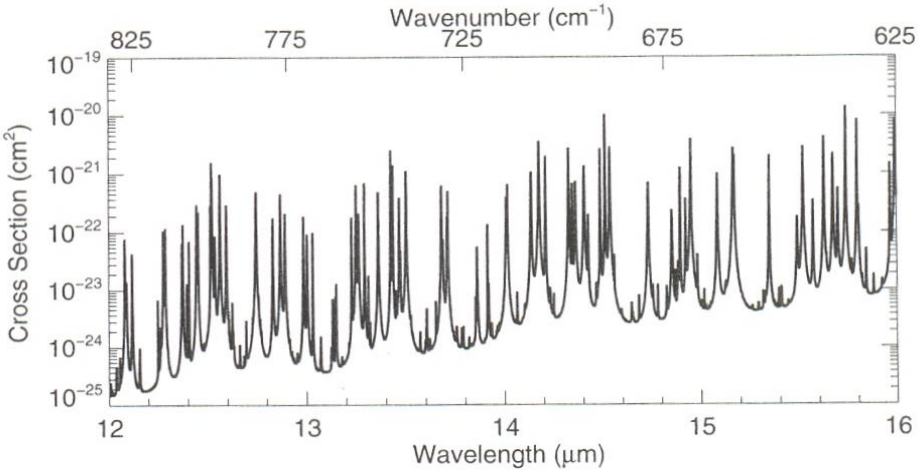


Fig. 6.15: sezione d'urto di assorbimento di una molecola d'acqua a 20°C e 1013 mb (Bohren e Clothiaux 2006)

È anche possibile che l'energia del fotone incidente sia tanto elevata da *strappare* l'elettrone dalla molecola, ionizzandola. In questo caso, l'elettrone libero potrà acquisire qualsiasi quantità di energia che trasformerà in pura energia cinetica e lo spettro di assorbimento non sarà a righe, ma continuo. Questo è il caso dell'assorbimento di O_3 e di O_2 nel visibile e nell'ultravioletto.

6.3.2.1 Il caso didattico dell'atomo di idrogeno

Anche se è raro trovare in atmosfera un singolo atomo di idrogeno, lo studio del meccanismo con cui tale atomo assorbe (ed emette) un fotone è utile dal punto di vista didattico. Secondo il modello di Bohr, l'atomo di idrogeno possiede un solo elettrone che può trovarsi esclusivamente in uno degli orbitali caratterizzati dai seguenti livelli di energia (Alonso e Finn, 1971 pag. 111):

$$E_n = -\frac{R_H hcZ^2}{n^2} = -\frac{2.180 \cdot 10^{-18} Z^2}{n^2} \qquad [6.25a]$$

dove l'energia di legame E_n (negativa) è espressa in Joule, R_H è la costante di Rydberg che per l'atomo di idrogeno vale $1.0974 \cdot 10^7$ m^{-1}, Z è il numero di protoni presenti nell'atomo (Z = 1) ed n è il numero quantico che può assumere solo valori interi e positivi non nulli.

Immaginiamo, ora, che l'elettrone presente nell'atomo si trovi in uno dei livelli energetici caratterizzato dal numero quantico j. Se un fotone incidente viene assorbito, la sua energia dovrà essere tale da far *saltare* l'elettrone dall'orbitale j ad un altro orbitale consentito corrispondente, per esempio, al numero quantico k più esterno al precedente ($k > j$). Quindi bisognerà che:

$$h\nu = -\frac{R_H hc}{k^2} + \frac{R_H hc}{j^2} = 2.180 \cdot 10^{-18}\left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{k^2}\right) \qquad [6.25b]$$

quindi la frequenza (in Hz) del fotone incidente che ha prodotto il salto quantico dovrà essere:

$$\nu = R_H c\left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{k^2}\right) = 3.2899 \cdot 10^{15}\left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{k^2}\right) \qquad [6.25c]$$

Come sospettavamo, non tutti i fotoni possono essere assorbiti da un atomo di idrogeno, ma solo quelli che presentano una frequenza data dalla relazione precedente. Quindi se misuriamo lo spettro di assorbimento dell'atomo di idrogeno, vediamo che tale spettro non è continuo ma è costituito da *gruppi di linee* a seconda del valore assunto dai numeri quantici *j* e *k*. In particolare, troviamo alcuni gruppi di linee spettrali tra cui:

- la *serie di Lyman* in cui $j = 1$, $k = 2, 3, 4, ..$
- la *serie di Balmer* in cui $j = 2$, $k = 3, 4, 5, ..$
- la *serie di Paschen* in cui $j = 3$, $k = 4, 5, 6, ..$

Tutto ciò è illustrato nella **Fig. 6.16** in cui le energie degli orbitali sono espresse in eV (Elettronvolt; 1 J = $6.242 \cdot 10^{18}$ eV). È facile vedere che la serie di Lyman assorbe fotoni nella banda dell'ultravioletto, mentre la serie di Balmer assorbe fotoni nella banda del visibile e la serie di Paschen assorbe fotoni nell'infrarosso.

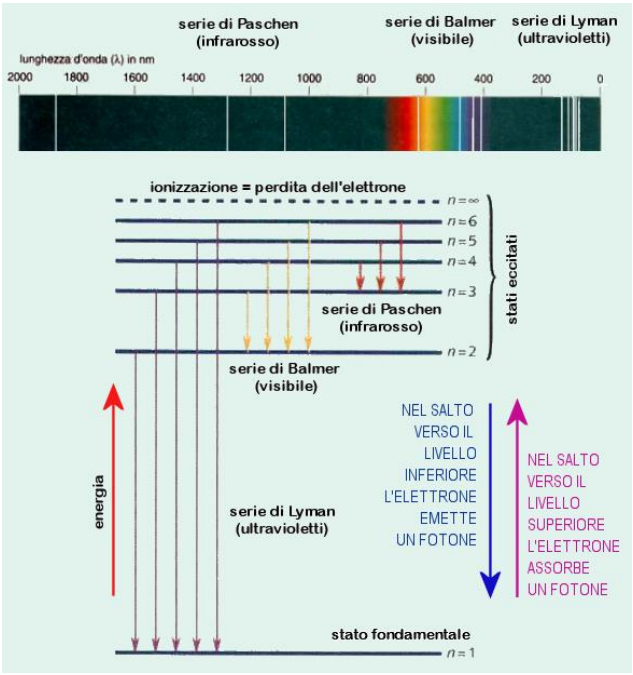


Fig. 6.16: serie di righe spettrali dell'atomo di idrogeno

Esercizio 6.7

Verificare l'affermazione precedente.
In primo luogo consideriamo la Serie di Lyman ed in particolare la riga spettrale corrispondente ai numeri quantici $j = 1$ e $k = 2$. In questo caso dalla (6.25c) otteniamo:

$$\nu = 3.2899 \cdot 10^{15}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) = 2.47 \cdot 10^{15}\, Hz$$

Confrontando il risultato ottenuto con quanto riportato in *Tab. 6.1*, si vede che la banda spettrale si colloca nell'ultravioletto. Se, invece, consideriamo la serie di Balmer ed in particolare la riga spettrale corrispondete ai numeri quantici $j = 2$ e $k = 3$, otteniamo:

$$\nu = 3.2899 \cdot 10^{15}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = 4.57 \cdot 10^{14}\, Hz$$

Se confrontiamo il risultato ottenuto con quanto riportato in *Tab*. 6.1, vediamo che la

banda spettrale si colloca nel visibile. Se, infine, consideriamo la serie di Paschen ed in particolare la riga spettrale corrispondente ai numeri quantici $j = 3$ e $k = 4$, otteniamo:

$$\nu = 3.2899 \cdot 10^{15}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) = 1.60 \cdot 10^{14}\ Hz$$

Se confrontiamo il risultato ottenuto con quanto riportato in *Tab. 6.1*, vediamo che la banda spettrale si colloca nell'infrarosso.

6.3.2.2 Elementi di base dell'assorbimento dei gas atmosferici

La teoria quantistica delle molecole è molto più complessa di quella dell'atomo di idrogeno e ben al di là degli scopi che ci prefiggiamo. Quindi non potremo che dare qui alcune idee semiquantitative. Per prima cosa a quali gas ci riferiamo? Le molecole che più abbondano in atmosfera e a cui siamo maggiormente interessati sono quelle di N_2, O_2, CO, CO_2, N_2O, NO_2, NH_3, H_2O, O_3, CH_4 e dei Clorofluorocarburi (CFC). Esse differiscono per gli elementi chimici che le costituiscono, ma anche e soprattutto per la loro forma specifica.

Ci sono *molecole lineari* come N_2, O_2, CO e N_2O, molecole a simmetria sferica come CH_4, molecole non lineari simmetriche come NH_3 e molecole non lineari asimmetriche come H_2O e O_3. La linearità e la simmetria o meno delle molecole fa sì che le cariche elettriche in esse presenti determinino o possano determinare un momento di dipolo elettrico o magnetico permanente o meno e ciò è importante per l'assorbimento di energia radiante incidente (**Fig. 6.17**).

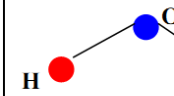
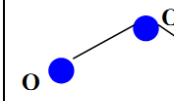
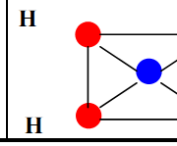
Molecule	*Structure*	*Permanent dipole moment*	*May acquire dipole moment*
N_2		**No**	**No**
O_2		**No**	**No**
CO		**Yes**	**Yes**
CO_2		**No**	**Yes** (in two vibrational modes)
N_2O		**Yes**	**Yes**
H_2O		**Yes**	**Yes**
O_3		**Yes**	**Yes**
CH_4		**Yes***	**Yes** (in two vibrational modes)

Fig. 6.17: struttura delle molecole dei principali gas presenti in atmosfera

In generale l'energia totale posseduta da una qualsiasi molecola è pari alla somma:

- di un'*energia traslazionale* E_{tr}, che rappresenta lo scambio di energia cinetica tra molecole che collidono tra loro. Secondo la Statistica di Maxwell-Boltzmann, tale contributo energetico è direttamente proporzionale alla temperatura del gas in cui è in equilibrio termico la singola molecola, in particolare $E_{tr} = 1/2\ k_B T$, dove k_B è la costante di Boltzmann ($1.3805\ 10^{-23}$ J K). Se $T = 300$ K, l'energia traslazionale corrisponde ad un fotone con $\nu \approx 3000$ GHz ($k \approx 400$ cm^{-1});

- di un'*energia rotazionale* E_{rot}, che rappresenta l'energia quantizzata che una molecola possiede per i moti di rotazione attorno ai propri assi di simmetria. La **Fig.6.18** indica per le principali classi di molecole di interesse meteorologico i principali assi di rotazione ed i corrispondenti momenti d'inerzia. L'energia rotazionale corrisponde ad un fotone con numero d'onda dell'ordine di 1÷500 cm^{-1}, che si pone nella regione spettrale del lontano infrarosso e delle microonde;
- di un'*energia vibrazionali* E_{vib}, che rappresenta l'energia quantizzata che una molecola possiede per i moti di vibrazioni derivanti dall'interazione tra la distribuzione delle proprie cariche elettriche interne e l'onda elettromagnetica. Ad essa corrisponde un fotone con numero d'onda dell'ordine di 500 ÷ 10^4 cm^{-1}, cioè nell'infrarosso;
- l'*energia di transizione elettronica* E_{el}, che rappresenta l'energia derivante dalla transizione di un elettrone da un orbitale all'altro. Si può vedere che a tale contributo energetico corrisponde un fotone con un numero d'onda nell'intervallo 10^{-4} ÷ 10^{-5} cm^{-1}, quindi nel visibile e nell'ultravioletto.

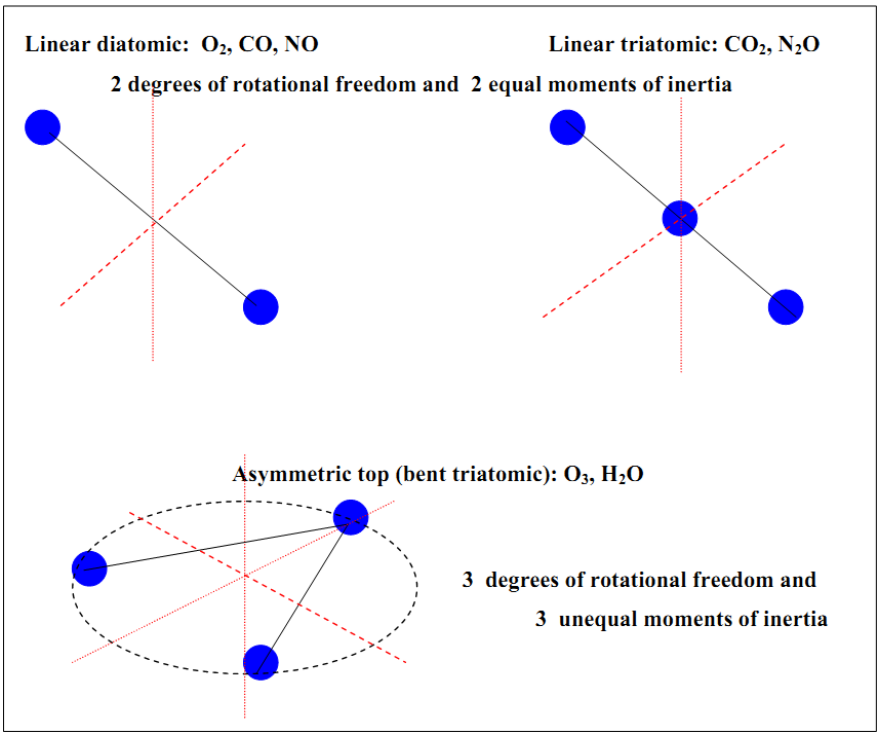


Fig. 6.18: rotazione delle molecole. Alcune caratteristiche di base

Energia rotazionale

Una molecola è una struttura molto complessa, in genere molto diversa dalla geometria sferica attribuita dall'atomo di Idrogeno. Quindi, vista macroscopicamente, la possiamo considerare una struttura rigida che possiede un centro di massa attorno a cui può ruotare e un momento di inerzia *I*. Nella **Fig. 6.18** si è visto come i vari tipi di molecole presentino un diverso numero di assi di rotazione e momenti d'inerzia distinti o meno a seconda della propria geometria e del numero di atomi che la compongono.

Per fissare le idee, si consideri una molecola biatomica i cui atomi abbiano rispettivamente massa m_1 e m_2 e stiano ad una distanza r_1 e r_2 dal suo centro di gravità. Il momento d'inerzia del sistema (che supponiamo rigido e descrivibile secondo le leggi della Meccanica Classica) è:

$$I_m = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \qquad [6.26a]$$

Se **r** è la distanza tra i due atomi (il cui modulo è *r*), si ha che:

$$I_m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 = m' r^2 \qquad [6.26b]$$

Dato che il momento angolare di un rotore rigido che ruota con velocità angolare ω è pari a:

$$L = I_m \omega = m' r^2 \omega \qquad [6.26c]$$

l'energia cinetica di rotazione della molecola, per la Meccanica Classica, risulta espressa come:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} L\omega = \frac{1}{2} I_m \omega^2 \qquad [6.26d]$$

Espressioni simili possono essere ottenute per molecole con struttura geometricamente più complessa. Il limite di questa trattazione sta nel fatto che, secondo la Meccanica Classica, non ci sono restrizioni al valore che può assumere l'energia cinetica di rotazione, tranne il fatto che deve essere positiva. Una molecola, però, deve ubbidire alla Meccanica Quantistica e ciò comporta il fatto che l'energia rotazionale di una molecola non possa assumere un valore positivo qualsiasi, ma viceversa può assumere solo valori quantizzati. Senza entrare nei dettagli, secondo la Meccanica Quantistica, l'energia associata alla pura rotazione di una molecola (*energia rotazionale*) è data dalla relazione:

$$E_{rot} = \frac{h^2}{8\pi^2 I_m} J(J+1) = Bhc \cdot J(J+1) \qquad [6.27a]$$

dove $B = h/(8\pi^2 I_m c)$ e J è il *numero quantico rotazionale* che può assumere solo valori positivi maggiori o uguali a zero. Questa relazione è valida per le molecole a simmetria lineare o sferica. Nel caso di molecole poliatomiche asimmetriche, è necessario aggiungere un termine correttivo che qui, per semplicità, trascureremo. Considerazioni di Meccanica Quantistica garantiscono che le uniche transizioni possibili tra i livelli rotazionali quantizzati sono quelle per cui vale la regola $\Delta J = J_1 - J_2 = \pm 1$ (+1 nel caso di assorbimento e -1 nel caso di emissione), cioè le transizioni avvengono sempre tra due livelli energetici adiacenti. Queste transizioni possono essere indotte da un campo elettromagnetico esterno che, per poter agire sulla molecola, ha bisogno che essa sia caratterizzata da un momento di dipolo elettrico permanente, cioè che al suo interno la distribuzione delle cariche positive non coincida con la distribuzione delle cariche negative. Molecole di questo tipo sono, per esempio, le molecole lineari CO, N_2O e le molecole asimmetriche H_2O e O_3. In questo caso la frequenza del fotone emesso o assorbito sarà pari a:

$$\nu = 2Bc \cdot J(J+1) \qquad [6.27b]$$

in cui con $B = h/(8\pi^2 I_m c)$ è la costante rotazionale. Sulla base della relazione precedente è immediato verificare che le linee spettrali di assorbimento sono equispaziate di un ammontare pari a:

$$\Delta\nu = 2Bc \qquad [6.27c]$$

Se, per esempio, consideriamo la molecola di CO, vediamo che la costante rotazionale B vale 1.9563 cm^{-1} e quindi è facile verificare come l'assorbimento avvenga ad una frequenza di circa 10^{11} Hz che si localizza nel lontano infrarosso o meglio nella banda delle microonde.

Energia vibrazionale

La posizione degli atomi all'interno di una molecola non è rigorosamente fissa ma può vibrare (oscillare) attorno alla propria posizione di equilibrio e quindi una molecola non può essere vista esattamente come un corpo rigido. La vibrazione degli atomi attorno alla propria posizione di equilibrio può aver luogo in *modi* differenti a seconda della geometria della singola molecola e tali vibrazioni possono alterare il momento di dipolo **p** o addirittura produrlo quando non esiste originariamente. La presenza di un momento di dipolo consente, però, l'accoppiamento della molecola con un campo elettromagnetico esterno con conseguente assorbimento di energia che, sulla

base di considerazioni di Meccanica Quantistica, deve anch'essa essere quantizzata.

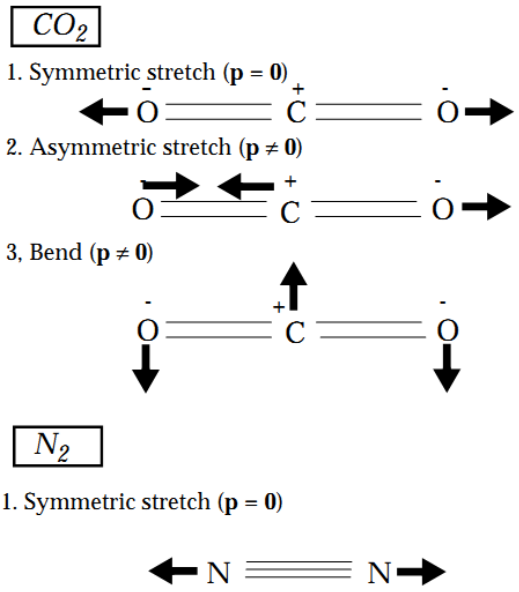


Fig. 6.19: modi vibrazionali per la molecola di CO2 e N2 (Jacob, 1999)

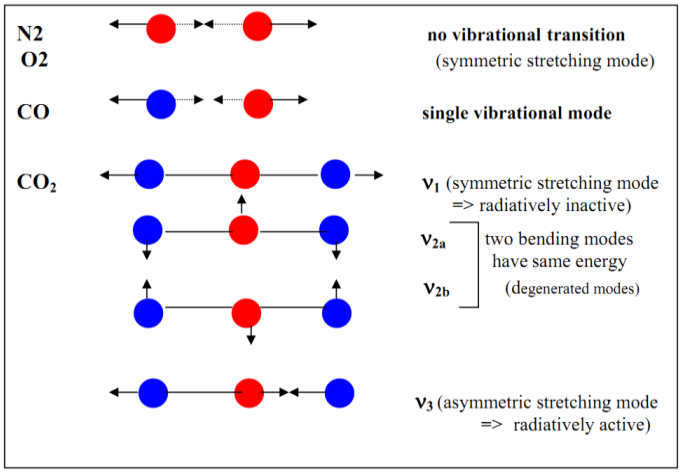


Fig. 6.20: modi vibrazionali per molecole biatomiche e triatomiche

Esaminando la molecola di CO_2, (**Fig. 6.19**) si vede come essa abbia tre *modi* fondamentali per vibrare e ogni *modo* è caratterizzato da un livello energetico quantizzato. In generale la vibrazione effettiva della molecola può essere una combinazione dei *modi* fondamentali. Nel primo modo, che è uno *stiramento simmetrico* (*symmetric stretch*), non vi è la generazione di un momento di dipolo per vibrazione, dato che la distribuzione delle cariche è perfettamente simmetrica e non consente un accoppiamento con un campo elettromagnetico esterno. Di conseguenza non ci sarà un assorbimento energetico. Gli altri due *modi* indicati in figura sono, invece, asimmetrici con conseguente generazione di un momento di dipolo. In questo caso è possibile un accoppiamento con un campo elettromagnetico esterno e quindi un assorbimento di energia. Se si considera invece la molecola diatomica simmetrica di N_2 (**Fig. 6.19**), essa presenta una distribuzione uniforme di cariche ed il suo unico *modo* vibrazionale è quello dello stiramento simmetrico che però non consente un accoppiamento con un campo elettromagnetico esterno. Una sintesi di questi ragionamenti, applicata a molecole biatomiche e triatomiche di interesse meteorologico è

riportata nella **Fig. 6.20**. Senza entrare nel dettaglio, l'energia quantizzata dei livelli vibrazionali è data dalla relazione:

$$E_{vb} = hc\nu_k \left(k + \frac{1}{2}\right) \qquad [6.28]$$

dove ν_k è il numero d'onda del modo vibrazionale e k è il numero quantico vibrazionale che può assumere valori superiori o uguali a zero. Per esempio, la molecola di CO presenta un unico modo vibrazionale corrispondente al numero d'onda 2143.3 cm^{-1}. Anche in questo caso la Meccanica Quantistica definisce opportune regole di selezione del numero quantico.

Combinazione dei modi rotazionali e vibrazionali

Molto spesso una molecola presenta transizioni dovute contemporaneamente ai *modi* rotazionali ed ai *modi* vibrazionali. In questo caso, le transizioni energetiche di assorbimento (o di emissione) hanno luogo tra i livelli energetici quantizzati dati dalla relazione seguente:

$$E_{rv} = Bhc \cdot J(J+1) + hc\nu_k \left(k + \frac{1}{2}\right) \qquad [6.29]$$

Dato che l'energia associata ai moti rotazionali è maggiore di quella associata ai moti vibrazionali, lo spettro di assorbimento della molecola sarà una serie di linee rotazionali raggruppate attorno a linee vibrazionali. Nella relazione precedente sono presenti due numeri quantici. La Meccanica Quantistica si incarica di definire con precisione le regole di selezione di entrambi i numeri quantici, individuando quindi quali sono le transizioni energetiche permesse e quali quelle proibite.

Transizioni elettroniche

Come nel caso dell'atomo di idrogeno, qualsiasi molecola può assorbire un fotone incidente di elevata energia (e quindi di elevata frequenza) e l'energia così acquisita può portare un elettrone di un orbitale esterno ad un livello quantico di energia più elevata. Bisogna, però, ricordare che quando un fotone possiede energia sufficiente, il suo assorbimento da parte di una molecola può anche comportare l'espulsione di un elettrone che viene letteralmente sbalzato *oltre* ogni possibile livello quantico. Questo è il fenomeno della *ionizzazione* di una molecola. Se indichiamo con A una generica molecola allo stato base e con A^+ la stessa molecola ionizzata e quindi caricata positivamente, il processo di *fotoionizzazione* può essere schematizzato come:

$$A + h\nu \rightarrow A^+ + e^- \qquad [6.30a]$$

Perché possa avvenire un processo di fotoionizzazione, è necessario che la radiazione incidente sia nella banda dell'ultravioletto o nella banda dei raggi X o in quella dei raggi γ. Le fotoionizzazioni che più frequentemente hanno luogo nella parte alta dell'atmosfera sono:

$$\begin{aligned} NO + h\nu &\rightarrow NO^+ + e^- \qquad (5.3\ eV) \\ N_2 + h\nu &\rightarrow N_2^+ + e^- \qquad (7.4\ eV) \\ O_2 + h\nu &\rightarrow O_2^+ + e^- \qquad (5.1\ eV) \\ He + h\nu &\rightarrow He^+ + e^- \qquad (24.6\ eV) \end{aligned} \qquad [6.30b]$$

dove tra parentesi viene indicato (in eV = 1.6021 10^{-19} J) il potenziale di ionizzazione di ciascuna reazione di fotoionizzazione.

Nella fotoionizzazione un fotone riesce ad estrarre un elettrone da uno degli orbitali molecolari e lanciarlo libero nello spazio. Se, però, il fotone ha energia molto elevata, in certi casi può essere sufficiente per rompere addirittura il legame tra gli atomi di una molecola. In effetti un fotone con energia compresa nell'intervallo 7.8 ÷ 5.2 eV (cioè nell'ultravioletto) che incontra una molecola di ossigeno la frantuma in due singoli atomi nel modo seguente:

$$O_2 + h\nu \rightarrow O + O \qquad [6.31a]$$

Questo è un esempio di *dissociazione fotochimica* che ha luogo nella parte alta dell'atmosfera

assieme all'analoga reazione di dissociazione della molecola di ozono colpita da un fotone di energia 5.2 ÷ 3.4 eV:

$$O_3 + h\nu \rightarrow O + O_2 \qquad [6.31b]$$

Queste due reazioni assorbono così tanta radiazione ultravioletta nella parte alta dell'atmosfera da rimuoverla quasi completamente dalla radiazione elettromagnetica di origine solare che raggiunge la superficie terrestre.

Gli spettri di assorbimento a bande

Una molecola, interagendo con un campo elettromagnetico, può assorbire energia rotazionale (e l'assorbimento avviene nella banda delle microonde o del lontano infrarosso), energia vibrazionale (e l'assorbimento ha luogo nell'infrarosso) e può assorbire energia per la transizione di elettroni a differenti livelli quantici (e l'assorbimento ha luogo nella banda dell'ultravioletto o del visibile). Oltre a ciò, la molecola, muovendosi nello spazio e collidendo con altre molecole vicine, può anche assorbire energia di tipo puramente *traslazionale* proporzionale a $k_B T$ dove k_B è la costante di Boltzmann e T è la temperatura assoluta. Tralasciando le transizioni energetiche puramente traslazionali, le altre variazioni di energia di una molecola che assorbe radiazione elettromagnetica sono quantizzate e quindi lo spettro di assorbimento atteso è a righe. Ciò è vero solo in teoria; nella pratica è possibile mostrare che ciascuna riga spettrale in realtà consiste di piccole bande spettrali più o meno larghe, centrate sulla riga teorica. Rimandando a Liou (2002) per maggiori dettagli, qui di seguito accenniamo brevemente all'argomento.

Invece di ragionare nel dominio delle frequenze ν e in quello delle lunghezze d'onda λ, ragioniamo nel dominio dei numeri d'onda $k = 1/\lambda = \nu/c$. Ricordiamo che l'unità di misura del numero d'onda è l'inverso di una lunghezza. Consideriamo, ora, una generica riga spettrale alla frequenza ν_0 e quindi al numero d'onda $k_0 = \nu_0/c$. Nella parte bassa dell'atmosfera (sotto i 20 km) la pressione è relativamente elevata e le collisioni tra molecole sono decisamente frequenti. Ciò comporta che l'assorbimento di un fotone incidente non abbia luogo esattamente a k_0, ma ad un numero d'onda k prossimo a tale valore ma interno ad un ben preciso intervallo. I possibili valori di k non sono quantizzati, ma costituiscono un continuo ed i valori più probabili sono quelli più vicini a k_0 mentre quelli più lontani lo sono decisamente meno. In sostanza, invece di avere una riga di assorbimento esattamente a k_0, avremo una banda di valori di k per cui si ha l'assorbimento e tale banda può essere descritta matematicamente dalla *distribuzione* $f_L(k - k_0)$ di valori k data dalla relazione:

$$f_L(k - k_0) = \frac{\alpha/\pi}{(k - k_0)^2 + \alpha^2} \qquad [6.32a]$$

nota come *distribuzione di Lorentz* che è:

- una funzione simmetrica rispetto a k_0, con ampiezza completamente definita dal parametro α;
- una funzione di distribuzione che descrive la probabilità che l'assorbimento di un fotone da parte di una molecola abbia luogo al numero d'onda k. Essendo una funzione di densità di probabilità, il suo integrale per k da 0 a ∞ è unitario;
- la sua semi-ampiezza α (cm^{-1}), chiamata *line width*, dipende dal tipo di molecola considerata, dalla temperatura T e dalla pressione p del gas secondo la relazione:

$$\alpha(p, T) = \alpha_0 \cdot \frac{p}{p_0} \cdot \left(\frac{T_0}{T}\right)^n \qquad [6.32b]$$

dove $T_0 = 273$ K, $p_0 = 1013$ mbar ed i parametri α_0 ed n dipendono dalla specifica molecola considerata. Per molti gas $n = 0.5$ ed α_0 varia tra 0.01 e 0.1 cm^{-1}. In particolare per la CO_2 $\alpha_0 = 0.07$ cm^{-1}.

Un esempio di struttura a bande dello spettro di assorbimento è già stato mostrato nella **Fig. 6.16**, mentre la **Fig. 6.21** evidenzia come possa essere forte l'effetto della pressione atmosferica sulla larghezza delle bande di assorbimento.

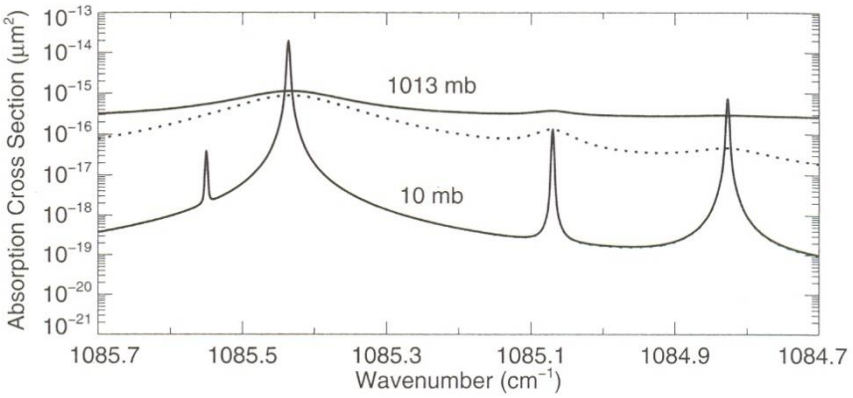


Fig. 6.21: influenza della pressione sulla larghezza delle bande di assorbimento (Bohren e Clothieax 2006)

6.3.2.3 Gli spettri di assorbimento dei gas atmosferici

Le differenti specie gassose presenti in atmosfera assorbono radiazione elettromagnetica sia nelle bande spettrali dell'ultravioletto e del visibile (tipiche della radiazione di origine solare) che nella banda dell'infrarosso.

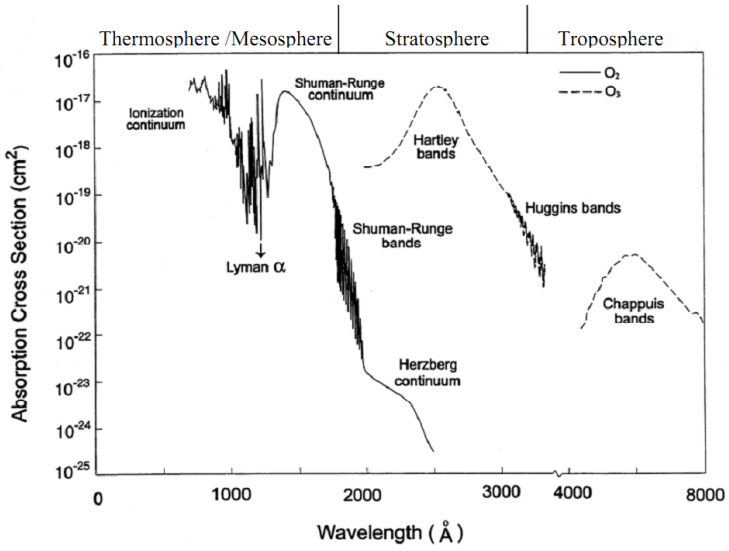


Fig. 6.22: sezione d'urto di assorbimento per l'ossigeno e l'ozono molecolare (Liou 1992a)

Le *molecole che assorbono nell'ultravioletto e nel visibile* sono principalmente le seguenti:

- azoto molecolare N_2: è il gas più abbondante in atmosfera che assorbe energia elettromagnetica nella banda 850 ÷ 1450 Å (dato che 1 Å = 10^{-4} μm, ciò corrisponde all'intervallo spettrale 0.085 ÷ 0.145 μm). Nonostante la sua abbondanza, l'assorbimento di radiazione che produce in atmosfera è decisamente trascurabile, anche perché la quantità di energia radiativa di origine solare in questa parte dello spettro è molto bassa.
- ossigeno molecolare O_2 e ozono molecolare O_3: la maggior parte dell'assorbimento nella banda ultravioletta e visibile dipende dalla presenza di O_2 e O_3 che assorbono radiazione soprattutto nella parte alta dell'atmosfera. L'assorbimento di fotoni da queste due

molecole è tanto intenso da catturare la quasi totalità della radiazione ultravioletta di origine solare nell'intervallo tra 0.24 e 0.32 μm, impedendo a questa radiazione di raggiungere la superficie terrestre. Nella **Fig. 6.22** viene presentata la sezione d'urto di assorbimento di queste due molecole, indicando anche in quale parte dell'atmosfera ciò ha luogo.

- ci sono altri gas che assorbono nell'ultravioletto e nel visibile come per esempio NO_2, NO_3, N_2O, CO_2, HNO_2, HNO_3, ma in condizioni normali l'effetto del loro assorbimento può essere trascurato. Di essi, solo NO_2 ed il radicale NO_3 assorbono nel visibile, quindi nelle zone del *PBL* altamente inquinate e con elevate concentrazioni di NO_2 ci può essere un visibile assorbimento di radiazione solare. Assorbendo preferibilmente luce blu, un'atmosfera altamente inquinata da NO_2 apparirà prevalentemente giallo-marrone.

Nella banda dell'infrarosso, c'è una nutrita ed importante famiglia di gas che assorbono radiazione elettromagnetica e ad essi viene data la denominazione di *gas serra*. Essi sono relativamente trasparenti alla radiazione solare (quindi all'ultravioletto e al visibile) ma risultano opachi alla radiazione infrarossa e lo sono in maniera selettiva, presentando un tipico spettro di assorbimento a bande. I principali esponenti di questa famiglia sono l'acqua (H_2O) allo stato vapore, l'anidride carbonica (CO_2), l'ozono (O_3), il metano (CH_4) e l'ossido nitroso (N_2O). Nel loro complesso, presentano una moltitudine di bande di assorbimento più o meno larghe che di fatto coprono l'intera banda dell'infrarosso ad eccezione di una ristretta *finestra* spettrale (8 ÷ 12 μm) detta *atmospheric window*, che rappresenta tuttora un piccolo mistero teorico. Per i dettagli delle più importanti bande di assorbimento si faccia riferimento a quanto riportato da Liou (2002). Per rendere un'idea, anche se approssimata, della situazione nella **Fig. 6.23** viene illustrato l'assorbimento dovuto alle diverse molecole sulla radiazione elettromagnetica tra 0.1 e 30 μm, dove l'ordinata rappresenta il rapporto tra radianza incidente e radianza assorbita. Nella realtà, le bande sono molto più numerose di quelle visibili in questa figura e sono spesso raggruppate una talmente vicina all'altra da essere viste come un continuo quando vengono rappresentate graficamente.

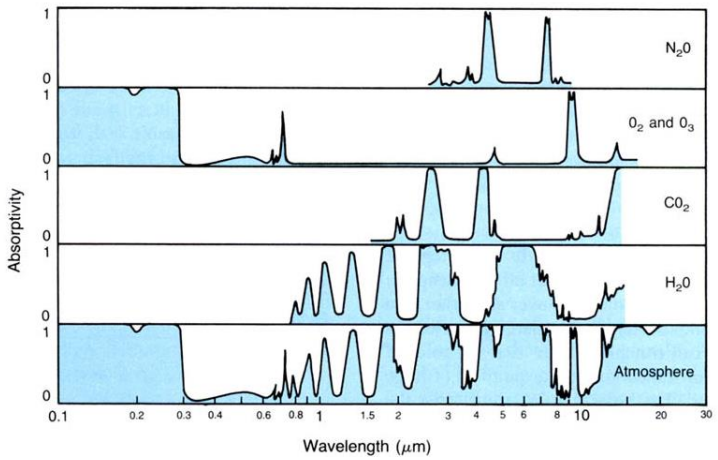


Fig. 6.23: bande di assorbimento dei gas serra

Per concludere, conviene vedere come tutto ciò abbia delle implicazioni importanti nello studio dei trasferimenti radiativi in atmosfera. Anche se riprenderemo successivamente questa discussione, conviene già ora premettere alcuni elementi interessanti evidenziati nella **Fig. 6.24** in cui, nella parte alta, è stato riportato con tratto rosso continuo lo spettro solare alla sommità dell'atmosfera TOA (sostanzialmente coincidente con quello di un corpo nero a 5780 K) e con un tratto blu lo spettro terrestre (prossimo a quello di un corpo nero a 300K). Nelle parti sottostanti della figura viene riportato l'assorbimento di radiazione alle varie lunghezze d'onda dovuta ai vari costituenti gassosi dell'atmosfera e possiamo apprezzare anche il contributo che lo *scattering* di Rayleigh ha nell'estinzione della radiazione di origine solare. Il risultato finale è che lo spettro solare visibile dal suolo e lo spettro terrestre vengono decisamente e profondamente modificati:

lo spettro solare perde la maggior parte della propria energia ad alta frequenza (nell'ultravioletto) e presenta *buchi* profondi soprattutto nel vicino infrarosso, mentre lo spettro terrestre viene quasi completamente assorbito nel lontano infrarosso e a lunghezze d'onda inferiori a 0.3 μm.

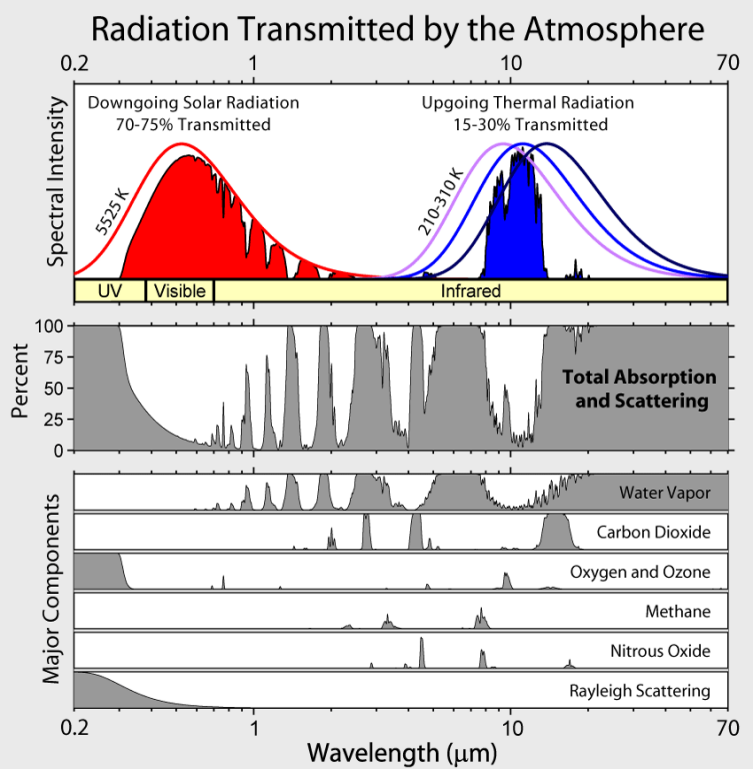


Fig. 6.26: estinzione della radiazione solare e terrestre. La curva in rosso è lo spettro solare al TOA e l'area rossa sottostante è lo spettro solare visto al suolo. Viceversa, le curve magenta, blu e nera sono lo spettro di radiazione ad onda lunga terrestre (a varie temperature medie tra 210 e 310 K) e l'area colorata in blu sottostante è la radiazione ad onda lunga che emerge al TOA.

6.3.2.4 I coefficienti di estinzione per l'assorbimento dei gas atmosferici

Per lo studio quantitativo dell'interazione tra la radiazione elettromagnetica (solare, atmosferica e terrestre) è indispensabile la conoscenza dei coefficienti di estinzione monocromatica (alla lunghezza d'onda λ) e ciò è stato ottenuto con un paziente lavoro sperimentale durato decenni. Ad oggi sono disponibili alcuni Data Base pubblici di questo genere cui si riferiscono tutti gli operatori del settore. Uno dei più celebri ed usati è il Data Base HITRAN (Rothman e al, 2005, 2009) in cui sono raccolte le informazioni relative alle sezioni d'urto ed alle altre informazioni spettroscopiche necessarie per i calcoli, relative a circa 1 080 000 linee spettrali per 36 molecole diverse, nella banda spettrale tra l'ultravioletto e le microonde. È su questa base conoscitiva che si può fondare lo studio dell'interazione della radiazione elettromagnetica con i costituenti atmosferici.

In pratica, se si è interessati alla determinazione del coefficiente di estinzione complessivo relativo ad una ben precisa lunghezza d'onda λ , una volta note le sezioni d'urto di M specie diverse (per esempio, da HITRAN) ed il *concentration number* N_q di ciascuna sostanza, allora tale coefficiente sarà dato dalla relazione:

$$\beta_{a,g,\lambda} = \sum_{q=1}^{M} \beta_{a,g,q,\lambda} = \sum_{q=1}^{M} N_q \sigma_{a,g,q,\lambda} \qquad [6.33]$$

6.3.3 ASSORBIMENTO E SCATTERING DA PARTE DEGLI AEROSOL

Assieme ai costituenti gassosi, è presente in aria una gran varietà di particelle, liquide o solide, cui collettivamente si dà il nome di *aerosol* atmosferico. Queste entità non gassose, che quindi possiedono una forma, una densità ed un volume proprio, sono composte da una gran quantità di sostanze chimiche differenti a seconda della loro origine e della loro evoluzione nel tempo. La loro dimensione e la forma caratteristica è la più varia; se per semplicità le immaginiamo di forma sferica, il loro diametro efficace varia da 0.002 μm a 100 μm. L'aerosol è distribuito in maniera più o meno uniforme in tutta la troposfera e la stratosfera, tuttavia ci sono degli *accumuli* di particelle concentrate in alcuni punti dell'atmosfera; questi *accumuli* sono le *nuvole* che coprono circa il 60% della superficie terrestre, in particolare circa il 65% le troviamo sopra gli oceani e il 52% sopra la terraferma. In queste porzioni di aria si concentrano numerose particelle molto particolari, le *idrometeore*, che sono sia gocce di acqua liquida che cristalli di ghiaccio o aggregati parzialmente liquidi e parzialmente solidi. Naturalmente, a differenza delle particelle dell'aerosol che possiamo considerare ben rimescolato in atmosfera, le idrometeore viceversa si concentrano in zone particolari dell'atmosfera e sono tutte *particelle* composte quasi esclusivamente da acqua. Sia l'aerosol che le idrometeore interferiscono con la propagazione della radiazione elettromagnetica, assorbendola e diffondendola e lo studio dell'*estinzione* della radiazione operata da queste particelle è lo scopo di questo paragrafo.

6.3.3.1 L'aerosol atmosferico

Gli aerosol residenti in atmosfera possono essere grossolanamente classificati in due categorie: gli aerosol primari e gli aerosol secondari.

Gli *aerosol primari* sono quelle particelle (sia solide che liquide) che vengono emesse direttamente in atmosfera dalla superficie terrestre o da dagli aerei in volo, come per esempio:

- *lo* spray marino (*sea-salt*) costituito da particelle liquide generate dall'interazione delle onde del mare con l'atmosfera immediatamente sovrastante,
- le particelle prodotte come residuo della combustione nelle attività industriali,
- le ceneri dei vulcani in eruzione,
- alcune particelle di materiale organico di produzione naturale come spore, batteri, ecc.. .

Al contrario, gli *aerosol secondari* vengono prodotti (e non immessi) in atmosfera da reazioni tali per cui due gas che reagiscono tra loro producono come risultato della loro reazione una particella liquida o solida (*gas-to-particle conversion*).

Dal punto di vista chimico, le particelle non potrebbero essere più varie: abbiamo particelle costituite da una sola sostanza chimica come i solfati ($SO_4^{=}$, i nitrati (NO_3^-), il carbonio elementare prodotto durante la combustione (*soot* o *black carbon*), il sale marino (NaCl) e le particelle derivanti dall'azione del vento sulla superficie terrestre composte principalmente da quarzo, silicati e da altri composti terrigeni. Ma c'è anche una numerosa schiera di particelle contenente numerosi composti chimici diversi, soprattutto organici. Tutte queste particelle di forma, dimensione, composizione chimica e provenienza diversa, le troviamo mischiate tra loro nell'aria della troposfera e della stratosfera. Sappiamo che le loro dimensioni, le loro proprietà ottiche (in sostanza le loro proprietà fisiche) e le condizioni in cui si trova l'atmosfera (temperatura e pressione) influiscono grandemente nel determinare in che misura essi assorbono e diffondono la radiazione (per esempio quella ad onda corta di origine solare o quella ad onda lunga di origine atmosferica o terrestre).

Uno degli elementi più importanti per poter trattare l'interazione tra l'aerosol atmosferico e la radiazione elettromagnetica è come quantificare la presenza delle particelle in aria. L'unica maniera comoda ed univoca è l'utilizzo della *concentrazione in numero N* (*concentration*

number), cioè il numero di particelle presenti nell'unità di volume (particelle·cm^{-3}). Ovviamente, per come l'abbiamo introdotta, *N* rappresenta il numero complessivo di particelle di qualsiasi dimensione e forma presenti nell'unità di volume e quindi si può immaginare facilmente che questa grandezza fisica è di ben limitato interesse nello studio dell'interazione tra radiazione elettromagnetica ed aerosol.

È intuitivo che uno dei principali elementi di interesse è costituito dalla forma e dalla dimensione delle singole particelle. Per comodità conviene considerare sferiche tutte le particelle di aerosol e quindi caratterizzate completamente dal proprio diametro. Ovviamente, entro un dato volume di aria convivono particelle di ogni possibile dimensione e di ogni possibile provenienza. In realtà le due cose sono strettamente legate. Se si ripartono le particelle di aerosol in funzione del diametro (supponendole di forma sferica), in generale si individuano almeno tre gruppi distinti di particelle con ben definite caratteristiche dimensionali e di provenienza.

Il primo gruppo, noto come *nucleation mode* (*Aitken mode*), è costituito da particelle piccolissime con diametro equivalente inferiore a 0.1 μm. Esse sono principalmente particelle secondarie che si originano per *nucleazione* (processo per cui delle molecole di gas si aggregano tra loro in *cluster* e si condensano formando una goccia di liquido di piccole dimensioni). La nucleazione è *omogenea* se avviene senza la presenza di una superficie che la induca, mentre è *eterogenea* quando c'è bisogno della presenza di una superficie perché tale processo avvenga. A queste particelle si possono aggiungere anche particelle emesse direttamente, come per esempio le particelle di *soot* (sostanzialmente carbonio elementare) o altri prodotti della combustione sia inorganici che organici.

Il secondo gruppo, noto come *accumulation mode*, contiene le cosiddette *particelle fini* con diametro compreso tra 0.1 e 2 μm. Questo gruppo è costituito quasi esclusivamente da particelle secondarie appartenenti al *nucleation mode* che si sono condensate e coagulate, aggregandosi tra loro in particelle liquide o solide. Anche in questo caso si possono aggiungere alle particelle secondarie delle particelle primarie generalmente derivanti dai processi di combustione. A volte si nota come l'*accumulation mode* in realtà sia costituito da due modi distinti e ciò dipende primariamente dalla provenienza delle particelle che, nella bassa troposfera, può variare grandemente in funzione delle emissioni al suolo di sostanze inquinanti.

L'ultimo gruppo è il *coarse-particle mode* costituito da tutte quelle particelle con un diametro superiore a 2 μm. Esse sono nella quasi totalità particelle primarie emesse dalle attività umane (industriali o meno), prodotte dall'erosione del vento (per esempio le polveri di origine sahariana o comunque desertica), emesse dalle superfici marine (lo spray marino) ed emesse dalle eruzioni vulcaniche.

Un modo quantitativo per descrivere i vari *modi* è quello di costruire delle rappresentazioni analitiche che descrivono la distribuzione dimensionale delle particelle appartenenti a ciascun *modo*. Se consideriamo un generico modo, la grandezza $n(r)$ rappresenta la quantità di particelle di dimensioni comprese tra r e $r + dr$ presenti in un volume unitario. Questa distribuzione dimensionale è stata approssimata, sulla base delle osservazioni sperimentali, da diverse funzioni analitiche, la più celebre delle quali è la *distribuzione Log-Normale* secondo la quale:

$$n(r) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi} \cdot \ln(\sigma) \cdot r} \cdot exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(r/r_0)}{\ln \sigma}\right)^2\right] \qquad [6.34a]$$

in cui i due parametri della distribuzione r_0 e σ sono rispettivamente la mediana e la standard deviation geometrica delle particelle presenti nel volume e N_0 è il numero totale di particelle di tutte le dimensioni, ma appartenenti al modo considerato.

Se, invece, nel volume di controllo unitario sono presenti tutti e tre i modi (nucleazione, accumulazione e *coarse*) ed il numero totale di particelle presenti nel volume per ciascun modo è N_i, la distribuzione dimensionale complessiva delle particelle può essere rappresentata dalla sovrapposizione delle distribuzioni tipiche dei tre modi. Se indichiamo con r_{0i} e σ_i la mediana e la deviazione standard geometrica dei diametri delle particelle relative ai tre modi (i = 1 nucleazione, = 2 accumulazione, = 3 *coarse*), allora la distribuzione complessiva delle particelle campionate

nel volume unitario sarà data da:

$$n(r) = \sum_{i=1}^{3} \frac{N_i}{\sqrt{2\pi} \cdot \ln(\sigma_i) \cdot r_i} \cdot exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(r_i/r_{0i})}{\ln \sigma_i}\right)^2\right] \quad [6.34b]$$

Ovviamente:

$$N_0 = \sum_{i=1}^{3} N_i \quad [6.34c]$$

Finora si è ipotizzato che le particelle fossero tutte di forma sferica, cosa che facilita di molto i ragionamenti. Tuttavia le particelle che realmente si trovano in atmosfera presentano le forme più varie. In **Fig. 6.25** viene data la rappresentazione schematica dei vari modi e delle fotografie ottenute al microscopio elettronico di alcune particelle corrispondenti.

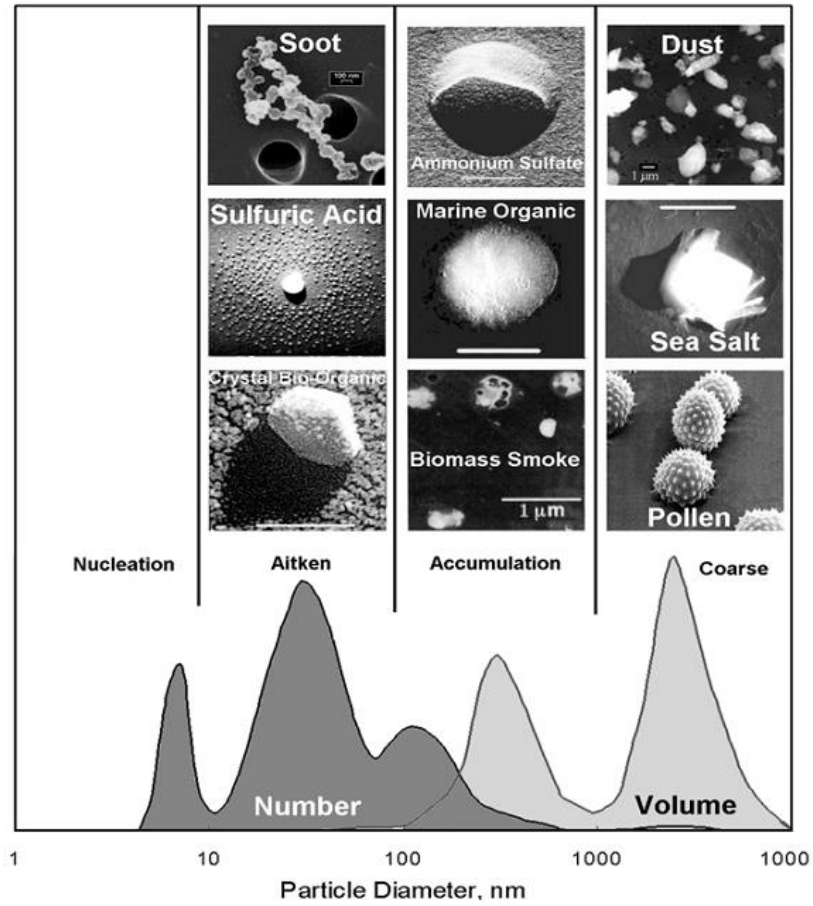


Fig. 6.25: rappresentazione schematica della distribuzione dimensionale dell'aerosol atmosferico e immagini elettroniche dei tipi rappresentativi di aerosol

6.3.3.2 Le idrometeore

Se si focalizza, ora, l'attenzione a quel sottoinsieme di particelle liquide o solide costituito dalle gocce d'acqua o dai cristalli di ghiaccio presenti nelle nubi, dalle gocce di pioggia, dalle gocce d'acqua sospese nella nebbia e dalla grandine, si nota come la principale caratteristica che le accomuna tutte è il fatto che tutte sono costituite principalmente da acqua o in fase liquida o in fase solida. Per questo, queste particelle vengono indicate collettivamente col termine *idrometeore*. Anche in questo caso, se immaginiamo le idrometeore di forma sferica, il loro diametro

caratteristico potrà variare da 10 μm (tipico delle gocce di acqua nelle nubi e nella nebbia) fino a 8 mm per alcune gocce di pioggia intensa. Le idrometeore possano essere suddivise in due classi principali: quelle costituite da piccole gocce di acqua e quelle costituite da cristalli di ghiaccio. Mentre le prime possiamo considerarle con buona approssimazione di forma sferica, i cristalli di ghiaccio assumono le forme più strane a causa della temperatura e dell'umidità delle nubi in cui si formano e dei processi di collisione e di coalescenza che ivi hanno luogo.

Le diverse idrometeore si trovano nelle nubi presenti nell'atmosfera, che sono di vario tipo: stratocumuli (Sc), strati (S), nembostrati (Ns), altocumuli (Ac), altostrati (As), cirri (Ci), cirrocumuli (Cc), cirrostrati (Cs), cumuli (Cu), cumulonembi (Cb). Ognuno di questi tipi di nubi presenta valori caratteristici di concentrazione in numero delle particelle, di contenuto d'acqua liquida ed esibisce un range dimensionale caratteristico delle particelle che le compongono. In generale, la distribuzione dimensionale delle idrometeore in una nube può essere approssimata analiticamente da una distribuzione Gamma modificata del tipo:

$$N(r) = \frac{N_0}{\Gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\alpha-1} exp\left[-\frac{r}{r_n}\right] \qquad [6.35a]$$

dove N_0 è il numero totale di gocce (cm^{-3}), r_n è il raggio che caratterizza la distribuzione delle particelle, α è il parametro della distribuzione (spesso dell'ordine di 2) e $\Gamma(\ldots)$ è la funzione speciale Gamma. La **Tab. 6.7** presenta alcune informazioni caratteristiche per i diversi tipi di nubi.

Tipo di Nubi	$\mathbf{N_0}$ (cm^{-3})	$\mathbf{r_m}$ (μm)	$\mathbf{r_{max}}$ (μm)	$\mathbf{r_e}$ (μm)	**LWC** ($g\ m^{-3}$)
Strati:					
sull'oceano	50	10	15	17	0.1-0.5
sulla terraferma	30-400	6	15	10	0.1-0.5
Cumuli da bel tempo	300-400	4	15	6.7	0.3
Cumuli marini	50	15	20	25	0.5
Cumulonembi	70	20	100	33	2.5
Altostrati	200-400	5	15	8	0.6

Tab. 6.7: elementi caratteristici della distribuzione dimensionale delle idrometeore di alcuni tipi di nubi

Per semplificare le considerazioni teoriche, conviene definire per l'idrometeora un *raggio efficace* r_e, definito come:

$$r_e = \frac{\int \pi \cdot r^3 N(r) \cdot dr}{\int \pi \cdot r^2 N(r) \cdot dr} \qquad [6.35b]$$

legato ai parametri r_n ed α della distribuzione $N(r)$; infatti si può dimostrare che:

$$r_e = (\alpha + 3) \cdot r_n \qquad [6.35c]$$

mentre il raggio medio r_m delle idrometeore è pari a:

$$r_m = (\alpha + 1) \cdot r_n \qquad [6.35d]$$

Ulteriore elemento che caratterizza la presenza delle idrometeore nelle nubi è il loro *contenuto di acqua liquida LWC* che, in termini pratici, rappresenta il numero di grammi di acqua liquida presente nell'unità di volume ($g\ m^{-3}$). Se indichiamo con ρ_w la densità dell'acqua liquida, tale grandezza è definita come:

$$LWC = \frac{4}{3}\pi\rho_w \int r^3\, N(r) \cdot dr \qquad [6.35e]$$

6.3.3.3 Teoria elettromagnetica dello scattering e dell'assorbimento

Si consideri una particella (per il momento non interessa quale sia la sua dimensione, potrebbe essere sia una singola molecola che un cristallo di ghiaccio presente in una nube) e si immagini di *illuminarla* con un'onda elettromagnetica di lunghezza d'onda λ che, per semplicità, immaginiamo sia un'onda piana, come mostrato in **Fig. 6.26**. Dal punto di vista elettrico, ogni possibile particella (sia essa una molecola o una porzione solida di sale marino sospesa in aria o ogni altro tipo di particella), contiene un numero discreto ma elevato di cariche elettriche (protoni ed elettroni) disposte geometricamente nei modi più diversi e quindi, di fatto, possiede numerosi dipoli elettrici. Il campo elettromagnetico incidente indurrà l'oscillazione di tutti questi dipoli alla stessa frequenza dell'onda incidente ed essi irraggeranno a loro volta una radiazione elettromagnetica *secondaria* in tutte le direzioni (**Fig. 6.26**). Questo è lo *scattering* della radiazione elettromagnetica prodotta da una particella. Se ci si pone in un punto dello spazio, non necessariamente posto lungo la linea di propagazione dell'onda incidente, osserveremmo un campo elettromagnetico della stessa frequenza del campo incidente, risultato della sovrapposizione dei campi elettromagnetici secondari indotti da tutti i dipoli di cui è composta la particella. Tutto ciò è solo una rappresentazione semplificata di ciò che avviene nella realtà. Infatti, quando un'onda elettromagnetica incide su di una particella non si osserva solo lo *scattering* del campo elettromagnetico incidente, ma spesso anche l'assorbimento da parte della particella stessa di una parte di esso. Quindi *l'assorbimento* e lo *scattering* di un'onda elettromagnetica da parte di una particella (grande o piccola che sia) sono in genere due processi concomitanti ed entrambi concorrono all'*estinzione* dell'onda incidente. La capacità di una particella di diffondere e/o di assorbire radiazione elettromagnetica dipende da vari fattori tra cui è importante ricordare la lunghezza d'onda del campo elettromagnetico incidente e le *proprietà ottiche* del materiale che costituisce la particella stessa.

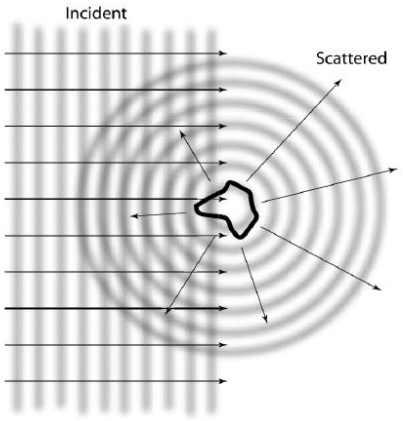


Fig. 6.26 visualizzazione semplificata dello scattering di un'onda incidente su di una particella

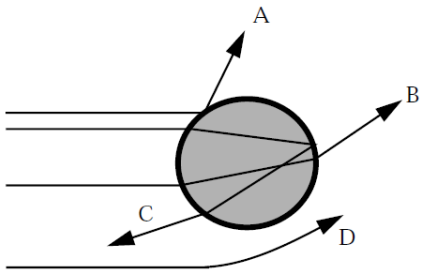


Fig. 6.27: scattering di un'onda elettromagnetica che incide su una particella

Al punto 6.1.3 abbiamo introdotto alcune nozioni di ottica ed abbiamo qualitativamente indicato come si possa comportare otticamente una particella. Per fissare le idee, consideriamo ancora una volta una particella sferica (per esempio una piccola goccia di acqua liquida di una nube) ed osserviamo la **Fig. 6.27** in cui viene indicato che cosa succede ad un raggio di *luce*

incidente. Come si vede, il raggio *A* viene riflesso, il raggio *B* viene rifratto, il raggio *C* viene rifratto all'interno e riflesso mentre il raggio *D* viene diffratto. L'insieme di tutti questi processi porta nel complesso a diffondere la radiazione incidente. In questo caso il flusso di radiazione diffusa risulta pari al flusso di radiazione incidente. Tuttavia, ogni traiettoria per cui la radiazione elettromagnetica attraversa la particella può anche comportare il suo assorbimento e ciò dipende dalle caratteristiche del materiale di cui è fatta la particella. Ovviamente, più sarà l'assorbimento lungo le traiettorie *B* e *C*, minore sarà la quantità di radiazione diffusa, visto che la somma di ciò che viene assorbito e diffuso deve necessariamente eguagliare ciò che incide.

Le proprietà ottiche di un materiale, cioè la sua capacità di diffondere e di assorbire radiazione elettromagnetica, vengono tutte condensate in un *indice complesso di rifrazione*

$$m_\lambda = n_\lambda - jk_\lambda \qquad [6.36a]$$

La parte reale n_λ è l'indice di rifrazione introdotto al punto 6.1.3 ed è legato alla velocità *V* di propagazione della *luce* nel mezzo dalla relazione (*c* è la velocità della luce nel vuoto):

$$V = c/n_\lambda \qquad [6.36b]$$

mentre la parte immaginaria κ_λ determina l'attenuazione dell'onda elettromagnetica che si propaga attraverso il materiale di cui è costituita la particella. Se, per esempio, consideriamo una particella sferica di diametro Δ illuminata da una radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda λ, l'assorbimento di radianza I_λ entro la particella sarà dato dalla relazione:

$$\frac{dI_\lambda}{dx} = -\frac{4\pi k_\lambda}{\lambda} I_\lambda \qquad [6.36c]$$

dove *x* è la direzione di propagazione della radiazione che passa per il centro della sfera. Se $I_\lambda(0)$ è la radianza che incide sulla particella e I_λ è la radianza che *abbandona* la particella dopo averla passata da parte a parte, integrando la (6.36c) si ottiene:

$$I_\lambda = I_\lambda(0) \cdot exp\left[-4\pi k_\lambda \frac{\Delta}{\lambda}\right] \qquad [6.36d]$$

	0.5μm		10μm	
	n_λ	κ_λ	n_λ	κ_λ
H_2O (*l*)	1.34	1.0×10^{-9}	1.22	0.05
Soot (*s*)	1.82	0.74	2.40	1.0
Carbonio Organico (s)	1.45	0.001	1.77	0.12
H_2SO_4 (*l*)	1.43	1.0×10^{-8}	1.89	0.46
$(NH_4)_2SO_4$ (*s*)	1.52	0.0005	2.15	0.02
NaCl (*s*)	1.45	0.00015	1.53	0.033

Tab. 6.8: parte reale ed immaginaria dell'indice di rifrazione di alcune sostanze a λ = 0.5 μm e λ = 10 μm (*s = solido, l = liquido*)

L'indice di rifrazione (sia la sua parte reale che quella immaginaria) dipendono dalla lunghezza d'onda λ della radiazione incidente oltre che dal tipo di materiale considerato. Per avere un'idea di tali variazioni, in **Tab. 6.8** vengono riportate sia la parte immaginaria che la parte reale dell'indice di rifrazione di alcuni materiali tipicamente presenti nelle particelle atmosferiche in funzione di due distinte lunghezze d'onda della radiazione incidente, 0.5 μm (visibile) e 10 μm (infrarosso). Come si nota, sia la parte immaginaria (l'assorbimento) che la parte reale (rifrazione) cambiano notevolmente con la lunghezza d'onda incidente. In particolare la parte immaginaria dell'indice di rifrazione dell'acqua nell'infrarosso è di sette ordini di grandezza maggiore di ciò che si riscontra nel visibile. Il *soot* possiede il valore più elevato di indice di rifrazione immaginario per quanto è noto finora e se si considera la (6.36d) si può dimostrare che la radiazione nel visibile (λ = 0.5 μm) è completamente trasmessa attraverso una goccia d'acqua del diametro di 10 μm, mentre è completamente assorbita da una particella di pari diametro ma di *soot*.

La Teoria di Lorenz-Mie

L'interazione di un'onda elettromagnetica con una particella incontrata lungo il suo percorso di propagazione può essere descritta quantitativamente dall'Elettrodinamica Classica ed in particolare dalle equazioni di Maxwell. La loro applicazione al caso:

- di propagazione di un'onda elettromagnetica non polarizzata di lunghezza d'onda λ
- in una particella sferica omogenea caratterizzata da un indice di rifrazione complesso *m*
- e costituita da un mezzo uniforme, caratterizzato da una costante dielettrica ε uguale in ogni punto del mezzo ed isotropo, quindi indipendente dalla direzione di propagazione dell'onda elettromagnetica

ha permesso di risolvere questo problema fisico. La complessità è notevole e i risultati ottenuti suggeriscono che è più conveniente adottare semplificazioni che dipendono congiuntamente dalla lunghezza d'onda λ della radiazione incidente e dalla dimensione della particella (che, essendo sferica, è completamente caratterizzata dal proprio raggio r_i). In particolare il *size parameter* $x_{i,\lambda}$:

$$x_{i,\lambda} = \frac{2\pi r_i}{\lambda} \qquad [6.37]$$

evidenzia immediatamente il rapporto esistente tra la dimensione della particella e la lunghezza d'onda della radiazione incidente. L'impiego contemporaneo di λ e *x* ha consentito di individuare delle situazioni tipiche cui si applicano opportune approssimazioni che consentono di giungere a soluzioni analitiche del problema. In particolare si ha che:

- se $x_{i,\lambda} << 1$ ed *m* è arbitrario, le particelle che si considerano sono o molecole o particelle ultrafini. In questo caso la Teoria Elettromagnetica viene semplificata giungendo alla *Teoria di Rayleigh* di cui si è già discusso;

- se $x_{i,\lambda}$ ed *m* sono arbitrari ma le particelle sono sferiche, si ottiene una semplificazione della Teoria nota come *Teoria di Lorentz-Mie*. In questo caso, dalla teoria (che si applica alle particelle di varie dimensioni presenti in aria e alle gocce di acqua nelle nubi) si ottiene sia la sezione d'urto di *scattering* che la sezione d'urto di assorbimento;

- quando $x_{i,\lambda} >> 1$ ed *m* è reale, allora si stanno considerando idrometeore di grandi dimensioni. In questo caso l'approssimazione porta alla Teoria dell'Ottica Geometrica.

Quando si è interessati allo *scattering* ed all'assorbimento di radiazione dovuto agli aerosol ed alle idrometeore, tutte approssimate come delle sfere, è possibile applicare la Teoria di Lorenz-Mie per determinare la sezione d'urto di *scattering* e di assorbimento di un'onda elettromagnetica con una particella sferica. Nonostante si tratti pur sempre di un'approssimazione, questa teoria è di una notevole complessità; si rimanda chi fosse interessato al Cap. 5 di Liou (2002).

Sia λ la lunghezza d'onda della radiazione incidente e sia r_i il raggio efficace di un gruppo di particelle sferiche la cui concentrazione in numero sia pari a $N_p(r_i)$. In questo caso il coefficiente di *assorbimento* e di *scattering* sono dati dalle relazioni:

$$\begin{aligned} \beta_{a,p,i,\lambda} &= N_p(r_i) \cdot \sigma_{a,p,i,\lambda} \\ \beta_{s,p,i,\lambda} &= N_p(r_i) \cdot \sigma_{s,p,i,\lambda} \end{aligned} \qquad [6.38a]$$

e quindi possiamo limitarci a studiare la sezione d'urto di assorbimento $\sigma_{a,p,i,\lambda}$ e di *scattering* $\sigma_{s,p,i,\lambda}$ per una sola particella. Inoltre, dato che si stanno considerando particelle sferiche, conviene introdurre due nuove grandezze che descrivono i processi di estinzione: l'*efficienza di scattering di singola particella* $Q_{s,p,i,\lambda}$ e l'*efficienza di assorbimento di singola particella* $Q_{a,p,i,\lambda}$ definite rispettivamente come:

$$Q_{a,p,i,\lambda} = \frac{\sigma_{a,p,i,\lambda}}{\pi r_i^2} \qquad Q_{s,p,i,\lambda} = \frac{\sigma_{s,p,i,\lambda}}{\pi r_i^2} \qquad [6.38b]$$

Si nota immediatamente come l'efficienza di *scattering* di singola particella rappresenti il rapporto tra la sezione d'urto di *scattering* e la sezione geometrica della particella. Quando questa grandezza eccede l'unità, parte della radiazione diffratta attorno alla particella può essere intercettata e diffusa dalla particella stessa. Una regola generale è che maggiore è lo *scattering*, minore è l'assorbimento e viceversa, visto che l'assorbimento ostacola lo *scattering*. Inoltre l'efficienza di *scattering* è più elevata quando λ è dello stesso ordine di grandezza del raggio della particella. L'efficienza di assorbimento rappresenta, invece, il rapporto tra la sezione d'urto di assorbimento e la sezione della particella. Anche in questo caso questa grandezza può eccedere l'unità; in tal caso una porzione della radiazione diffratta attorno alla particella può essere intercettata ed assorbita. Maggiore è la parte immaginaria dell'indice di rifrazione, maggiore è l'efficienza di assorbimento. Analogamente, se consideriamo il complessivo processo di estinzione, caratterizzato dal *coefficiente di estinzione* $\beta_{e,p,i,\lambda}$ e la relativa *sezione d'urto* definita come:

$$\beta_{e,p,i,\lambda} = N_p(r_i) \cdot \sigma_{e,p,i,\lambda} \qquad [6.38c]$$

possiamo definire nel modo seguente l'*efficienza di estinzione*:

$$Q_{e,p,i,\lambda} = \frac{\sigma_{e,p,i,\lambda}}{\pi r_i^2} \qquad [6.38d]$$

È evidente che:

$$Q_{e,p,i,\lambda} = Q_{a,p,i,\lambda} + Q_{s,p,i,\lambda} \qquad [6.38e]$$

Premesso tutto ciò, la Teoria di Lorenz-Mie giunge a due distinte relazioni che esprimono rispettivamente l'*efficienza di scattering di singola particella* e l'*efficienza di estinzione di singola particella*; esse risultano così espresse:

$$Q_{e,p,i,\lambda} = \frac{2}{x_{i,\lambda}^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \cdot Re(a_n + b_n)$$
$$Q_{s,p,i,\lambda} = \frac{2}{x_{i,\lambda}^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \cdot Re(|a_n|^2 + |b_n|^2) \qquad [6.39a]$$

e quindi:

$$Q_{a,p,i,\lambda} = Q_{e,p,i,\lambda} - Q_{s,p,i,\lambda} \qquad [6.39b]$$

Da queste relazioni si vede immediatamente come le varie efficienze dipendano sia dalla lunghezza d'onda λ della radiazione incidente che della dimensione della particella r_i. In esse sono presenti i *coefficienti di Mie* a_n e b_n che sono dei numeri complessi dati da:

$$a_n = \frac{\psi'_n(y) \cdot \psi_n(y) - m\psi_n(y) \cdot \psi'_n(y)}{\psi'_n(y) \cdot \xi_n(y) - m\psi_n(y) \cdot \xi'_n(y)}$$
$$b_n = \frac{m\psi'_n(y) \cdot \psi_n(y) - \psi_n(y) \cdot \psi'_n(y)}{m\psi'_n(y) \cdot \xi_n(y) - \psi_n(y) \cdot \xi'_n(y)} \qquad [6.40a]$$

In essi:

- con ψ'(·) e ξ'(·) si è indicata la derivata prima delle rispettive funzioni,
- con x si è indicato lo specifico $x_{i\lambda}$,
- con m si è indicato il coefficiente complesso di rifrazione
- e $y = xm$

Per poterli calcolare, è necessario conoscere l'espressione analitica delle funzioni ψ(·) e ξ(·). Seguendo Liou (2002) ed indicando con x una generica variabile indipendente, esse risultano pari a:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{n+1/2}(x) \qquad \xi(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H^{(2)}_{n+1/2}(x) \qquad [6.40b]$$

dove $J_{n+1/2}$ è funzione di Bessel di ordine frazionario e $H^{(2)}_{n+1/2}$ è la funzione di Hankel di ordine frazionario.

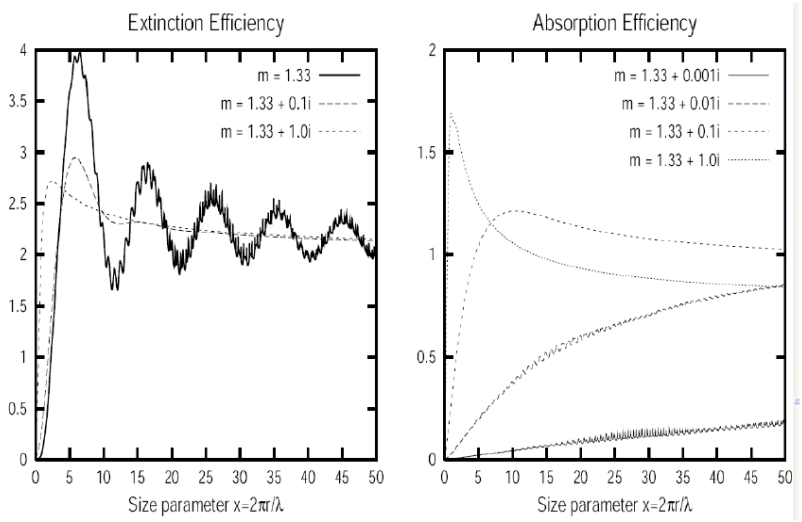


Fig. 6.28: esempi di efficienza di scattering e di assorbimento calcolati con la Teoria di Mie per differenti indici di rifrazione

La **Fig. 6.28** mostra l'efficienza di *scattering* e di assorbimento in funzione del *size parameter* per un materiale con la parte reale *n* dell'indice di rifrazione pari a 1.33 e diversi valori della parte immaginaria κ. Quando κ è nullo, il materiale può solo riflettere e non assorbire radiazione. Come si vede l'efficienza di *scattering* presenta un andamento oscillante che tende a smorzarsi con l'aumentare di *x* fino a giungere ad un limite asintotico di circa 2. Questo andamento irregolare è dovuto all'interferenza della luce diffratta e trasmessa dalla particella sferica e da altri fenomeni ottici legati alla geometria sferica del fenomeno.

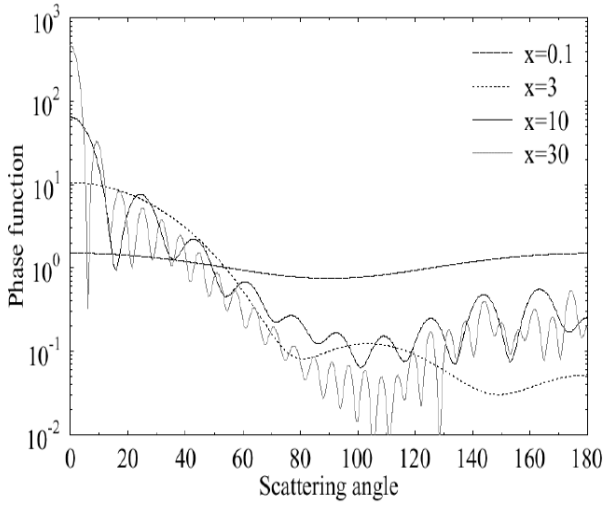


Fig. 6.29: funzioni di fase calcolate con la Teoria di Mie per sfere non assorbenti a diversi size parameter. Si noti l'aumento delle oscillazioni con l'aumento del size parameter

Ciò che rimane da ottenere dalla Teoria di Mie è la *Funzione di Fase P*(cosθ). Ancora una volta, senza entrare nei dettagli, la teoria giunge alla relazione seguente:

$$P(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2k^2\sigma_{s,p,r,\lambda}}[S_1(\theta)\cdot S_1^*(\theta) + S_2(\theta)\cdot S_2^*(\theta)] \qquad [6.41a]$$

in cui $k = 2\pi/\lambda$ è il numero d'onda che caratterizza l'onda elettromagnetica e con $S^*(\cdot)$ si è indicato

il complesso coniugato di $S(\cdot)$. Le due funzioni $S_1(\theta)$ ed $S_2(\theta)$ sono note come le *funzioni di scattering di Mie* e sono espresse dalle relazioni seguenti:

$$S_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos\theta) + b_n \tau_n(\cos\theta)]$$
$$S_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n \pi_n(\cos\theta) + a_n \tau_n(\cos\theta)] \qquad [6.41b]$$

in cui sono presenti le *funzioni angolari di Mie* date da:

$$\pi_n(\cos\theta) = \frac{1}{\sin\theta} P_n^1(\cos\theta) \qquad \tau_n(\cos\theta) = \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos\theta) \qquad [6.41c]$$

dove P^1_n (cosθ) sono i polinomi di Legendre associati. Dettagli sulle funzioni speciali coinvolte nella Teoria di Mie e sulle loro approssimazioni numeriche possono essere trovate in Abramowitz e Stegun(1970) e in Press e al. (1992). Nella **Fig. 6.29** viene presentato un tipico esempio di funzione di fase.

Tutto quanto è stato detto si riferisce all'interazione di una singola particella omogenea con la radiazione elettromagnetica. La realtà normale è quella di un insieme più o meno numeroso di particelle che vengono illuminate dalla radiazione ed è per questa situazione che siamo interessati ai parametri di estinzione e di *scattering*. La situazione è notevolmente complessa, anche se possiamo ipotizzare realisticamente che le particelle siano piuttosto lontane le une dalle altre e che la distanza che le separa sia molto maggiore della lunghezza d'onda della radiazione. In questo caso, lo *scattering* di una particella può essere trattato indipendentemente da quello delle altre e quindi l'estinzione e lo *scattering* dell'insieme delle varie particelle può essere visto come la *somma* dell'assorbimento e *scattering* delle singole particelle (*scattering indipendente*). Più nel dettaglio, consideriamo un insieme di particelle il cui spettro dimensionale sia descritto da una funzione $n(a)$ (particelle per unità di volume e di lunghezza d'onda) dove a è il generico raggio della particella. Sia a_1 la dimensione minima e a_2 la dimensione massima. La concentrazione totale (in numero) delle particelle sarà allora pari a:

$$N = \int_{a_1}^{a_2} n(a) \cdot da \qquad [6.42a]$$

ed il coefficiente di estinzione e di *scattering complessivo* sarà dato da:

$$\beta_{e,p,\lambda} = \int_{a_1}^{a_2} \sigma_{e,p,a,\lambda} \cdot n(a) \cdot da \qquad \beta_{s,p,\lambda} = \int_{a_1}^{a_2} \sigma_{s,p,a,\lambda} \cdot n(a) \cdot da \qquad [6.42b]$$

Analoghi ragionamenti possono essere fatti per ottenere la funzione di fase per l'insieme delle particelle che, a conti fatti, risulta data da:

$$P(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2k^2 \beta_{s,p,\lambda}} \cdot \int_{a_1}^{a_2} [S_1(\theta) \cdot S_1^*(\theta) + S_2(\theta) \cdot S_2^*(\theta)] \cdot n(a) \cdot da \qquad [6.42c]$$

da cui si ottiene il *parametro di asimmetria* definito come:

$$g = \int_{-1}^{1} P(\cos\theta) \cdot \cos\theta \, d(\cos\theta) \qquad [6.42d]$$

Quando $g = 0$ si ha che lo *scattering* in avanti e all'indietro sono uguali, mentre quando $g = 1$ tutto lo *scattering* è in avanti.

La peculiarità delle idrometeore

Finora abbiamo considerato particelle del tutto generiche, in particolar modo quelle sospese nell'aria e tutte considerate sferiche. Se ora concentriamo l'attenzione sulle idrometeore, cioè sulle particelle di acqua liquida e/o di ghiaccio che formano i diversi tipi di nubi, notiamo innanzitutto che ciò che le distingue dagli aerosol atmosferici è il fatto che in pratica sono monocomponenti, cioè sono prevalentemente costituite da acqua. Per questo, l'elemento conoscitivo più importante per il loro studio è la conoscenza dell'indice di rifrazione (reale e immaginario) caratteristico dell'aria liquida e del ghiaccio che è rappresentato graficamente nella **Fig. 6.30** in funzione della lunghezza d'onda della radiazione incidente. Come si vede, l'acqua ed il ghiaccio presentano un indice di rifrazione reale ed immaginario molto simili, ma non coincidenti.

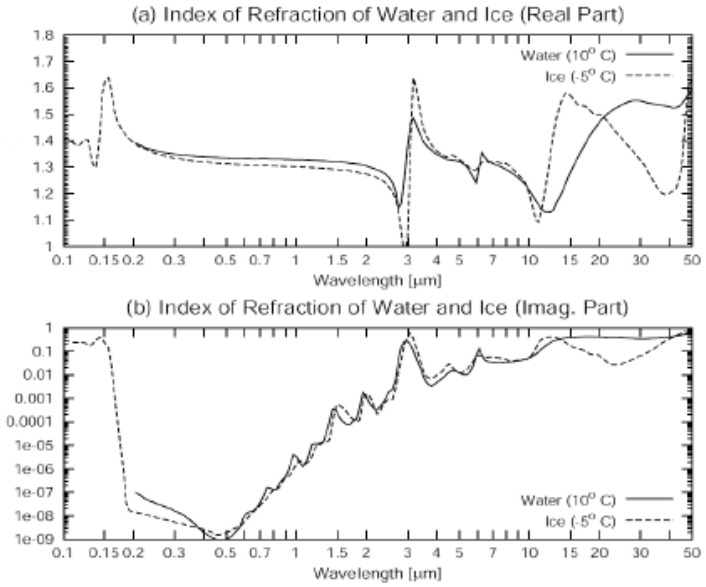


Fig. 6.30: parte reale e immaginaria dell'indice di rifrazione dell'acqua liquida e del ghiaccio

Come abbiamo visto, mentre le gocce di acqua liquida che costituiscono le nubi e le nebbie possono essere ragionevolmente descritte da una geometria sferica, i cristalli di ghiaccio presentano forme bizzarre a seconda delle condizioni incontrate durante il processo di formazione. Trattare queste geometrie bizzarre è possibile, ma estremamente complicato, e per questo tralasciamo ogni ulteriore considerazione in materia, salvo rimandare il lettore interessato a Liou (2002, paragrafo 5.4).

Per calcolare l'efficienza di *scattering*, di assorbimento e di estinzione si può applicare ancora la teoria di Lorenz-Mie così come è stata presentata finora. In particolare:

- si determina, per prima cosa, la distribuzione dimensionale delle idrometeore $N(r)$ ed il valore dell'indice di rifrazione reale ed immaginario dell'acqua o del ghiaccio a seconda di quale dei due casi si sta trattando, tenendo conto della lunghezza d'onda della radiazione incidente;
- si calcola con la teoria di Lorenz-Mie la sezione d'urto di *scattering* di singola particella, di assorbimento e di estinzione e la funzione di fase. Questi calcoli devono essere fatti idealmente per ogni particella, ciascuna caratterizzata dalla propria dimensione;
- si integrano le sezioni d'urto di *scattering*, assorbimento ed estinzione di singola particella su tutto lo spettro dimensionale rappresentato dalla distribuzione $N(r)$.

A semplificare le cose c'è la constatazione che le idrometeore presentano in generale dimensioni notevolmente maggiori rispetto ai normali aerosol. In questo caso, la teoria di Lorenz-

Mie asserisce che quando il parametro $x_i \to \infty$, allora:

- l'efficienza di *scattering* tende ad una costante, dipendente solo dall'indice di rifrazione complesso m_λ della particella secondo la relazione:

$$\lim_{x_i \to \infty} Q_{s,h,i,\lambda} = 1 + \left| \frac{m_\lambda - 1}{m_\lambda + 2} \right| \qquad [6.43]$$

  Si noti che il pedice *h* indica che il coefficiente di *scattering* non è riferito ad una generica particella, ma ad una idrometeora.

- in questo caso (Jacobson, 2000) l'efficienza di assorbimento è pari a quella di *scattering* e perciò l'efficienza di estinzione è pari a due volte l'efficienza di *scattering*.

Quindi la determinazione delle efficienze di estinzione, di *scattering* e di assorbimento risulta estremamente semplice.

Si cerchi, ora, di descrivere in maniera *bulk* le proprietà ottiche delle nubi. Innanzitutto si può definire un indicatore dimensionale dell'intera popolazione di idrometeore presenti in una nube che è il loro ***raggio efficace*** per la cui definizione si parte dalla constatazione che il raggio *R* di una sfera è legato al suo volume *V* ed alla sua superficie esterna *S* dalla relazione:

$$R = 3V/S \qquad [6.44a]$$

Se si considerano tutte le idrometeore (supposte sferiche) presenti in un volume di controllo, il loro volume e la loro superficie esterna complessiva saranno pari a:

$$V_{tot} = \frac{4}{3} \int \pi \cdot r^3 N(r) \cdot dr \qquad S_{tot} = 4 \int \pi \cdot r^2 N(r) \cdot dr \qquad [6.44b]$$

Quindi il raggio di una ipotetica particella che rappresenta l'intera popolazione di particelle rispettando la (6.44a), cioè il ***raggio efficace***, risulta pari a:

$$r_e = \frac{\int \pi \cdot r^3 N(r) \cdot dr}{\int \pi \cdot r^2 N(r) \cdot dr} \qquad [6.44c]$$

L'altro indicatore *bulk* che, questa volta, descrive la quantità complessiva di idrometeore presenti è il ***contenuto di acqua liquida*** (*LWC*) di una nuvola che è definito come:

$$LWC = \frac{4}{3} \rho_w \int \pi \cdot r^3 N(r) \cdot dr \qquad [6.45]$$

Il coefficiente di estinzione è pari a:

$$\beta_{e,h,\lambda} = \int \sigma_{e,h,\lambda}(r) \cdot N(r) \cdot dr = \int Q_{e,h,\lambda}(r) \cdot \pi r^2 N(r) \cdot dr \qquad [6.46a]$$

Dato che il coefficiente di *scattering* per l'acqua è dell'ordine dell'unità e che il coefficiente di estinzione è dell'ordine di 2, si ha che:

$$\beta_{e,h,\lambda} \cong \frac{3}{2} \frac{LWC}{r_e} \qquad [6.46b]$$

Le particelle multicompenenti

Tutti i ragionamenti fatti finora si basano sull'ipotesi che la singola particella sia chimicamente costituita da un unico componente, cosa spesso ben lontana dalla realtà. Per rendere meno complessa la trattazione dello *scattering* e dell'assorbimento di radiazione elettromagnetica da parte di particelle di questo tipo è conveniente definire le *proprietà ottiche efficaci* di una particella multicomponente. A questo proposito, si consideri una particella di volume *V* (cm^3particelle^{-1}) in cui sono presenti N_q componenti chimicamente differenti, ciascuno presente con un volume V_q

(cm^3particelle^{-1}), che presenta un indice di rifrazione complesso $m_{\lambda,q}$. È possibile definire un indice di rifrazione efficace m_λ nel modo seguente:

$$m_\lambda = \sum_{q=1}^{N_q} \frac{V_q}{V} m_{q,\lambda} = \sum_{q=1}^{N_q} \frac{V_q}{V} \left(n_{q,\lambda} - k_{q,\lambda}\right) \qquad [6.47]$$

Questo metodo, noto come *volume average refractive index mixing rule*, è il metodo più semplice che si possa impiegare per risolvere questo problema. Sono stati proposti anche altri metodi, tutti più complessi illustrati, per esempio, in Jacobson (2000, pag. 309). In effetti, una volta definito l'indice di rifrazione efficace, si possono considerare tutte le particelle identiche tra loro e quindi si possono applicare le considerazioni presentate finora senza alcun tipo di modifica.

6.3.3.4 Considerazioni conclusive

Al punto 6.3.2 sono stati determinati i coefficienti di *scattering*, di assorbimento e di estinzione per i gas atmosferici e poco sopra sono state presentate le tecniche per la determinazione di questi coefficienti per gli aerosol e le idrometeore. Ciò che si vuol considerare ora è l'azione combinata di tutti i componenti dell'atmosfera (gas e particelle) sull'estinzione di una radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda λ. Se consideriamo un sottile strato di atmosfera compreso tra le posizioni x_1 e x_2, lo spessore ottico relativo al solo assorbimento è dato da:

$$\tau_{a,\lambda}^G = \int_{x_1}^{x_2} \beta_{a,\lambda}^G(x) \cdot dx \qquad [6.48a]$$

mentre lo spessore ottico dovuto allo *scattering* sarà pari:

$$\tau_{s,\lambda}^G = \int_{x_1}^{x_2} \beta_{s,\lambda}^G(x) \cdot dx \qquad [6.48b]$$

Con espressioni analoghe si può rappresentare lo spessore ottico di assorbimento e *scattering* delle particelle (aerosol e idrometeore), salvo ricordarsi che il loro coefficiente di assorbimento e di *scattering* deve tener conto di tutta la distribuzione dimensionale e quindi tutti questi coefficienti devono essere calcolate con le relazioni (6.42). Noto ciò, lo *spessore ottico totale*, che tiene conto di tutti i possibili fenomeni di estinzione che possono aver luogo nel piccolo strato di atmosfera da x_1 a x_2 lo si ottiene considerando che tutti i processi di estinzione possono essere ritenuti tra loro indipendenti; si può quindi applicare la sovrapposizione degli effetti, ottenendo:

$$\tau_\lambda = \tau_{a,\lambda}^G + \tau_{s,\lambda}^G + \tau_{a,\lambda}^P + \tau_{s,\lambda}^P \qquad [6.49]$$

dove l'apice *G* indica i gas e l'apice *P* le particelle (aerosol ed idrometeore). In sostanza, tutto il materiale fin qui sviluppato consente di determinare lo spessore ottico complessivo di uno strato piano-parallelo di atmosfera, in cui siano note le concentrazioni dei componenti gassosi presenti e la concentrazione in numero e la distribuzione dimensionale degli aerosol e delle idrometeore. Inoltre, per quantificare in maniera complessiva il peso dello *scattering* rispetto all'estinzione complessiva, è anche possibile definire l'*albedo di singolo scattering* come:

$$\omega_{0\lambda} = \frac{\tau_{s,\lambda}^G + \tau_{s,\lambda}^P}{\tau_\lambda} \qquad [6.50]$$

Dato che lo *scattering* (sia dei gas che delle particelle) ha un'importante componente direzionale, è inevitabile definire anche un parametro aggregato che quantifichi questa componente direzionale in maniera *complessiva*. Ciò si fa definendo una *funzione di fase efficace* $P_\lambda(\cos\theta)$ come il rapporto pesato tra la funzione di fase per i gas e quella per le particelle, cioè:

$$P_\lambda(\cos\theta) = \frac{\tau_{s,\lambda}^G P_\lambda^G(\cos\theta) + \tau_{s,\lambda}^P P_\lambda^P(\cos\theta)}{\tau_{s,\lambda}^G + \tau_{s,\lambda}^P} \quad [6.51a]$$

e quindi il *parametro di asimmetria complessiva* dato da:

$$g_\lambda = \frac{\tau_{s,\lambda}^P g_\lambda^P}{\tau_{s,\lambda}^G + \tau_{s,\lambda}^P} \quad [6.51b]$$

6.3.4 INTRODUZIONE AL TRASFERIMENTO RADIATIVO IN ATMOSFERA

Dopo aver introdotto il concetto di *radianza* (cioè di intensità direzionale della radiazione elettromagnetica), di *irradianza* cioè di flusso di radiazione, di *emissività*, di *scattering* e di *assorbimento*, utilizziamo ora sistematicamente tutti questi concetti per definire in maniera formalmente corretta e del tutto generale il trasferimento radiativo in atmosfera.

6.3.4.1 Concetti di base

Consideriamo uno strato di atmosfera come indicato in **Fig. 6.31**. Sia *s* la coordinata orizzontale con valore 0 in corrispondenza della parete di sinistra e s_1 alla parete di destra. A $s = 0$ entra nel piccolo strato d'aria un fascio sottile di radianza ($Wm^{-2}sr^{-1}$) $I_\lambda(0)$ che esce alla posizione $s = s_1$ con una radianza $I_\lambda(s_1)$. Individuiamo, inoltre, all'interno di questo strato piano di atmosfera uno straterello di spessore infinitesimo *ds* in cui entrerà una radianza I_λ ed uscirà una radianza $I_\lambda+dI_\lambda$. Ricordando quanto anticipato al punto 6.1.4, il sottile fascio di radiazione elettromagnetica incidente sul piccolo strato di atmosfera nell'attraversarla subisce un'*estinzione*, cioè si indebolisce a causa dell'interazione con ciò che incontra nel proprio cammino (molecole di gas, particelle solide, gocce di acqua). Quindi, se consideriamo lo straterello infinitesimo individuato, la diminuzione dell'intensità radiante sarà pari a:

$$dI_\lambda = -k_\lambda \rho \cdot I_\lambda \cdot ds \quad [6.52a]$$

dove k_λ è il *coefficiente di estinzione* ($m^2\,Kg^{-1}$) complessivo, spesso indicato anche come *sezione d'urto* (*cross section*), che tiene conto sia dell'assorbimento che dello *scattering*.

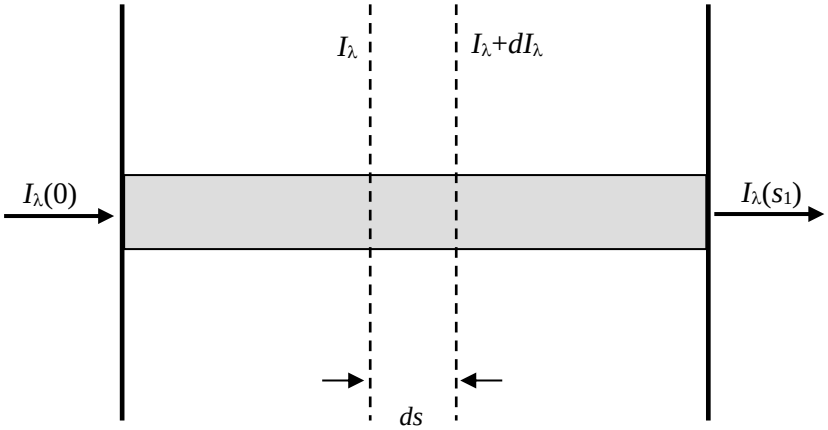


Fig. 6.31: estinzione di intensità radiante nell'attraversamento di una porzione di atmosfera

D'altro canto, non è detto che il passaggio di un fascio sottile di energia radiante debba necessariamente e sempre comportare una diminuzione di intensità del fascio; in realtà può anche incrementarne l'intensità sia per processi di emissione che per lo *scattering multiplo* che porta nel fascio radiante della radiazione proveniente da tutte le altre direzioni. Quindi dobbiamo considerare anche un eventuale *termine di sorgente* specifico per quella lunghezza d'onda λ, che indichiamo come j_λ, la cui funzione è quella di incrementare l'intensità del fascio per emissione e

scattering multiplo. Perciò, l'incremento di intensità radiante sarà proporzionale al termine di sorgente ($W \cdot kg^{-1}$), alla densità dell'aria ρ e al suo spessore *ds* secondo la relazione:

$$dj_\lambda = j_\lambda \cdot \rho \cdot ds \qquad [6.52b]$$

Quindi, combinando i due termini, la *variazione* di intensità di un fascio di energia radiante che attraversa uno straterello di atmosfera di spessore *ds* in generale sarà pari a:

$$dI_\lambda = -k_\lambda \rho \cdot I_\lambda \cdot ds + j_\lambda \cdot \rho \cdot ds \qquad [6.52c]$$

Conviene, però, definire in maniera un po' differente il termine di sorgente. Infatti se poniamo:

$$J_\lambda = \frac{j_\lambda}{k_\lambda} \qquad [6.52d]$$

otteniamo la *source function* che ha le dimensioni di un'intensità radiante. In questo modo la (6.52c) che descrive la variazione infinitesima dell'intensità del fascio di radiazione che attraversa uno strato di atmosfera di spessore infinitesimo si può riscrivere come:

$$\frac{dI_\lambda}{k_\lambda \cdot \rho \cdot ds} = -I_\lambda + J_\lambda \qquad [6.52e]$$

Questa è l'equazione generale del trasferimento radiativo, ottenuta senza imporre alcun tipo di sistema di coordinate. Essa è il punto di partenza di tutti i ragionamenti che seguiranno.

6.3.4.2 La Legge di Beer-Bouguer-Lambert

Invece di considerare un fascio qualsiasi di radiazione, se ne consideri uno di radiazione solare per cui λ è compresa nell'intervallo 0.2÷0.5 μm. In questa banda spettrale il contributo delle emissioni di radiazione nel visibile prodotte dal suolo e dall'atmosfera sono di fatto trascurabili. Inoltre, se si trascura il termine di sorgente dovuto allo *scattering multiplo*, la (6.52e) si riduce a:

$$\frac{dI_\lambda}{k_\lambda \cdot \rho \cdot ds} = -I_\lambda \qquad [6.53a]$$

In queste condizioni il fascio radiante può solo indebolirsi. Sia $I_\lambda(0)$ la radianza entrante a $s = 0$. Dalla relazione precedente, la radianza che emerge dalla posizione $s = s_1$ sarà pari a:

$$I_\lambda(s_1) = I_\lambda(0) \cdot exp\left[-\int_0^{s_1} k_\lambda \cdot \rho \cdot ds\right] \qquad [6.53b]$$

Ma, se il mezzo fisico attraversato dal fascio radiante (in questo caso l'atmosfera) è omogeneo, k_λ è una costante indipendente dalla coordinata *s* e quindi potrà essere estratta dal segno di integrale. Inoltre, se si indica come *path length* l'integrale *u* ($g\ cm^{-2}$) definito come:

$$u = \int_0^{s_1} \rho \cdot ds \qquad [6.53c]$$

la (6.53b) può essere riscritta come:

$$I_\lambda(s_1) = I_\lambda(0) \cdot exp[-k_\lambda . u] \qquad [6.53d]$$

Questa è la ben nota *Legge di Beer-Bouguer-Lambert* secondo cui l'intensità radiante che attraversa un mezzo omogeneo decresce esponenzialmente col prodotto tra il coefficiente di estinzione ed il *path length*. Dato che questa legge non coinvolge dipendenze direzionali, è applicabile non solo alla radianza ma anche all'irradianza solare.

Una conseguenza della *Legge di Beer* è la definizione di *trasmissività monocromatica* T_λ, cioè del rapporto tra la radiazione uscente dallo strato e quella entrante:

$$T_\lambda = \frac{I_\lambda(s_1)}{I_\lambda(0)} = exp[-k_\lambda.u] \qquad [6.54a]$$

Inoltre, in assenza di *scattering*, l'*assorbimento monocromatico* A_λ, cioè la frazione di radiazione incidente di data lunghezza d'onda λ assorbita dal mezzo, sarà pari a:

$$A_\lambda = 1 - T_\lambda = 1 - exp[-k_\lambda.u] \qquad [6.54b]$$

Se, invece, fosse presente anche lo *scattering* della radiazione, una certa porzione di radiazione incidente potrebbe essere retroriflessa. In questo caso è possibile definire anche la *riflettività monocromatica* R_λ pari al rapporto tra la radiazione retroriflessa e la radiazione incidente. Dato che l'energia si deve conservare, è necessario che valga la relazione:

$$A_\lambda + T_\lambda + R_\lambda = 1 \qquad [6.54c]$$

relazione che vale per un mezzo in cui sia attivo sia lo *scattering* che l'assorbimento.

6.3.4.3 L'equazione di Schwarzschild e la sua soluzione

Consideriamo, ora, una porzione qualsiasi di atmosfera in *equilibrio termodinamico locale* in cui non sia attivo lo *scattering*. Questa è la situazione di un'atmosfera in cui sono assenti le nubi. In questo caso, un fascio radiante che attraversa un mezzo da una parte verrà assorbito e dall'altra emetterà energia radiante, il tutto simultaneamente. Ciò è quel che avviene nella trasmissione di radiazione emessa nell'infrarosso dalla superficie terrestre e dall'atmosfera stessa. Per semplicità, immaginiamo che il mezzo sia caratterizzato da emissività unitaria. In questa ipotesi l'emissione seguirà fedelmente le relazioni che descrivono l'emissione di radiazione da un corpo nero. Se $B_\lambda[T(s)]$ è la funzione di Planck (che dipende solo dalla temperatura assoluta del mezzo), allora la *source function* potrà essere espressa come:

$$J_\lambda = B_\lambda(T) \qquad [6.55a]$$

Da ciò consegue che la relazione generale di trasferimento radiativo può essere scritta come:

$$\frac{dI_\lambda}{k_\lambda \cdot \rho \cdot ds} = -I_\lambda + B_\lambda(T) \qquad [6.55b]$$

quindi la *variazione* di energia radiante incidente sarà la somma di un termine, il primo, dovuto all'assorbimento, che la riduce, e di un termine, il secondo, dovuto all'emissione, che la incrementa. Dato che nel mezzo considerato non ha luogo il processo di *scattering*, k_λ rappresenterà solo l'assorbimento. Questa relazione è nota come l'*equazione di Schwarzschild*.

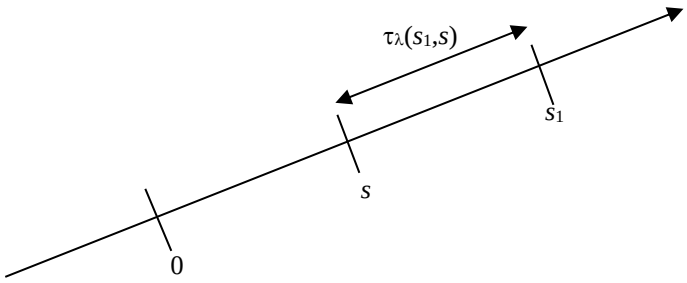


Fig. 6.32: geometria utilizzata per la definizione dello spessore ottico

Per cercare una sua possibile soluzione conviene riferirsi alla geometria indicata in **Fig.6.32** dove la retta orientata rappresenta la direzione di propagazione del fascio radiante incidente, la posizione $s = 0$ il punto in cui il fascio entra nella porzione di atmosfera considerata, s una posizione intermedia e s_1 la posizione in cui il fascio esce da essa. Sulla base di questa geometria è possibile definire lo *spessore ottico monocromatico* del mezzo tra la posizione generica s e la

posizione s_1, da cui il fascio radiativo emerge, nel modo seguente:

$$\tau_\lambda(s_1, s) = \int_s^{s_1} k_\lambda \cdot \rho \cdot ds' \qquad [6.56a]$$

e quindi il suo incremento differenziale è pari a:

$$d\tau_\lambda(s_1, s) = -k_\lambda \cdot \rho \cdot ds' \qquad [6.56b]$$

Impiegando queste definizioni, la (6.55b) può essere riscritta come:

$$-\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda(s_1, s)} = -I_\lambda + B_\lambda(T) \qquad [6.57a]$$

in cui si è indicata esplicitamente la dipendenza della temperatura dalla specifica posizione considerata. Moltiplicando entrambi i membri $e^{-\tau_\lambda(s_1,s)}$ ed integrando tra 0 e s_1, si ottiene:

$$-\int_0^{s_1} d\left[I_\lambda(s) \cdot e^{-\tau_\lambda(s_1,s)}\right] = \int_0^{s_1} B_\lambda\big(T(s)\big) \cdot e^{-\tau_\lambda(s_1,s)} \cdot d\tau_\lambda(s_1, s) \qquad [6.57b]$$

Di conseguenza:

$$I_\lambda(s_1) = I_\lambda(0) \cdot e^{-\tau_\lambda(s_1,s)} + \int_0^{s_1} B_\lambda\big(T(s)\big) \cdot e^{-\tau_\lambda(s_1,s)} \cdot k_\lambda \rho \cdot ds \qquad [6.57c]$$

Quindi, l'equazione di Schwarzchild afferma che, in assenza di *scattering* (per esempio in un'atmosfera priva di nubi) e quando consideriamo la geometria di **Fig. 6.32**, la radianza in uscita dallo strato piano considerato è la somma di due termini che agiscono simultaneamente. Il primo termine, funzione della radianza entrante, rappresenta l'attenuazione del fascio secondo una legge esponenziale dipendente esclusivamente dallo spessore ottico complessivo incontrato lungo la direzione di propagazione. Se non ci fosse l'emissione, l'energia radiante verrebbe solo attenuata durante la sua propagazione. Il secondo termine, invece, indica come sia attiva per tutto il percorso di propagazione l'emissione (qui si è considerato un mezzo caratterizzato da una emissività unitaria). Tuttavia l'energia emessa viene contemporaneamente assorbita in maniera dipendente dalla temperatura del mezzo (per la presenza della funzione di Planck), dalla sua densità e dal suo coefficiente di assorbimento. Se si conosce la distribuzione della densità ρ, della temperatura T e del coefficiente di assorbimento k_λ, l'equazione di Schwarzchild può essere integrata almeno numericamente, cosa che verrà fatta quando si tratterà il trasferimento radiativo della radiazione infrarossa terrestre ed atmosferica.

6.3.4.4 L'equazione del trasferimento radiativo per piani paralleli

Quando si determina il trasferimento radiativo in atmosfera, specialmente nei modelli ad area limitata, è appropriato ipotizzare che l'atmosfera abbia una geometria monodimensionale, cioè sia costituita da strati orizzontali sovrapposti, paralleli gli uni agli altri e paralleli alla superficie terrestre di cui si ignora, con buona approssimazione, la curvatura. In questo caso la radianza e le proprietà dell'atmosfera (temperatura e profilo della concentrazione dei componenti gassosi dell'atmosfera) possono variare solo in verticale con la coordinata *z*. In questo caso è conveniente misurare le distanze lineari normali al piano di stratificazione (**Fig. 6.33**).

Come si è visto, un fascio di radianza monocromatica viene assorbito, diffuso e trasmesso nell'attraversare una porzione infinitesima *ds* di atmosfera e ciò lo fa propagandosi lungo una direzione che forma un angolo θ (angolo di *zenit*) con la normale allo strato e quindi con la coordinata *z*. Per sostituire l'incremento infinitesimo *ds* lungo la direzione di propagazione con il conseguente incremento *dz* lungo la coordinata *z*, dobbiamo ricordare la relazione trigonometrica:

$$ds = \frac{dz}{\cos\theta} = \frac{dz}{\mu} = \sec\theta \cdot dz \qquad [6.58a]$$

dove, per comodità, si è posto μ = cosθ. Quindi, tenendo conto che la radianza incide con un angolo di *zenit* θ, in termini di coordinata verticale *z*, la relazione (6.52e) diventa:

$$\cos\theta \cdot \frac{dI(z;\theta,\Phi)}{k\rho \cdot dz} = -I(z;\theta,\Phi) + J(z;\theta,\Phi) \qquad [6.58b]$$

in cui con θ (angolo di *zenit*) si è indicata l'inclinazione rispetto alla normale al piano del vettore posizione e con Φ (angolo di *azimut*) l'angolo della proiezione orizzontale del vettore posizione rispetto all'asse *x*. In questa relazione e nelle seguenti si è tralasciata per semplicità di scrittura la dipendenza dalla lunghezza d'onda λ (che, ovviamente, esiste).

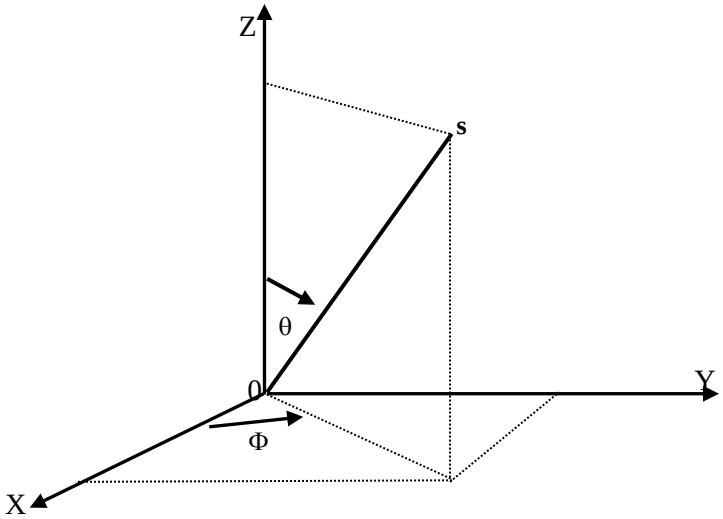


Fig. 6.33: geometria per un'atmosfera piano-parallela dove θ *e* Φ *sono l'angolo di zenit e di azimut rispettivamente e s rappresenta il vettore posizione*

Introduciamo, ora, il concetto di <u>*spessore ottico normale*</u> definito dall'integrale:

$$\tau = \int_{z}^{\infty} k\rho \cdot dz' \qquad [6.58c]$$

Prima di procedere è opportuno chiederci come varierà lo spessore ottico normale in funzione di *z*. Se la quota aumenta di *dz* allora avremo che lo spessore ottico diminuisce rispetto a quello relativo alla quota *z* perché la porzione di atmosfera che produce l'estinzione è diminuita, infatti:

$$d\tau = \int_{z+dz}^{\infty} k\rho \cdot dz' - \int_{z}^{\infty} k\rho \cdot dz' \qquad [6.58d]$$

Quando *z* aumenta, lo spessore ottico normale diminuisce, quindi si ha che:

$$\mu \cdot \frac{dI(z;\theta,\Phi)}{d\tau} = I(z;\theta,\Phi) - J(z;\theta,\Phi) \qquad [6.58e]$$

che è l'equazione per trattare lo *scattering* multiplo in una geometria piano-parallela.

Seguendo una procedura del tutto simile a quella adottata al punto precedente, la (6.58e) può essere risolta in modo da ottenere l'*intensità ascendente* (*upward*) e l'*intensità discendente* (*downward*) di radianza relative ad uno strato di atmosfera di dimensione finita che si estende tra il livello per cui lo spessore ottico τ = 0 (la sommità dello strato) e il livello per cui τ = τ_* (la base dello strato), come illustrato in **Fig. 6.34**.

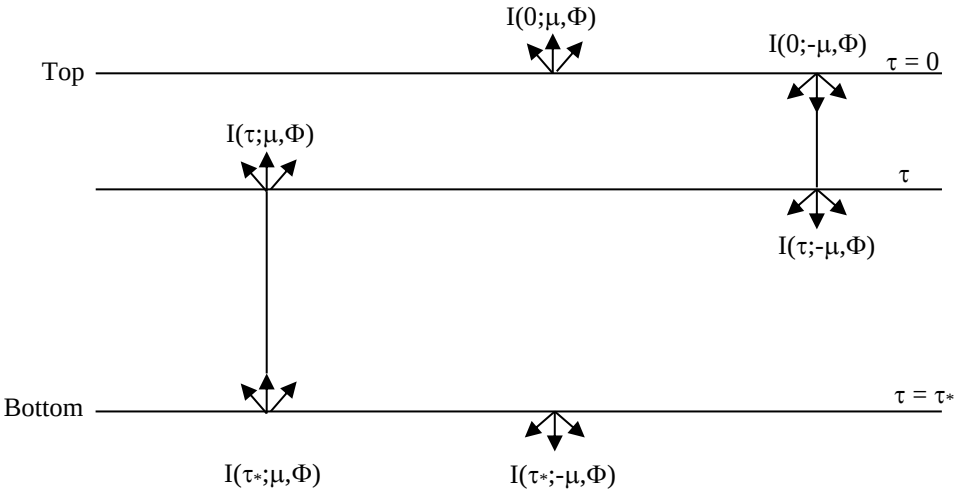


Fig. 6.34: intensità ascendenti (μ) e discendenti (-μ) di radiazione ad un dato livello τ, alla sommità (τ = 0) e alla base (τ = τ) di uno strato piano-parallelo di atmosfera*

Per ottenere l'*intensità ascendente* (μ > 0) al livello τ, basta moltiplicare la (6.58e) per il *exp*(-τ/μ) ed integrarla dal generico τ a τ = τ*. Il risultato di tutto ciò è la relazione seguente:

$$I(\tau;\mu,\Phi) = I(\tau_*;\mu,\Phi)\cdot e^{-(\tau_*-\tau)/\mu} + \int_{\tau}^{\tau_*} J(\tau';\mu,\Phi)\cdot e^{-(\tau_*-\tau)/\mu}\cdot\frac{d\tau'}{\mu} \qquad [6.59a]$$

Per ottenere, invece, l'*intensità discendente* (μ < 0) al livello τ, basta moltiplicare sempre per *exp*(-τ/μ) ed integrare da τ = 0 a τ, ottenendo:

$$I(\tau;-\mu,\Phi) = I(0;-\mu,\Phi)\cdot e^{-\tau/\mu} + \int_{0}^{\tau} J(\tau';-\mu,\Phi)\cdot e^{-(\tau-\tau')/\mu}\cdot\frac{d\tau'}{\mu} \qquad [6.59b]$$

Nelle due relazioni precedenti, $I(\tau_*;\mu,\Phi)$ e $I(0;-\mu,\Phi)$ rappresentano rispettivamente l'intensità entrante alla base ed alla sommità dello strato.

Per le applicazioni nel *PBL* è desiderabile evidenziare alcune situazioni particolari. Consideriamo, in primo luogo, la radianza che emerge dalla sommità dell'atmosfera e che può essere misurata dalla strumentazione posta a bordo di un satellite. In questo caso bisogna considerare la (6.59a) perché μ > 0 che integrata tra τ = 0 e τ = τ* diventa:

$$I(0;\mu,\Phi) = I(\tau_*;\mu,\Phi)\cdot e^{-\tau_*/\mu} + \int_{0}^{\tau_*} J(\tau';\mu,\Phi)\cdot e^{-\tau'/\mu}\cdot\frac{d\tau'}{\mu} \qquad [6.59c]$$

dove il primo ed il secondo termine del membro di destra rappresentano rispettivamente il contributo emissivo della superficie (ottenuto alla sommità) ed il contributo atmosferico interno. D'altra parte, se si pone τ = τ*, dalla equazione (6.59b) si ottiene:

$$I(\tau_*;-\mu,\Phi) = I(0;-\mu,\Phi)\cdot e^{-\tau_*/\mu} + \int_{0}^{\tau_*} J(\tau';-\mu,\Phi)\cdot e^{-(\tau_*-\tau')/\mu}\cdot\frac{d\tau'}{\mu} \qquad [6.59d]$$

che rappresenta la radianza che scende dalla parte alta dell'atmosfera e che raggiunge il suolo. Ancora una volta, il primo ed il secondo termine del membro di destra rappresentano rispettivamente il contributo dalla sommità (attenuato alla base) ed il contributo interno.

6.4 IL BILANCIO RADIATIVO TERRA-ATMOSFERA

Quanto finora visto consente lo studio degli scambi energetici tra il Sole ed il sistema Atmosfera-Terra, ma prima di descriverne i dettagli, è necessario avere un quadro sufficientemente chiaro del *bilancio radiativo globale* che coinvolge il Sole, l'unica sorgente di energia, l'atmosfera e la Terra. Questo bilancio è *globale* nel senso che rappresenta ciò che avviene in media a livello annuale. Naturalmente, a livello locale, le cose possono variare anche significativamente ma, perché l'intero sistema possa mantenersi in equilibrio termico, è necessario che l'intero bilancio venga soddisfatto almeno a livello medio. Un'analisi di questo tipo non è certamente facile da realizzare e richiede l'utilizzo combinato di diverse tecniche quali le misure radiative al suolo, le misure *remote sensing*, le osservazioni effettuate dai satelliti in orbita attorno alla terra e una serie nutrita di simulazioni numeriche. Nella discussione che seguirà si fa riferimento al lavoro di Kiehl e Trenberth (1997) rivisto nel 2009 (Trenberth el al, 2009).

6.4.1 IL BILANCIO RADIATIVO GLOBALE: I CONCETTI

Il Sole è sostanzialmente una sorgente di forma sferica che emette energia radiante in maniera continua ed uniforme in tutte le direzioni radiali rispetto al proprio centro. Lo spettro dell'energia emessa è prossimo allo spettro di emissione di un corpo nero ad altissima temperatura con la maggior parte dell'energia concentrata nella banda del visibile.

Una porzione dell'energia emessa, quella corrispondente all'angolo solido con cui il Sole *vede* la Terra, giunge alla sommità dell'atmosfera terrestre. Una porzione di essa viene globalmente riflessa una volta raggiunta l'atmosfera terrestre e quindi solo una parte dell'energia fornita dal Sole risulta realmente disponibile. Da parte sua, l'atmosfera terrestre e la Terra stessa emettono verso lo spazio dell'energia, visto che la superficie terrestre e l'atmosfera sono corpi caldi e come tali devono emettere approssimativamente come altrettanti corpi neri. In sostanza, quello che globalmente accade è ciò che viene illustrato nella **Fig.6.35** che rappresenta un *equilibrio radiativo planetario* in cui:

- il flusso radiativo di origine solare che giunge alla sommità dell'atmosfera (*Top of Atmosphere*, TOA) è pari al flusso radiativo emesso alla sommità dell'atmosfera e dovuto all'atmosfera stessa ed alla superficie terrestre;
- il flusso radiativo di origine solare che è disponibile alla sommità dell'atmosfera è pari al flusso radiativo di origine solare meno la porzione di questo flusso riflessa dall'atmosfera e dalla superficie terrestre.

Le osservazioni da satellite, oltre a molte osservazioni fatte con metodi tradizionali e con sistemi *remote sensing* a terra, confermano che il Sole emette energia radiante come un corpo nero alla temperatura di circa 5780 K.

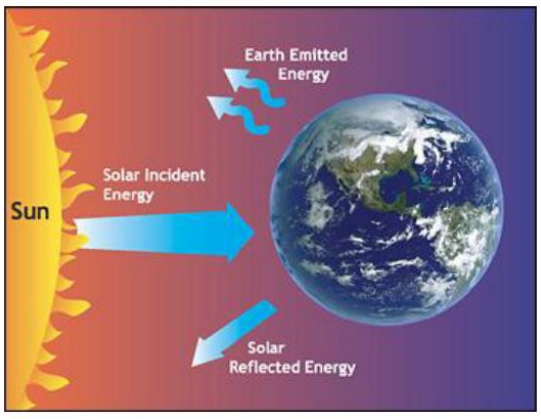


Fig. 6.35: bilancio radiativo planetario

6.4.2 IL BILANCIO RADIATIVO GLOBALE: I NUMERI

Dalle osservazioni satellitari risulta (Liou, 2002) che alla sommità dell'atmosfera (TOA) giunge un'irradianza solare I_0 pari a 1368 W m^{-2} (nota come *costante solare*) e dalla distribuzione spettrale della radiazione solare si può asserire che il Sole può essere assimilato ad un corpo nero con emissività praticamente unitaria. Da questa osservazione scaturiscono alcune utili deduzioni che faremo sotto forma di esercizi.

Esercizio 6.8

Sia R_S = 6.96 x 10^5 km il raggio del Sole, R_T = 6357 km il raggio della Terra ed il raggio medio dell'orbita terrestre (approssimativamente circolare) sia D = 1.495· 10^8 km. In base al valore della costante solare I_0 di 1368 W m^{-2}, determinare l'ammontare complessivo di energia radiante e di irradianza emessa dal Sole nell'unità di tempo.

Per prima cosa verifichiamo immediatamente che il rapporto tra il raggio medio dell'orbita terrestre ed il raggio della Terra è:

$$\frac{R_T}{D} = \frac{6357}{1.495 \cdot 10^8} = 4.25 \cdot 10^{-5}$$

quindi nei calcoli che faremo potremo ignorare la dimensione terrestre e considerare la Terra come un punto nello spazio, senza alcun apprezzabile errore.

L'energia radiante emessa dall'intera sfera solare per unità di tempo e di superficie (cioè l'irradianza) F_S dovrà essere pari all'energia per unità di tempo e di superficie ricevuta da una sfera concentrica rispetto al Sole e di raggio pari all'orbita media terrestre che è poi la costante solare I_0. Pertanto l'irradianza alla superficie del sole è pari a:

$$F_S = I_0 \left(\frac{D}{R_S}\right)^2 = 1368 \cdot \left(\frac{1.495 \cdot 10^8}{6.96 \cdot 10^5}\right)^2 = 63.12 \cdot 10^6 \ \ (Wm^{-2})$$

e quindi, complessivamente, l'energia totale emessa dal Sole per unità di tempo risulta:

$$E_{sole} = 4\pi R_S^2 F_S = 3.86 \cdot 10^{26} \ \ (Wm^{-2})$$

Quindi l'energia emessa nell'unità di tempo dal Sole e la sua irradianza sono enormi! È facile, poi verificare che la costante solare misurata comporta che la temperatura del Sole, che si ipotizza emetta come un corpo nero, sia pari a circa 5780 K.

Per effettuare un bilancio radiativo è necessario stabilire l'ammontare medio di irradianza che raggiunge la sommità dell'atmosfera ed il suo calcolo viene realizzato nell'Esercizio seguente.

Esercizio 6.9

Determinare in media quanta irradianza solare giunge alla sommità dell'atmosfera.

La Terra intercetta un'energia radiante per unità di tempo di provenienza solare pari a quella ricevuta da un *disco* avente lo stesso raggio terrestre, cioè:

$$E_T = \pi R_T^2 I_0$$

e la distribuisce su una superficie pari alla superficie della semisfera che si affaccia al Sole. Quindi l'irradianza media che giunge alla superficie terrestre è pari a:

$$F_T = \frac{\pi R_T^2 I_0}{4\pi R_T^2} = \frac{1}{4} I_0 = 341 \ \ (Wm^{-2})$$

La disponibilità di un'irradianza media pari a 341 W·m^{-2} alla superficie terrestre è il punto di partenza del bilancio radiativo globale del sistema Sole-Atmosfera-Terra.

6.4.3 LE VARIE COMPONENTI DEL BILANCIO RADIATIVO GLOBALE

La disponibilità energetica media al TOA, cioè l'irradianza di origine solare ad onda corta, come abbiamo visto è di circa 341 $W \cdot m^{-2}$ su base annua. Vediamo ora cosa produce tutto ciò, facendoci guidare dalla sintesi illustrata nella **Fig.6.36**.

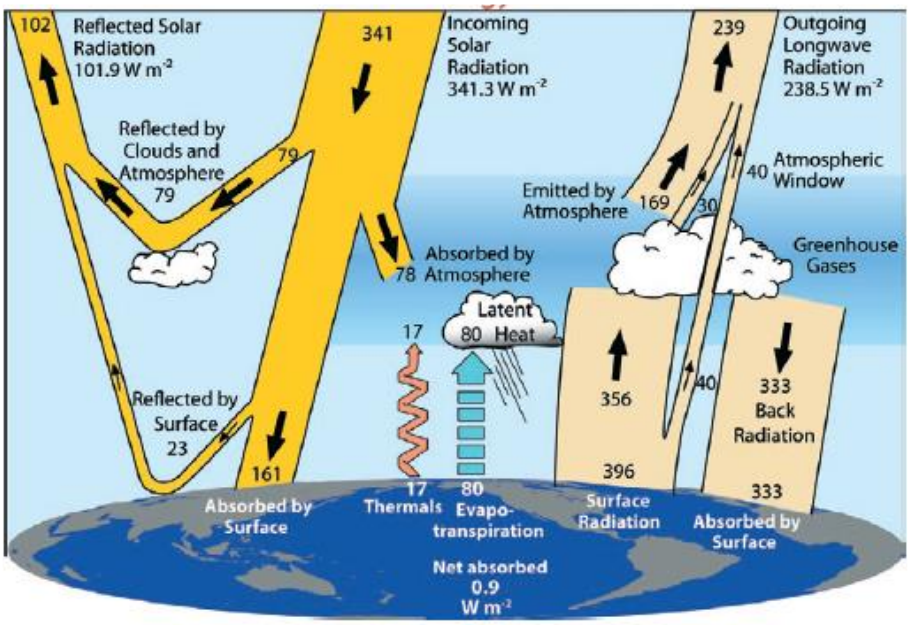


Fig. 6.36: il bilancio radiativo globale del sistema Sole-Terra-Atmosfera e le sue componenti (Trenberth e al. 2009)

6.4.3.1 Bilancio alla sommità dell'atmosfera (TOA)

Il primo bilancio che si realizza è in corrispondenza del confine ideale esterno del sistema Atmosfera-Terra, cioè il TOA. La presenza dei satelliti in orbita terrestre facilita grandemente la quantificazione e la verifica di questo bilancio. In effetti, sulla base delle misure disponibili, si ha che globalmente a livello annuo:

- giungono al TOA circa 341 Wm^{-2} di radiazione ad onda corta (prevalentemente nella banda dell'ultravioletto e del visibile) di provenienza solare;
- 79 Wm^{-2} (circa il 23%) vengono immediatamente riflessi nello spazio siderale dalle nuvole, dai gas e dagli aerosol presenti nell'atmosfera ed abbandonano definitivamente il sistema;
- dei restanti 262 Wm^{-2}, 23 Wm^{-2} (circa il 70% dell'input iniziale) vengono riflessi dalla superficie terrestre e si perdono nello spazio siderale;
- e 78 Wm^{-2} (circa il 23% dell'input iniziale) vengono assorbiti dall'atmosfera stessa;
- quindi solo 161 Wm^{-2} (circa il 47% dell'input iniziale) vengono assorbiti dalla superficie terrestre.

In questo modo il TOA è in equilibrio termico. L'unico *termine di sorgente*, costante nel tempo, è rappresentato dall'apporto di energia solare al TOA, mentre i termini di *sink* sono rappresentati dall'energia riflessa dalle nubi, dagli aerosol e dai gas atmosferici e dall'energia riflessa dal suolo. Perciò, rispetto all'apporto solare di energia radiante, il sistema Terra-Atmosfera presenta un *coefficiente di albedo complessivo* (rapporto tra energia riflessa ed energia incidente) pari a circa 0.30.

Da questo bilancio risulta che il sistema Terra-Atmosfera assorbe su base annua complessivamente 239 Wm^{-2} (l'assorbimento della superficie terrestre e dell'atmosfera) e tale *input* energetico viene impiegato per mantenere in moto l'atmosfera e per consentire la vita sul pianeta.

6.4.3.2 Bilancio alla superficie terrestre

Perché la superficie terrestre resti in un equilibrio termico a livello annuale è necessario che l'energia che vi giunge (sia ad onda corta di origine solare, sia ad onda lunga derivante dall'emissione all'infrarosso dell'atmosfera) pareggi esattamente le perdite di energia che ivi hanno luogo. Di fatto si ha che:

- la superficie terrestre acquisisce 161 Wm^{-2} di energia ad onda corta di diretta provenienza solare trasmessa attraverso l'atmosfera;
- la superficie terrestre acquisisce 333 Wm^{-2} di energia ad onda lunga (infrarosso) dall'atmosfera sovrastante che la emette come un corpo nero. In totale la superficie terrestre acquisisce 494 Wm^{-2} di energia parzialmente ad onda corta e parzialmente ad onda lunga;
- essendo un corpo caldo, la superficie terrestre emette nell'infrarosso 396 Wm^{-2} verso l'atmosfera. Di questi solo 356 Wm^{-2} vengono assorbiti nell'atmosfera, mentre 40 Wm^{-2} transitano senza alcun tipo di estinzione attraverso l'atmosfera e si perdono nello spazio siderale. Essi corrispondono tutti a radiazione con lunghezza d'onda appartenente alla finestra spettrale *atmospheric window* (8-12 μm) nella quale i gas atmosferici presentano un assorbimento trascurabile;
- dalla superficie, come vedremo, viene fornita alle masse d'aria sovrastanti dell'energia (il flusso turbolento di calore sensibile) per alimentare i moti turbolenti del *PBL* e tale energia ammonta a circa 17 Wm^{-2};
- dalla superficie, come vedremo, viene fornita altra energia per l'evapotraspirazione (il tutto rappresentato dal flusso turbolento di calore latente) e tale energia ammonta a circa 80 Wm^{-2}.

Anche in questo caso il bilancio energetico risulta in pareggio.

Esercizio 6.10

Determinare la temperatura di equilibrio dell'ambiente terrestre sia nella situazione in cui il coefficiente globale di albedo sia pari a 0.3 sia quando si ipotizza una completa assenza di nubi, situazione cui corrisponde un coefficiente di albedo pari a 0.15.

Per risolvere questo problema conviene adottare un semplice modello operativo secondo cui l'ambiente terrestre è assimilabile ad un corpo nero ad una temperatura di equilibrio medio annuo T_T, che emette secondo la Legge di Stefan-Boltzmann. Se l'ambiente terrestre emette come un corpo nero alla temperatura T_T ed assorbe un'irradianza pari alla costante solare I_0 (si ipotizza che l'intera atmosfera sia assente), allora l'energia emessa deve pareggiare l'energia ricevuta dal Sole. Ciò comporta che:

$$F_0 = \frac{\pi R_T^2 I_0}{4\pi R_T^2}(1 - A) = \sigma_B T_T^4$$

dove σ_B è la costante di Stefan-Boltzmann ed A è il coefficiente globale di albedo. Quindi si ha che:

$$T_T = \left(\frac{(1 - A) \cdot I_0}{4\sigma_B}\right)^{1/4} = \left(\frac{(1 - 0.3) \cdot 1368}{4 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8}}\right)^{1/4} = 255\ K$$

Quindi nel caso in cui siano presenti le nubi, la temperatura di equilibrio dell'ambiente terrestre è di 255 K, piuttosto bassa rispetto alla temperatura registrata alla superficie nelle zone di media e bassa latitudine, ma decisamente elevata per le zone polari. Se si considera

che il semplice modello ignora la presenza e l'influenza dell'atmosfera e la eterogeneità della superficie terrestre, il risultato ottenuto può ritenersi soddisfacente.
Ora consideriamo $A = 0.15$ (assenza completa di copertura nuvolosa), gli stessi calcoli appena fatti portano ad una temperatura di equilibrio pari a 267 K.
In realtà, più che la temperatura della superficie terrestre, la temperatura ottenuta rappresenta un valore medio delle temperature presenti nel sistema Terra-Atmosfera.

6.4.3.3 Bilancio dell'atmosfera

L'ultimo elemento che dobbiamo considerare è il bilancio energetico relativo alla sola atmosfera. Essa stessa deve trovarsi in equilibrio termico e quindi l'energia radiante ad onda lunga e ad onda corta che l'atmosfera riceve dal sole e dalla superficie terrestre deve pareggiare l'energia radiante che essa emette. In effetti, ciò che si riscontra è che l'atmosfera:

- assorbe direttamente 78 Wm^{-2} di energia ad onda corta di provenienza solare;
- assorbe 356 Wm^{-2} di energia ad onda lunga emessa direttamente dalla superficie terrestre;
- assorbe 17 Wm^{-2} di energia fornita dalla superficie per sostenere i moti turbolenti della parte bassa dell'atmosfera (il *PBL*);
- assorbe 80 Wm^{-2} di energia fornita dalla superficie terrestre come flusso turbolento di calore latente per l'evapotraspirazione;
- emette 333 Wm^{-2} ad onda lunga verso la superficie terrestre;
- emette 169 Wm^{-2} ad onda lunga verso lo spazio;
- emette 30 Wm^{-2} di energia ad onda lunga a causa dell'emissione delle nuvole presenti in atmosfera.

Anche in questo caso il bilancio è rispettato (a meno di 1 Wm^{-2}) e quindi anche l'atmosfera risulta essere in equilibrio termico.

6.4.3.4 Variazione con la latitudine del bilancio radiativo globale

Tutte queste considerazioni di bilancio sono state fatte *omogeneizzando* l'intera superficie terrestre e l'atmosfera e considerando delle entità medie nello spazio e nel tempo (a livello annuo). Effettivamente, per quanto ci è dato sapere dalle misure disponibili, la situazione media è quella fin qui illustrata. Nulla vieta, però, di realizzare bilanci energetici anche con punti di vista diversi. Il punto di vista più interessante è sicuramente quello che vede la latitudine come elemento predominante. Effettivamente il clima varia in funzione della latitudine e con esso la vegetazione ed il modo di vivere dell'uomo. Se viene realizzato un bilancio radiativo per latitudine, ciò che si ottiene è illustrato in **Fig. 6.37**. Quando mediati globalmente su base annuale, gli apporti netti di energia sono sostanzialmente bilanciati dalle perdite della stessa verso lo spazio, cosa non più vera quando si ragiona per latitudini. Se si considera il flusso netto di energia ad onda corta, dalla figura si vede come le zone comprese tra le latitudini 40°N e 40°S (le zone equatoriali, tropicali e le medie latitudini, in sostanza la parte del mondo maggiormente abitata) presentano un guadagno energetico netto, mentre le zone polari presentano una perdita energetica netta a causa della loro limitata insolazione e dalla loro elevata albedo. Un analogo bilancio per la radiazione ad onda lunga presenta caratteristiche simili anche se meno accentuate: il flusso ad onda lunga emesso dalla superficie terrestre è maggiore ai tropici dove la temperatura superficiale è maggiore. L'esistenza di questi *gradienti energetici* comporta il *trasporto di energia* dalle zone tropicali a quelle polari e ciò è accompagnato da correnti atmosferiche ed oceaniche caratteristiche. Questa è la ragione della presenza sul pianeta di ben precise zone climatiche e di ben precisi tipi di tempo.

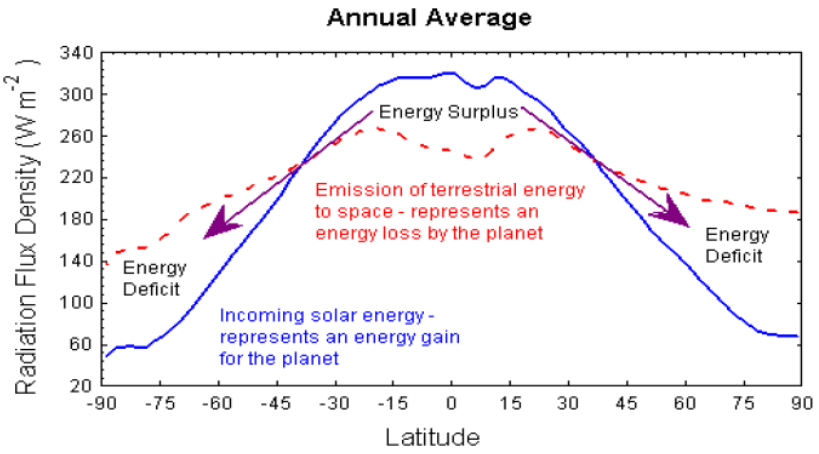


Fig. 6.37: bilancio radiativo globale in funzione della latitudine

Un altro modo per guardare all'interno del bilancio radiativo globale è quello di analizzare l'andamento mensile del flusso totale di energia radiante alle varie latitudini (**Fig. 6.38**), quindi di vedere il bilancio anche in chiave temporale.

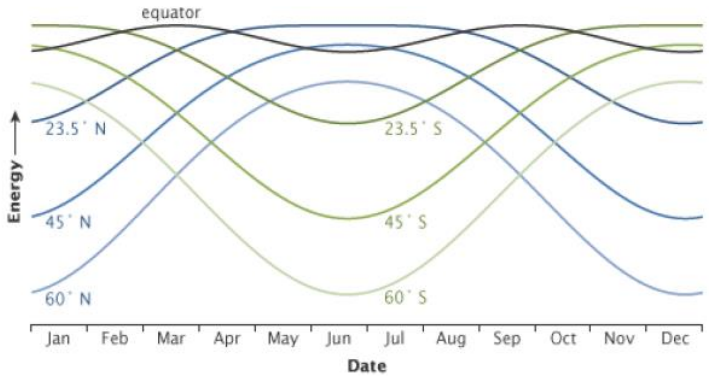


Fig. 6.38: andamento col tempo e con la latitudine del flusso netto di energia

Come si nota, all'equatore le variazioni temporali sono minime, anche se notiamo due massimi, uno in primavera ed uno in autunno, con un minimo in estate. I due massimi si avvicinano tra loro con l'aumentare della latitudine e si sovrappongono in un solo massimo molto piatto in corrispondenza delle zone tropicali, mentre compaiono due netti minimi nel periodo invernale. Questo andamento si accentua sempre più con l'aumentare della latitudine; per esempio la situazione alla latitudine di 60° è emblematica: il massimo molto accentuato di flusso netto di energia lo si ha solo in un breve periodo estivo, mentre tale flusso decresce vistosamente fino ad un profondo minimo invernale.

6.3.3 CENNI ALL'EFFETTO SERRA

Dallo studio dell'assorbimento di radiazione da parte dei costituenti gassosi dell'atmosfera sappiamo che molti di essi assorbono radiazione nell'infrarosso. Se confrontiamo il coefficiente di assorbimento (cioè il rapporto tra la radiazione assorbita e la radiazione incidente) che essi presentano ed i tipici spettri di emisione del Sole (visto come un corpo nero a circa 5800 K) e dell'ambiente terrestre (visto come un corpo nero a circa 290 K), vediamo che in corrispondenza dell'emissione dell'ambiente terrestre parecchi gas presentano caratteristiche bande di emissione (**Fig. 6.39**). Tali gas, chiamati *gas serra* (*greenhouse gases*), sono CO_2, H_2O, N_2O, O_3 e clorofluorocarburi (CFC). Il loro assorbimento nella banda dell'infrarosso è elevata, tranne in una

ristretta banda spettrale (8 ÷ 12 μm) in cui la radiazione infrarossa è circa trasparente. Da tale banda spettrale sfugge direttamente allo spazio siderale una porzione di radiazione emessa dalla superficie terrestre e ciò è un elemento notevolmente importante nel determinare la temperatura alla superficie terrestre.

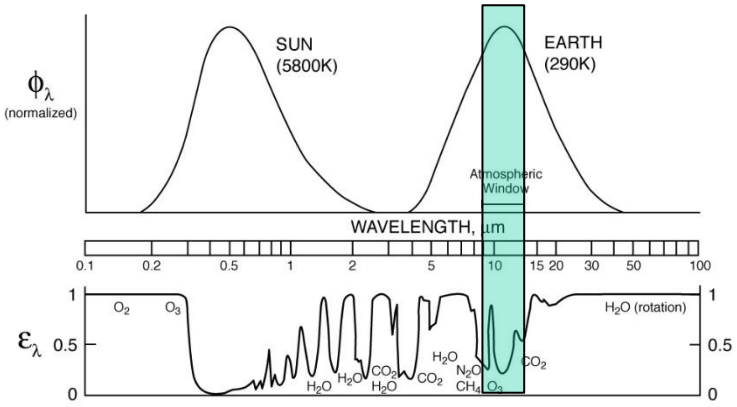


Fig. 6.39: spettri di emissione del Sole e dell'ambiente terrestre e coefficienti di assorbimento dei vari gas atmosferici

Per cercare di studiare quantitativamente la questione, anche se in termini piuttosto semplificati, conviene usare un semplice *modello di effetto serra* (*greenhouse effect*) in cui l'intera atmosfera viene considerata come uno strato isotermo posto ad una certa distanza dalla superficie terrestre (**Fig. 6.40**). Questo strato è trasparente alla radiazione solare ad onda corta, ma assorbe una frazione *f* (circa il 77%) della radiazione terrestre per l'assorbimento dei gas serra. In particolare, l'apporto solare, in base a quanto visto all'*Esercizio 6.9*, risulta pari a $I_0/4 \cdot (1\text{-}A)$ se si tiene conto della riflessione della radiazione solare al suolo quantificata dal coefficiente di albedo complessivo *A* pari a 0.3.

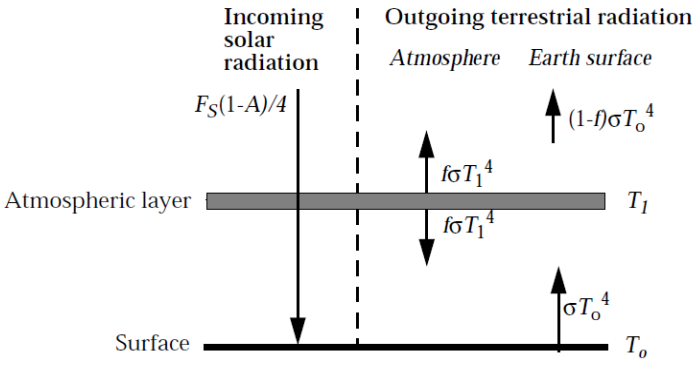


Fig. 6.40: semplice modello di effetto serra

Sia T_0 la temperatura della superficie terrestre e T_1 la temperatura dello strato isotermo di atmosfera. Si avrà quindi che:

- la superficie terrestre emetterà la radiazione elettromagnetica: $\sigma_B T_0^4$
- lo strato isotermo di atmosfera assorbirà una frazione di questa radiazione: $f\sigma_B T_0^4$
- lo strato isotermo atmosferico emetterà sia verso il basso che verso l'alto l'irradianza: $f\sigma_B T_1^4$ rispettando la legge di Kirchoff.

Alla luce di tutto ciò, il bilancio di energia del sistema Terra- Atmosfera visto da un osservatore dallo spazio risulta pari a:

$$\underbrace{\frac{I_0(1-A)}{4}}_{apporto\ solare} = \underbrace{(1-f)\cdot\sigma_B\cdot T_0^4}_{\substack{porzione\ di\ radiazione\\ terrestre\ trasmessa}} + \underbrace{f\cdot\sigma_B T_1^4}_{emissione\ atmosferica} \qquad [6.60a]$$

Consideriamo ora il bilancio energetico del solo strato atmosferico. Esso risulta dato da:

$$f\cdot\sigma_B\cdot T_0^4 = 2f\cdot\sigma_B T_1^4 \qquad [6.60b]$$

quindi:

$$T_0 = 2^{1/4}T_1 = 1.19\cdot T_1 \qquad [6.60c]$$

Sostituendo la (6.60b) nella (6.60a), si ottiene:

$$\frac{I_0(1-A)}{4} = (1-f)\cdot\sigma_B\cdot T_0^4 + \left(1-\frac{f}{2}\right)\cdot\sigma_B\cdot T_0^4 \qquad [6.60d]$$

cioè il valore all'equilibrio della temperatura superficiale T_0 risulta dipendere dalla frazione f di radiazione infrarossa assorbita dai gas serra secondo la relazione seguente:

$$T_0 = \left(\frac{I_0(1-A)}{4\sigma_B\left(1-\frac{f}{2}\right)}\right)^{1/4} \qquad [6.60e]$$

Dato che il valore osservato della temperatura media alla superficie terrestre è pari a 288 K, dalla relazione precedente risulta che la frazione f di radiazione infrarossa assorbita dai gas serra è pari a 0.77. Se poi impieghiamo la (6.60c), otteniamo T_1 = 241 K che è approssimativamente la temperatura dell'atmosfera ad una quota di circa 7 km.

Questo semplice modello fornisce un'informazione di importanza vitale: se si aumenta la concentrazione dei gas serra in atmosfera, inevitabilmente si incrementa l'efficienza di assorbimento f dell'atmosfera con un conseguente aumento della temperatura della superficie terrestre. Questa è l'essenza dell'*effetto serra*. In effetti, ad un aumento Δm di concentrazione dei gas serra corrisponderà un aumento Δf dell'efficienza di assorbimento. Quindi, mentre prima dell'aumento della concentrazione dei gas serra il flusso di radiazione terrestre in uscita era:

$$F_{out} = \left[1-\frac{f}{2}\right]\cdot\sigma_B\cdot T_0^4 \qquad [6.61a]$$

con l'aumento di concentrazione dei gas serra esso diventa:

$$F'_{out} = \left[1-\frac{f+\Delta f}{2}\right]\cdot\sigma_B\cdot T_0^4 \qquad [6.61b]$$

perciò:

$$\Delta F = F_{out} - F'_{out} = \frac{\Delta f}{2}\cdot\sigma_B\cdot T_0^4 \qquad [6.61c]$$

che è la *radiative forcing*. Assumiamo che la perturbazione Δf sia mantenuta per un certo tempo. Alla fine si raggiungerà un nuovo equilibrio caratterizzato da un incremento ΔT_0 della temperatura superficiale. Riconsiderando la (6.60d), il nuovo equilibrio radiativo è definito da:

$$\frac{I_0(1-A)}{4} = \left(1-\frac{f+\Delta f}{2}\right)\cdot\sigma_B\cdot(T_0+\Delta T_0)^4 \qquad [6.61d]$$

Se la perturbazione di temperatura superficiale è sufficientemente piccola, allora deve valere l'approssimazione:

$$(T_0+\Delta T_0)^4 \cong T_0^4 + 4T_0^3\Delta T_0 \qquad [6.61e]$$

La perturbazione Δf non può alterare l'apporto solare e quindi deve valere ancora la relazione (6.60d) che, inserita assieme alla relazione (6.61e) nella relazione (6.61d), consente di determinare la temperatura T_0 in funzione di f e di Δf:

$$\Delta T_0 = \frac{T_0 \Delta f}{8 \cdot \left(1 - \frac{f}{2}\right)} \qquad [6.61f]$$

Ponendo la (6.61c) nella relazione precedente, otteniamo una relazione tra ΔT_0 e ΔF:

$$\Delta T_0 = \lambda \Delta f \qquad [6.61g]$$

dove λ é il *parametro di sensibilità climatica* (*climate sensitivity parameter*) che risulta pari a:

$$\lambda = \frac{1}{\left[4\left(1 - \frac{f}{2}\right)\sigma_B \cdot T_0^3\right]} \qquad [6.61h]$$

6.5 LA RADIAZIONE SOLARE

Il Sole, una tipica stella di seconda generazione nella gerarchia cosmica, è una sfera di materiale gassoso, composta per circa il 90% da idrogeno, per meno del 10% da elio e per il resto da ossigeno, carbonio, azoto, neon, ferro, silicio, magnesio, zolfo e calcio. Il diametro del sole è di $1.39 \cdot 10^9$ m (cioè 1.39 milioni di km) e la sua massa è pari a circa $2 \cdot 10^{30}$ kg. Le zone centrali del sole raggiungono temperature comprese tra 8 e 40 milioni di gradi Kelvin ed una densità pari a circa 100 volte quella dell'acqua, densità che però si riduce a valori decisamente inferiori con l'allontanarsi dal centro. Nella parte interna del Sole hanno luogo numerose reazioni nucleari di fusione (la più importante è quella che trasforma l'idrogeno in elio), che sono le responsabili della produzione di quantità enormi di calore che vengono trasmesse dagli strati interni verso la parte esterna della sfera solare per conduzione, convezione ed irraggiamento. Raggiunta la parte esterna del Sole, il calore viene irraggiato nell'universo ed una sua parte si dirige verso la Terra. La parte visibile del sole, costituita da uno strato relativamente sottile dello spessore di circa 500 km e che presenta una temperatura media di circa 5800 K, prende il nome di *fotosfera* ed è lì che ha origine la maggior parte della radiazione elettromagnetica che raggiunge la Terra per irraggiamento. Se qualcuno fosse interessato a maggiori dettagli sulla struttura interna del Sole, li può trovare in molti testi specializzati, mentre in Liou (2002b) ne trova una concisa ma interessante sintesi.

Dal punto di vista pratico, considereremo il Sole come la principale sorgente di energia per il sistema atmosferico e per questo, per prima cosa, cercheremo di quantificare questo termine di sorgente arrivando così sia al concetto di *spettro solare* alla sommità dell'atmosfera terrestre (TOA) che al concetto di *costante solare*. A questo punto, il nostro interesse si sposterà allo studio dell'interazione tra questo flusso energetico extraterrestre ed i costituenti dell'atmosfera (gas, aerosol ed idrometeore) in modo da poter determinare come tale flusso si riduca nel suo viaggio verso la superficie terrestre e come giunga attenuato al suolo dove lo si può misurare con i sensori di cui parleremo al Cap. 11.

6.5.1 LO SPETTRO SOLARE E LA COSTANTE SOLARE

La disponibilità di strumentazione sia al livello del suolo che a bordo dei satelliti ha consentito la realizzazione di misure estremamente precise dell'irradianza monocromatica di provenienza solare e quindi di ricostruire in maniera estremamente fedele lo spettro solare. Ciò che è stato ottenuto da tutte queste rilevazioni è riportato nella **Fig. 6.41** in cui viene mostrato sia lo spettro della radiazione solare alla sommità dell'atmosfera (TOA) che lo spettro misurato al livello del mare. Inoltre, nella medesima figura è mostrato, per confronto, anche lo spettro di corpo nero in equilibrio termodinamico ad una temperatura di 5800 K. Osservando attentamente gli spettri mostrati in figura si nota immediatamente che:

- lo spettro di corpo nero a 5800 K e lo spettro solare fuori dall'atmosfera sostanzialmente coincidono; da ciò si deduce che la fotosfera è un sistema fisico molto prossimo ad un corpo nero e che la sua temperatura efficace risulta pari proprio a circa 5800 K;
- il 7% dello spettro solare fuori dall'atmosfera si colloca nella banda UV (0.2÷0.4 μm), mentre il 42% nella banda del visibile (0.4÷0.7 μm) ed il 51% in quella dell'infrarosso (0.7÷3.0 μm);
- il massimo dello spettro solare lo si ha nel visibile alla lunghezza d'onda di 0.48 μm;
- lo spettro della radiazione solare misurata al livello del mare è molto più irregolare e mostra dei *buchi spettrali* che rappresentano bande in cui la radiazione solare interagisce con i gas costituenti l'atmosfera che ne assorbono selettivamente l'energia.

Il nostro interesse immediato è tutto concentrato nel quantificare in maniera precisa il *termine di sorgente solare*, cioè l'irradianza emessa dal Sole e che giunge al TOA.

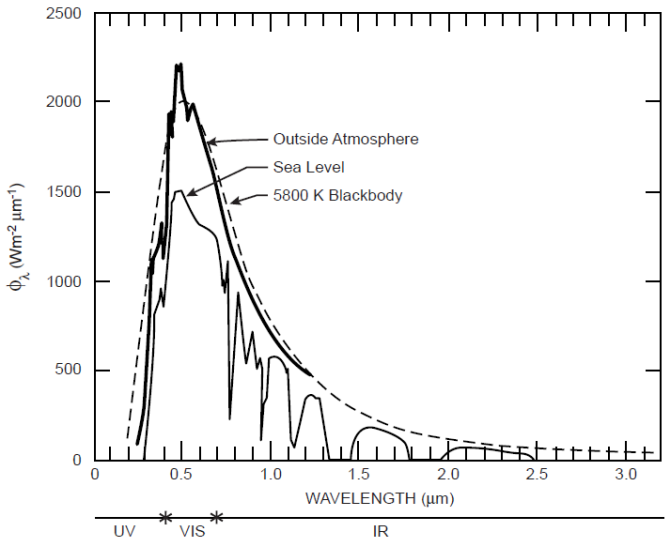


Fig.6.41: spettro solare fuori dall'atmosfera e al livello del mare, paragonato allo spettro di un corpo nero a 5800 K (Liou 2002b)

6.5.1.1 Considerazioni astronomiche

La Terra è uno dei pianeti del sistema solare e come tale ruota attorno al Sole su di un'orbita ellittica con un periodo di circa 365 giorni (per la precisione 365.25463 giorni), oltre che ruotare attorno al proprio asse con un periodo di circa 24 ore (per la precisione 23h 56' 29") e con una velocità angolare di $0.729 \cdot 10^{-4}$ rad·s^{-1}. La rivoluzione della Terra attorno al Sole avviene su un'orbita ellittica quindi la distanza che separa il Sole dalla Terra varia costantemente nel tempo, anche se l'orbita ellittica terrestre è molto prossima ad un'orbita circolare. Variando la distanza tra la sorgente di energia ed il corpo che la riceve, varia inevitabilmente anche il flusso di energia che il primo trasferisce al secondo. Oltre a ciò, la rotazione della Terra attorno al proprio asse determina che la semisfera che si *affaccia* verso il Sole vari in continuazione e, quindi, vari in continuazione la quantità di energia che potenzialmente può giungere ad uno specifico punto della superficie terrestre. Se si considera un generico punto al suolo, in un certo istante (alba) tale punto inizierà a *vedere* il Sole basso all'orizzonte e quindi inizierà a ricevere energia radiante. Col trascorrere del tempo questo flusso aumenterà fino a raggiungere un valore massimo in un istante (mezzogiorno) dopo il quale il flusso inizia a diminuire fino a scomparire quando il Sole non risulta più visibile dal punto della superficie considerato (tramonto). Quindi, se si considera un generico punto sulla Terra, l'apporto solare di tipo radiativo dura solo per metà del tempo che

impiega la Terra nel moto di rotazione attorno al proprio asse (il periodo diurno) e durante questo intervallo di tempo il flusso radiativo varia in maniera sinusoidale. Di conseguenza, ogni punto alla superficie terrestre riceve calore in maniera praticamente periodica e punti diversi ricevono energia sempre in maniera periodica, ma con uno sfasamento temporale proporzionale alla distanza longitudinale che li separa. Pertanto, il moto relativo tra Sole e Terra trasforma il flusso sostanzialmente costante di radiazione solare in una sorgente energetica variabile col tempo e con lo spazio se vista da uno specifico punto della superficie terrestre. Questa distribuzione non uniforme di energia al suolo determina i gradienti termici responsabili dello stato e del moto dell'atmosfera che a loro volta sono la causa di tutto ciò che condiziona la vita sul pianeta Terra.

La Geometria Orbitale

Il moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole obbedisce alla *Seconda Legge di Keplero* secondo cui i pianeti del sistema solare si muovono attorno al Sole su orbite ellittiche e la relazione tra il periodo *Y* di ciascuna orbita e la distanza media di uno di questi pianeti dal Sole *R* è:

$$Y = a \cdot R^{3/2} \qquad [6.62]$$

dove la *a* è pari 0.1996 (giorni·km$^{-3/2}$·10^{-9}), la distanza *Y* è espressa in giorni terrestri e la distanza *R* in 10^6 km. Nel caso della Terra, dato che il raggio medio dell'orbita terrestre è pari a 149.6·10^6 km, il periodo che risulta è di 365.2 giorni, che è appunto la durata corretta dell'anno terrestre.

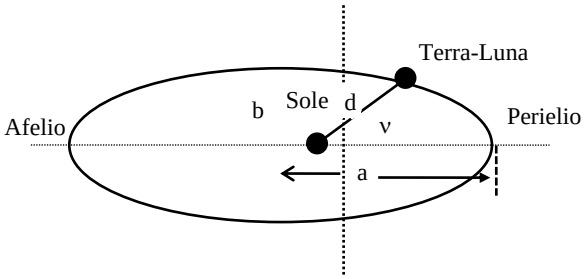


Fig. 6.42: geometria dell'orbita terrestre.

Come evidenziato nella **Fig. 6.42**, la Terra e la Luna ruotano attorno al proprio comune centro di gravità con un periodo di 27.32 giorni ed in prima approssimazione il baricentro del sistema Terra-Luna segue un'orbita ellittica con un periodo di circa 365.2 giorni L'orbita ellittica del sistema Terra-Luna attorno al Sole ha un *semiasse maggiore* *a* di lunghezza pari a 149.457·10^9 m, mentre la lunghezza del *semiasse minore* *b* è di 149.090·10^9 m. Il centro del Sole è posto in uno dei fuochi dell'ellisse e la semi-distanza tra i due fuochi *c* è di 2.5·10^9 m. Come si può notare, l'orbita, anche se ellittica, è molto vicina ad essere un'orbita circolare. L'*afelio* è il punto dell'orbita in cui la distanza Terra-Sole è la massima possibile (ciò che ha luogo tra il 3 e il 7 di Luglio a seconda dell'anno) ed il *perielio* è il punto dell'orbita in cui la Terra ed il Sole sono più vicini (ciò che capita 13 giorni dopo il solstizio d'inverno e quindi tra il 2 e il 5 di Gennaio).

Il primo elemento di interesse è la conoscenza della distanza Terra-Sole che, naturalmente, varia durante l'anno per l'ellitticità dell'orbita terrestre. Per ottenere questa grandezza, per prima cosa consideriamo l'angolo ν tra il perielio e la posizione generica del baricentro Terra-Luna sull'orbita (circa coincidente con la posizione del centro della Terra), angolo che viene indicato col termine *Vera Anomalia*: esso aumenta durante l'anno e raggiunge il minimo alla data del perielio. La relazione che quantifica (in gradi sessagesimali) questo angolo in funzione del *giorno Giuliano jd* (che è il numero progressivo del giorno dell'anno a partire dal primo gennaio) è la seguente (Stull, 2000):

$$\nu = M + 0.0333988 \cdot \sin M + 0.0003486 \cdot \sin(2M) + 0.0000050 \cdot \sin(3M) \qquad [6.63a]$$

dove *M* (sempre in gradi sessagesimali) è l'*anomalia media* pari a:

$$M = 360 \cdot \frac{jd - 3}{365.25463} \qquad [6.63b]$$

Definita con ξ *l'eccentricità* dell'orbita come $\xi = c/a$ (che vale 0.0167), una relazione semplice, ma approssimata, per determinare la distanza Sole-Terra in funzione del tempo, è la seguente:

$$R = a \cdot \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi \cos \nu} \qquad [6.63c]$$

Caratteristiche del moto apparente del Sole

Si consideri un osservatore posto alla superficie terrestre. Innanzitutto è necessario individuare un modo univoco per definire la sua posizione sulla Terra e a ciò è dedicato il concetto di *latitudine* Φ e *longitudine* λ, concetti che consentono di localizzare in modo univoco ogni punto della superficie terrestre. Piuttosto che tentare una loro definizione formale è molto più conveniente riferirsi alla **Fig.6.43** che risulta auto-esplicativa. Va solo ricordato che all'equatore la latitudine è, per definizione, zero e le latitudini sono positive nell'emisfero Nord e vanno da -90° a + 90°. La longitudine, invece, è zero in corrispondenza del meridiano che passa sopra la località britannica di Greenwich, è positiva ad Ovest del meridiano di Greenwich e va da -180° a +180°.

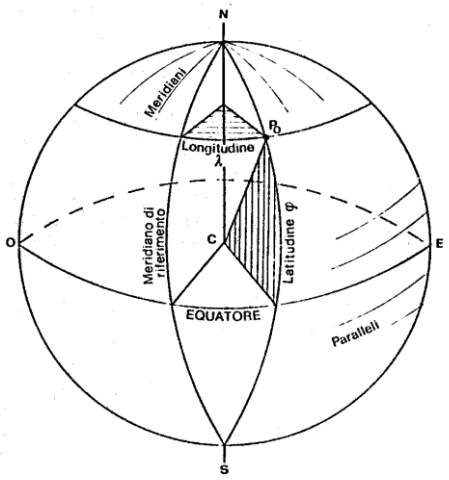


Figura 6.43: latitudine e longitudine.

L'asse di rotazione terrestre è inclinato rispetto al piano dell'orbita terrestre (*eclittica*) e tale inclinazione è $\Phi_r = 23.45°$. Per definizione, questo angolo è pari alla latitudine del Tropico del Cancro nell'Emisfero Nord. Il tropico del Capricorno nell'Emisfero Sud ha il medesimo valore assoluto di latitudine, ma segno negativo. Premesso ciò, l'*angolo di declinazione Solare* δ_S è quell'angolo che si viene a formare tra l'eclittica (il piano occupato dall'orbita del sistema Terra-Luna attorno al Sole) ed il piano equatoriale (**Fig. 6.44**).

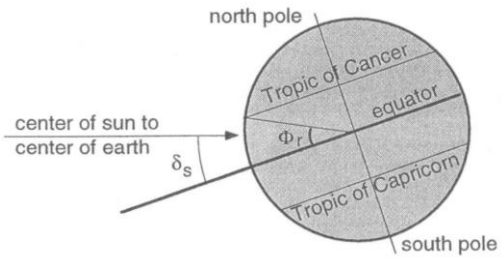


Fig. 6.44 relazione tra l'angolo di declinazione solare e l'inclinazione dell'asse di rotazione della Terra

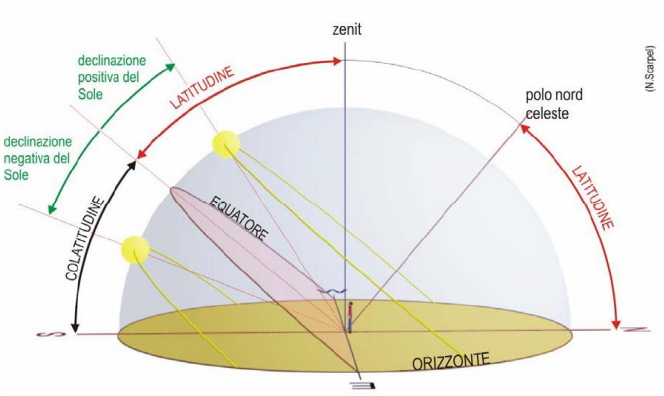


Fig. 6.45: arco apparente tracciato dal Sole nella volta celeste al Solstizio d'estate (il più alto sull'orizzonte) ed al Solstizio d'inverno (il più basso sull'orizzonte)

Dato che l'inclinazione dell'asse terrestre è circa costante rispetto alle stelle fisse, la declinazione solare varia nell'anno da +23.45° il 22 Giugno (*Solstizio d'estate* nell'emisfero Nord) a -23.45° il 22 Dicembre (*Solstizio d'inverno*). Nell'emisfero Nord (boreale), per un osservatore che dalla Terra osservi il cielo, il percorso del Sole sulla volta celeste assume la forma di un arco che varia sia durante l'anno che con la latitudine del luogo. Durante il solstizio d'inverno, l'arco che il Sole traccia sulla volta celeste da Est a Ovest passando per il Sud è il più basso possibile, mentre l'arco solare relativo al solstizio d'estate è il più alto possibile. Ciò è evidenziato nella **Fig. 6.45**.

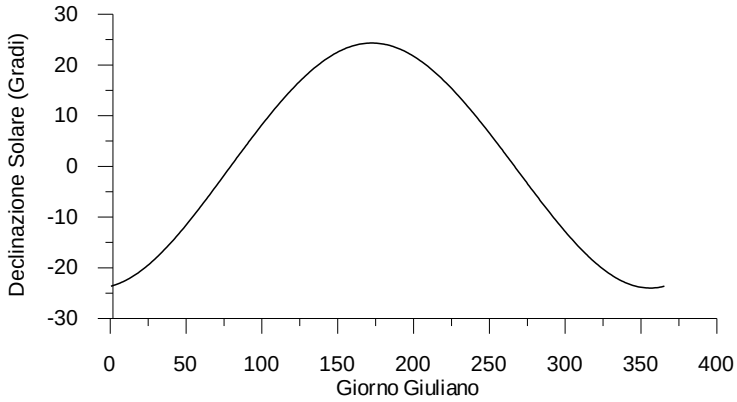


Fig. 6.46: angolo di declinazione solare nei vari giorni dell'anno

Varie sono le relazioni analitiche proposte per il calcolo dell'angolo di declinazione solare δ, alcune delle quali sono qui riportate:

- la più semplice di esse è quella proposta da Danard (1989):

$$\delta = 22.4438° \cdot \sin\left[\frac{2\pi \cdot (284 + jd)}{365}\right] \qquad [6.64a]$$

- che sostanzialmente coincide con quella proposta da Stull (2000):

$$\delta = 22.4438° \cdot \cos\left[\frac{2\pi \cdot (jd - 173)}{365}\right] \qquad [6.64b]$$

- una variante delle relazioni precedenti, maggiormente complessa, è quella proposta da Rachele e Tunick (1994) secondo cui:

$$\sin\delta = \sin(23.4438°) \cdot \sin\beta \qquad [6.64c]$$

dove l'angolo β (in gradi sessagesimali) è dato da:

$$\beta = \gamma + 0.4087\sin\gamma + 1.8724\cos\gamma - 0.0182\sin(2\gamma) + 0.0083\cos(3\gamma) \quad [6.64d]$$

e l'angolo γ (in gradi sessagesimali) è:

$$\gamma = 279.9348 + (jd - 1)\cdot\frac{360.0}{365.242} \quad [6.64ed]$$

Le relazioni precedenti, confrontate tra loro, hanno mostrato una sostanziale equivalenza. Nella **Fig. 6.46** viene mostrato il valore (in radianti) dell'angolo di elevazione solare nei diversi giorni dell'anno ottenuto impiegando la relazione (6.64c).

La posizione del Sole rispetto ad un osservatore posto sulla superficie terrestre alla latitudine Φ ed alla longitudine λ è data da due angoli di estrema importanza illustrati chiaramente nella **Fig. 6.47**:

- l'*angolo di elevazione solare* Ψ cioè l'angolo tra la retta che congiunge il Sole col punto di osservazione ed il piano orizzontale. Spesso, al posto di Ψ si utilizza l'*angolo di zenit* ζ che è l'angolo formato dalla retta congiungente il sole col punto di osservazione e la verticale. È immediato constatare che tra i due angoli vale la relazione $\zeta = \pi/2 - \Psi$.
- l'*angolo di azimut* α, definito come quell'angolo orizzontale tra il piano verticale passante per il sole e la direzione Nord raggiunto in senso orario da Nord. A volte si utilizza la convenzione secondo cui tale angolo è misurato rispetto al Sud piuttosto che al Nord.

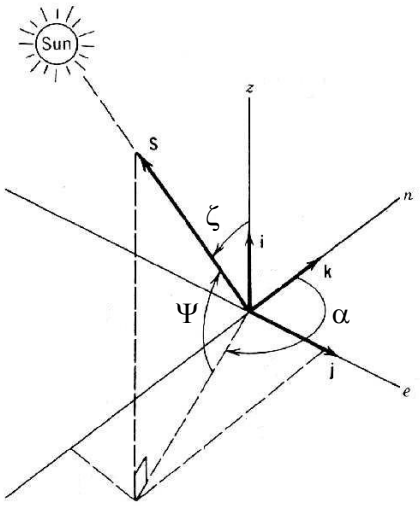


Fig. 6.47: angolo di elevazione solare (Ψ), angolo di zenit (ζ) ed angolo di azimut (α)

Il movimento apparente diurno del sole nel cielo è quindi descritto dall'*angolo di elevazione solare* Ψ che cresce nelle ore mattutine a partire dall'*alba* (quando Ψ = 0) e, raggiunto il massimo al *mezzogiorno locale*, diminuisce progressivamente nelle ore pomeridiane fino ad annullarsi al *tramonto* (quando, ancora una volta Ψ = 0). Da considerazioni di geometria sferica si ha che:

$$\sin\Psi = \cos\zeta = \sin\Phi\cdot\sin\delta - \cos\Phi\cdot\cos\delta\cdot\cos\chi \quad [6.65]$$

dove Φ è la latitudine del sito (positiva a N dell'equatore), δ è l'angolo di declinazione solare e χ è l'*angolo orario solare* che rappresenta la misura della distanza longitudinale tra il sole ed il punto di calcolo e che è l'unica variabile di cui non abbiamo ancora dato una relazione analitica.

L'angolo orario solare χ (in gradi sessagesimali) dipende dall'ora locale *t* e dalla longitudine λ del sito che si sta considerando. Più precisamente:

$$\chi = \frac{2\pi}{24}(t - t_{SN}) \qquad [6.66a]$$

dove t_{SN} è il *mezzogiorno solare* che dipende dalla longitudine λ del sito e dalla longitudine λ_{ST} del meridiano cui si riferisce l'ora locale. Nel caso dell'Italia vale 345°, mentre negli USA a seconda che ci si riferisca agli stati che adottano il *Eastern Standard Time,* il *Central Standard Time,* il *Mountain Standard Time* o il *Pacific Standard Time* vale rispettivamente 75°, 90°, 105° o 120°. La relazione analitica che ne fornisce il valore è la seguente:

$$t_{SN} = 12 + \frac{4(\lambda - \lambda_{ST})}{60} - T_{EQ} \qquad [6.66b]$$

dove T_{EQ} è una correzione dipendente dal giorno giuliano j_d , nota come *equazione del tempo,* la cui forma semplificata è la seguente:

$$T_{EQ} = 0.1645\sin(2b) - 0.1255\cos(b) - 0.025\sin b \qquad [6.66c]$$

dove:

$$b = \frac{2\pi}{364}(jd - 81) \qquad [6.66d]$$

Un metodo alternativo e più semplice, anche se abbastanza accurato, e quello proposto da Stull (2000) per il quale è necessario conoscere t_{UTC}, cioè l'ora *UTC* (*Coordinated Universal Time o Greenwich Mean Time GMT*) del sito in esame, che si ottiene sommando algebricamente all'ora locale il valore del fuso orario che è positivo a E di Greenwich e negativo a W. Noto t_{UTC} e la longitudine λ, l'angolo orario solare (in gradi sessagesimali) è dato da:

$$\chi = 15° \cdot t_{UTC} - \lambda \qquad [6.66e]$$

Se si adotta questa formulazione per l'angolo orario solare ed indicando con t_d la durata del giorno medio, la relazione (6.72) può essere riscritta come:

$$\sin\Psi = \cos\zeta = \sin\Phi \cdot \sin\delta - \cos\Phi \cdot \cos\delta \cdot \cos\left(2\pi\frac{t_{UTC}}{t_d} - \lambda\right) \qquad [6.67]$$

Spesso nella pratica al posto dell'angolo di elevazione solare Ψ viene impiegato l'*angolo solare di zenit* ζ. In questo caso si può ancora utilizzare la (6.72) per il calcolo dell'angolo di *zenit* ricordando che $\sin\Psi = \cos\zeta$. Nella **Fig. 6.48** viene presentata, come esempio, l'andamento orario dell'angolo di elevazione solare per la città di Roma (Φ = 41°53', λ = -12°19', fuso orario = +1) all'equinozio (20 marzo), al solstizio d'estate (22 giugno) ed al solstizio d'inverno (22 dicembre). L'angolo di elevazione solare ha senso fisico solo quando presenta valori non nulli, cioè quando il Sole è *visibile* nel sito considerato. Ci sono due momenti della giornata in cui Ψ è nullo ed essi sono l'alba ed il tramonto. Più precisamente, l'*alba* ed il *tramonto geometrici* si hanno quando il centro del sole ha un angolo di elevazione nullo. Si hanno un'*alba ed un tramonto apparenti* quando la parte alta del cerchio solare scende sotto l'orizzonte, cosa che corrisponde ad un angolo di -0.267°, se visto dalla superficie terrestre. La rifrazione della luce attraverso l'atmosfera porta questo angolo ad un valore, in modulo, ancora più elevato e pari a -0.833°. In questa situazione, la superficie terrestre non riceve più *direttamente* la luce del Sole, anche se può ancora riceverla *indirettamente,* a causa dello *scattering* delle molecole di aria della parte alta dell'atmosfera illuminata dalla radiazione solare. L'intervallo di tempo in cui la luce così ottenuta è presente alla superficie terrestre è chiamato *crepuscolo* (*twilight*). Anche se il crepuscolo spesso ha una durata soggettiva, tuttavia sono state date alcune definizioni oggettive, indicate come *crepuscolo civile, militare e astronomico* (**Tab. 6.9**). L'istante a cui avvengono tutti questi eventi può essere calcolato utilizzando la relazione (6.67) con Ψ = 0 e risolvendola rispetto a t_{UTC}. Il risultato è la relazione seguente che fornisce il valore di t_{UTC} relativo all'alba e al tramonto una volta inserito nella relazione seguente il valore opportuno di Ψ*:*

$$t_{UTC} = \frac{t_d}{2\pi}\left\{\lambda \pm \cos^{-1}\left[\frac{\sin\Phi \cdot \sin\delta - \sin\Psi}{\cos\Phi \cdot \cos\delta}\right]\right\} \qquad [6.68]$$

In questa relazione si usa il segno positivo per l'alba ed il segno negativo per il tramonto. L'importante poi è convertire l'ora di Greenwich in ora locale.

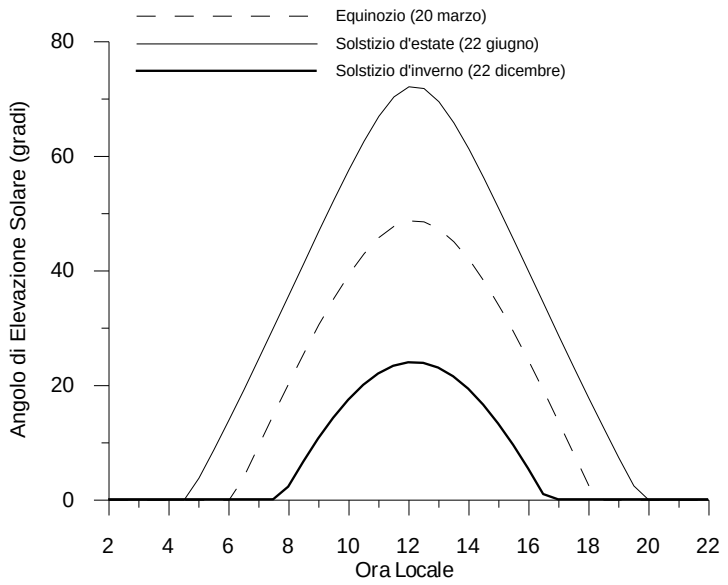


Fig. 6.48: variazione orari dell'angolo di elevazione solare all'equinozio ed al solstizio d'estate e d'inverno a Roma ($\Phi = 41°53'$, $\lambda = -12°19'$, fuso orario = +1)

Definizione di ALBA/TRAMONTO	Ψ (°)
Geometrico	0
Apparente	-0.833
Definizione di CREPUSCOLO	
Civile	-6
Militare	-12
Astronomico	-18

Tab.6.9: definizione di alba/tramonto e di crepuscolo.

Per rendersi conto della variabilità (o meno) durante l'anno dell'ora dell'alba e del tramonto conviene considerare alcuni esempi. Il primo è illustrato in **Fig. 6.49** dove si mostra la variazione giornaliera dell'alba e del tramonto a Roma (latitudine = 41°53', longitudine = -12°19', fuso orario = +1) e a Città del Messico (latitudine = 19°24', longitudine = 99°6', fuso orario = -6). Come si vede, aumentando la latitudine, aumenta la variazione annuale delle ore estreme della giornata. Gli esempi riportati nella figura si riferiscono a località situate nell'emisfero Nord. Nella **Fig. 6.50** sono riportati altri due esempi interessanti. Il primo si riferisce a Buenos Aires che si colloca nell'emisfero Sud (latitudine = -34°40', longitudine = 58°30', fuso orario = -3). Come si vede, la durata del giorno è maggiore nei mesi invernali che in quelli estivi. Il secondo esempio, invece, si riferisce a Bogotà (latitudine = 4°6', longitudine = 74°8', fuso orario = -5). Questa città è praticamente posta all'equatore e l'ora dell'alba e del tramonto sono circa costanti per tutto l'anno.

L'altro angolo che definisce la posizione del Sole nel cielo è l'*angolo di azimut*. Se si utilizza la convenzione data in precedenza, cioè lo si definisce come quell'angolo percorso in senso orario da Nord da parte di un piano verticale passante dal punto di osservazione perché possa giungere a contenere il Sole, la relazione da impiegare per il suo calcolo è (Stull, 2000):

$$\cos\alpha = \frac{\sin\delta - \sin\Phi \cdot \cos\zeta}{\cos\Phi \cdot \sin\zeta} \qquad [6.68]$$

Dopo mezzogiorno, l'angolo di *azimut* α può aver la necessità di essere corretto facendo la sostituzione $\alpha = 2\pi - \alpha$.

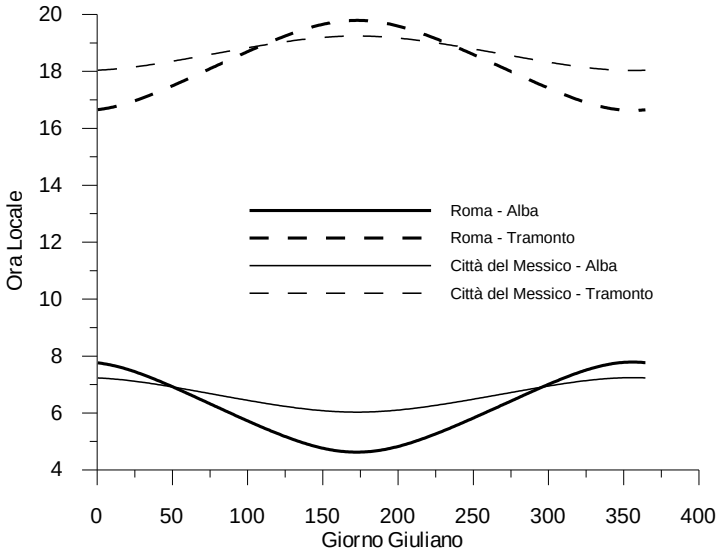


Fig.6.49: alba e tramonto a Roma e a Città del Messico

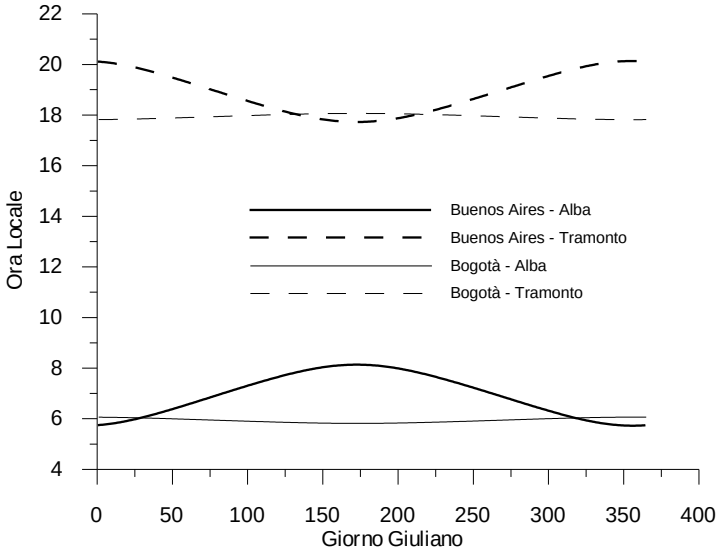


Fig.6.50: alba e tramonto a Buenos Aires e a Bogotà

6.5.1.2 La costante solare

Nota la distanza tra la Terra ed il Sole, è possibile stabilire una relazione quantitativa tra la radiazione emessa dal Sole e quella che dovrebbe raggiungere la superficie terrestre se fossero assenti le interazioni tra la radiazione solare ed i gas costituenti l'atmosfera. Prima di individuare questa relazione va ricordato che la radiazione emessa da una sorgente sferica *decresce col quadrato della distanza* dal centro della sfera da cui viene emessa. In particolare, se R_1 è il raggio della sfera che emette la radiazione e R_2 è il raggio di una sfera che ha lo stesso centro della prima e dimensioni maggiori, la *legge dell'inverso del quadrato della distanza* afferma che:

$$E_2^* = E_1^* \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \qquad [6.69]$$

dove E_1^* è la radiazione emessa dalla sfera di raggio R_1 e E_2^* la radiazione emessa dalla sfera di raggio R_2. Come si vede, l'emissione specifica di un corpo sferico decresce molto rapidamente con l'allontanarsi dal suo centro. Infatti, se $E_1^* = 63.28 \cdot 10^6$ W·m^{-2} e $R_1 = 6.96 \cdot 10^5$ km (raggio del Sole), su una sfera con $R_2 = 149.6 \cdot 10^6$ km (raggio dell'orbita terrestre), E_2^* è di circa 1370 W m^{-2}: si vede quindi che l'energia solare giunge alla superficie terrestre ridotta di un fattore $2.16 \cdot 10^{-5}$.

Se si schematizza la propagazione della radiazione da un corpo sferico con un insieme di raggi (o percorsi luminosi rettilinei) che partono dal centro della sfera, *l'irradianza è l'ammontare di energia radiante che nell'unità di tempo attraversa una superficie di area unitaria perpendicolare al raggio stesso*. Se la superficie non è perpendicolare al raggio, la radiazione specifica che raggiunge tale superficie risulta ridotta, secondo quanto previsto dalla *legge del seno*:

$$\mathrm{E}' = E^* \cdot \sin \Psi \qquad [6.70]$$

dove Ψ è l'*angolo di elevazione solare*.

Dedichiamoci, ora alla determinazione di quanta dell'energia radiante emessa dal Sole raggiunge la superficie terrestre. Come vedremo, per rispondere esattamente a questa domanda dovremmo tener conto dei fenomeni di assorbimento esercitati sulla radiazione solare da parte dei gas costituenti l'atmosfera (cosa che faremo tra poco), ma per il momento ignoriamo tale problema e cerchiamo l'irradianza totale (cioè a tutte le lunghezze d'onda) di origine solare che raggiunge una superficie perpendicolare alla direzione di propagazione senza tener conto di queste interferenze. Tale irradianza totale I_0 prende il nome di *costante solare*.

Prima di continuare, facciamo alcune considerazioni geometriche. Innanzitutto, il Sole può essere considerato un emettitore isotropo e perciò la radiazione emessa può essere vista come un insieme di raggi rettilinei che si dipartono tutti dal suo centro con la medesima intensità. Tuttavia, la distanza Terra-Sole è talmente elevata che i raggi che intercettano la superficie terrestre possono essere con buona approssimazione considerati paralleli tra loro. Sia F_0 (W·m^{-2}) l'*emittanza solar*e, cioè il flusso di energia radiante a tutte le lunghezze d'onda, emessa per unità di tempo e di superficie dalla fotosfera e diretta radialmente in maniera isotropa dal centro del Sole. Detto R_S il raggio del Sole (o meglio della sua fotosfera) ed R il raggio di una sfera circoscritta alla sfera solare ($R > R_S$), la conservazione dell'energia asserisce che l'energia solare emessa arriverà tutta sulla superficie della sfera esterna di maggiori dimensioni, cioè che:

$$F_0 \cdot 4\pi R_S^2 = \mathrm{S} \cdot 4\pi R^2 \qquad [6.71a]$$

dove S è la radiazione totale specifica che raggiunge la sfera di raggio R. Quindi si ha che:

$$S = F_0 \cdot \left(\frac{R_S}{R}\right)^2 \qquad [6.71b]$$

In sostanza, se R_m è il raggio medio dell'orbita terrestre, allora la costante solare, cioè la irradianza in arrivo alla superficie terrestre in assenza di assorbimento da parte dei costituenti gassosi dell'atmosfera, sarà pari a:

$$I_0 = F_0 \cdot \left(\frac{R_S}{R_m}\right)^2 \qquad [6.71c]$$

La costante solare è una grandezza misurabile sia con strumentazione posta a terra che con strumentazione collocata sui satelliti orbitanti. Se consideriamo le misure da terra, possiamo cercare un modo per determinarla sperimentalmente. A tal scopo possiamo riferirci ad una geometria come quella indicata nella **Fig. 6.47**. In questo caso, nel punto di osservazione posto alla superficie terrestre giungerà la radiazione solare che percorre una traiettoria inclinata di un angolo θ rispetto alla verticale (angolo di *zenit*). Ricordando la legge di Beer-Bouguer-Lambert differenziale per una certa lunghezza d'onda λ:

$$dI_\lambda = -\beta_\lambda^* \rho \cdot I_\lambda ds \qquad [6.72a]$$

la si può integrare dal punto di emissione sulla superficie del Sole alla superficie della terra lungo

la traiettoria rettilinea inclinata dell'angolo di *zenit* rispetto alla verticale. Se l'angolo di *zenit* fosse nullo (cioè se il sole fosse a picco sopra il punto di osservazione), lo spessore ottico sarebbe:

$$u = \int_0^\infty \rho \cdot dz \qquad [6.72b]$$

ma essendo la linea di propagazione della radiazione inclinata dell'angolo di *zenit*, si avrà che lo spessore ottico lungo la direzione di propagazione della radiazione solare risulterà pari a:

$$u_s = \int_0^\infty \rho \cdot ds = \int_0^\infty \rho \cdot \frac{dz}{\cos\theta} = \sec\theta \cdot u \qquad [6.72c]$$

Quindi, integrando la legge di Beer differenziale, indicando con $I_{0\lambda}$ l'emissione solare alla lunghezza d'onda λ e ponendo $m = \sec\theta$, si ottiene:

$$I_\lambda(z=0) = I_{0\lambda} \cdot exp[-\beta_\lambda^* u \cdot \sec\theta] = I_{0\lambda} \cdot T_\lambda^m \qquad [6.72d]$$

Ripetendo varie misure a diversi angoli di *zenit*, si ottiene il valore dell'emissione solare alla lunghezza d'onda λ. Ripetendo la stessa procedura per un elevato numero (diciamo *M*) di lunghezze d'onde, si otterrà il valore della costante solare $I_{0\lambda,i}$ per ogni lunghezza d'onda, da cui:

$$I_0 = \int_0^\infty I_{0\lambda} \cdot d\lambda = \sum_{i=1}^{M} I_{0\lambda,i} \qquad [6.72e]$$

Queste misure e quelle realizzate dalla strumentazione collocata sui satelliti hanno consentito di ottenere il valore della costante solare I_0 con ridotta incertezza. Infatti, da tutte le misure disponibili risulta che I_0 = 1366 W·m^{-2} con un'incertezza associata pari a ±3 W·m^{-2}.

Esercizio 6.11

Sulla base del fatto che la costante solare è pari a 1366 W m^{-2}, determinare la temperatura di un corpo nero che presenti la medesima emissività del sole.
Per prima cosa, calcoliamo l'emissività del sole impiegando la relazione (6.71c). Da essa, considerando che R_S = 6.96 10^8 m e R_T = 149.46 10^9 m, otteniamo che:

$$F_0 = I_0\left(\frac{R_T}{R_S}\right)^2 = 1366 \cdot \left(\frac{149.46 \cdot 10^9}{6.96 \cdot 10^8}\right)^2 = 62.99 \cdot 10^6\ Wm^{-2}$$

Considerando la relazione di corpo nero, abbiamo che:

$$T = \sqrt[4]{\frac{F_0}{\sigma_B}} = \sqrt[4]{\frac{62.99 \cdot 10^6}{5.67 \cdot 10^{-8}}} = 5773\ K$$

La costante solare così individuata è riferita al valore medio R_m della distanza Terra-Sole, mentre la distanza vera *R* varia durante l'anno secondo la (6.63c). Quindi, il valore effettivo della costante solare è dato da:

$$I_0 = 1366 \cdot \left(\frac{R_m}{R}\right)^2 \qquad [6.73a]$$

In Rachele e Tunick (1994) viene proposta una relazione decisamente più semplice per il calcolo della costante solare che, opportunamente rielaborata, risulta espressa come:

$$I_0 = 1368 \cdot \left\{1 + 0.034 \cdot \cos\left[\frac{2\pi \cdot (jd-1)}{365}\right]\right\} \qquad [6.73b]$$

Da un confronto diretto si nota come la (6.73a) dia valori di costante solare maggiori di quelli forniti dalla (6.73b). La differenza media fra le due valutazioni risulta pari a circa 3.6 W·m^2.

La costante solare è l'irradianza ricevuta da una superficie posta al suolo e perpendicolare alla direzione di propagazione della radiazione solare, quindi una superficie posta al suolo, ma orizzontale rispetto alla superficie terrestre avrà una *costante solare effettiva* dipendente dall'angolo di zenit θ e dall'angolo di elevazione solare Ψ secondo la relazione:

$$I'_0 = I_0 \cos\theta = I_0 \sin\Psi \qquad [6.74]$$

La costante solare I_0, così come è stata definita, rappresenta la sovrapposizione dei flussi di energia radiante di origine solare a tutte le lunghezze d'onda. È quindi possibile introdurre anche la *costante solare monocromatica* $I_0(\lambda)$ tale che:

$$I_0 = \int_0^\infty I_0(\lambda) \cdot d\lambda \qquad [6.75]$$

variabile estremamente utile nei calcoli dell'interazione della radiazione solare con l'atmosfera. In Seinfeld e Pandis (1998, Tab. 3.1) tale funzione è tabulata con notevole dettaglio.

6.5.1.3 Lo spettro solare alla superficie terrestre

Nella **Fig. 6.51** viene mostrata la distribuzione con la lunghezza d'onda del flusso di energia solare (lo spettro solare, quindi) misurato al di fuori dell'atmosfera. Come si vede, esso differisce di poco dallo spettro di un normale corpo nero alla temperatura di equilibrio di circa 5800 K.

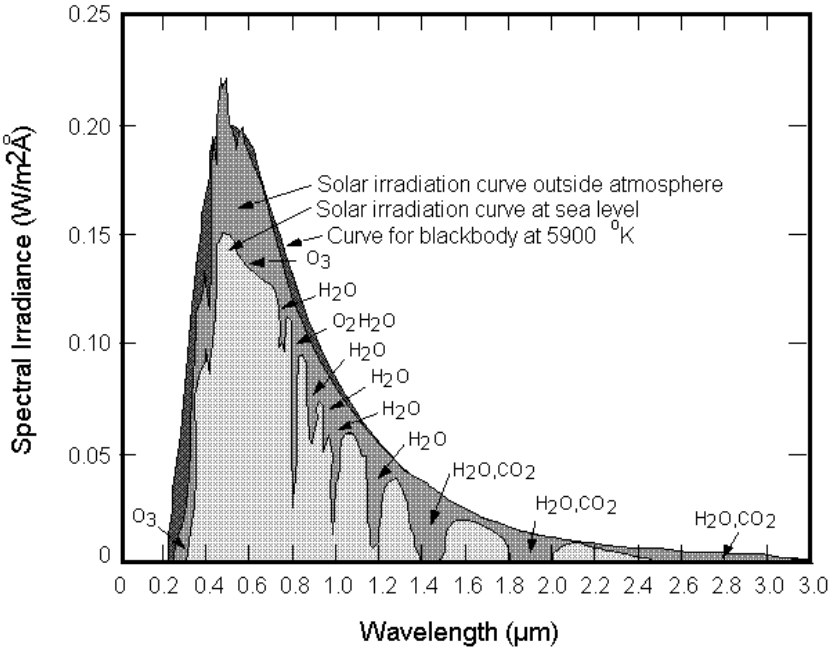


Fig. 6.51: spettro solare al TOA ed al livello del mare con l'indicazione delle zone di assorbimento dei vari costituenti gassosi dell'atmosfera

In questa figura viene riportato anche lo spettro solare ricavato al livello del suolo ed è immediato vedere come quest'ultimo, invece, differisca molto dallo spettro al TOA. La ragione di tutto ciò risiede nel fatto che, attraversando l'atmosfera, la radiazione solare subisce lo *scattering* di Rayleigh ad opera delle varie specie gassose che compongono le diverse parti dell'atmosfera. Tale riduzione, proporzionale all'inverso della lunghezza d'onda della radiazione alla quarta potenza, è *continua* nell'intera banda spettrale ed è la ragione della generale riduzione dello spettro, decisamente evidente nel visibile e nell'ultravioletto. Ma lo *scattering* di Rayleigh non spiega i vari *buchi* di cui è costellato lo spettro solare al suolo. Tali *buchi* suggeriscono l'esistenza di interazioni *spettralmente selettive* tra la radiazione incidente ed i costituenti atmosferici. Queste

interazioni selettive sono l'assorbimento di radiazione da parte dei gas atmosferici e dell'aerosol presente in atmosfera. Tutto ciò è illustrato anche dalla **Fig. 6.51** che associa i vari *buchi spettrali* ai singoli costituenti gassosi.

Assorbimento nell'ultravioletto

In questa zona spettrale, l'assorbimento della radiazione è dovuto ai gas seguenti:

- *Azoto molecolare* (N_2). Il maggior componente gassoso dell'atmosfera presenta un sistema di bande di assorbimento nella zona spettrale 0.112 ÷ 0.145 μm (*bande di Lyman-Birge-Hopfield*) oltre ad altre zone spettrali distribuite tra 0.08 e 0.1 μm. L'azione dell'assorbimento da parte dell'azoto molecolare sostanzialmente si esaurisce nella parte alta dell'atmosfera.
- *Ossigeno molecolare* (O_2). Contribuisce all'assorbimento della radiazione solare quando la lunghezza d'onda di quest'ultima è inferiore a 0.26 μm. Di fatto si notano diverse bande di assorbimento (**Fig. 6.22**). In generale si tratta di un insieme di bande piuttosto strette e ravvicinate tra loro e solo in due casi si ha uno spettro di assorbimento continuo: la zona spettrale al di sotto di 0.1 μm, in cui in cui prevale l'ionizzazione della molecola, e soprattutto la zona tra 0.13 e 0.175 μm (*Schumann-Runge continuum*) che rappresenta la zona spettrale di maggior assorbimento per l'ossigeno.
- *Ozono* (O_3). L'assorbimento dell'ozono nell'ultravioletto è dovuto alle transizioni elettroniche ed avviene prevalentemente nella zona spettrale tra 0.2 e 0.3 μm (*bande di Hartley*) nella parte alta dell'atmosfera, anche se si riscontrano strette bande ravvicinate nella zona spettrale tra 0.3 e 0.36 μm.
- *Altri componenti minor*i. Tali componenti sono NO, N_2O, H_2O e CO_2 e tutti presentano un assorbimento di radiazione solare nella banda dell'ultravioletto. Tuttavia nel loro complesso risultano decisamente trascurabili rispetto ai tre gas elencati prima.

L'assorbimento di radiazione UV da parte dei costituenti atmosferici gassosi dà luogo ad una serie di reazioni fotochimiche che sono di estrema importanza ecologica. Per illustrare ciò, consideriamo la parte mediana dell'atmosfera, al di sotto dei 50 km. In essa si assiste alle trasformazioni seguenti:

a) formazione di ozono per collisione, secondo la reazione

$$O + O_2 + M \overset{K_{12}}{-} O_3 + M \qquad [6.76a]$$

dove M è un altro atomo o molecola e K_{12} è la costante di reazione caratteristica.

b) produzione di ossigeno atomico per la fotodissociazione di una molecola di ossigeno:

$$O_2 + h\nu(\lambda < 0.242\mu m) \overset{J_2}{\rightarrow} O + O \qquad [6.76b]$$

dove J_2 è la costante di fotodissociazione.

c) distruzione dell'ozono per collisione

$$O_3 + h\nu(\lambda < 1.10\mu m) \overset{J_3}{\rightarrow} O + O_2 \qquad [6.76c]$$

dove J_3 è un'altra costante di fotodissociazione

d) distruzione dell'ozono per collisione

$$O_3 + O + M \overset{K_{13}}{-} 2O_2 \qquad [6.76d]$$

dove K_{13} è la costante di reazione.

Queste reazioni, in parte chimiche ed in parte fotochimiche, richiedono fotoni di energia

sufficientemente elevata, come quelli associati allo spettro ultravioletto. Tutte queste reazioni hanno luogo contemporaneamente ed il tutto raggiunge una situazione di equilibrio in cui l'ozono che si distrugge pareggia l'ozono che si forma. La concentrazione di ozono all'equilibrio è data (per i dettagli si veda Liou 2002, pag. 80) dall'equazione dell'equilibrio fotochimico:

$$[O_3]_{eq} \cong \left(\frac{J_2 K_{12}}{J_3 K_{13}}[M]\right)^{1/2} [O_2] \qquad [6.76e]$$

in cui con il simbolo [M] si è indicata la concentrazione della specie *M*.

Assorbimento nel visibile e nel vicino infrarosso

L'assorbimento di radiazione solare in questa zona spettrale è più intenso e più discontinuo, come si vede nella **Fig. 6.51**. Esso è operato dalle specie gassose seguenti:

a) *Ossigeno e ozono molecolari*. L'ozono molecolare, oltre ad assorbire radiazione solare nell'ultravioletto, l'assorbe moderatamente anche nel visibile e nel vicino infrarosso in un insieme di bande note come *bande di Chappuis*. L'ossigeno molecolare, invece, assorbe energia solare in tre bande centrate sulle lunghezze d'onda 0.628, 0.688 e 0.762 μm. Dato che queste bande di assorbimento si trovano a lunghezze d'onda prossime al picco dello spettro solare, l'assorbimento da parte di O_2 è importante nella parte alta e media dell'atmosfera ed influenza pesantemente la disponibilità di radiazione solare nella troposfera ed al suolo.

b) *Vapor d'acqua*. Come si vede in **Fig. 6.51**, il vapor d'acqua è il responsabile della maggior parte dell'assorbimento della radiazione solare nel vicino infrarosso e, per la struttura asimmetrica della sua molecola, presenta una gran quantità di possibili bande spettrali di assorbimento di tipo vibrazionale e rotazionale. Senza entrare nei dettagli, le bande di assorbimento che contribuiscono di più all'estinzione di radiazione solare nel vicino infrarosso si trovano alle lunghezze d'onda 0.94, 1.1, 1.38, 1.87, 2.66, 2.74 e 3.2 μm.

c) *Anidride carbonica*. Anche la CO_2 contribuisce all'assorbimento della radiazione solare nel vicino infrarosso e le sue bande di assorbimento sono centrate sulle lunghezze d'onda 1.4, 1.6, 2.0, 2.7, 4.3 μm. Va rilevato che la banda centrata su 2.7 μm si sovrappone ad un'analoga banda di assorbimento del vapor d'acqua.

d) *Altri gas minori*. Oltre all'ossigeno, all'ozono, al vapor d'acqua e all'anidride carbonica, ci sono altri gas che contribuiscono all'assorbimento della radiazione solare, come il metano (CH_4), gli ossidi di azoto N_2O e NO_2 e l'ossido di carbonio CO. In generale, essi sono presenti nell'atmosfera a basse concentrazioni e perciò il loro peso nell'assorbimento della radiazione solare è generalmente basso.

Ci sono però almeno due elementi che possono mutare anche profondamente il quadro qui delineato. In primo luogo, tutti questi ragionamenti sono stati fatti considerando una completa assenza di nubi in atmosfera. Dato che su oltre il 60% della superficie del pianeta sono presenti nubi di vario tipo e grandezza, la loro presenza si interpone alla propagazione della radiazione solare aumentandone l'estinzione per ulteriore assorbimento da parte dell'H_2O liquida e solida presente in esse e per i fenomeni di *scattering*. Oltre a ciò, nel *PBL* di molte zone del pianeta, quelle in cui la pressione antropica ed industriale è maggiore, notiamo una elevata concentrazione di ossidi di azoto, di ozono, di ossido di carbonio e di particolato sottile molto maggiore rispetto alle *normali* condizioni dell'atmosfera. Questo *inquinamento atmosferico*, oltre ai ben noti problemi sanitari che comporta, contribuisce in maniera rilevante ad un'ulteriore estinzione della radiazione solare.

6.5.2 LA TRASMISSIONE DELL'ENERGIA SOLARE NELL'ATMOSFERA

L'applicazione diretta delle relazioni generali di trasferimento radiativo introdotte al paragrafo 6.3.4 consente di descrivere rigorosamente come la radiazione ad onda corta di origine solare interagisce con i gas e gli aerosol presenti in aria, venendo da essi assorbita e diffusa, e come viene trasmessa attraverso l'intera atmosfera. L'unica approssimazione insita in tali equazioni è il ritenere che l'atmosfera sia orizzontalmente omogenea, cosa che consente una descrizione per *piani paralleli* riducendo notevolmente la difficoltà analitiche. In queste relazioni, tutte differenziali o integrali, sono presenti i vari coefficienti di estinzione che rappresentano il processo di assorbimento della radiazione da parte delle molecole dei costituenti gassosi dell'atmosfera e degli aerosol ed il processo di *scattering* che subisce la radiazione incidendo sia sulle singole molecole che sulle particelle (liquide o solide) presenti in aria. Di tutto ciò si è trattato ai paragrafi 6.3.1, 6.3.2 e 6.3.3. In teoria, tutto ciò sarebbe sufficiente per descrivere dettagliatamente l'interazione della radiazione elettromagnetica con l'atmosfera e ciò viene effettivamente fatto con il maggior dettaglio possibile in alcuni celebri Codici di Calcolo come LOWTRAN (Kneizys et al, 1988) e MODTRAN (Berk et al. 2015). Essi costituiscono uno strumento indispensabile per lo studio dell'atmosfera e delle sue proprietà radiative, ma non possono essere facilmente integrati nei codici di calcolo meteorologici di tipo prognostico che descrivono la dinamica dell'atmosfera. La ragione di ciò sta, in primo luogo, nel fatto che i codici di trasferimento radiativo, per raggiungere un elevato livello di dettaglio, richiedono tempi di calcolo troppo elevati e non compatibili con le esigenze dei modelli di atmosfera che devono, invece, essere impiegati in modo operativo per le previsioni meteorologiche o per la previsione della dispersione degli inquinanti in aria. In secondo luogo, poi, il loro dettaglio è eccessivo per gli scopi che si prefiggono i modelli meteorologici operativi. In fondo, per essi è sufficiente avere una descrizione realistica ed affidabile del termine di sorgente presente nell'equazione prognostica della temperatura.

Questa è la ragione per cui è necessario ora introdurre una serie di semplificazioni nella descrizione operativa del trasferimento radiativo in atmosfera che consentano la sua introduzione direttamente nei modelli prognostici di atmosfera. Come è immaginabile, si è prodotto molto in questa direzione ed una sintesi di tutto ciò è molto difficile da fare: il lavoro di Stephens (1984) è una buona fonte a cui riferirsi. Ci limiteremo qui di seguito a presentare i metodi più comuni impiegati nei modelli operativi di *PBL*, mentre poco oltre tratteremo i metodi impiegati per descrivere la trasmissione in atmosfera della radiazione ad onda lunga di origine terrestre. Dato che la radiazione solare e terrestre occupano intervalli spettrali che in pratica non si sovrappongono, è sostanzialmente corretto trattare i due processi di trasmissione in maniera separata e sovrapporne gli effetti. Come detto al punto 6.3.4.4, è sempre possibile vedere la trasmissione totale di radiazione in atmosfera come la sovrapposizione di un *trasferimento radiativo discendente* e di un *trasferimento radiativo ascendente*, questo sia per la radiazione ad onda corta che per la radiazione ad onda lunga e ciò non solo rende più comprensibile la trattazione, ma consente anche di poter mettere in relazione le stime con le misure che operativamente possono essere realizzate.

6.5.2.1 Le leggi della trasmissione dell'energia solare

La radiazione di origine solare viene assorbita dai costituenti gassosi dell'atmosfera e viene diffusa dalle molecole e dagli aerosol presenti in essa. Ovviamente, lo *scattering* è decisamente più importante quando in atmosfera sono presenti le nubi e quando, particolarmente nella parte bassa della troposfera, sono presenti sostanze inquinanti come il particolato sottile e gli ossidi di azoto a concentrazioni elevate. Per semplificare la trattazione, prima viene trattato il caso di un'*atmosfera serena*, cioè priva di nubi e con una presenza poco significativa di aerosol, e successivamente si prenderanno in considerazione situazioni in cui la presenza delle idrometeore e del particolato atmosferico è fonte di un elevato *scattering multiplo*.

In un'atmosfera serena e priva di inquinamento O_3, H_2O, CO_2 e gli altri costituenti gassosi sono le principali cause di assorbimento della radiazione ad onda corta, anche se il vapor d'acqua è il più importante. L'assorbimento prodotto da tali sostanze fa sì che il fascio radiativo di origine

solare, attraversando l'atmosfera, riduca la propria intensità durante la propagazione verso il suolo e che il fascio riflesso dalla superficie terrestre si riduca sempre di più nella sua propagazione ascendente verso la sommità dell'atmosfera. Si viene, quindi, ad instaurare un flusso radiativo ascendente e discendente di *tipo diretto*. La presenza, però, dello *scattering di Rayleigh* dovuto alla diffusione della radiazione da parte delle molecole dei gas, determina una diffusione che asporta energia dal fascio radiativo e genera un flusso ascendente e discendente di radiazione *diffusa* che non ricorda più la direzionalità originaria della radiazione solare sostanzialmente descritta dall'angolo di *zenit*. In pratica, l'irradianza monocromatica I in un punto qualsiasi dell'atmosfera può essere scomposta in una componente diretta I_{dir} e diffusa I_{dif}:

$$I(\tau, \mu, \Phi) = I_{dir}(\tau, \mu, \Phi) + I_{dif}(\tau, \mu, \Phi) \qquad [6.77]$$

La prima componente descrive collettivamente tutti i processi di estinzione (assorbimento e *scattering*), mentre la seconda componente descrive l'apporto radiativo dovuto ai vari processi di *scattering*. Quello che dobbiamo fare è dare delle leggi che descrivano in maniera operativamente semplice la componente diretta ascendente, la componente diretta discendente, la componente diffusa ascendente e la componente diffusa discendente. Come indicato da Pielke (2002), l'importanza della radiazione diretta ascendente nel riscaldamento dell'atmosfera è piuttosto limitata e perciò spesso non se ne tiene conto, cosa che faremo anche noi.

La componente diretta

Si consideri un fascio di radiazione solare che raggiunge la sommità dell'atmosfera con un dato angolo di *zenit* θ e sia $\mu = \cos\theta$. Se un flusso radiativo monocromatico di origine solare $I_{0,\nu}(\infty)$ alla frequenza ν arriva alla sommità dell'atmosfera, giungendo alla quota generica z riduce la propria intensità a causa degli assorbimenti che incontra lungo la propagazione verso il basso. Questa *estinzione* è descritta, come si è detto, dalla legge di Beer. Quindi, il *flusso discendente diretto di radiazione solare* a tutte le frequenze sarà pari a:

$$S^{\downarrow}(z, \mu) = \mu \cdot \int_0^{\infty} I_{0,\nu}(\infty) \cdot \tau_{\nu}(z, \infty, \mu) \cdot d\nu \qquad [6.78a]$$

In questa relazione è presente la *trasmittanza monocromatica* $\tau_\nu(z,\infty,\mu)$ che risulta pari a:

$$\tau_{\nu}(z, \infty, \mu) = exp\left[-\frac{1}{\mu}\int_z^{\infty} k_{\nu} \cdot du'\right] \qquad [6.78b]$$

e rappresenta la frazione di radiazione monocromatica di origine solare incidente alla sommità dell'atmosfera che riesce a raggiungere la quota generica z. In questa relazione è presente la variabile u (il *path length*) che dipende dalla concentrazione di sostanza assorbente ρ e dal percorso fatto dal fascio di radiazione dalla relazione:

$$u = \int_0^{z} \rho \cdot dz' \qquad [6.78c]$$

e quindi, per la regola di Leibniz:

$$du = \rho \cdot dz \qquad [6.78d]$$

Ricordiamo che il coefficiente di estinzione monocromatico k_ν è variabile da quota a quota a seconda della concentrazione dei gas che assorbono la radiazione solare.

Il problema insito nell'uso pratico della (6.78a) sta nel dover calcolare (naturalmente solo per via numerica) l'integrale su tutte le frequenze presente nella relazione. Come abbiamo visto lo spettro di assorbimento dei gas atmosferici è costituito da un insieme complesso di numerosissime bande spettrali distinte e ciò comporta che la scelta del passo discreto di integrazione adottato dall'algoritmo numerico che valuta l'integrale è estremamente critica e spesso comporta

tempi di calcolo inaccettabili per i modelli meteorologici. Quando invece si è interessati al solo trasferimento radiativo in atmosfera, la situazione cambia ed i tempi di calcolo non sono più un problema. In questo caso è possibile adottare metodi di integrazione che considerano riga per riga l'assorbimento dei vari gas. Dato che ciò non è una prassi normale nei modelli meteorologici, trascureremo di dare ulteriori dettagli sull'argomento, rimandando per essi a Liou (2002).

Proprio nell'ottica di individuare un metodo operativo adatto ad essere inserito in modelli meteorologici, Stephens (1984) descrive una metodologia di semplice uso consistente nel dividere l'intero intervallo spettrale in *N* sottointervalli di ampiezza $\Delta\nu_i$ (non necessariamente della stessa ampiezza) centrati su una frequenza ν_i^*. L'importante è che nel singolo sottointervallo sia agevole determinare una *trasmittanza media di intervallo* $\tau_{\nu^*}(z,\infty,\mu)$ definita come:

$$\tau_{\nu_i^*}(z,\infty,\mu) = \frac{1}{\Delta\nu}\int_{\Delta\nu} exp\left[-m_r(\mu)\int_z^\infty k_\nu \cdot du'\right]\cdot d\nu \qquad [6.79a]$$

dove $m_r(\mu)$ è l'*air mass factor* che vale $1/\mu$ per tutti i gas e per angoli di *zenit* superiori a 75°, tranne che per l'ozono, per cui si ha (Stephens 1984):

$$m_r(\mu) = \frac{35\mu}{\sqrt{1224\mu^2+1}} \qquad [6.79b]$$

A questo punto, la (6.78a) viene approssimata dalla relazione seguente che esprime *il flusso discendente di radiazione solare diretta*:

$$S^{\downarrow}(z,\mu) = \mu\cdot\sum_{i=1}^{N} I_{0,\nu}(\infty)\cdot\tau_{\nu_i}^*(u) \qquad [6.80a]$$

Ragionamenti analoghi portano ad individuare una relazione per il *flusso diretto ascendente di radiazione solare* che, nel caso in cui si suddivide l'intero intervallo spettrale in *N* sottointervalli, risulta così espressa:

$$S^{\uparrow}(z,\mu) = \mu\cdot\sum_{i=1}^{N} \alpha_{g,i}\cdot I_{0,\nu}(\infty)\cdot\tau_{\nu_i}^*(u^*) \qquad [6.80b]$$

dove con $\alpha_{g,i}$ si è indicato il coefficiente di albedo superficiale relativo al sottointervallo spettrale *i*-esimo. La variabile u^* rappresenta l'ammontare complessivo di sostanza assorbente attraversata dalla radiazione riflessa dal suolo che può essere approssimata da (Lacis e Hansen, 1974):

$$u^* = m_r(\mu)\cdot u_0 + (u_0 - u)\cdot\tilde{m} \qquad [6.80c]$$

dove con u_0 si è indicato il valore della variabile *u* relativo all'intera colonna atmosferica verticale e $\tilde{m}$ è un fattore di amplificazione efficace per la radiazione diffusa. Lacis e Hansen (1974) suggeriscono che il valore di circa 1.9 è appropriato per l'ozono, mentre il valore di 5/3 è appropriato per gli altri gas. La precisione di queste relazioni relative alle componenti dirette aumenta ovviamente con l'aumentare del numero di sottointervalli spettrali considerati. Per ciascuno devono essere disponibili parametrizzazioni che esprimono la trasmittanza per le diverse sostanze assorbenti nell'intervallo spettrale considerato. Esempi di questo tipo sono descritti nei lavori di Chou e Lee (1996) e di Tarasova e Fomin (2000).

Nonostante tutto, le relazioni (6.80) sono ancora abbastanza complesse e richiedono comunque tempi di calcolo elevati e ciò ha indotto ad ulteriori semplificazioni. In effetti, la (6.78a) può essere ulteriormente semplificata se si definisce una trasmittanza relativa all'intero intervallo spettrale (nel nostro caso l'intero intervallo per cui lo spettro solare presenta valori significativi). Infatti se si definisce questa *trasmittanza globale media* come:

$$\bar{\tau}(z,\infty,\mu) = \frac{1}{I_0}\int_0^\infty I_{0,\nu}(\infty)\cdot\tau_\nu(z,\infty,\mu)\cdot d\nu \qquad [6.81a]$$

cioè una trasmittanza media su tutto l'intervallo spettrale, allora la relazione (6.78a) può essere approssimata come:

$$S^{\downarrow}(z,\mu) = \mu \cdot I_0 \cdot \bar{\tau}(z,\infty,\mu) \qquad [6.81b]$$

che è di più semplice applicazione e che è l'unica relazione che considereremo nel seguito. Naturalmente, una relazione analoga può essere ottenuta anche per la radiazione diretta ascendente. Questo è il metodo più utilizzato nei codici prognostici per la descrizione della dinamica meteorologica. Perché queste relazioni siano effettivamente impiegabili è necessario ora conoscere la trasmittanza media per le singole sostanze assorbenti il cui prodotto costituisce la trasmittanza media complessiva sperimentata dalla radiazione solare diretta. Per ragioni sperimentali, le parametrizzazioni che discuteremo qui di seguito non si riferiscono direttamente alla trasmittanza media τ_b di una generica sostanza *b*, ma al coefficiente di assorbimento medio di questa sostanza a_b che è però pari a $a_b = 1 - \tau_b$.

Il gas che più assorbe la radiazione solare ad onda corta è sicuramente il vapor d'acqua la cui azione assorbente si esplica principalmente nella regione dell'infrarosso ($0.7 \leq \lambda \leq 4.0$ μm). Lacis e Hansen (1974) hanno presentato una parametrizzazione per il coefficiente di assorbimento del vapor d'acqua decisamente semplice e molto utilizzata. In particolare, se si definisce *ammontare di acqua precipitabile* δP (g·cm^{-2}) la variabile:

$$\delta P = \frac{1}{\mu}\int_z^{\infty} \rho \cdot q_3 \cdot dz \qquad [6.82a]$$

dove q_3 è l'umidità specifica, allora il coefficiente medio di assorbimento del vapor d'acqua a_{q3} risulta dato dalla relazione:

$$a_{q3} = \frac{2.9 \cdot \delta P}{(1 + 141.5 \cdot \delta P)^{0.635} + 5.925 \cdot \delta P} \qquad [6.82b]$$

Questa relazione tiene conto anche del debole assorbimento di radiazione dovuto alla CO_2 e all'ossigeno molecolare (O_2). Un'altra parametrizzazione, formalmente molto più semplice, è riportata da Pielke (2002) ed è data dalla relazione:

$$a_{q3} = 0.077 \cdot \delta P^{0.3} \qquad [6.82c]$$

Anche l'ozono concorre all'assorbimento di radiazione solare ad onda corta entro l'intervallo spettrale 0.28 – 0.65 μm. Larcis e Hansen (1974) hanno fornito anche in questo caso una parametrizzazione che lega il coefficiente di assorbimento alla concentrazione di ozono presente alla quota di interesse. In particolare, se la concentrazione di ozono q_{oz} è espressa in (g·cm^{-2}), l'*ammontare di ozono* u_{oz} (in cm alla pressione e temperatura standard STP) risulta:

$$u_{0z} = \frac{M}{2.24 \cdot 10^4} q_{oz} \qquad [6.83a]$$

(*M* è il peso molecolare dell'ozono, pari a 48) e il coefficiente di assorbimento medio nella banda del visibile (per $0.0001 < u_{oz} < 10$ cm) si ottiene dalla relazione:

$$a_{Oz}^{vis} = \frac{0.0211 \cdot u_{0z}}{1 + 0.042 \cdot u_{0z} + 0.000323 \cdot u_{Oz}^2} \qquad [6.83b]$$

mentre nella banda dell'ultravioletto dalla relazione:

$$a_{Oz}^{UV} = \frac{1.082 \cdot u_{0z}}{(1 + 138.6 \cdot u_{0z})^{0.805}} + \frac{0.0658}{(1 + 103.6 \cdot u_{0z})^3} \qquad [6.83c]$$

Oltre all'assorbimento per il vapor d'acqua, si dovrebbe tenere conto anche dello *scattering* di Rayleigh che comporta comunque un'estinzione. Dato il peso dell'assorbimento del vapor d'acqua e le complicazioni cui si incorre introducendo quest'ultimo fattore, normalmente si

preferisce ignorarlo. Tuttavia, Stephens (1984) riporta una semplice parametrizzazione che tiene conto dell'estinzione dovuta allo *scattering* di Rayleigh costituita da una semplice modifica della (6.81b) che risulterebbe così espressa:

$$S^{\downarrow}(z,\mu) = \mu \cdot I_0 \tau_R \cdot \bar{\tau}(z,\infty,\mu) \qquad [6.84]$$

dove τ_R è una costante pari a 0.93.

Ragionamenti analoghi possono essere fatti per il flusso radiativo ascendente di radiazione ad onda corta.

Attraversata tutta l'atmosfera, la radiazione solare giunge al suolo $S^{\downarrow}_G$ (calcolabile con la relazione 6.81b) e lì viene riflessa con un coefficiente di albedo globale *A*. Qui giunge anche la *radiazione diffusa* R^D_G dovuta allo *scattering di Rayleigh* prodotto dall'interazione tra le molecole dei gas e la radiazione diretta. Quindi, la radiazione ad onda corta assorbita dal suolo è pari a:

$$S_{G,a} = \left(S_G^{\downarrow} + R_G^D S^{\downarrow}\right) \cdot (1 - A) \qquad [6.85a]$$

e l'irradianza globale riflessa dal suolo è:

$$S_{G,r} = A \cdot \left(S_G^{\downarrow} + R_G^D S^{\downarrow}\right) \qquad [6.85b]$$

La componente diffusa

Questa componente deriva totalmente dallo *scattering di Rayleigh* causato dalle molecole di O_3, O_2 e CO_2 e la sua trattazione dettagliata è decisamente complessa, come mostrato in Stephens (1984). Un modo piuttosto semplice, sostanzialmente il metodo più comunemente utilizzato nei modelli meteorologici prognostici, è quello illustrato da Pielke (2002). Per prima cosa, è possibile definire una *trasmissività frazionaria* come:

$$t = 0.485 + 0.515 \cdot \left[1.041 - 0.16 \cdot \left(\frac{0.000949 \cdot p(mb) + 0.051}{\mu}\right)^{1/2}\right] \qquad [6.86a]$$

che tiene conto dello *scattering di Rayleigh* causato dall'ozono, dall'ossigeno molecolare e dalla CO_2. Usando questa grandezza, è ora possibile esprimere in maniera un poco diversa l'irradianza assorbita dal suolo, che diventa:

$$S_{G,a} = \left(t - a_{q3}\right) \cdot (1 - A) \cdot S_0^{\downarrow} \qquad [6.86b]$$

dove $S^{\downarrow}_0$ è l'irradianza alla sommità dell'atmosfera, pari a μI_0. Trascurando come detto la componente riflessa ed utilizzando la trasmissività frazionaria per considerare globalmente la componente diffusa, il flusso netto di radiazione solare in atmosfera serena e pulita R_{SW} ad una generica quota *z* dove la temperatura e la pressione possiedono valori noti, è data dalla relazione:

$$R_{SW} = \mu \cdot I_0 \cdot \left(t - a_{q3}\right) \qquad [6.86c]$$

Questa relazione è una notevole semplificazione della realtà, anche in condizioni di assenza di nuvole e di presenza irrilevante di particolato atmosferico, e rappresenta un'approssimazione ragionevole per determinare il riscaldamento dell'atmosfera dovuto all'assorbimento ed allo *scattering* della radiazione ad onda corta.

6.5.2.2 Il riscaldamento dell'aria in assenza di nubi e di inquinamento

Si consideri l'atmosfera omogenea in senso orizzontale e si isoli in essa ad una quota *z* uno strato d'aria di spessore infinitesimo *dz*. In assenza di forzanti dinamiche (trasporto e dispersione turbolenta), la temperatura *T*(*z*) di questo strato varierà nel tempo per la divergenza verticale del flusso radiativo totale. Se consideriamo solo il flusso radiativo ad onda corta di cui si è trattato finora (più oltre si aggiungerà anche il contributo al riscaldamento o al raffreddamento dovuta alla radiazione ad onda lunga), questa variazione di temperatura nel tempo risulterà pari a:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{SW} = -\frac{1}{\rho C_p}\frac{\partial R_{SW}}{\partial z} \qquad [6.87a]$$

Se si considerano situazioni di atmosfera pulita e priva di nubi, se si trascura l'assorbimento dovuto all'ozono, lo *scattering* di Rayleigh e la radiazione riflessa, si ha che:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{SW} = -\frac{1}{\rho C_p}\frac{\partial R_{SW}}{\partial z} = \frac{\mu \cdot I_0}{\rho C_p}\cdot\frac{\partial a_{q3}}{\partial z} \qquad [6.87b]$$

Le semplificazioni apportate rendono il calcolo del flusso netto di radiazione ad onda corta, cioè la relazione (6.86), agevole e quindi è anche abbastanza semplice da calcolare il riscaldamento dell'aria da essa derivante. Tra poco verrà illustrato un possibile schema numerico con cui realizzare concretamente questo calcolo all'interno di un codice meteorologico prognostico.

Prima, però, è interessante considerare uno schema ancora più semplice, ottenuto da Savijarvi (1990) componendo tra loro e semplificando le varie trasmittanze che concorrono all'estinzione della radiazione ad onda corta. In questo caso, è stato considerato:

- l'assorbimento nella regione dell'ultravioletto da parte dell'ozono, che avviene prevalentemente nella stratosfera;
- l'assorbimento nella regione dell'infrarosso da parte del vapor d'acqua, dell'ossigeno molecolare e della CO_2, che avviene principalmente nella troposfera;
- lo *scattering di Rayleigh* delle molecole di aria;
- l'assorbimento tipico derivante dagli aerosol
- lo *scattering* tipico degli aerosol.

Si definisca l'ammontare u ($g \cdot cm^{-2}$) efficace di vapor d'acqua scalato con la pressione e la temperatura tra le quote z' e z, posto $p_0 = 1013$ mb e $T_0 = 273$ K, come:

$$u(z', z) = \int_{p(z')}^{p(z)} q\left(\frac{p}{p_0}\right)^n \left(\frac{T_0}{T}\right)^{0.5}\frac{dp}{g} \qquad [6.88a]$$

dove n vale circa 0.9, g è l'accelerazione di gravità e q è l'umidità specifica. Si definisca, inoltre, la variabile y come:

$$y(u) = \begin{cases} 0.029 \cdot u^{-0.81} & u \geq 0.55\ cm \\ 0.050 \cdot u^{-0.81} & u < 0.55\ cm \end{cases} \qquad [6.88b]$$

e la *path length* u^* come:

$$u^* = \frac{u(0,\infty)}{\mu + 1.67 \cdot u(o,z)} \qquad [6.88c]$$

allora, il riscaldamento dell'aria può essere determinato dalla relazione analitica seguente:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{SW} = \mu \cdot I_0 \cdot \left(\frac{q}{C_p}\right)\cdot\left(\frac{p}{p_0}\right)\cdot\left[y\left(\frac{u(z,\infty)}{\mu}\right) + 1.67\alpha \cdot y(u^*)\cdot\mu\right] + 1.7\cdot 10^{-6}\mu^{0.3} \qquad [6.88d]$$

cioè, in pratica, da una relazione analitica che fornisce il tasso di variazione della temperatura T dell'aria ad una generica quota z una volta noto a quella quota il valore di $u(z,\infty)$ e di u_*.
Per concludere la discussione sul riscaldamento dell'aria derivante dalla divergenza verticale del flusso netto di radiazione ad onda corta, conviene presentare nei dettagli lo schema numerico realmente adottato in un modello meteorologico da Moussiopoulos (1987). A questo proposito, si consideri un'atmosfera orizzontalmente omogenea (tutte le variabili meteorologiche variano solo con la quota z) composta da strati sovrapposti. Nella **Fig. 6.52** è evidenziata la porzione di atmosfera considerata dal modello. In sostanza gli indici k che prendono i valori interi da 0 ad M rappresentano le superfici orizzontali che separano tra loro i vari strati di aria sovrapposti. La superficie in corrispondenza di $k = 0$ è la superficie terrestre mentre la superficie a $k = M$ è la

sommità del dominio di calcolo.

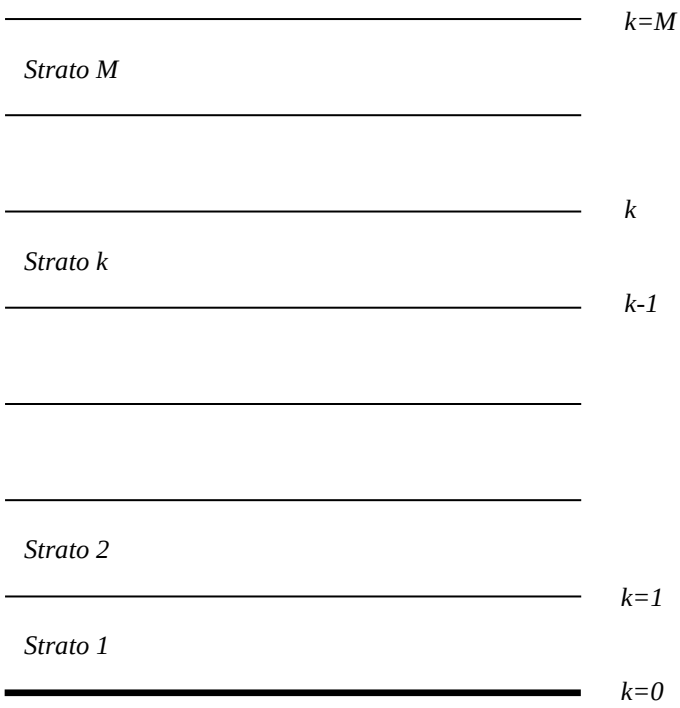


Fig. 6.52: schema del dominio di calcolo della divergenza della radiazione ad onda corta

Il primo strato sta tra la superficie (k = 0) e la superficie (k = 1), mentre il generico strato k sta tra la superficie *k-1* e la superficie k. La parte meteorologica del modello ha inoltre determinato, ad un certo istante temporale, il valore della temperatura dell'aria, della pressione, della concentrazione di vapor d'acqua e della concentrazione di ozono in corrispondenza di tutte le superfici di separazione tra i vari strati (in sostanza M+1 valori per ciascuna di queste variabili). L'obiettivo è la determinazione del gradiente verticale del flusso netto di radiazione ad onda corta in corrispondenza delle M+1 superfici che separano gli M strati di atmosfera e quindi il riscaldamento conseguente. Gli ingredienti principali utilizzati sono:

- il coefficiente di assorbimento del vapor d'acqua espresso dalla relazione (6.82b) in cui, però, la grandezza δP viene calcolata alla generica quota z (cui corrisponde un valore T e p rispettivamente per la temperatura e la pressione atmosferica) nel modo seguente:

$$\delta P = \int_0^p \frac{m}{\rho_{q3} g} \cdot \xi_{q3} \cdot \left(\frac{p}{p_0}\right) \cdot \left(\frac{T_0}{T}\right)^{0.5} dp \qquad [6.89a]$$

  dove p_0 = 1013 mb, T_0 = 273 K, ρ_{q3} è la densità dell'acqua liquida e ξ_{q3} è la frazione in massa dell'acqua presente in aria che, detta q l'umidità specifica, risulta espressa come:

$$\xi_{q3} = \frac{q}{1+q} \qquad [6.89b]$$

  Inoltre la grandezza m è l'*air mass factor* dato dalla relazione (6.79b).

- l'assorbimento derivante dalla presenza di ozono la cui parametrizzazione è data dalle relazioni (6.83b-c).
- come si è visto, l'azione dello *scattering* di Rayleigh è riassunta complessivamente nella *trasmissività frazionaria t* data dalla relazione (6.86a)

Consideriamo, inizialmente, la sommità del dominio di calcolo, cioè la superficie M. Assumendo

l'ipotesi che il flusso radiativo che la raggiunge dall'alto presenti una riflessione trascurabile, il flusso radiativo discendente al livello *M* risulta pari a:

$$S_M^{\downarrow} = \mu \cdot I_0 \cdot \left[t(p_M, m) - a_{q3} - a_{Oz}\right] \cdot t_{a,p,M} \cdot t_{s,p,M} \cdot t_{c,M} \qquad [6.90a]$$

dove μ è il coseno dell'angolo di *zenit* e le trasmissività $t_{a,p,M}$, $t_{s,p,M}$ e $t_{c,M}$ sono rispettivamente le trasmissività per l'assorbimento e per lo *scattering* delle sostanze inquinanti (sostanzialmente particolato sottile) e la trasmissività delle nuvole. Nel caso di atmosfera serena, il valore di queste trasmissività è assunto unitario.

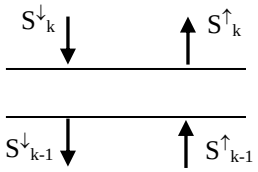


Fig. 6.57: flussi ascendenti e discendenti relativi ad un generico strato k di atmosfera

Consideriamo, ora, un generico strato *k*. Aiutati dalla **Fig. 6.53**, vediamo che:

- nello strato *k* entra il flusso discendente $S^{\downarrow}_k$ trasmesso dallo strato sovrastante
- nello strato *k* entra il flusso ascendente $S^{\uparrow}_{k-1}$ trasmesso dallo strato sottostante
- nello strato *k* esce il flusso ascendente $S^{\uparrow}_k$ riflesso dalla superficie *k*
- nello strato *k* esce il flusso discendente $S^{\downarrow}_{k-1}$ riflesso dalla superficie *k*-1.

Quindi si ha che per ogni strato *k* (*k* = 1, 2, .. , *M*) valgono le relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} S_k^{\downarrow} &= t_k S_k^{\downarrow} + r_k^* S_{k-1}^{\uparrow} \\ S_k^{\uparrow} &= t_k^* S_k^{\uparrow} + r_k S_{k-1}^{\downarrow} \end{aligned} \qquad [6.90b]$$

Infine, al suolo, cioè al livello *k* = 0, deve valere:

$$S_0^{\uparrow} = A \cdot S_0^{\downarrow} \qquad [6.90c]$$

L'insieme di queste equazioni costituisce un sistema lineare di cui tratteremo subito dopo aver descritto come debbano venir calcolate le trasmissività e riflessività frazionarie t_k t^*_k, r_k e r^*_k. Si può calcolare la trasmissività integrale t_k per il flusso discendente al livello *k* come:

$$t_k = \frac{\tau_{k-1}}{\tau_k} \qquad [6.91a]$$

con:

$$\tau_k = t(p_k, m) - a_{q3}(\delta p_k) + a_{Oz}(z_k) \qquad [6.91b]$$

dove a_{oz} è il coefficiente di assorbimento di ozono al livello *k*. La riflettività incrementale r_k per flusso discendente al livello *k* risulta pari a:

$$r_k = 1 - t_k - a_k \qquad [6.91c]$$

dove il corrispondente coefficiente di assorbimento incrementale è espresso da:

$$a_k = \frac{a_{q3}(\delta p_{k-1}) - a_{q3}(\delta p_k)}{t_k} \qquad [6.91d]$$

In modo simile si definiscono la trasmissività t^*_k del flusso al livello *k*:

$$t_k^* = \frac{\tau_k^*}{\tau_{k-1}^*} \qquad [6.91e]$$

con:

$$\tau_k^* = \frac{t(p_0, \widetilde{m})}{t(p_k, \widetilde{m})} - a_{q3}(X_k^*) - a_{Oz} \qquad [6.91f]$$

Il primo termine di destra tiene conto dell'attenuazione della radiazione ad onda corta per lo *scattering* di Rayleigh, mentre gli altri termini tengono conto dell'assorbimento dei gas. In questa relazione è presente:

$$X_k^* = \delta p_0 + \frac{5}{3}(\delta p_0 - \delta p) \qquad [6.91g]$$

dove δP_0 è il risultato della (6.82a) con l'estremo inferiore di integrazione pari a $z = 0$, cioè l'ammontare di acqua precipitabile dell'intera colonna atmosferica. Infine, la riflettività r^*_k del flusso ascendente al livello *k* è dato da:

$$r_k^* = 1 - t_k^* - a_k^* \qquad [6.91h]$$

dove

$$a_k^* = \frac{a_{q3}(X_k^*) - a_{q3}(X_{k-1}^*)}{t_{k-1}^*} \qquad [6.91i]$$

È facile rendersi conto che se si conosce ad ogni livello il valore della temperatura, della pressione e della concertazione di vapor d'acqua e di ozono, tutte le varie trasmissività e riflettività si calcolano senza alcuna difficoltà e quindi tutti i coefficienti del sistema di relazioni lineari risultano calcolabili e quindi noti. Risolvendo il sistema costituito dalle equazioni (6.90a-c) si ottengono i flussi radiativi incogniti. Conoscendo i flussi ascendenti e discendenti ai vari livelli, il riscaldamento dell'aria derivante dalla divergenza verticale del flusso radiativo ad onda corta è dato da:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_k^{SW} = \frac{g}{\rho C_p} \cdot \frac{S_k^{\downarrow} - S_{k-1}^{\downarrow} + S_k^{\uparrow} - S_{k-1}^{\uparrow}}{z_k - z_{k-1}} \qquad [6.92]$$

dove z_k è la quota del generico livello *k*.

6.5.2.3 Cenni alla presenza di nubi ed inquinamento

La presenza delle nubi nell'atmosfera ha come effetto globale una riduzione del flusso radiativo ad onda corta, che è più o meno marcato a seconda del tipo di nubi, della loro estensione orizzontale e verticale e della copertura complessiva del cielo, dato che loro presenza assorbe e diffonde la radiazione solare ad onda corta. Un comportamento analogo lo si ha anche quando in atmosfera, prevalentemente nella parte bassa della troposfera, si concentrano particelle sottili che provengono o dalle attività umana o dall'azione di erosione e di risospensione del vento. Affrontare il problema dell'interazione tra queste particelle e la radiazione solare incidente è decisamente complesso, visto che è necessario impiegare completamente la teoria dello *scattering multiplo*. In Liou (1992) tutto ciò è affrontato con notevole dettaglio e sono disponibili codici di calcolo che si basano su questa teoria e che riescono a riprodurre la realtà con un grado notevole di realismo e di precisione. Tuttavia il notevole tempo di calcolo che essi richiedono rende impraticabile il loro utilizzo all'interno dei modelli meteorologici, per cui anche in questo caso è necessario procedere a drastiche semplificazioni pur essendo consapevoli dell'impossibilità di ignorare questo tipo di interazione. In questa ottica, Stephen (1978a, b) e Stephen e al. (1978) hanno intrapreso un paziente lavoro di parametrizzazione, fornendo utili argomenti per generare algoritmi abbastanza semplici e veloci, ma allo stesso tempo ragionevolmente realistici. Un risultato di questa azione di semplificazione è quella realizzata da Stephen (1984) ed usata da Pielke (2002), ancora troppo complessa per i nostri scopi didattici. Un'interessante semplificazione, sempre derivata dai lavori citati, è quella utilizzata da Hurley (2008) nel modello prognostico per la previsione meteorologica e della dispersione degli inquinanti TAPM che descriviamo qui di seguito.

Il metodo di Hurley assume che i contributi alla trasmissione della radiazione in assenza ed in presenza di nubi possano essere tratti separatamente. Mentre il caso di assenza di nubi è stato trattato in precedenza, ora concentriamoci sulla determinazione di come la presenza delle

nubi perturbi una tale situazione. La presenza delle nubi è sostanzialmente segnalata dalla presenza di abbondante acqua precipitabile incontrata dalla radiazione lungo l'atmosfera. La quantificazione dell'acqua precipitabile incontrata dalla radiazione ad onda corta dalla sommità dell'atmosfera (o, più concretamente, dalla sommità del dominio di calcolo z_T) alla quota generica z è data dalla grandezza seguente:

$$W^{in} = \int_{z}^{z_T} \rho \cdot q_c \cdot dz \qquad [6.93a]$$

dove q_c (kg kg^{-1}) è l'umidità specifica e ρ è la densità dell'aria. La presenza di acqua in aria determina l'estinzione della radiazione ad onda corta discendente. In effetti, se si definisce una trasmissività Ψ_{trasm} come:

$$\Psi_{Trasm} = \begin{cases} exp[-16 \cdot W^{in} + 13(W^{in})^2] & W^{in} \leq 0.11 \\ 0.2 & W^{in} > 0.11 \end{cases} \qquad [6.93b]$$

la radiazione ad onda corta discendente risulta semplicemente pari a:

$$S^{in}(z) = S^{\downarrow}(z)\big|_{cielo\ sereno} \cdot \Psi_{Trasm} \qquad [6.93c]$$

Per calcolare il riscaldamento dell'atmosfera dovuto all'interazione della radiazione ad onda corta con le idrometeore, questo schema congloba l'effetto della radiazione diffusa e della radiazione ascendente in un'altra trasmissività Ψ_{Absor}, definita come:

$$\Psi_{Absor} = \begin{cases} 0.3 \cdot \sqrt{W^{in}} & W^{in} \leq 0.11 \\ 0.1 & W^{in} > 0.11 \end{cases} \qquad [6.93d]$$

ottenendo che:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{SW} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{SW}\Big|_{cielo\ sereno} + \frac{1}{\rho C_p}\frac{\partial}{\partial z}\left[S^{\downarrow}\big|_{cielo\ sereno}\Psi_{Absor}\right] \qquad [6.93e]$$

Questa relazione differenziale viene discretizzata alle differenze finite entro il dominio di calcolo e può essere impiegata quando sono noti i profili verticali di temperatura dell'aria, di pressione e di umidità specifica. Ovviamente il modello presentato è estremamente semplificato ma comunque sufficientemente realistico da poter essere impiegato in un modello meteorologico operativo come TAPM.

6.5.3 LA RADIAZIONE SOLARE AL SUOLO

Una volta attraversata l'intera atmosfera, la radiazione solare giunge alla fine all'interfaccia aria suolo dove deposita tutta la propria energia perché venga utilizzata nel mantenere in moto l'intera atmosfera e nel rendere possibile i complessi processi che producono l'evapotraspirazione dell'acqua, la generazione della turbolenza nel *PBL*, la crescita della vegetazione con la sintesi clorofilliana ed in sostanza l'intera vita sul pianeta Terra. Quindi l'irradianza solare che giunge al suolo è una delle principali variabili considerate in meteorologia, agrometeorologia e micrometeorologia e ad essa normalmente ci si riferisce col termine *Radiazione Solare Globale* R_g. Questa variabile non è monocromatica, ma tiene conto dell'apporto solare a tutte le lunghezze d'onda ed il suo valore al suolo è il risultato dell'assorbimento e dello *scattering* che le componenti gassose e particellari hanno avuto con la radiazione solare incidente. Ovviamente, risulta la somma di una componente diretta e di una componente diffusa a causa dello *scattering* causato dalle molecole gassose e dalle particelle solide e liquide.

Proprio perché di origine solare, R_g ovviamente presenta una marcata periodicità giornaliera: è nulla nelle ore notturne e cresce con regolarità dall'alba fino a raggiungere un massimo nelle ore centrali della giornata (il mezzogiorno) per poi decrescere nuovamente fino ad annullarsi al tramonto.

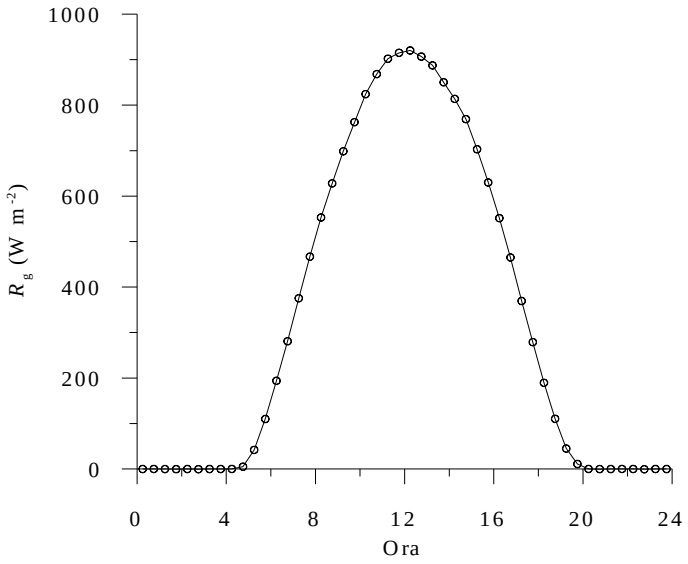


Fig. 6.53: andamento orario della Radiazione Solare Globale in un giorno estivo sereno

Nelle giornate totalmente prive di nubi, R_g presenta quindi il classico andamento sinusoidale come ben si vede nella **Fig. 6.53**. Come si nota, l'andamento è regolarissimo ed è proporzionale al seno dell'angolo di elevazione solare (cioè al coseno dell'angolo di *zenit*). La grande regolarità dell'andamento nel tempo è il risultato del fatto che la distribuzione nell'atmosfera delle varie sostanze che contribuiscono all'assorbimento ed allo *scattering* della radiazione non varia sensibilmente nel tempo. L'unica possibile variazione importante è la comparsa delle nubi nel cielo. In questo caso (**Fig. 6.54**) l'andamento col tempo di R_g presenta delle notevoli irregolarità costituite da periodi in cui i raggi del sole incontrano lungo il percorso di propagazione una nuvola che li estingue più o meno efficacemente. Non appena la nuvola si sposta, la radiazione solare ritorna al valore *normale*. A volte si assiste ad un fenomeno interessante (*broken cloud*): quando sono presenti cumuli o cumulonembi isolati è possibile che i raggi solari vengano riflessi dal bordo delle nubi e che al suolo la radiazione solare per un breve periodo venga amplificata rispetto al normale.

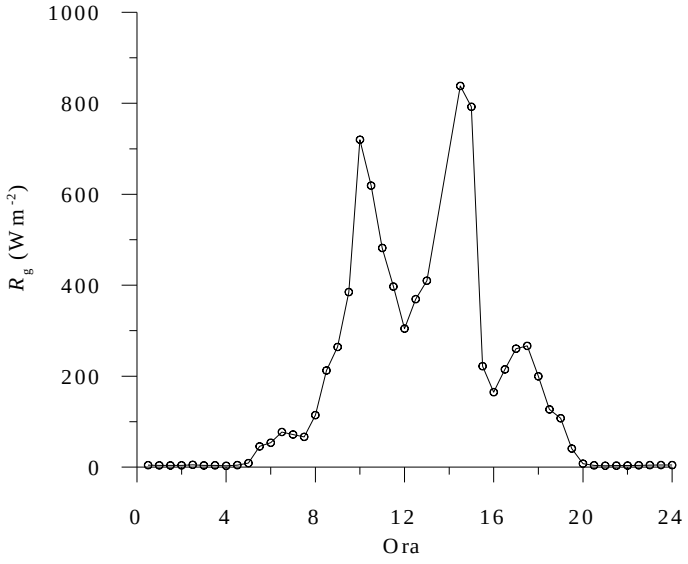


Fig. 6.54: andamento orario di R_g in un giorno estivo nuvoloso

Una volta raggiunto il suolo, parte della radiazione solare viene riflessa dando luogo ad un flusso radiativo verso l'alto, noto come *albedo*. All'interfaccia aria-suolo, la radiazione solare

globale incidente deve essere pari alla somma della radiazione riflessa, l'albedo, e della radiazione assorbita dal suolo. Questo è, in breve, il bilancio superficiale di radiazione ad onda corta. Una porzione rilevante dello spettro solare si colloca nella banda dell'ultravioletto. Dato che la radiazione in questo intervallo spettrale, nota come radiazione UV, può avere effetti negativi sulla salute umana, frequentemente si dedica molta attenzione alla sua determinazione, per valutare il potenziale rischio che essa può avere sulla popolazione esposta.

La radiazione solare globale, diretta e diffusa e la radiazione UV, così come l'albedo, sono variabili meteorologiche per cui sono disponibili sensori che le rilevano sperimentalmente con notevole accuratezza e precisione, tuttavia la misura di queste variabili non è così comune nelle postazioni di misura a terra, soprattutto in quelle di tipo aeronautico. Inoltre i modelli prognostici meteorologici richiedono sempre una loro stima ed una loro previsione. Chiaramente la teoria sviluppata in precedenza fornirebbe tutte queste variabili una volta integrate le equazioni pertinenti dalla sommità dell'atmosfera al suolo, tuttavia, per semplificarne la stima, sono state sviluppate delle parametrizzazioni, soprattutto relative alla determinazione della radiazione solare globale di uso molto comune.

6.5.3.1 Parametrizzazione della radiazione solare globale

Le equazioni che descrivono in maniera del tutto generale il trasferimento di radiazione ad onda corta attraverso l'atmosfera suggeriscono lo *scheletro formale* per la maggioranza delle parametrizzazioni proposte in letteratura. Infatti, la maggior parte di esse si presenta come una sorta di semplificazione estrema delle leggi generali del trasferimento radiativo ad onda corta basate su serie estese di misure strumentali realizzate in varie parti del mondo. Ciò comporta, però, che esse spesso richiedano una sorta di *calibrazione* per adattarsi a rappresentare le condizioni di siti specifici di interesse.

Condizioni di cielo sereno,

Se l'atmosfera è totalmente priva di nubi, la radiazione solare (*radiazione ad onda corta in arrivo*) che, a livello orario, raggiunge nell'unità di tempo una superficie unitaria orizzontale posta alla superficie terrestre in condizioni di cielo sereno (cioè la radiazione solare globale che indicheremo col simbolo Rg_0,, espressa in $W \cdot m^{-2}$) è ovviamente funzione:

- dell'irradianza solare extraterrestre I_0 corrispondente all'istante considerato,
- della posizione del punto di osservazione sulla terra (completamente definito dalla latitudine e longitudine del luogo),
- di un coefficiente di trasmissione T_{tot} che tiene conto in *maniera globale* delle varie interazioni che la radiazione solare ha subito nel suo percorso attraverso l'intera atmosfera ed in particolare dell'assorbimento causato dalle sostanze gassose presenti in atmosfera, dall'assorbimento dovuto agli aerosol e dallo *scattering* di Rayleigh.

In sostanza, matematicamente tutto ciò può essere espresso dalla generica relazione:

$$Rg_0 = I_0 \cdot \sin\Psi \cdot T_{tot} \qquad [6.94]$$

dove Ψ è l'angolo di elevazione solare. La differenza tra le varie metodologie proposte sta nella parametrizzazione del coefficiente di trasmissione atmosferico globale T_{tot}. Qui di seguito presentiamo alcune delle metodologie più utilizzate. Va subito detto che la parametrizzazione del coefficiente di trasmissione è globale, nel senso che non tiene conto nel dettaglio della particolare struttura dell'atmosfera considerata nel mettere a punto le varie parametrizzazioni. Se è vero che con buona approssimazione è possibile considerare sostanzialmente costante nel tempo la struttura dell'alta atmosfera, ciò non è completamente vero nella bassa troposfera e quindi le varie parametrizzazioni possiedono sostanzialmente sempre qualche *elemento locale* legato al luogo ed al periodo considerato dai vari Autori nel mettere a punto la propria parametrizzazione. Quindi

non è una sorpresa se spesso è necessario *adattare* alcune delle costanti presenti per far sì che le varie parametrizzazioni rappresentino le situazioni tipiche di una specifica località.

Sulla base delle considerazioni che conducono alla (6.94), Meyers e Dale (1983) hanno adottato una parametrizzazione, ben descritta anche in Rachele e Tunick (1994), che esprime il coefficiente di trasmissione atmosferico globale come un prodotto di distinti coefficienti di trasmissione, ciascuno dedicato alla descrizione sintetica di una delle interazioni tra la radiazione solare e l'atmosfera. In particolare T_{tot} viene espresso come:

$$T_{tot} = T_R T_g T_w T_a \qquad [6.95a]$$

dove:

- T_R è il coefficiente di trasmissione per *scattering* Rayleigh, processo di *scattering* dei raggi solari con le molecole di gas (principalmente N_2 e O_2) presenti in atmosfera,
- T_g è il coefficiente di assorbimento dovuto ai gas permanenti presenti in atmosfera,
- T_w è il coefficiente di assorbimento dovuto alla presenza di vapor d'acqua in atmosfera,
- T_a è il coefficiente di trasmissione per lo *scattering* operato dall'aerosol presente in atmosfera.

Questa era anche la logica seguita nella descrizione dettagliata dell'interazione tra la radiazione ad onda corta e l'atmosfera.

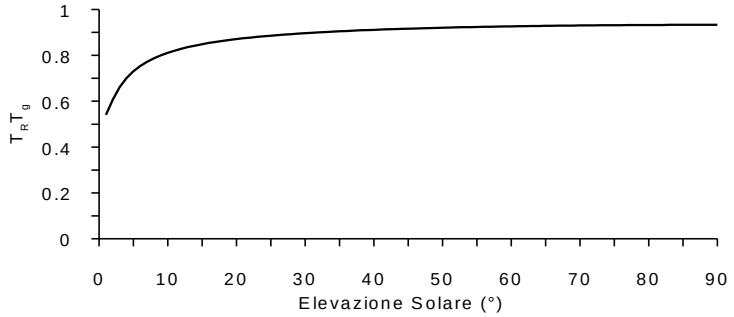


Fig. 6.55: variazione del coefficiente di trasmissione $T_R T_g$ in funzione dell'elevazione solare.

In questo contesto, però, la descrizione è stata *condensata* in pochi coefficienti il cui valore deve risultare calcolabile sulla base delle misure disponibili al suolo. Meyers e Dale (1983) hanno così parametrizzato i vari coefficienti di trasmissione:

- la parametrizzazione del prodotto del coefficiente di trasmissione dovuto allo *scattering* di Rayleigh e di quello dovuto all'assorbimento radiativo causato dai gas permanenti è dato dalla relazione:

$$T_R T_g = 1.021 - 0.084 \cdot \sqrt{m \cdot (949 \cdot 10^{-6} p + 0.051)} \qquad [6.95b]$$

  dove p è la pressione (mb) ed m è un fattore direzionale equivalente all'*optical air mass factor* alla pressione di 1013 mb, dato dalla relazione:

$$m = 35 \cdot [1224 \cdot \cos^2 \zeta + 1]^{-1/2} \qquad [6.95c]$$

  dove ζ è l'angolo di *zenit*. La dipendenza dalla pressione non è molto rilevante, come si può osservare da esperimenti numerici, invece la dipendenza dall'angolo di elevazione solare ($\zeta = \pi/2 - \Psi$) è decisamente più marcata come si può vedere nella **Fig. 6.55** in cui è mostrato l'andamento del coefficiente di trasmissione $T_R T_g$ in funzione dell'angolo di elevazione solare Ψ alla pressione di 1000 mbar.

- la parametrizzazione del coefficiente di assorbimento in tutto l'intervallo dello spettro

solare dovuto al vapor d'acqua presente in aria è dato da:

$$T_w = 1 - 0.077 \cdot (u \cdot m)^{0.3} \quad [6.95d]$$

dove u è il vapor d'acqua precipitabile (cm). Se u non può essere derivato da un radiosondaggio, è necessario ottenerne una stima dalla temperatura di rugiada superficiale T_d. Se si ipotizza che le variabili misurate in una stazione meteorologica siano la pressione, la temperatura e l'umidità relativa dell'aria, la temperatura di rugiada è facilmente calcolabile usando le relazioni riportate al Cap.1. Una volta nota T_d, il vapor d'acqua precipitabile può essere ottenuto con la correlazione dovuta a Smith (1966):

$$u = exp[0.1133 - \ln(\lambda + 1) + 0.0393 \cdot T_d] \quad [6.95e]$$

in cui, però, la temperatura di rugiada è espressa in gradi Fahrenheit legati ai gradi Kelvin dalla relazione: T_d(°F) = 9/5 [T_d(K) – 273.15] + 32. Una relazione alternativa che non fa uso della temperatura di rugiada, sempre proposta da Smith (1966) è:

$$u = \frac{p \cdot w_r}{g(\lambda + 1)} \quad [6.95f]$$

dove w_r è il rapporto di mescolanza e λ un coefficiente dipendente dalla latitudine (Φ) e dalla stagione. Nella **Tab. 6.10** è riportato il valore medio annuo di λ a diverse latitudini.

Intervallo di Latitudine (°N)	Valore medio annuo di λ
00 – 10	2.91
10 – 20	2.91
20 – 30	3.12
30 – 40	3.00
40 – 50	2.78
50 – 60	2.79
60 – 70	2.41
70 – 80	2.03
80 - 90	1.62

Tab. 6.10: valori medi annui del coefficiente λ.

- la stima dell'attenuazione della radiazione ad onda corta dovuta all'azione degli aerosol è complessa e richiederebbe la conoscenza di molte variabili difficilmente disponibili in pratica. Quindi in questa parametrizzazione il valore del coefficiente di *scattering* dovuto alla presenza di aerosol in aria viene semplicemente parametrizzato con la relazione:

$$T_a = x^m \quad [6.95g]$$

dove per la costante empirica x è stato individuato il valore 0.935 In generale, è proprio agendo sulla costante empirica x che si realizza l'*adattamento* di questa parametrizzazione alle situazioni locali, visto che in genere è proprio la presenza di particolato a creare le differenze tra località e località.

Una volta noti tutti i coefficienti parziali di trasmissione (T_R, T_g, T_w, T_a) e quindi il loro prodotto T_{tot}, mediante la (6.94) si ottiene la stima della radiazione solare globale a cielo sereno e su una superficie orizzontale (R_{g0}, in W·m^{-2}). Una parametrizzazione molto simile a quella di Meyers e Dale è quella proposta da Kermel (1988) cui si rimanda per ulteriori dettagli.

Kondo e Miura (Matsushima e Kondo, 1995) hanno messo a punto una parametrizzazione simile in cui il coefficiente di trasmissione complessivo è descrivibile come:

$$T_{tot} = (C_1 + 0.7 \cdot 10^{-mF_1}) \cdot (1 - i_1) \cdot (1 + j_1) \quad [6.96a]$$

In questa relazione il percorso ottico in aria è definito come:

$$m = \sec\zeta = 1/\sin\Psi \qquad [6.96b]$$

e l'acqua precipitabile *w* (cm) è data dalla relazione:

$$\log_{10} w = 0.0312 \cdot T_d - 0.0963 \qquad [6.96c]$$

con la temperatura di rugiada stimabile dalla relazione:

$$T_d = \frac{237.3 \log_{10}(e/e_{sat})}{7.5 - \log_{10}(e/e_{sat})} \qquad [6.96d]$$

Il primo fattore presente nel coefficiente di trasmissione globale tiene conto della presenza degli aerosol in atmosfera. Una volta introdotta la torbidità atmosferica β_{dust} (un suo valore tipico, consigliato dagli Autori è 0.04), la parametrizzazione di questo fattore prevede che:

$$C_1 = \begin{cases} 0.21 - 0.2\beta_{dust} & \beta_{dust} \le 0.3 \\ 0.15 & \beta_{dust} > 0.3 \end{cases} \qquad [6.96e]$$

$$F_1 = 0.056 + 0.16\beta_{dust}^{1/2} \qquad [6.96f]$$

Anche il terzo fattore è dedicato all'interazione tra le polveri e la radiazione e la funzione j_1 risulta espressa come:

$$j_1 = \left(0.066 + 0.3\beta_{dust}^{1/2}\right) \cdot (a - 0.15) \qquad [6.96g]$$

in cui è presente l'albedo superficiale a. Da ultimo viene parametrizzato anche l'assorbimento della radiazione ad opera del vapor d'acqua e la funzione i_1 dedicata a ciò è data da:

$$i_1 = 0.014 \cdot (m + 7.0 + 2\log_{10} w) \cdot \log_{10} w \qquad [6.96h]$$

Savijarvi (1990), in un lavoro dedicato all'individuazione di una metodologia rapida ma accurata per la quantificazione del riscaldamento dell'aria atmosferica ad opera della radiazione ad onda corta, ha anche individuato una relazione analitica che esprime la radiazione globale al suolo. Essa non si scosta di molto dalla logica fin qui presentata e tiene conto:

- dell'assorbimento di ozono nell'ultravioletto e nel visibile basandosi sulle parametrizzazioni di Lacis e Hansen (1974),
- dell'assorbimento dovuto al vapor d'acqua, alla CO_2 e all'ossigeno molecolare nella banda dell'infrarosso,
- dello *scattering* di Rayleigh delle molecole gassose
- di un'approssimazione drastica dell'influenza dell'aerosol sia in fase di assorbimento che di *scattering*, consistente sostanzialmente in un incremento degli effetti prodotti dai gas atmosferici.

Il risultato finale è la relazione seguente:

$$Rg_0 = \mu \cdot I_0 \left[1 - 0.024\mu^{-1/2} - 0.11a_1\left(\frac{u}{\mu}\right)^{0.25} - a_2\left(\frac{0.28}{1 + 6.43\mu}\right) - 0.07\alpha\right] \qquad [6.97]$$

dove $\mu = \sin\Psi = \cos\zeta$. In questa relazione compare l'albedo superficiale α, il coefficiente a_1 che descrive l'effetto dell'assorbimento dovuto agli aerosol (valore consigliato 1.2), il coefficiente a_2 che descrive l'effetto dello *scattering* delle particelle di aerosol (valore consigliato 1.25) e u (in cm) che è dato per esempio dalla (6.95f). I due parametri a_1 e a_2 sono i parametri candidati ad essere calibrati a seconda delle caratteristiche locali.

Un ulteriore metodo, proposto da Atwater e Brown (1974) ed utilizzato da Bornstein e al. (1987), esprime T_{tot} in maniera compatta nella forma:

$$T_{tot} = \tau_p \cdot (\tau_b - A_v) \qquad [6.98a]$$

dove:

$$\tau_b = 0.485 + 0.515 \cdot \gamma \quad [6.98b]$$

$$\tau_p = 0.951/\mu \quad [6.98c]$$

$$A_v = 0.11 \cdot (6.31 \cdot 10^{-4} + w/\mu)^{0.3} - 0.0121 \quad [6.98d]$$

$$\gamma = 1.041 - \frac{0.16}{\sqrt{\sin \Psi}} \quad [6.98e]$$

Tutte queste parametrizzazioni in qualche modo hanno come base formale una relazione costituita dal prodotto della radiazione solare alla sommità dell'atmosfera con un coefficiente di trasmissività che tiene conto dell'estinzione atmosferica. Sono state prodotte anche delle parametrizzazioni completamente semiempiriche che, naturalmente, sono di più semplice utilizzo operativo. Esse sono state dedotte direttamente dall'analisi delle misure raccolte in varie parti del mondo. La più celebre è quella proposta da Holtslag e van Ulden (1983) seguendo il lavoro di Kasten e Czeplak (1980) secondo cui

$$Rg_0 = a_1 \sin \Psi + a_2 \quad [6.99a]$$

dove i valori originali delle costanti a_1 e a_2 valgono rispettivamente 910 W·m^{-2} e -30 W·m^{-2}. Ogni volta che viene usata questa correlazione semiempirica, sarebbe buona norma verificare quanto i coefficienti adottati riflettano la realtà locale. Per chiarire questo concetto va detto che tutti i coefficienti sopra riportati si riferiscono a situazioni dell'Europa del Nord o delle parti settentrionali degli USA. Nella **Tab. 6.11** vengono presentati alcuni valori attribuiti a tali parametri in differenti situazioni sperimentali.

$\mathbf{a_1}$ (W/m^2)	$\mathbf{a_2}$ (W/m^2)	**Località**
910	-30	Amburgo (1980)
1100	-50	Nord Atlantico (1964)
1098	-65	Boston (1945)
1041	-69	De Bilt - Olanda (1983)
1087	-209	Mexico City (1992-1993) [Sozzi e al., 1999]

Tab. 6.11: valori di alcuni coefficienti della relazione (6.99a) in differenti località.

Un'altra relazione semiempirica è quella proposta da Haurwitz (1945) secondo cui:

$$Rg_0 = a_0 \sin \Psi \cdot \exp\left[-\frac{a_1}{\sin \Psi}\right] \quad [6.99b]$$

con le costanti a_0 e a_1 pari rispettivamente a 1098 W·m^{-2} e a_2 = 0.059.

Pur essendo estremamente semplici, queste relazioni riescono comunque a fornire stime decisamente attendibili della radiazione solare globale a cielo sereno, soprattutto quando vengono *calibrate* i coefficienti numerici presenti in esse con le misure locali (Sozzi e al., 1999).

Condizioni di cielo nuvoloso

La parametrizzazione della presenza delle nubi in atmosfera è, come prevedibile, piuttosto complessa, anche perché la variabile che solitamente viene utilizzata per quantificarne la presenza è la *copertura del cielo N* normalmente indicata in ottavi o decimi di cielo coperto e stimata a *vista* dagli operatori dei servizi meteorologici. Per evitare equivoci, nel seguito con *N* indicheremo sempre *N*/8 se *N* è in ottavi o *N*/10 se *N* è in decimi. Spesso, oltre ad una copertura totale del cielo, vengono indicate la frazioni di cielo coperto per nubi basse N_L, medie N_M ed alte N_H.

Una possibilità per stimare la radiazione globale in presenza di copertura nuvolosa R_g è quella proposta da Stull (1989), secondo cui in queste condizioni la radiazione solare globale R_g è data dal prodotto tra la radiazione globale a cielo sereno R_{g0} ed un ulteriore coefficiente di trasmissività T_K che tiene conto dell'interazione tra le idrometeore e la radiazione solare:

$$Rg = Rg_0 \cdot T_K \qquad [6.100a]$$

Questo coefficiente di trasmissione viene stimato dalla conoscenza della copertura del cielo espressa come frazione coperta da nubi alte, medie e basse secondo la relazione seguente:

$$T_K = (0.6 + 0.2 \sin \Psi) \cdot (1 - 0.4N_H) \cdot (1 - 0.7N_M) \cdot (1 - 0.4N_L) \qquad [6.100b]$$

In assenza di nubi e col sole allo *zenit*, $T_k = 0.8$. Se il sole è allo *zenit* con una copertura totale del cielo a tutti i tre livelli, $T_K = 0.086$.

Molto usata è la correlazione seguente, soprattutto nei preprocessori meteorologici realizzati per organizzare i dati meteorologici in una forma adatta all'uso richiesto dai modelli di dispersione degli inquinanti in atmosfera. Seguendo il lavoro di Kasten e Czeplak (1980), rivisto da De Bruin e Holtslag (1982) e Holtslag e van Ulden (1983), si ha che:

$$Rg = \begin{cases} (a_1 \sin \Psi + a_2) \cdot (1 + b_1 N^{b_2}) & di\ giorno\ (\sin \Psi > 0) \\ 0 & di\ notte\ (\sin \Psi > 0) \end{cases} \qquad [6.100c]$$

dove i coefficienti a_1, a_2, b_1 e b_2 assumono rispettivamente i valori di 990, -30, -0.75 e 3.4.

Prendendo spunto proprio dal lavoro di Kasten e Czeplak (1980), si può proporre a livello operativo che la radiazione globale R_g possa essere sempre descritta dalla relazione:

$$Rg = \begin{cases} Rg_0 \cdot (1 + b_1 N^{b_2}) & di\ giorno\ (\sin \Psi > 0) \\ 0 & di\ notte\ (\sin \Psi > 0) \end{cases} \qquad [6.101]$$

dove R_{g0}, la radiazione solare globale a cielo sereno può essere stimata impiegando una qualsiasi delle correlazioni sopra presentate.

6.5.3.2 Parametrizzazione dell'albedo

La radiazione solare globale, una volta giunta alla superficie terrestre, viene parzialmente riflessa dal suolo stesso. La porzione di *radiazione solare riflessa* è data da:

$$Rg^{\uparrow} = -\alpha Rg \qquad [6.102a]$$

dove α è il coefficiente di albedo. Ogni superficie è caratterizzata da un proprio valore di albedo che, però, varia al variare dell'angolo di elevazione solare. Più precisamente, il coefficiente di albedo α è relativamente costante per angoli di elevazione solare Ψ superiori a 30°, mentre cresce quando l'angolo di elevazione solare è inferiore.

Come riportato da Paltridge e Platt (1976) e Paine (1988), se α_0 è il coefficiente di albedo che caratterizza una località quando il sole è allo zenit, la variazione di α con l'angolo di elevazione solare Ψ (in gradi) è dato dalla relazione empirica:

$$\alpha = \alpha_0 + (1 - \alpha_0) \cdot e^{a\Psi + b} \qquad [6.102b]$$

dove l'angolo di elevazione solare Ψ è espresso in (°), il parametro *a* vale - 0.1 ed il parametro *b* risulta così espresso:

$$b = \frac{(1 - \alpha_0)^2}{2} \qquad [6.102c]$$

La **Fig. 6.56** mostra la variazione del coefficiente di albedo in funzione di Ψ prevista dalla relazione precedente. Per semplificare la stima della radiazione solare riflessa dalla superficie terrestre, in **Tab. 6.12** sono presentati alcuni valori tipici di α_0 per varie superfici di interesse pratico.

Oltre che dipendere dall'angolo di elevazione solare, il coefficiente di albedo sembra dipendere anche dal contenuto di acqua del suolo. Wang e al. (2005) hanno condotto un'estesa indagine sperimentale nelle zone semidesertiche del Tibet individuando un'evidente relazione tra α ed il contenuto d'acqua nello strato superficiale di suolo η_s (volume·volume^{-1}) del tipo:

$$\alpha = \alpha_1 + a_2 \cdot exp(-\eta_s / a_3) \qquad [6.102d]$$

in cui sono presenti tre parametri numerici tipici del particolare suolo considerato. La relazione tra α ed η_s individuata dagli Autori è riportata nella **Fig. 6.57**.

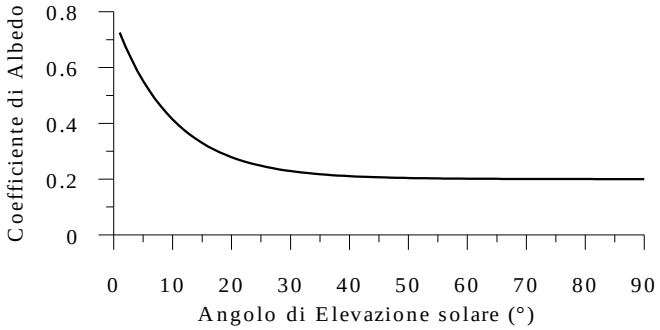


Fig. 6.56: variazione del coefficiente di albedo con l'angolo di elevazione solare

Superficie	***Albedo***		***Superficie***	***Albedo***
neve fresca	0.75 - 0.95		strada non asfaltata	0.18 - 0.35
neve vecchia	0.35 - 0.75		calcestruzzo	0.15 -0.37
ghiaccio grigio	0.6		edifici	0.09
acqua profonda	0.05 - 0.2		area urbana media	0.15
suolo scuro e umido	0.06 - 0.08		campo incolto	0.05 - 0.12
suolo chiaro e secco	0.16 -0.18		grano	0.10 - 0.23
suolo rosso	0.17		riso	0.12
argilla umida	0.16		canna da zucchero	0.15
argilla secca	0.23		segale invernale	0.18 - 0.23
terriccio umido	0.16		mais	0.18
terriccio secco	0.23		tabacco	0.19
suolo sabbioso	0.20 - 0.25		patate	0.19
suolo di torba	0.05 - 0.15		cotone	0.20 - 0.22
calce	0.45		sorgo	0.20
gesso	0.55		foreste di conifere	0.05 - 0.15
lava	0.10		foreste decidue	0.10 - 0.25
granito	0.12 - 0.18		prato verde	0.26
sassi	0.20 - 0.30		pascolo verde	0.10 -0.20
tundra	0.15 - 0.20		savana	0.15
dune di sabbia	0.20 - 0.45		steppa	0.20
strada asfaltata	0.05 - 0.15		deserto	0.20 - 0.35

Tab.6.12: tipici valori del coefficiente di albedo integrale.

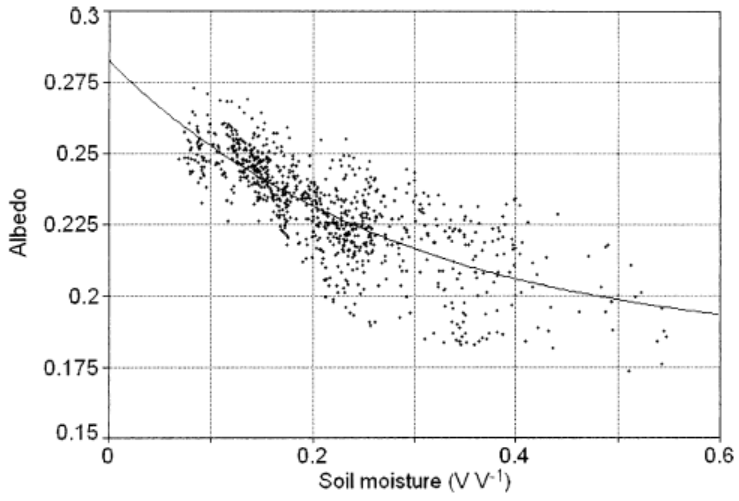


Fig. 6.57: variazione dell'albedo con il contenuto d'acqua del suolo (Wang e al. 2005)

6.5.3.3 Parametrizzazione della radiazione solare diffusa

Lo *scattering* della radiazione solare con le molecole dei costituenti gassosi dell'atmosfera e con gli aerosol e le idrometeore dà luogo alla *radiazione diffusa* R_{Dif} che è sostanzialmente isotropa e che è una parte della radiazione globale considerata finora. Anche se è una grandezza meteorologica che si misura con relativa facilità, a volte è necessaria una sua stima che richiederebbe complessi calcoli basati sulla teoria dello *scattering*. In sostanza, quindi, vale il fatto che:

$$Rg = R_{Dir} + R_{Dif} \qquad [6.103]$$

e questa decomposizione vale sia in condizioni di cielo sereno che in presenza di nuvole. In particolare, in condizioni di cielo totalmente coperto, la radiazione solare globale è costituita dalla sola componente diffusa. Ai fini delle applicazioni micrometeorologiche non è indispensabile quantificare separatamente la componente diretta e la componente diffusa della radiazione solare globale se si considera superfici orizzontali. Se, viceversa, è necessario stimare la radiazione solare globale su superfici inclinate, situazione tipica quando si tratta l'orografia complessa, la determinazione separata delle due componenti è di fondamentale importanza e ciò richiede la messa a punto di opportune parametrizzazioni. Qui di seguito vengono presentate alcune delle parametrizzazioni disponibili, applicate prima alla stima della radiazione diffusa in condizioni di cielo sereno e poi alla stima in condizioni in cui siano presenti le nubi.

Disponendo della misura o della stima di R_{g0}, la stima della componente diffusa R_{Dif} può essere fatta con la metodologia proposta da Erbs e al. (1982) che consiste nei passi seguenti:

1. una volta nota la radiazione solare globale R_{g0} e l'irradianza solare extraterrestre I_0, si calcola la trasmittanza totale T data da:

   $$T = Rg_0/(I_0 \sin\Psi) \qquad [6.104a]$$

   che altro non è che T_{tot} calcolato in precedenza.

2. la componente R_{Dif} dipende dal valore assunto da T nel modo seguente:

   - se $T < 0.22$:

   $$R_{Dif} = Rg_0(1 - 0.09 \cdot T) \qquad [6.104b]$$

   - se $T \geq 0.8$:

   $$R_{Dif} = Rg_0(0.165 \cdot T) \qquad [6.104c]$$

   - mentre per gli altri valori di T vale la relazione:

$$R_{Dif} = Rg_0(0.9511 - 0.1604 \cdot T + 4.388 \cdot T - 16.638 \cdot T^3 + 12.336 \cdot T^4) \qquad [6.104d]$$

Il metodo qui presentato per il caso di cielo sereno, può essere comunque applicato anche in condizioni di cielo nuvoloso, purché si sostituisca nelle (6.104) R_{g0} con R_g, radiazione solare globale effettiva stimata o misurata nelle condizioni di cielo considerate.

Analizzando una notevole quantità di misure, Spitters et al. (1986) sono giunti alla conclusione che, detto R il rapporto tra R_{g0} ed $I_0 \sin\Psi$, la componente diffusa R_{Dif} può essere descritta dal modello seguente:

- se $R \leq 0.22$:

$$R_{Dif} = Rg_0 \qquad [6.105a]$$

- se $0.22 < R \leq 0.35$:

$$R_{Dif} = Rg_0[1 - 6.4 \cdot (R - 0.22)] \qquad [6.105b]$$

- se $0.35 < R \leq K$:

$$R_{Dif} = Rg_0(1.47 - 1.66 \cdot T) \qquad [6.105c]$$

- se $R > K$:

$$R_{Dif} = Rg_0(0.847 - 1.61 \cdot \sin\Psi + 1.04\sin^2\Psi) \quad [6.105d]$$

dove il parametro K è pari a:

$$K = \frac{1.47 - (0.847 - 1.61 \cdot \sin\Psi + 1.04\sin^2\Psi)}{1.66} \quad [6.105e]$$

Anche questa parametrizzazione, qui presentata per le condizioni di cielo sereno, può essere applicata anche in condizioni di cielo nuvoloso purché si sostituisca nelle (6.105) ad R_{g0} la radiazione globale R_g, radiazione solare globale effettiva.

De Roy e Holtslag (1999) suggeriscono invece la parametrizzazione seguente, ancora una volta basata sul rapporto T tra R_g e $I_0 \cdot \sin\Psi$:

$$R_{Dif} = Rg \cdot \begin{cases} 1 & se\ T < 0.3 \\ 1.6 - 2T & se\ 0.3 \le T < 0.7 \\ 0.2 & se\ T > 0.7 \end{cases} \quad [6.106]$$

Il lavoro di Kondo e Miura (Matsushima e Kondo, 1995), oltre a fornire un metodo per la stima della radiazione solare globale (le relazioni 6.96), ha prodotto anche un'analoga parametrizzazione totalmente dedicata alla componente diretta R_{Dir}. Ricordiamo che, in base alla (6.103) la componente diffusa è pari alla radiazione solare globale meno la componente diretta. In pratica si ha che:

1) la componente diretta risulta pari a:

$$R_{Dir} = \mu \cdot I_0 \cdot T_{Dir} \quad [6.107a]$$

2) Il coefficiente di trasmissione per la radiazione diretta è dato da:

$$T_{Dir} = \left(C_2 + 0.75 \cdot 10^{-\sec\zeta \cdot F_2}\right) \cdot (1 - i_2) \quad [6.107b]$$

dove:

$$C_2 = \begin{cases} 0.15 - 0.2\beta_{dust} & \beta_{dust} \le 0.3 \\ 0.09 & \beta_{dust} \le 0.3 \end{cases} \quad [6.107c]$$

$$F_2 = 0.075 + 0.65 \cdot \sqrt{\beta_{dust}} \quad [6.107d]$$

$$i_2 = 0.020 \cdot (\sec\zeta + 5.5 + 1.5\log_{10} w) \cdot \log_{10} w \quad [6.107e]$$

Si ricorda che il valore consigliato per il coefficiente di torpidità atmosferica β_{dust} è 0.04. Anche in questo caso il modello può essere impiegato in condizioni di cielo nuvoloso.

6.5.3.4 La radiazione solare su terreno inclinato

Finora sono state considerate solo superfici orizzontali, tuttavia sia nelle applicazioni energetiche che sfruttano l'energia solare sia nella ricostruzione dei flussi radiativi nelle zone ad orografia complessa è necessario individuare relazioni che descrivano la radiazione solare raccolta da superfici comunque inclinate. In questo caso, detta *s* l'*inclinazione* della superficie sull'orizzontale e γ il *suo angolo azimutale* (che, nell'emisfero settentrionale, è definito come l'angolo esistente tra la proiezione sul piano orizzontale della normale alla superficie e la direzione Sud, positivo per le superfici affacciate verso Est e negativo per le superfici affacciate verso Ovest), *la radiazione globale incidente* su una tale superficie può essere calcolata, una volta nota la radiazione diretta *S* e diffusa *D* su una superficie orizzontale, nella maniera proposta da Oke, (1987) costituita da una relazione analitica piuttosto complessa. Applicare questa relazione in un modello meteorologico prognostico comporta un incremento ragguardevole dei tempi di calcolo. Per rendere più veloce e semplice il tutto, normalmente si ignora il contributo della sorgente diffusa. In pratica si opera nel modo seguente (Hurley, 2008):

- sia nota in ogni nodo del dominio di calcolo la quota orografica z_s la cui conoscenza

permette di calcolare (analiticamente o numericamente) gli angoli seguenti:

$$\alpha = \tan^{-1}\left\{\left(\frac{\partial z_g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_g}{\partial y}\right)^2\right\} \qquad \eta = \tan^{-1}\left\{\left(\frac{\partial z_g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_g}{\partial y}\right)^{-1}\right\} \qquad [6.108a]$$

- sulla base della conoscenza della declinazione solare δ, dell'angolo di zenit ζ, del giorno giuliano j_d e dell'ora locale *t* si ha che:

$$\beta = \sin^{-1}\left[\cos\delta \cdot \frac{\sin\left[\pi\frac{t-12}{12}\right]}{\sin\zeta}\right] \qquad [6.108b]$$

- a questo punto è possibile la determinazione dell'angolo ξ definito come:

$$\cos\xi = \cos\alpha\cos\zeta + \sin\alpha\sin\zeta\cos(\beta - \alpha) \qquad [6.108c]$$

- noti tutti questi angoli, è possibile determinare il fattore S_{slope} che tiene conto di come la superficie è orientata, dato dalla relazione seguente:

$$S_{slope} = \frac{\cos\xi}{\cos\zeta} \qquad [6.108d]$$

- e quindi, indicando con Rg^* la radiazione solare globale su una superficie orizzontale, la radiazione globale su una superficie inclinata R_g risulta pari a:

$$Rg = \begin{cases} Rg^* S_{slope} & se \quad \sin\Psi > 0 \\ 0 & se \quad \sin\Psi < 0 \end{cases} \qquad [6.108e]$$

In Letteratura sono state proposte metodologie molto più complesse per la stima della distribuzione della radiazione solare su terreni complessi. A titolo esemplificativo si citano i lavori di Corripio (2003), Essery (2004), Pierce e al. (2005) e Wang e al. (2006).

6.6 LA RADIAZIONE AD ONDA LUNGA

Ricordiamo a sommi capi ciò che è stato presentato al paragrafo 6.4.3. Il Sole è l'unica sorgente energetica per il sistema Terra-Atmosfera e ad esso, mediamente, fornisce un apporto energetico medio annuo di circa 341 Wm^{-2} sotto forma di radiazione ad onda corta che in parte viene riflessa nello spazio siderale dalle nubi, dai gas e dagli aerosol presenti in atmosfera (79 Wm^{-2}), in parte viene riflessa dalla superficie terrestre (23 Wm^{-2}) e solo 78 Wm^{-2} (circa il 23% dell'input iniziale) viene assorbita dall'atmosfera stessa. Infine 161 Wm^{-2} (circa il 47%) vengono assorbiti dalla superficie terrestre. Perché al suolo si mantenga l'equilibrio termico medio annuo, è necessario che l'energia che vi giunge pareggi esattamente le perdite di energia che ivi hanno luogo. Di fatto, facendo riferimento al bilancio riportato nella **Fig. 6.36**, si ha che:

- la superficie terrestre acquisisce 161 Wm^{-2} di energia ad onda corta di diretta provenienza solare trasmessa attraverso l'atmosfera;
- la superficie terrestre acquisisce 333 Wm^{-2} di energia ad onda lunga (infrarosso) dall'atmosfera sovrastante che la emette come un corpo nero;
- la superficie terrestre emette nell'infrarosso 396 Wm^{-2} verso l'atmosfera. Di questi solo 356 Wm^{-2} vengono assorbiti nell'atmosfera, mentre 40 Wm^{-2} transitano senza alcun tipo di estinzione attraverso l'*atmospheric window* (8-12 μm) nella quale i gas atmosferici presentano un assorbimento trascurabile;
- dalla superficie viene fornita alle masse d'aria sovrastanti dell'energia (il flusso turbolento di calore sensibile) per alimentare i moti turbolenti del *PBL* e tale energia ammonta

a circa 17 Wm^{-2};

- dalla superficie viene fornita dell'altra energia per incrementare l'evapotraspirazione (il tutto rappresentato dal flusso turbolento di calore latente) e tale energia ammonta a circa 80 Wm^{-2}.

Inoltre l'atmosfera stessa deve essere in equilibrio termico e quindi l'energia radiante ad onda lunga e ad onda corta che l'atmosfera riceve dal sole e dalla superficie terrestre deve pareggiare l'energia radiante che essa emette. In effetti l'atmosfera:

- assorbe direttamente 78 Wm^{-2} di energia ad onda corta di provenienza solare;
- assorbe 356 Wm^{-2} di energia ad onda lunga emessa direttamente dalla superficie terrestre;
- assorbe 17 Wm^{-2} di energia fornita dalla superficie per sostenere i moti turbolenti della parte bassa dell'atmosfera (il *PBL*);
- assorbe 80 Wm^{-2} di energia fornita dalla superficie terrestre come flusso turbolento di calore latente per l'evapotraspirazione;
- emette 333 Wm^{-2} ad onda lunga verso la superficie terrestre;
- emette 169 Wm^{-2} ad onda lunga verso lo spazio;
- emette 30 Wm^{-2} di energia ad onda lunga a causa dell'emissione delle nuvole presenti in atmosfera.

Come si vede, l'apporto di energia solare ad onda corta innesca un complesso insieme di scambi energetici, globalmente in equilibrio, tutti nella banda spettrale dell'infrarosso. Di fatto, entro l'atmosfera tra la sua sommità e la superficie terrestre si viene ad instaurare un flusso ascendente ed un flusso discendente di energia ad onda lunga che mantiene stabili le condizioni climatiche del pianeta. Ciò che si svilupperà nei punti che seguono è la definizione quantitativa di questi flussi ad onda lunga.

6.6.1 LO SPETTRO TERRESTRE

Il punto di osservazione ideale del sistema Terra-Atmosfera è quello dei satelliti che orbitano attorno alla terra. Essi sono in grado di analizzare la radiazione emessa (e quindi anche assorbita) da una posizione spaziale priva di interferenze esterne. Uno dei risultati di questa analisi è la determinazione dello spettro della radiazione atmosferica ed in **Fig. 6.58** ne viene mostrato uno tipico raccolto sopra il Nord Africa in un giorno privo di nuvole. Se lo si media globalmente su tutte le lunghezze d'onda, ciò che si ottiene è la radiazione globalmente emessa da un corpo nero con una temperatura equivalente di circa 255 K, che è una temperatura molto bassa rispetto alle temperature tipiche registrate alla superficie terrestre (a parte le zone polari). In realtà tutto ciò è stato ottenuto al punto 6.4.3.2 con un modello estremamente semplificato e la semplicità del modello utilizzato potrebbe essere la ragione di questo risultato. Tuttavia vedremo che per poter fare osservazioni più accurate dobbiamo analizzare con più dettaglio lo spettro della radiazione terrestre che, a differenza dello spettro solare, è molto più articolato e complesso e a prima vista sembrerebbe la sovrapposizione di spettri di corpo nero a differenti temperature.

Consideriamo innanzitutto l'intervallo spettrale tra 8 e 12 μm (che espresso in numero d'onda è tra 830 e 1250 cm^{-1}) dove l'assorbimento è ridotto, a parte quello localizzato attorno ai 9.6 μm (1041 cm^{-1}) dovuto alla CO_2. Il flusso radiativo misurato dal satellite in questa regione spettrale corrisponde a quella di un corpo nero alla temperatura di 320 K e ciò farebbe supporre che tale radiazione sia emessa dalla superficie terrestre, cosa decisamente realistica visto che lo spettro è stato realizzato sopra la zona africana che in un giorno sereno presenta temperature superficiali di questo ordine di grandezza.

Consideriamo, poi l'intervallo spettrale tra i 13 e i 17 μm (cioè tra 600 e 770 cm^{-1}) dove l'assorbimento di radiazione infrarossa è elevato e completamente dovuto all'azione della CO_2.

Consideriamo, ora una colonna di atmosfera che va dal suolo fino alla sommità dell'atmosfera: la porzione di superficie terrestre che sta alla base emette, tra l'altro, radiazione in questa banda. Tale radiazione, emessa alla superficie terrestre, salendo viene assorbita dalla CO_2 atmosferica che, a sua volta, la emette nuovamente per poi assorbirla di nuovo. Dato che l'atmosfera è opaca alla radiazione in questo intervallo spettrale, il flusso radiativo misurato dallo spazio corrisponde all'emissione dalla quota in cui la concentrazione di CO_2 diventa relativamente bassa, grosso modo nell'alta troposfera o nella bassa stratosfera. In effetti, questa parte di spettro è congruente con lo spettro di un corpo nero a 215 K e questa temperatura può essere realisticamente associata ad una quota di circa 11 – 15 km.

Consideriamo, infine, l'intervallo spettrale tra 17 e 25 μm (400 – 580 cm^{-1}). In questa banda l'assorbimento di radiazione infrarossa è dovuto all'acqua e non alla CO_2 e quindi l'opacità dell'atmosfera dipende dalla concentrazione di H_2O. Questa porzione di spettro è sostanzialmente sovrapponibile allo spettro di un corpo nero alla temperatura di 260 K. Se consideriamo un profilo verticale medio di temperatura in atmosfera, vediamo che una temperatura simile è congruente con una quota di 4-5 km che poi è lo strato di atmosfera in cui è presente l'acqua in fase solida e liquida (nelle nubi) ed in forma vapore in concentrazioni significative. Lo stesso tipo di ragionamento lo si può fare anche nell'intervallo spettrale tra 6 e 8 μm (1250-1600 cm^{-1}) in cui l'assorbimento è dovuto all'acqua ed al metano (in misura minore).

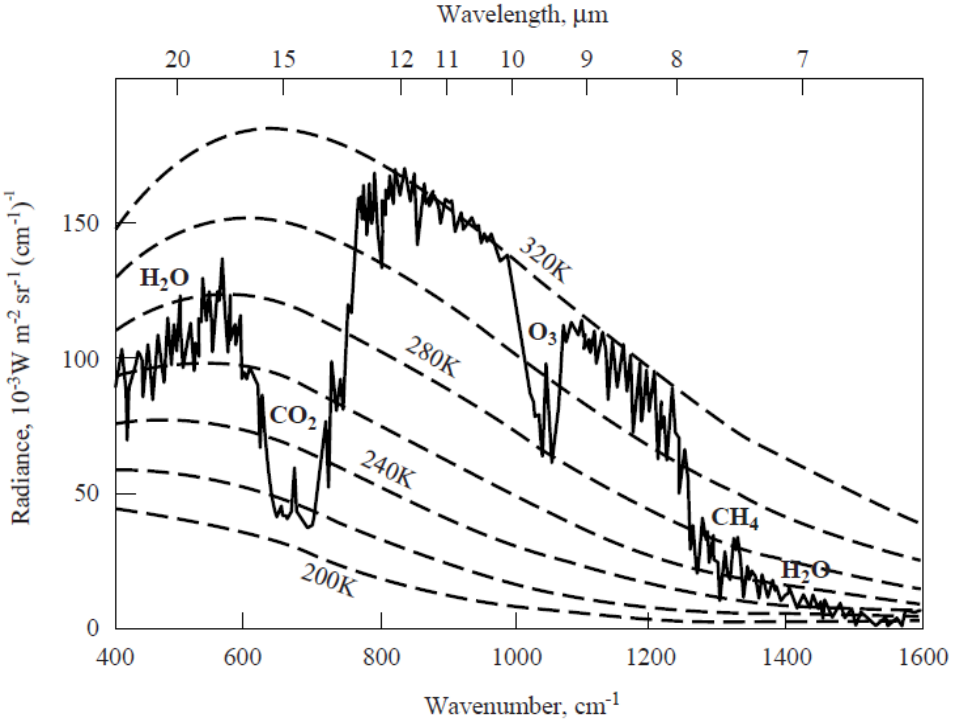


Fig. 6.58: spettro della radiazione terrestre misurato da un satellite sul Nord Africa (Valle del Niger) confrontato con gli spettri di corpo nero a varie temperature (Jacob, 1999).

Ricapitolando, la radiazione ad onda lunga (infrarossa) di provenienza terrestre viene assorbita in maniera determinante dalla CO_2, dall'acqua, dall'ozono e dal metano e questo assorbimento ha luogo in porzioni diverse di atmosfera, là dove la concentrazione delle diverse specie gassose è maggiore.

Un elemento importante che emerge dalla discussione fatta è che lo spettro del sistema Terra-Atmosfera è molto dipendente dalla situazione che presenta la superficie terrestre sulla verticale del punto di osservazione (che starà normalmente nello spazio). In effetti, consideriamo ora come esempio la **Fig.6.59** presa dallo stesso satellite in cui sono presentati gli spettri rilevati sopra il mar Mediterraneo e sopra la regione Antartica.

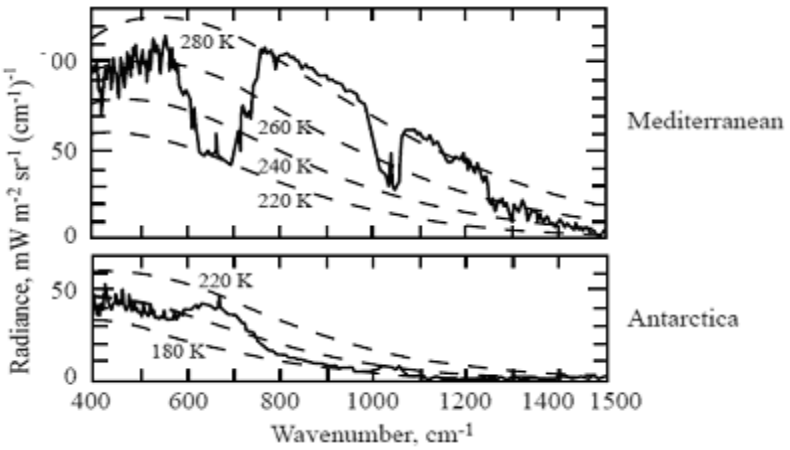


Fig.6.59: spettro del sistema Terra-Atmosfera rilevato da un satellite sopra il mar Mediterraneo (centro) e sopra la regione Antartica (basso) (Jacob, 1999)

Ripetendo i ragionamenti fatti si ha che:

- dall'analisi della banda spettrale relativa al ridotto assorbimento (8 - 12 μm, cioè 830-1250 cm^{-1}) che rileva la temperatura della superficie, notiamo come la temperatura superficiale del mar Mediterraneo risulterebbe dell'ordine di 285 K, cosa del tutto realistica, e quella della zona Antartica sarebbe dell'ordine di 210 K, anche in questo caso abbastanza realistica;
- nella banda spettrale in cui si riscontra il forte assorbimento di CO_2 (13-17 μm, cioè 600 – 770 cm-1), lo spettro rilevato sul mar Mediterraneo è sostanzialmente identico a quello rilevato sull'Africa del Nord, evidenziando che l'atmosfera nelle due zone presenta sostanzialmente le medesime caratteristiche mentre lo spettro sopra la regione Artica evidenzia delle lievi differenze;
- nelle bande spettrali tra 17 e 25 μm (400 – 580 cm^{-1}) e tra 6 e 8 μm (1250-1600 cm^{-1}), che sono zone di forte assorbimento dell'acqua, vediamo che lo spettro sull'Africa del Nord e quello sul Mediterraneo sono sostanzialmente coincidenti, mentre quello relativo alla zona Antartica evidenzia la scarsità di tale specie in quella zona del mondo (per lo meno non sotto forma di ghiaccio superficiale).

6.6.2 LA TRASMISSIONE DELL'ENERGIA AD ONDA LUNGA NELL'ATMOSFERA

Dal punto di vista pratico, due sono gli aspetti d'interesse nella descrizione del trasferimento di radiazione ad onda lunga in atmosfera. Il primo è legato all'esigenza dei modelli prognostici di *PBL* di poter conoscere come il flusso di radiazione varia nello spazio e nel tempo. Dato che raramente è necessario tener conto dei gradienti laterali, il problema si riduce a determinare la variazione del flusso di radiazione ad onda lunga con la quota. Noto ciò, è possibile determinare i relativi gradienti verticali e quindi il riscaldamento o il raffreddamento dell'atmosfera causata da questo tipo di trasporto radiativo che si somma a quello già calcolato dovuto all'interazione della radiazione solare (ad onda corta) con i costituenti gassosi e particellari dell'atmosfera. Il secondo aspetto è concettualmente più semplice. Molto frequentemente è necessario stabilire un bilancio radiativo superficiale e uno delle componenti di tale bilancio è il flusso di radiazione ad onda lunga in partenza dal suolo e quello in arrivo alla superficie terrestre. Ovviamente, almeno dal punto di vista puramente teorico, una volta risolto il primo aspetto, si è risolto anche il secondo, tuttavia dal punto di vista pratico non è mai conveniente operare in questa maniera, problema che abbiamo già incontrato a proposito della radiazione ad onda corta. Come ci si accorgerà, il problema di definire il trasferimento di radiazione ad onda corta lungo la verticale

dell'atmosfera non è affatto banale, né analiticamente né numericamente, e perciò conviene affrontarlo solo quando è veramente necessario, cioè quando si deve realizzare un modello di *PBL*. Nel caso, invece, si debba determinare i termini ad onda lunga del bilancio radiativo superficiale, è opportuno impiegare opportune relazioni semiempiriche. Qui di seguito viene trattato il primo dei due problemi, mentre il secondo lo tratteremo subito dopo.

6.6.2.1 Trasmissione di energia ad onda lunga in assenza di nubi

La descrizione dettagliata dell'interazione della radiazione ad onda lunga (sostanzialmente nello spettro dell'infrarosso) è molto complessa e qui non la si tratterà in maniera esaustiva; per i dettagli si rimanda a Liou (2000 e 2002) e a Stephens (1984) e chi fosse nella necessità di sviluppare un modello radiativo ad onda corta per un modello di *PBL* può far riferimento a Stensrud (2009). Inizialmente affronteremo il problema in maniera del tutto generale e poi lo approssimeremo seguendo una delle metodologie note, in particolare quella suggerita da Pielke (2002).

Anche in questo caso, l'atmosfera viene descritta per *piani paralleli*, ipotizzando quindi una sua completa omogeneità orizzontale e considerando solo i gradienti verticali delle variabili di interesse. Quindi, anche in questo caso, il problema è monodimensionale e la variabile spaziale di interesse è quella verticale, quindi la quota rispetto al suolo. A differenza, però, di quanto avviene nell'interazione della radiazione ad onda corta, nel caso dell'interazione della radiazione ad onda lunga con i costituenti atmosferici, i processi di assorbimento e di emissione sono di gran lunga più importanti dello *scattering* che, per questo, verrà totalmente ignorato.

Quindi, il punto di partenza teorico è l'equazione di Schwarzchild per una geometria *piano-parallela* descritta al punto 6.3.4.3 secondo cui la radianza monocromatica I_λ ad una specifica lunghezza d'onda varia con la quota *z* secondo la relazione:

$$\mu \frac{dI_\lambda}{k_{a,\lambda}\rho \cdot dz} = -I_\lambda + B_\lambda(T) \qquad [6.109a]$$

dove, come sempre, si è indicato con μ il coseno dell'angolo di *zenit*, con $k_{a,\lambda}$ il coefficiente di assorbimento complessivo alla lunghezza d'onda λ e con B_λ(T) la funzione di Planck. Ricordiamo, inoltre, che lo *spessore ottico normale* τ_λ è definito come:

$$\tau_\lambda = \int_z^\infty k_{a,\lambda}\rho \cdot dz \qquad [6.109b]$$

Con questa definizione, vediamo che in un problema di trasferimento radiativo l'estremo superiore dell'integrale è costante e rappresenta il limite superiore dell'atmosfera, mentre il limite inferiore varia con la quota cui si è interessati. Proprio per il fatto che la sua definizione è di tipo integrale e che uno degli estremi è variabile, non è immediato definirne un incremento differenziale. In realtà, applicando la *regola di Leibnitz*, si ottiene facilmente che:

$$d\tau_\lambda = -k_{a,\lambda}\rho \cdot dz \qquad [6.109c]$$

quindi la (6.109a) può essere riscritta nella forma seguente:

$$\mu \frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} = -I_\lambda + B_\lambda(T) \qquad [6.109d]$$

Come si è visto, conviene dal punto di vista pratico trattare separatamente la radianza ascendente $I_\lambda\uparrow$ e la radianza discendente $I_\lambda\downarrow$. Applicando quanto riportato al punto 6.2.4.4, la radianza ascendente $I_\lambda\uparrow$ ad una generica quota *z* cui corrisponde uno spessore ottico τ_λ è data da:

$$I_\lambda^\uparrow = I_\lambda^\uparrow\big|_G \cdot e^{-\frac{(\tau_{G,\lambda}-\tau_\lambda)}{\mu}} + \int_{\tau_\lambda}^{\tau_{G,\lambda}} B_\lambda(T)|_{\hat{\tau}_\lambda} \cdot e^{-\frac{(\tau_\lambda-\hat{\tau}_\lambda)}{\mu}} \frac{d\hat{\tau}_\lambda}{\mu} \qquad [6.110a]$$

in cui $I_\lambda{}^{\uparrow}{}_G$ è il valore che la radianza monocromatica assume al suolo dove lo spessore ottico è pari a $\tau_{G,\lambda}$. Il primo termine di destra rappresenta l'attenuazione (assorbimento) della radiazione ad onda lunga emessa dal suolo ad opera della colonna d'aria sottostante, mentre il secondo termine descrive l'emissione di radiazione dell'atmosfera compresa tra il suolo e la quota corrente ed il conseguente assorbimento. Si noti come al suolo lo spessore ottico presenti il massimo valore possibile. Analoghi ragionamenti portano ad individuare la relazione che esprime la radianza monocromatica discendente $I_\lambda\downarrow$ ad una generica quota *z*, espressa dalla relazione:

$$I_\lambda^{\downarrow} = I_\lambda^{\downarrow}\big|_T \cdot e^{-\frac{(\tau_\lambda - \tau_{T,\lambda})}{\mu}} + \int_{\tau_{T,\lambda}}^{\tau_\lambda} B_\lambda(T)|_{\hat{\tau}_\lambda} \cdot e^{-\frac{(\tau_\lambda - \hat{\tau}_\lambda)}{\mu}} \frac{d\hat{\tau}_\lambda}{\mu} \qquad [6.110b]$$

in cui $I_\lambda{}^{\downarrow}{}_T$ è il valore che la radianza monocromatica assume alla sommità dell'atmosfera o, molto più spesso nelle applicazioni modellistiche, il valore assunto alla sommità del dominio di calcolo. In teoria questo termine dovrebbe essere nullo in un'atmosfera reale, tuttavia nelle applicazioni modellistiche la sommità del dominio di calcolo non coincide praticamente mai con la sommità dell'atmosfera, anzi ne è sempre inferiore. Operativamente, noto il valore della temperatura alla sommità del dominio di calcolo, si ottiene la radianza discendente relativa calcolandola con la legge di Planck. La variabile $\tau_{T,\lambda}$ è lo spessore ottico normale alla sommità che, in atmosfera reale, dovrebbe essere rigorosamente nullo. Anche in questo caso, nelle applicazioni modellistiche si assumerà un valore non nullo. Riassumendo, il primo termine di destra rappresenta l'attenuazione (assorbimento) della radiazione ad onda lunga emessa dalla sommità del dominio ad opera della colonna d'aria sovrastante la quota *z*, mentre il secondo termine descrive l'emissione di radiazione dell'atmosfera compresa tra la sommità del dominio e la quota corrente ed il conseguente assorbimento.

Dato che siamo interessati, in realtà, all'irradianza e non alla radianza, assumendo che il trasferimento radiativo sia indipendente dall'angolo di *azimut* e che la radianza al suolo ed alla sommità del dominio di calcolo siano esprimibili con la legge di Planck, otteniamo facilmente le due relazioni seguenti per le irradianze ascendenti $R_\lambda{}^{\uparrow}$e discendenti $R_\lambda{}^{\downarrow}$ ad una generica quota *z*:

$$R_\lambda^{\uparrow} = 2\pi \cdot B_\lambda(T_G) \cdot E_3(\tau_{G,\lambda} - \tau_\lambda) + 2\pi \int_{\tau_\lambda}^{\tau_{G,\lambda}} B_\lambda(T)|_{\hat{\tau}_\lambda} \cdot E_2(\tau_\lambda - \hat{\tau}_\lambda) d\hat{\tau}_\lambda \qquad [6.110a]$$

$$R_\lambda^{\downarrow} = 2\pi \cdot \tilde{B}_\lambda(T_T^*) \cdot E_3(\tau_\lambda - \tau_{T,\lambda}) + 2\pi \int_{\tau_{T,\lambda}}^{\tau_\lambda} B_\lambda(T)|_{\hat{\tau}_\lambda} \cdot E_2(\tau_\lambda - \hat{\tau}_\lambda) d\hat{\tau}_\lambda \qquad [6.110b]$$

Nell'ultima relazione $\tilde{B}_\lambda(T_T^*)$ è valutato includendo ogni attenuazione della radiazione ad onda lunga che ha luogo al di sopra della sommità del dominio di calcolo z_T (cui corrisponde una temperatura $T_T{}^*$) alla lunghezza d'onda λ. Se la sommità del dominio coincide con la sommità dell'atmosfera, allora $z_T \to \infty$ quindi $T_T{}^* \to 0$. In queste relazioni, poi, sono presenti le due funzioni:

$$E_3(y) = \int_0^1 e^{-y/\mu} \cdot \mu \cdot d\mu \qquad E_2(y) = \int_0^1 e^{-y/\mu} \cdot d\mu = -\frac{dE_3(y)}{dy} \qquad [6.110c]$$

dove la generica variabile *y* corrisponde di volta in volta a $\hat{\tau}_\lambda - \tau_\lambda$,$\tau_\lambda - \hat{\tau}_\lambda$,$\tau_{G,\lambda} - \tau_\lambda$o$\tau_\lambda - \tau_{T,\lambda}$.

Dato che siamo interessati al flusso radiativo ad onda lunga totale, basterà integrare queste relazioni su tutto l'intervallo spettrale (cioè nell'intera banda dell'infrarosso), ottenendo:

$$R^{\uparrow} = \int_0^\infty R_\lambda^{\uparrow} \cdot d\lambda \qquad R^{\downarrow} = \int_0^\infty R_\lambda^{\downarrow} \cdot d\lambda \qquad [6.111]$$

Dal punto di vista teorico avremmo concluso la deduzione analitica del modello di trasferimento

radiativo ad onda lunga; il modello ottenuto è del tutto generale e le uniche approssimazioni introdotte sono, da un lato, la geometria monodimensionale e dall'altro l'esclusione di qualsiasi forma di *scattering*.

Dal punto di vista numerico, invece, il problema si concentra su come debbano essere valutati ad ogni quota i vari integrali che compaiono nelle relazioni dedotte, nei quali sono presenti, attraverso lo spessore ottico, gli spettri di assorbimento dei differenti gas che, come si è visto, sono estremamente complessi e costituiti da un numero elevatissimo di bande. Tutte le metodologie che risolvono in pratica questo problema partono da queste equazioni, ma si differenziano proprio nel modo in cui trattano gli spettri di assorbimento e quindi il calcolo degli integrali. Rimandando alla bibliografia citata per i dettagli sui vari metodi proposti, da questo momento in poi ne presenteremo uno di media complessità seguendo fedelmente Pielke (2002).

Innanzitutto si suddivida l'intervallo di ampiezza infinita delle lunghezze d'onda in intervalli più piccoli $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. Ogni intervallo deve essere sufficientemente ampio da contenere numerose linee di assorbimento, ma sufficientemente piccolo da far sì che la funzione di Planck resti praticamente costante. In questo caso è possibile individuare una lunghezza d'onda λ^* compresa nell'intervallo $\Delta\lambda$ in cui viene calcolato $B_{\lambda^*}(T)$ che, per definizione, è praticamente costante in tutto l'intervallo. Fatto ciò, si definisce la *transmission function* come:

$$\Gamma_{\lambda^*}(\tau) = \frac{1}{\Delta\lambda}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\tau}\cdot d\lambda \qquad [6.112a]$$

che rappresenta la porzione media di radiazione trasmessa dallo strato di atmosfera tra la quota z e la sommità dell'atmosfera avente una lunghezza d'onda compresa entro l'intervallo $\Delta\lambda$. Questa interpretazione risulta immediata se si considera la legge di Beer-Bouguer-Lambert.

Introdotta questa definizione e, soprattutto questa suddivisione in intervalli spettrali, risulta ora possibile integrare le equazioni (6.110a) e (6.110b) su $\Delta\lambda$, ottenendo delle relazioni per il flusso ascendente e discendente di radiazione ad onda lunga <u>medie</u> in ogni singolo intervallo $\Delta\lambda$. La loro espressione risulta pari a:

$$R_{\lambda_*}^{\uparrow} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} R_\lambda^{\uparrow}\cdot\frac{d\lambda}{\Delta\lambda} = 2\pi B_{\lambda_*}(T_G)\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_2\left(\tau_{G,\lambda}-\tau_\lambda\right)\cdot\frac{d\lambda}{\Delta\lambda} + 2\pi\int_{\tau_{\lambda_*}}^{\tau_{G,\lambda}} B_{\lambda_*}(T)\big|_{\hat{\tau}_{\lambda_*}}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_3(\hat{\tau}_\lambda-\tau_\lambda)\cdot\frac{d\hat{\tau}_\lambda}{\Delta\lambda}d\lambda \qquad [6.112b]$$

$$R_{\lambda_*}^{\downarrow} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} R_\lambda^{\downarrow}\cdot\frac{d\lambda}{\Delta\lambda} = 2\pi\tilde{B}_{\lambda_*}(T_T^*)\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_2\left(\tau_\lambda-\tau_{T,\lambda}\right)\cdot\frac{d\lambda}{\Delta\lambda} + 2\pi\int_{\tau_{T,\lambda}}^{\tau_{\lambda_*}} B_{\lambda_*}(T)\big|_{\hat{\tau}_{\lambda_*}}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_3(\tau_\lambda-\hat{\tau}_\lambda)\cdot\frac{d\hat{\tau}_\lambda}{\Delta\lambda}d\lambda \qquad [6.112c]$$

Lo sviluppo completo dei passaggi analitici necessari all'ottenimento di relazioni utilizzabili è piuttosto noioso ed algebricamente complesso e per questo si rimanda direttamente a Pielke (2002). In pratica, si procede introducendo, per prima cosa, la funzione *slab transmission function* che è legata alle funzioni $E_2(y)$ ed $E_3(y)$ dalle relazioni:

$$\Gamma_{\lambda_*}^S(y) = 2\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_3(y)\cdot\frac{d\lambda}{\Delta\lambda} \qquad \frac{d\Gamma_{\lambda_*}^S(y)}{dy} = -2\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_3(y)\cdot\frac{d\lambda}{\Delta\lambda} \qquad [6.113a]$$

Inoltre si introduce anche la definizione di *percorso ottico normale* (*normal optical path*) u:

$$u = \int_0^z \rho \cdot dz \qquad\qquad u_\infty = \int_0^\infty \rho \cdot dz \qquad [6.113b]$$

Come si può notare, il percorso ottico normale è una sorta di nuova coordinata verticale pesata rispetto alla densità dell'aria e a tutti gli effetti la sostituirà completamente. Una volta introdotta questa nuova variabile, con un po' di fatica algebrica, si giunge ad una nuova espressione per il flusso ascendente e discendente di radiazione ad onda lunga relativa ad uno dei sottointervalli di lunghezza d'onda $\Delta\lambda$ in cui si è suddiviso l'intero intervallo spettrale.

A questo punto, si procede alla determinazione dell'irradianza totale ascendente e discendente integrando le relazioni ottenute su tutti i possibili $\Delta\lambda$ che compongono l'intervallo (teoricamente infinito) di lunghezze d'onda e definendo la *trasmissività a banda larga* (*broadband flux transmissivity*) $t^S(u,T)$ come:

$$t^S(u,T) = \int_0^\infty \pi\, B_\lambda(T) \cdot \Gamma_\lambda^S(u) \cdot \frac{d\lambda}{\sigma_B T^4} \qquad [6.113c]$$

Si ricordi che σ_B, presente in questa relazione ed in quelle seguenti, è la costante di Stefan-Boltzmann. Ricordando che l'integrale in lunghezza d'onda della funzione di Planck è la legge di Stefan-Boltzmann, alla fine si giunge alle relazioni seguenti che esprimono la variazione con la quota (rappresentata dal percorso ottico *u*) delle irradianze totali ascendenti e discendenti in funzione della *broadband transmissivity*:

$$\begin{aligned} R^\uparrow &= \sigma_B T_G^4 \cdot t^S(u,T_G) + \int_0^u \sigma_B T^4|_{\hat{u}} \cdot \frac{dt^S(u-\hat{u},T)}{d\hat{u}}\, d\hat{u} \\ R^\downarrow &= \tilde{B} + \int_{u_T}^u \sigma_B T^4|_{\hat{u}} \cdot \frac{dt^S(\hat{u}-u,T)}{d\hat{u}}\, d\hat{u} \end{aligned} \qquad [6.114a]$$

in cui con $\tilde{B}$ si è indicato il flusso ad onda lunga alla sommità del dominio di calcolo. Queste relazioni, quando vengono usate nei modelli prognostici, spesso vengono scritte in maniera differente. In effetti, se introduciamo la *broadband emissivity* come:

$$\varepsilon^S(u,T) = 1 - t^S(u,T) \qquad [6.114b]$$

si ha che le relazioni (6.114a), dopo un'integrazione per parti, diventano:

$$\begin{aligned} R^\uparrow &= \sigma_B T_G^4 + \int_0^u \varepsilon^S(u-\hat{u},T) \cdot \frac{d\sigma_B T^4}{d\hat{u}}\, d\hat{u} \\ R^\downarrow &= \sigma_B T_T^4 + \int_{u_T}^u \varepsilon^S(\hat{u}-u,T) \cdot \frac{d\sigma_B T^4}{d\hat{u}}\, d\hat{u} \end{aligned} \qquad [6.114c]$$

In teoria, tutte le relazioni scritte finora andrebbero interpretate come relazioni riferite ai valori *istantanei* delle radianze e delle irradianze e di tutte le altre variabili meteorologiche coinvolte. In pratica Pielke (2002) fornisce argomentazioni sufficienti da far ritenere valide tutte le relazioni finora ottenute purché le variabili presenti siano ritenute variabili medie.

Dalle relazioni (6.114c) si ottengono le analoghe espressioni che descrivono il gradiente verticale delle irradianze ascendenti e discendenti ad onda corta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^\uparrow}{\partial u} &= \int_0^u \frac{d\varepsilon^S(u-\hat{u},T)}{du} \cdot \frac{d\sigma_B T^4}{d\hat{u}}\, d\hat{u} \\ \frac{\partial R^\downarrow}{\partial u} &= \int_{u_T}^u \frac{d\varepsilon^S(\hat{u}-u,T)}{du} \cdot \frac{d\sigma_B T^4}{d\hat{u}}\, d\hat{u} \end{aligned} \qquad [6.114d]$$

Per rendere più operative e semplici da usare, queste relazioni sono state ulteriormente semplificate da Sasamori (1968). Infatti, il gradiente verticale delle irradianze medie ad onda lunga ascendenti e discendenti ad una generica quota *z* risultano così espresse:

$$\frac{\partial R^{\uparrow}}{\partial u} \cong \sigma_B \cdot \frac{d\varepsilon^S(u,T)}{dz} \cdot [T^4(z) - T_G^4]$$
$$\frac{\partial R^{\downarrow}}{\partial u} \cong \sigma_B \cdot \frac{d\varepsilon^S(\hat{u}-u,T)}{dz} \cdot [T_T^4 - T^4(z)] \qquad [6.115]$$

Queste relazioni sono decisamente meno complesse rispetto a quelle di partenza e, per il loro utilizzo pratico, richiedono la conoscenza del profilo verticale di temperatura e di densità dell'aria e la capacità di calcolare le *broadband emissivity* ed i relativi gradienti verticali.

Una delle ipotesi su cui si è basata la trattazione precedente è che l'unico processo di estinzione presente sia l'assorbimento dei vari costituenti gassosi dell'atmosfera. In pratica ci si può limitare a tenere in considerazione solo la presenza del vapor d'acqua e della CO_2.

Per quanto riguarda il vapor d'acqua, una delle equazioni prognostiche del modello di *PBL* è dedicata alla distribuzione spaziale (e quindi anche verticale) dell'umidità specifica e perciò ad ogni quota risulterà nota l'umidità specifica q_{H2O} espressa in ($g_{acqua} \cdot g_{aria}^{-1}$). Quindi, la *broadband emissivity* ε_{H2O} può essere stimata con la correlazione seguente (Pielke, 2002):

$$\varepsilon_{H_2O} = \begin{cases} 0.104 \cdot \log_{10}\delta P + 0.440 & -4.0 < \log_{10}\delta P \leq -3.0 \\ 0.121 \cdot \log_{10}\delta P + 0.491 & -3.0 < \log_{10}\delta P \leq -1.5 \\ 0.146 \cdot \log_{10}\delta P + 0.527 & -1.5 < \log_{10}\delta P \leq -1.0 \\ 0.161 \cdot \log_{10}\delta P + 0.542 & -1.0 < \log_{10}\delta P \leq 0.0 \\ 0.136 \cdot \log_{10}\delta P + 0.542 & \log_{10}\delta P > 0.0 \end{cases} \qquad [6.116a]$$

in cui la variabile δP è il *cammino ottico* per il vapor d'acqua in ($g \cdot cm^{-2}$) che è definita come:

$$\delta P = \int_z^{z+\delta z} \rho\, q_{H_2O} dz \qquad [6.116b]$$

È facile convincersi che δP è l'*acqua precipitabile* (in cm) entro lo spessore δz di atmosfera. Dato che la CO_2 è ragionevolmente ben rimescolata in atmosfera, sulla base di valori tipici di concentrazione di tale gas, la sua *broadband emissivity* può essere ottenuta dalla correlazione seguente (Pielke 2002):

$$\varepsilon_{CO_2}(u,T) \cong 0.185 \cdot [1 - exp(-0.39 \cdot \delta H_c^{0.4})] \qquad [6.116c]$$

dove δH_c (cm) dipende dalla pressione *p* alla quota *z* (in mbar) e dalla pressione p_0 al livello del suolo (1013 mbar) secondo la relazione:

$$\delta H_c = 0.252 \cdot (p - p_0) \qquad [6.116d]$$

In sostanza, per calcolare la *broadband emissivity* per la CO_2 è sufficiente conoscere il profilo verticale della pressione. A questo punto la *broadband emissivity* complessiva può essere ottenuta come:

$$\varepsilon^S(u,T) = \varepsilon_{H_2O}(\delta P) + \varepsilon_{CO_2}(\delta H_c) \cong \qquad [6.116e]$$

In realtà si dovrebbe tener conto della parziale sovrapposizione tra le bande di assorbimento del vapor d'acqua e quelle della CO_2, tuttavia, come mostrato da Pielke (2002), la correzione che si dovrebbe portare al valore totale di *broadband emissivity* può essere trascurata senza particolari conseguenze. A questo punto abbiamo tutti gli elementi per la determinazione del gradiente verticale dell'irradianza ascendente e discende ad onda lunga.

6.6.2.2 Il riscaldamento dell'aria ad onda lunga

Nell'equazione prognostica per la temperatura potenziale virtuale è presente un termine di sorgente che tiene conto del riscaldamento o del raffreddamento dell'atmosfera dovuta ai gradienti verticali di irradianza totale *R* secondo la relazione:

$$\bar{S}_\theta = \left.\frac{\partial \bar{T}}{\partial t}\right|_{rad} = \frac{1}{\bar{\rho} C_p}\frac{\partial \bar{R}}{\partial z} \qquad [6.117a]$$

Visto che l'irradianza totale può essere scomposta nella porzione ad onda corta di origine solare e nella porzione ad onda lunga di origine terrestre ed atmosferica, la relazione precedente può essere scritta anche come:

$$\bar{S}_\theta = \left.\frac{\partial \bar{T}}{\partial t}\right|_{rad} = \frac{1}{\bar{\rho} C_p}\left[\left.\frac{\partial \bar{R}}{\partial z}\right|_{LW} - \left.\frac{\partial \bar{R}}{\partial z}\right|_{SW}\right] \qquad [6.117b]$$

Il gradiente verticale dell'irradianza ad onda corta già è stato calcolato in precedenza. Consideriamo, ora, l'irradianza ad onda lunga: essa può ulteriormente essere scomposta in irradianza ascendente ed irradianza discendente, quindi:

$$\left.\frac{\partial \bar{R}}{\partial z}\right|_{LW} = \frac{\partial \bar{R}^{\uparrow}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{R}^{\downarrow}}{\partial z} \qquad [6.117c]$$

i cui termini si è in grado di calcolare sulla base della teoria fin qui esposta.

Rodgers e Walshaw (1966) e Rodgers (1967), analizzando le relazioni (6.115), hanno verificato che erano possibili ulteriori semplificazioni, pur giungendo ad una stima realistica della variazione di temperatura dell'aria causata dal gradiente di radiazione ad onda lunga. Il risultato di tutto ciò è lo schema *cooling to space* che si concretizza nella relazione seguente:

$$\left.\frac{\partial \bar{R}}{\partial z}\right|_{LW} = -\frac{\sigma_B T^4}{\rho C_p}\frac{\partial \varepsilon^S}{\partial z} \qquad [6.118]$$

In condizioni di atmosfera priva di nubi e di inquinamento significativo, Paltridge e Platt (1976) hanno mostrato che è possibile evitare tutte queste considerazioni analitiche e che la variazione temporale della temperatura media dell'atmosfera dovuta al gradiente verticale di radiazione ad onda lunga può essere ragionevolmente stimata dalla semplice relazione seguente:

$$\left.\frac{1}{\bar{\rho} C_p}\frac{\partial \bar{R}}{\partial z}\right|_{LW} = 1.1574 \cdot 10^{-5} \cdot (0.017 \cdot \overline{T + 1.8}) \qquad [6.119]$$

dove la variazione temporale della temperatura è espressa in ($K \cdot s^{-1}$) e la temperatura media in (°C). Nonostante la semplicità della relazione, i risultati che fornisce sono abbastanza realistici.

6.6.2.3 Cenni alla presenza di nubi e inquinamento

Quando sono presenti le nubi, il loro contenuto di acqua influenza notevolmente il trasporto della radiazione ad onda lunga. Le nuvole sono costituite da gocce di acqua liquida e/o da cristalli di ghiaccio ed il dettaglio delle loro proprietà ottiche è molto complesso, particolarmente per i cristalli di ghiaccio. Perciò, nelle parametrizzazioni dei flussi infrarossi nelle nubi, i cristalli di ghiaccio vengono normalmente considerati come delle particelle con un raggio equivalente definito in termini della loro area superficiale. Ovviamente la presenza di particelle induce il processo di *scattering* che normalmente viene ignorato nelle applicazioni modellistiche dato che lo *scattering* nell'infrarosso avviene prevalentemente nella direzione di propagazione della radiazione (in avanti). Rimandando alla letteratura specializzata la trattazione dettagliata dell'interazione della radiazione infrarossa con le nubi, qui si accennerà solo ad una parametrizzazione proposta da Stephens (1978a) e molto utilizzata, secondo cui il flusso ascendente e discendente di radiazione ad onda lunga in una nube può essere descritto come la sovrapposizione di una *perturbazione* ai

normali flussi che si avrebbero in condizioni di cielo sereno. In particolare, se z_{CT} è la quota della sommità della nube e z_{CB} è la quota alla sua base, i flussi radiativi saranno dati dalle relazioni:

$$\begin{aligned} R^{\uparrow} &= R^{\uparrow}_{CB} \cdot (1 - \varepsilon^{up}) + \varepsilon^{up}\sigma_B T^4 \\ R^{\downarrow} &= R^{\downarrow}_{CB} \cdot (1 - \varepsilon^{down}) + \varepsilon^{down}\sigma_B T^4 \end{aligned} \qquad [6.120a]$$

dove $R^{\uparrow}_{CB}$ ed $R^{\downarrow}_{CT}$ sono le irradianze a cielo sereno rispettivamente alla sommità della nube ed alla base, mentre ε^{up} ed ε^{down} sono le emissività efficaci valutate alla quota desiderata al suo interno. Queste due emissività devono essere parametrizzate impiegando calcoli dettagliati di trasferimento radiativo. Stephens (1878b), sulla base dei risultati ottenuti da questi calcoli, ha prodotto una parametrizzazione basata sul *contenuto integrato della nube*. In effetti se si consida una quota *z* nella nube, la radiazione ascendente interagirà con un *contenuto integrato di acqua* di:

$$W^{\uparrow} = \int_{z_{CB}}^{z} \rho_L q_L dz' \qquad [6.120b]$$

dove ρ_Le q_L sono rispettivamente la densità e la concentrazione specifica delle gocce di acqua liquida. Seguendo Pielke (2002), si potrebbe inserire in questa relazione anche la eventuale presenza dei cristalli di ghiaccio. Analogamente, la radiazione ad onda lunga discendente interagirà con il *contenuto integrato di acqua* presente tra la sommità della nube e la quota *z*, quindi:

$$W^{\downarrow} = \int_{z}^{z_{CT}} \rho_L q_L dz' \qquad [6.120c]$$

Questa parametrizzazione considera quindi questi due contenuti integrati di acqua come gli unici elementi caratterizzanti la nube e sulla base del loro valore le emissività efficaci risultano date da:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{up} &= 1 - exp\left(-aW^{\uparrow}\right) \\ \varepsilon^{down} &= 1 - exp\left(-bW^{\downarrow}\right) \end{aligned} \qquad [6.120d]$$

dove i valori dei due coefficienti *a* e *b* sono rispettivamente 0.130 $m^2\ g^{-1}$ e 0.158 $m^2\ g^{-1}$.

Queste considerazioni possono essere applicate facilmente ad un modello meteorologico. Infatti, se una delle celle di calcolo è saturata dalla presenza di idrometeore, una volta calcolato il valore delle irradianze ascendente e discendente a cielo sereno, si inserisce la perturbazione dovuta alla presenza della nube e ciò porta ad ottenere facilmente il gradiente verticale del flusso ascendente e discendente della radiazione ad onda lunga, espressi dalle relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^{\downarrow}}{\partial z} &= a\frac{\partial W^{\uparrow}}{\partial z} \cdot e^{-aW^{\uparrow}}\left[\sigma_B T^4 - R^{\uparrow}_{CB}\right] + \varepsilon^{up}\frac{\partial \sigma_B T^4}{\partial z} \\ \frac{\partial R^{\downarrow}}{\partial z} &= b\frac{\partial W^{\downarrow}}{\partial z} \cdot e^{-aW^{\uparrow}}\left[\sigma_B T^4 - R^{\uparrow}_{CB}\right] + \varepsilon^{down}\frac{\partial \sigma_B T^4}{\partial z} \end{aligned} \qquad [6.120e]$$

Naturalmente, nella realtà esistono situazioni decisamente più complesse rispetto alla presenza di una nuvola isolata in cielo. È possibile, per esempio, avere più strati di nuvole poste a quote diverse o la presenza di aerosol di origine naturale o antropica localizzato in alcune parti della troposfera. In Pielke (2002) vengono forniti alcuni suggerimenti in proposito.

6.6.3 LA RADIAZIONE AD ONDA LUNGA IN ARRIVO AL SUOLO

Per determinare il bilancio radiativo superficiale è necessario avere a disposizione l'irradianza ad onda lunga che giunge al suolo e quella che il suolo emette. L'equazione di Schwarzchild e le sue conseguenze ne consentono una determinazione matematica che non è semplice e che richiede la conoscenza di dettagliate informazioni sulla struttura dell'atmosfera (temperatura, pressione,

concentrazione di vapor d'acqua e degli altri costituenti l'atmosfera), cosa ben poco comune in condizioni operative. D'altro canto, sono ormai disponibili sensori dedicati alla misura di entrambe le irradianze, tuttavia la consuetudine meteorologica ed anche i costi non irrilevanti di questi sensori fanno sì che ben raramente tali grandezze vengano misurate nelle stazioni meteorologiche convenzionali. Per superare, almeno parzialmente, questa situazione, è stato necessario mettere a punto opportune parametrizzazioni che consentissero la stima di queste importanti grandezze meteorologiche sulla base di misure disponibili nelle normali stazioni meteorologiche.

La radiazione ad onda lunga (infrarossa) in arrivo al suolo è il risultato dell'emissione infrarossa dell'atmosfera, parzialmente assorbita dalle sue componenti gassose. Se si immagina che l'atmosfera sia un corpo grigio caratterizzato da una emissività efficace ε_{sky} e se si ipotizza per semplicità un'atmosfera isoterma ad una temperatura T, la radiazione ad onda lunga in arrivo al suolo può essere espressa come:

$$L^{in} = \varepsilon_{sky}\sigma_B T^4 \qquad [6.121a]$$

dove σ_B è la costante di Stefan-Boltzmann. È naturale chiedersi quale possa essere la temperatura equivalente dell'atmosfera T e la sua emissività e a queste domande non si può dare una risposta convincente. Ciò che, però, si può fare è verificare se, adottando una temperatura facilmente disponibile e disponendo di accurate misure di radiazione ad onda lunga realizzate al suolo in periodi limitati, si possa mettere a punto una parametrizzazione realistica dell'emissività. Di fatto, le misure meteorologiche normalmente disponibili in una tipica stazione al suolo sono la temperatura e l'umidità dell'aria allo *screen level* (cioè più o meno a 2 metri dal suolo), la pressione e la copertura del cielo N (cioè la frazione di cielo coperto). In pratica, si è cercato di individuare una parametrizzazione del tipo:

$$\begin{aligned} L^{in} &= \varepsilon_{sky}\sigma_B T_a^4 \\ \varepsilon_{sky} &= f(T_a, e, p, N) \end{aligned} \qquad [6.121b]$$

dove T_a ed e sono rispettivamente la temperatura e la tensione di vapore dell'aria allo *screen level* e p è la pressione al suolo, mentre $f(\cdot)$ è una generica funzione da determinarsi sulla base delle misure disponibili.

6.6.3.1 Parametrizzazione in assenza di nubi

Consideriamo ora la situazione in cui siano completamente assenti le nubi. In questo caso, l'irradianza ad onda lunga in arrivo al suolo, in generale, può essere espressa come:

$$L^{in}_{clear-sky} = \varepsilon_{clear-sky} \cdot \sigma_B T_a^4 \qquad [6.122]$$

Brutsaert (1975), per giungere ad una relazione di questo tipo che avesse una solida base fisica, ha integrato l'equazione di Schwarzchild su tutta l'atmosfera utilizzando i seguenti tre profili verticali per la pressione p, la Temperatura T e la densità dell'aria ρ_w:

$$p = p_0 \cdot exp\left(-\frac{gz}{RT_0}\right) \qquad T = T_0 \cdot exp\left(-\frac{\gamma z}{T_0}\right) \qquad \rho_w = \frac{0.662 e_0}{RT_0} \cdot exp(-k_w z) \qquad [6.123a]$$

dove p_0 (hPa), T_0 (K) e e_0 (hPa) sono rispettivamente la pressione, la temperatura e la tensione di vapore al livello del mare. Brutsaert, inoltre, in base alle conoscenze dei profili medi delle variabili atmosferiche ha posto $g/(RT_0) = 0.13$ km^{-1}, $\gamma/T_0 = 2.26 \cdot 10^{-2}$ km^{-1} e $k_w = 0.45$ km^{-1}. Il risultato che ottenne fu la relazione seguente per l'emissività atmosferica efficace:

$$\varepsilon_{clear-sky} = 1.24 \cdot \left(\frac{e}{T_a}\right)^{1/7} \qquad [6.123b]$$

Inevitabilmente, il risultato ed in particolare il valore delle costanti numeriche presenti in questa relazione dipendono dalle scelte fatte nell'approssimare i profili verticali della pressione, della temperatura e dell'umidità. Culf e Gash (1993) hanno verificato con nuove misure (realizzate in

Nigeria) questa parametrizzazione ed hanno concluso che essa ben riproduce le misure raccolte durante la stagione *umida*, mentre durante la stagione *secca* il coefficiente 1.24 avrebbe dovuto essere sostituito col valore 1.31. Comunque, in generale, le stime prodotte da questa relazione semiempirica estremamente semplice sono state del tutto comparabili con le misure sperimentali ottenute in diverse parti del mondo (Culf e Gash, 1993, Malek 1997, Sridhar e Elliot 2002).

Oltre a questa parametrizzazione, ne sono state proposte molte altre, tutte ottenute empiricamente dall'analisi delle misure disponibili. Vale la pena citare le relazioni seguenti in cui la temperatura T_a è espressa in (K), la tensione di vapore e è espressa in kPa e l'acqua precipitabile $w = 4650e/T_a$:

$$\varepsilon_{clear-sky} = \begin{cases} 0.52 + 0.205 \cdot \sqrt{e} & (Brunt, 1932) \\ 1.08 \cdot \left[1 - exp\left(-\dfrac{(10e)^{T_a}}{2016}\right)\right] & (Satterlund(1979) \\ 0.83 - 0.18 \cdot 10^{-0.067e} & (Angstrom, 1918) \\ 0.70 + 5.95 \cdot 10^{-4} e \cdot exp\left(\dfrac{1500}{T_a}\right) & (Idso, 1981) \\ 1 - (1 + w) \cdot exp\left(-\sqrt{1.2 + 3w}\right) & (Prata, 1996) \end{cases} \quad [6.123c]$$

Flerchinger et al. (2009) hanno condotto un esteso studio mettendo a confronto un numero rilevante di misure condotte in vari luoghi e le principali correlazioni per l'emissività a cielo sereno. Il risultato ottenuto è che la correlazione proposta da Angstrom (1918) e Prata (1996) sembrano riprodurre più fedelmente le misure sperimentali disponibili.

6.6.3.2 Parametrizzazione in presenza di nubi

La presenza di una copertura nuvolosa più o meno estesa comporta un aumento dell'irradianza ad onda lunga che raggiunge il suolo. Se si utilizza come indicatore della copertura del cielo la frazione di cielo coperto *N*, la relazione generale che descrive la radiazione ad onda lunga in arrivo al suolo può essere così formulata:

$$L^{in} = L^{in}_{clear-sky} \cdot F(N) \quad [6.124]$$

dove $F(N)$ è una funzione che dipende dalla copertura e dalle caratteristiche delle nubi presenti. Come nel caso della radiazione ad onda corta, anche in questo caso il parametro N è di difficile utilizzo per caratterizzare l'incremento di radiazione ad onda lunga dovuto alla presenza delle nubi. Comunque, seguendo Sugita e Brutsaert (1993), la funzione $F(N)$ può essere così espressa:

$$F(N) = 1 + 0.22N \quad [6.125a]$$

mentre Paltridge a Platt (1976) propongono per l'irradianza ad onda lunga in arrivo al suolo l'espressione:

$$L^{in} = c_1 \sigma_B T^6 + c_2 N \quad [6.125b]$$

dove $\sigma_B = 5.67 \cdot 10^{-8}$ Wm^{-2}K^{-1}, $c_1 = 9.35 \cdot 10^{-6}$ K^{-5} e $c_2 = 60$ (Wm^{-2}).

Il parametro N deriva dall'osservazione a *vista* della frazione di cielo coperto dalle nubi di vario tipo e non è necessariamente un buon indicatore di ciò che la radiazione ad onda lunga ha incontrato nel suo cammino di avvicinamento al punto della superficie terrestre in cui si desidera ottenerne il valore. Si è quindi pensato, disponendo di misure di radiazione solare globale, di poter sostituire N con un altro parametro dipendente dalla radiazione solare misurata che già tiene conto intrinsecamente dell'interazione con le nubi. Ovviamente, nelle ore notturne quando la radiazione solare globale è nulla, non si ha possibilità di utilizzare questa logica.

Un primo parametro candidato alla sostituzione di N nella descrizione del contributo delle nubi all'irradianza ad onda lunga al suolo è la frazione di cielo oscurato dalle nuvole quando viene osservato da un particolare punto sulla superficie terrestre, cioè:

$$X_c = 1 - \frac{Rg}{Rg_0} \qquad [6.126a]$$

dove con R_{g0} si è indicata la radiazione solare globale a cielo sereno, stimabile con una delle relazioni viste in precedenza. A questo parametro sono stati dati diversi nomi uno dei quali è *cloud fraction*. Usando questo nuovo parametro di nuvolosità, Bilbao e De Miguel (2007) hanno proposto la correlazione:

$$L^{in} = L^{in}_{clear-sky} \cdot (1 + aX_c^b) \qquad [6.126b]$$

dove a = 0.247 e b = 0.704, mentre Crawford e Duchon (1999) hanno ottenuto la relazione semiempirica seguente:

$$L^{in} = \left[X_c + (1 - X_c) \cdot \varepsilon_{clear-sky}\right] \cdot \sigma_B T^4 \qquad [6.126c]$$

Un'alternativa al parametro X_c è il rapporto tra la radiazione solare globale misurata in un punto della superficie e quella al TOA, cioè:

$$\tau = \frac{Rg}{I_0} \qquad [6.127a]$$

che di fatto è la trasmittanza complessiva dell'atmosfera alla radiazione ad onda corta. Impiegando questo parametro ed un numero molto elevato di misure sperimentali, Sedlar e Hock (2009) hanno trovato che:

$$L^{in} = L^{in}_{clear-sky} \cdot F(\tau) \qquad [6.127b]$$

dove $F(\tau)$ è data dalla relazione semiempirica:

$$F(\tau) = max[-a\tau^b + c; 1] \qquad [6.127c]$$

dove a = 0.486, b = 1.843 e c = 1.327.

6.6.4 LA RADIAZIONE AD ONDA LUNGA TERRESTRE

La superficie terrestre e tutto ciò che esiste sopra di essa, come i campi coltivati e le foreste, le superfici d'acqua come oceani, mari, laghi e fiumi e le costruzioni umane, essendo corpi caldi sono sorgenti di radiazione elettromagnetica ad onda lunga. Tutto questo complesso insieme di sorgenti radiative di varia natura può essere considerato un'unica sorgente di tipo area caratterizzata da un coefficiente di emissione ε_s e da una temperatura T_s. Questa schematizzazione conduce immediatamente a dire che in base alla legge di Stefan-Boltzmann:

$$L^{\uparrow}_{lw0} = \varepsilon_S \cdot \sigma_B T_S^4 \qquad [6.128a]$$

dove ε_S è l'emissività del suolo che è funzione del tipo di superficie naturale considerata. Anche se ε_S è sempre molto vicino all'unità, sono comunque rilevabili alcune differenze come si può notare nella **Tab. 6.13** dove sono presentati i valori caratteristici di alcune superfici naturali. Questa relazione, estremamente semplice, è solo un'approssimazione. In realtà per esprimere la radiazione infrarossa in partenza dal suolo dovremmo tener conto anche del contributo derivante dalla riflessione al suolo della radiazione atmosferica. In pratica, la relazione più corretta che esprime la radiazione infrarossa terrestre è la seguente:

$$L^{\uparrow}_{lw0} = \varepsilon_S \cdot \sigma_B T_S^4 + (1 - \varepsilon_S) \cdot L^{\downarrow}_{lw0} \qquad [6.128b]$$

La difficoltà incontrata nell'impiego pratico della (6.128a) sta nel fatto che è molto raro che si misuri T_s, mentre è normale misurare T (la temperatura dell'aria ad una quota di riferimento, normalmente è pari a 2 m sopra il suolo). Per aggirare questa difficoltà, in Holtslag e van Ulden (1983) e van Ulden e Holtslag (1985) è stato proposto un ingegnoso metodo approssimato, valido però solo per le ore diurne. In primo luogo, ponendo per semplicità ε_S pari a uno e sviluppando in

serie di Taylor la quarta potenza della temperatura T_s, si ha che in prima approssimazione:

$$L_{lw0}^{\uparrow} \cong \sigma_B T^4 + 4\sigma_B T^3 (T_s - T) \qquad [6.129a]$$

Detta R_N (*Radiazione Netta)* la somma algebrica delle componenti radiative ad onda corta e lunga (come si discuterà nel prossimo paragrafo), sperimentalmente si è constatato che:

$$4\sigma_B T^3 (T_s - T) = -c_H R_N \qquad [6.129b]$$

dove il coefficiente c_H vale circa 0.12, anche se presenta una variazione in funzione delle caratteristiche del suolo e della umidità dell'aria. Se la prima variazione viene condensata in un coefficiente α (nella **Tab.6.14** sono raccolti i valori di α per alcune superfici caratteristiche) e se si indica con γ/s il rapporto tra la costante psicrometrica e la derivata della umidità specifica di saturazione rispetto alla temperatura, sempre sperimentalmente si ha che:

$$c_H = 0.38 \cdot \left[\frac{(1-\alpha) + \gamma/s}{1 + \gamma/s}\right] \qquad [6.129c]$$

Natura della superficie	ε_S
Neve fresca	0.99
Neve vecchia	0.82
Sabbia secca	0.95
Sabbia umida	0.98
Torba secca	0.97
Torba umida	0.98
Suolo nudo	0.95 - 0.98
Catrame e ghiaia	0.92
Cemento	0.71÷0.9
Asfalto	0.95
Cemento	0.71÷0.9
Calcare	0.92
Arenaria	0.98
Erba rasata	0.97
Erba alta	0.90÷0.95
Foreste decidue	0.95
Conifere	0.97
Aree urbane	0.85÷0.95
Deserto	0.84÷0.91
Acqua	0.97

Tab.6.13: alcuni valori di emissività superficiale caratteristici.

Tipo di suolo	**α**
Deserto	0.1
Zone aride rurali	0.3
Campi coltivati (durante periodi secchi)	0.5
Aree urbane con edifici e strade	0.5
Zone miste urbane e suburbane con parchi	0.8
Foreste e campi (durante i periodi umidi)	1.0
Larghi specchi d'acqua	1.4

Tab. 6.14: valori tipici per il coefficiente α (Hanna e Chang, 1992).

Il rapporto γ/s può essere stimato con la relazione seguente:

$$\gamma/s = exp[-0.055 \cdot (T - 279)] \qquad [6.129d]$$

In pratica, il modello proposto si riconduce alla semplice relazione:

$$L_{lw0}^{\uparrow} = \varepsilon_s \sigma_B T^4 + c_H R_N \qquad [6.129e]$$

La particolarità di questo modello sta nel fatto che la radiazione all'infrarosso emessa nelle ore diurne dal suolo può essere calcolata facilmente dalla sola conoscenza della temperatura dell'aria e della radiazione netta.

6.7 IL BILANCIO RADIATIVO SUPERFICIALE

Da quanto si è visto, il flusso di radiazione ad onda corta di origine solare (la radiazione globale) giunge al *suolo* ed in parte dal *suolo* viene riflessa (albedo). Al *suolo* giunge anche la radiazione atmosferica ad onda lunga e dal *suolo* viene trasmesso all'atmosfera un flusso di radiazione ad onda lunga. In tutto ciò si è ipotizzato di poter identificare il *suolo* con la *superficie terrestre*. Ma questa identificazione della superficie terrestre come frontiera inferiore dell'atmosfera non comporta nella realtà che essa sia un ben definito piano (in senso geometrico) che separa due mezzi fisici con differenti proprietà (l'atmosfera e la Terra). Ciò che separa l'atmosfera dalla Terra è un insieme di *superfici naturali* spesso abbastanza lontane da questo concetto di superficie ideale. Infatti, è possibile trovare superfici terrestri in movimento (un esempio tipico sono le superfici marine), superfici semitrasparenti (come le superfici marine e le distese ghiacciate e innevate), superfici composte da elementi mobili (fogliame delle piante nei boschi e nelle giungle), superfici con elementi di rugosità estremamente evidenti (come gli alberi nelle foreste e gli edifici nelle città). Per aggirare questo problema, si può definire *superficie attiva* (Oke, 1987) quella superficie ideale in cui la maggior parte dell'energia radiante viene assorbita, riflessa e trasmessa, dove le precipitazioni vengono intercettate, dove avvengono i principali scambi di energia e di massa (cambiamento di stato dell'acqua meteorica) e dove ha luogo la maggior parte delle interazioni aerodinamiche tra le masse d'aria in movimento e la superficie terrestre. Vista in dettaglio, la superficie attiva non è piana e a volte non è neppure una superficie, tuttavia per ragioni di semplicità faremo riferimento ad una tale superficie ideale nei ragionamenti che seguono e la chiameremo *interfaccia aria-suolo* per ricordare che tale superficie ideale rappresenta la frontiera inferiore dell'atmosfera.

Analizziamo ora le varie componenti radiative che giungono o si originano in corrispondenza della superficie attiva e per questo consideriamo i flussi radiativi registrati in una tipica giornata estiva prevalentemente serena da una stazione radiometrica posta al suolo (**Fig. 6.60**). In questa figura sono riportati gli andamenti temporali di tutte le componenti radiative considerate, prese col segno positivo se in avvicinamento alla superficie terrestre e col segno negativo se in allontanamento.

Il flusso di radiazione ad onda corta di origine solare $R^{\downarrow}_{sw0}$ (la radiazione solare globale) è sempre nulla durante le ore notturne e presenta un andamento nel tempo di tipo quasi sinusoidale nelle ore diurne, conseguenza della sua dipendenza diretta dall'angolo di elevazione solare Ψ. Le irregolarità visibili nelle ore pomeridiane sono il risultato del passaggio di nubi nel cielo che riducono la componente diretta della radiazione solare. Tuttavia, se si osserva con attenzione, si nota che $R^{\downarrow}_{sw0}$, dopo una brusca diminuzione dovuta al passaggio di una nube, assume valori *superiori al valore tipico di cielo sereno*: questo fenomeno, noto come *broken clouds* deriva dalla riflessione della radiazione con i bordi dei grossi cumuli isolati in movimento nel cielo. Nella figura viene mostrato anche l'andamento col tempo della radiazione solare ad onda corta riflessa dal suolo $R^{\uparrow}_{sw0}$, cioè l'albedo. Questa componente radiativa è sempre negativa (nulla nelle ore notturne) ed in perfetta sincronia con $R^{\downarrow}_{sw0}$.

Se si considerano, invece, le componenti infrarosse, si nota che la loro variazione nel tempo è profondamente differente dalle componenti ad onda corta. In particolare $R^{\downarrow}_{lw0}$ non presenta sensibili variazioni nel tempo, data la sua dipendenza dalla temperatura dell'aria e dalla sua

emissività: le uniche variazioni nel tempo che tale componente presenta sono associabili solo al variare della presenza in atmosfera delle sostanze che assorbono ed emettono radiazione ad onda lunga. Viceversa, la radiazione infrarossa emessa dal suolo $R^{\uparrow}_{lw0}$ presenta uno spiccato andamento diurno, sincrono con la radiazione solare ed indicativo del riscaldamento del suolo nelle ore diurne causato dalla presenza del sole.

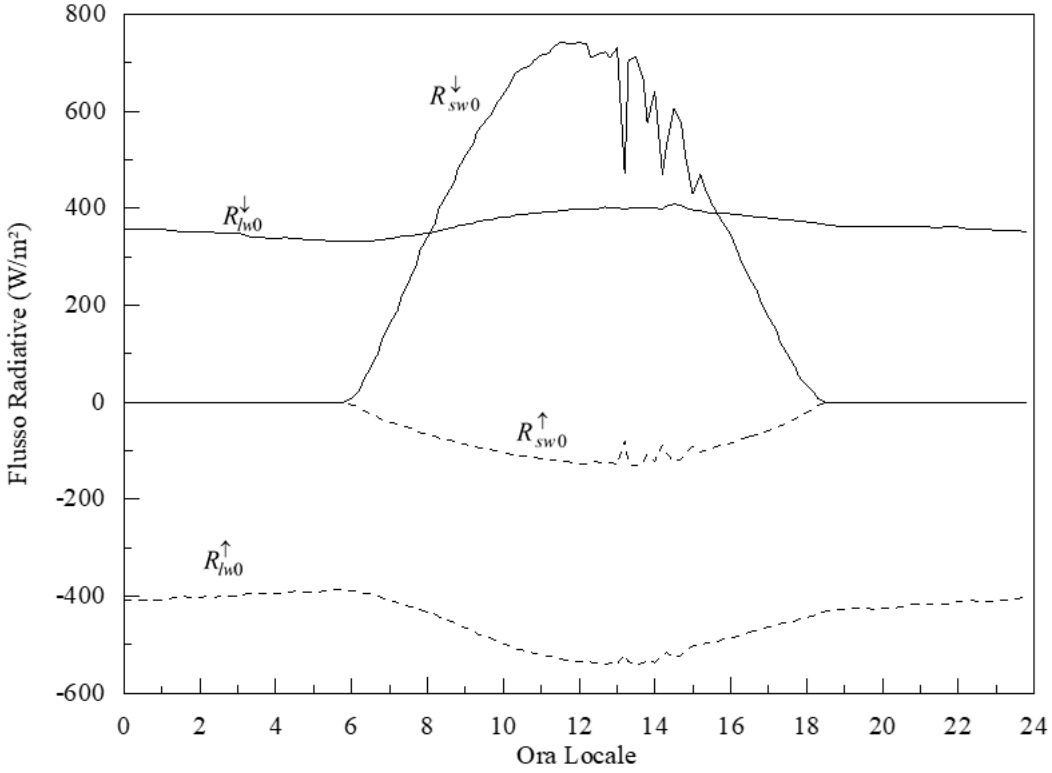


Fig. 6.60: componenti radiative registrate in una stazione meteorologica al Centro Italia.

L'apporto energetico esterno, prevalentemente rappresentato dalla radiazione solare incidente, alimenta il sistema fisico del *PBL* che reagisce, nell'ambito dei trasferimenti radiativi di energia, con la emissione di radiazione ad onda lunga. Il bilancio di tutte le componenti radiative alla superficie attiva ed in ogni istante è dato dalla relazione:

$$R_N = R^{\downarrow}_{SW0} + R^{\uparrow}_{SW0} + R^{\downarrow}_{LW0} + R^{\uparrow}_{LW0} \qquad [6.130]$$

dove R_N è detta <u>*Radiazione Netta*</u>. Il bilancio non è nullo (cioè la R_N non è sempre nulla), come si può vedere in **Fig. 6.61** in cui è graficato l'apporto solare $R^{\downarrow}_{sw0}$ (nel seguito indicato come R_g, Radiazione Solare Globale e che è la vera forzante del *PBL*) e di R_N. Dato che non c'è un bilanciamento tra ciò che è in arrivo e ciò che è in partenza, risulta disponibile all'interfaccia aria-suolo dell'energia utile per alimentare l'evoluzione del *PBL*. Il bilancio radiativo all'interfaccia aria-suolo (superficie attiva) determina quindi *quanta energia risulta disponibile al sistema PBL-Suolo*, R_N appunto. L'andamento di R_N segue abbastanza da vicino quello della Radiazione Solare Globale. Fino a poco dopo l'alba essa presenta valori negativi, cosa che sta ad indicare il maggior peso della radiazione infrarossa emessa dal suolo caldo. Quando dall'alto l'apporto energetico sopravanza la radiazione infrarossa persa dal suolo (questo accade poco dopo l'alba e continua a capitare fino a poco prima del tramonto) il segno di R_N diventa positivo.

La radiazione netta può essere determinata sperimentalmente, come vedremo al Cap.11, impiegando:

- due piranometri giustapposti, per misurare la radiazione solare globale e l'albedo, e due pirgeometri anch'essi giustapposti per la misura della radiazione infrarossa atmosferica e

terrestre.

- o un pirradiometro che misura direttamente R_N.

Nelle normali stazioni meteorologiche il secondo metodo è più frequentemente impiegato del primo, anche se questa misura spesso non viene realizzata affatto.

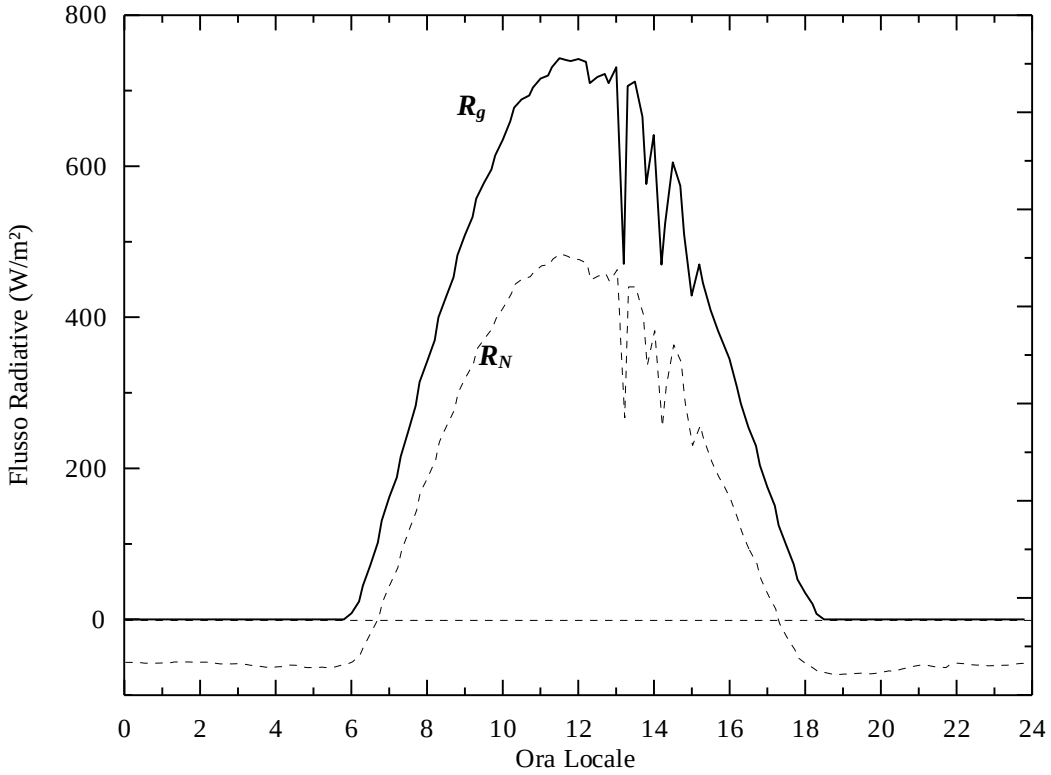


Fig. 6.61: Radiazione Solare Globale e Radiazione Netta registrate presso una stazione meteorologica al centro Italia.

Proprio per questo è molto frequente dover stimare la radiazione R_N impiegando opportune parametrizzazioni. Durante le ore diurne, quando R_N è positiva, viene normalmente impiegato il metodo di Holtslag e van Ulden (Holtslag e van Ulden 1983; van Ulden e Holtslag, 1985) che usa alcune delle parametrizzazioni già presentate per la stima delle singole componenti del bilancio radiativo superficiale. In pratica, la relazione che fornisce una stima attendibile di R_N è:

$$R_N = \frac{(1-r)\cdot(a_1 \sin\Psi + a_2)\cdot(1+b_1 N^{b_2}) + c_1 T^6 + c_2 N - \sigma_B T^4}{(1+c_H)} \qquad [6.131]$$

dove N è la frazione di cielo coperto, T è la temperatura (K) dell'aria nei pressi del suolo, r è il coefficiente di albedo, σ_B è la costante di Stefan-Boltzmann ($5.67\cdot10^{-8}$ $Wm^{-2}K^{-4}$) e le costanti numeriche a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 e c_2 valgono rispettivamente 990 $W\cdot m^{-2}$, -30 $W\cdot m^{-2}$, -0.75, 3.4, $5.31\cdot10^{-13}$ $W\cdot m^{-2}K^{-6}$ e 60 $W\cdot m^{-2}$. Per quanto riguarda la costante c_H, gli Autori propongono la sua stima mediante la (6.129c) in cui compare γ che è la costante psicrometrica, s è la derivata dell'umidità specifica rispetto alla temperatura ed α è un parametro legato al grado di umidità del suolo e di cui si parlerà in seguito (si veda la **Tab. 6.14**). Per il calcolo del rapporto γ/s in funzione della temperatura si può utilizzare la relazione (6.129d).

Per la stima di R_N nelle ore notturne si può impiegare la metodologia proposta da Olesen e Brown (1992). Essa si basa sulla conoscenza della temperatura dell'aria T (K), della velocità media del vento U (ms^{-1}) misurate nei pressi del suolo (2 m) e della copertura del cielo N e fornisce una stima della radiazione netta nelle ore notturne data da:

$$R_N = a_0 + a_1 U + a_2 U^2 + a_3 T^6 \qquad [6.132a]$$

I coefficienti numerici a_i presenti nella relazione dipendono dalla copertura totale del cielo e sono stati ottenuti sulla base di serie storiche pluriennali raccolte in Danimarca.

	Cloud Cover								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_0	-96.1	-101.5	-76.1	-80.1	-53.5	-45.3	-35.5	-23.0	-9.9
a_1	-16.4	-12.6	-13.0	-9.8	0	0	0	0	0
a_2	1.35	0.99	1.16	0.90	0	0	0	0	0
a_3	$100x10^{-15}$	$104x10^{-15}$	$66x10^{-15}$	$72x10^{-15}$	0	0	0	0	0

Tab. 6.15: coefficienti numerici della relazione di Olesen e Brown

Nella **Tab. 6.15** sono raccolti i valori numerici dei coefficienti a_i in funzione di *N*. I coefficienti di questa tabella si applicano quando la copertura del cielo non è data dai cirri. Se così non è, allora la *cloud cover* originale *N* dovrà essere sostituita con una *cloud cover* corretta *N*' ottenuta con le regole seguenti:

se $n \leq 2$, $\rightarrow N' = N$
se $n \leq 4$, $\rightarrow N' = N - 1$
se $n > 4$, $\rightarrow N' = N - 2$

Il metodo di Olesen e Brown può essere impiegato anche nelle ore diurne senza richiedere in questo caso la conoscenza preventiva della radiazione solare globale. In pratica il metodo prevede di determinare due stime distinte di R_N. La prima R_{N1} la si ottiene con la relazione (6.132a) basata esclusivamente sulla copertura del cielo, sulla temperatura dell'aria e sulla velocità del vento, mentre la seconda stima R_{N2} la si ottiene dalla relazione seguente:

$$R_{N2} = b_0 + b_1 \sin\Psi + b_2 \sin^3\Psi \qquad [6.132b]$$

dove Ψ è l'angolo di elevazione solare. I coefficienti numerici b_i in funzione della copertura del cielo sono riportati nella **Tab.6.16**.

	Cloud Cover								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
b_0	-112.6	-112.6	-107.3	-97.8	-85.1	-77.1	-71.2	-31.8	-13.7
b_1	653.2	686.5	650.2	608.3	552.0	511.3	495.4	287.5	154.2
b_2	174.0	120.9	127.1	110.6	106.3	58.5	-37.9	94.0	64.9

Tab. 6.16: coefficienti numerici per la relazione diurna di Olesen e Brown

Anche in questo caso, la presenza dei cirri comporta una correzione della *cloud cover* che si realizza impiegando le stesse regole proposte per le ore notturne. Questa relazione è valida quando il suolo non è ricoperto dalla neve. Se, però, il suolo è ricoperto da uno strato nevoso, la relazione precedente viene modificata come segue:

$$R_{N2} = b_0 + \beta \cdot (b_1 \sin\Psi + b_2 \sin^3\Psi) \qquad [6.132c]$$

dove il coefficiente di assorbimento β è dato dal rapporto seguente:

$$\beta = \frac{1 - \alpha_{snow}}{1 - \alpha_{drk}} \qquad [6.132d]$$

in cui α_{snow} è l'albedo di una superficie nevosa col sole allo zenit e α_{drk} è l'albedo in assenza di neve, sempre col sole allo zenit. Se $\alpha_{snow} = 0.80$ e $\alpha_{drk} = 0.29$, $\beta = 0.28$. Una volta disponibili le due stime di R_N nelle ore diurne, il valore di R_N definitivo è il massimo delle due stime ottenute.

Olesen e Brown (1992) presentano anche un secondo metodo per la stima di R_N, questa volta partendo dalla conoscenza della radiazione solare globale R_g e del coefficiente di albedo α.

In particolare, nelle ore diurne quando $R_g > 0$, si ha che:

$$R_N = (1 - \alpha) \cdot Rg + I_{LW} \qquad [6.132e]$$

dove I_{LW} dipende dalla *cloud cover* come indicato in **Tab. 6.17**

N	I_{LW} (Wm^{-2})
0	-95.0
1	-89.2
2	-78.2
3	-67.4
4	-57.1
5	-45.7
6	-33.2
7	-16.5
8	-4.3

Tab. 6.17: valori numerici dei coefficienti I_{LW}

6.8 IL FLUSSO DI CALORE NEL SUOLO

La Radiazione Netta, cioè la disponibilità di energia all'interfaccia aria-suolo derivante dal bilancio radiativo superficiale, induce come conseguenza diretta un *riscaldamento della porzione superficiale del suolo* (o dell'acqua se la superficie terrestre nel punto che si sta considerando è costituita da una distesa di acqua come un oceano o un lago). In generale si verrà quindi a stabilire un gradiente di temperatura tra la superficie e gli strati profondi del terreno determinando così un *Flusso di Calore nel terreno* o più in generale nel substrato.

A parte alcune eccezioni (come per esempio distese rocciose e specchi d'acqua), il suolo normalmente non è un mezzo omogeneo, ma è un substrato disomogeneo costituito da un insieme di particelle eterogenee solide e da spazi vuoti che possono essere riempiti di aria o di acqua e su di esso viene a porsi e a svilupparsi la vegetazione delle specie più diverse. Il *suolo* è quindi un *mondo* molto complesso con cui non è facile fare i conti quando si è costretti a modellizzarlo. La principale caratteristica fisica di un suolo è costituita dalla sua *tessitura* (*soil texture*) che è la proprietà fisica del terreno che lo identifica in base alla composizione percentuale delle sue particelle solide distinte per classi granulometriche. Le frazioni granulometriche che vengono considerate sono, secondo la classificazione del Dipartimento dell'Agricoltura degli Stati Uniti (USDA), le seguenti (Stensrud, 2007):

- la frazione costituita da grani finissimi con diametro inferiore a 2 μm, denominata *argilla* (*Clay*),
- la frazione grossolana intermedia, denominata *limo* (*Silt*) caratterizzata da particelle con diametro compreso tra 2 e 50 μm,
- la frazione grossolana denomina *sabbia* (*Sand*) che rappresenta le particelle con diametro tra 50 e 2 mm.

I suoli che si incontrano naturalmente sono costituiti, dal punto di vista fisico, da una miscela di sabbia, limo e argilla e spesso vengono classificati secondo uno schema tipico definito dalla USDA. In condizioni di assenza di umidità nel terreno, gli interstizi tra un grano e l'altro sono riempiti dall'aria, tuttavia quando dell'acqua viene trasferita al suolo, essa si va a porre in questi interstizi in competizione con l'aria. Dato che l'acqua ha una capacità termica superiore all'aria, all'aumentare dell'acqua presente negli spazi tra i granuli la capacità termica del suolo aumenta rispetto al valore caratteristico che avrebbe in condizioni secche. In modo simile, anche la

conducibilità termica aumenta con il contenuto di acqua nel suolo, mentre la diffusività termica prima aumenta con l'aumentare del contenuto d'acqua del suolo fino a giungere ad un valore costante dopo il quale la diffusività decresce. Come si vede, determinare o prevedere quantitativamente le caratteristiche termiche dei suoli non è impresa facile: è possibile determinare queste proprietà mediante analisi mirate (normalmente analisi da laboratorio) o mediante misure specifiche, ma questa non è una condotta generalmente applicabile nell'esercizio di *routine* di una rete di misura automatica. Da qui la necessità di stimare indirettamente le proprietà termiche dei suoli a partire da misure di facile realizzazione, come la misura di temperatura ad una o più profondità (tutte comunque molto vicine alla superficie) e una o più misure di flusso verticale di calore realizzate con piastre di flusso poste orizzontalmente poco sotto la superficie.

Il *suolo* è a diretto contatto con l'atmosfera ed è esposto alla radiazione solare, quindi la sua temperatura superficiale (non facilmente definibile in presenza di vegetazione) evidenzia una evoluzione tipica diurna e stagionale, mentre la temperatura in profondità (dove l'omogeneità del suolo è decisamente maggiore) presenta una dinamica decisamente più lenta. Per questo, quindi, attraverso l'interfaccia aria-suolo ha luogo uno scambio di calore (prevalentemente per conduzione) che anch'esso avrà una sua evoluzione diurna e stagionale. Il flusso di calore nel terreno ed il suo profilo termico verticale sono determinati dal bilancio energetico superficiale e dalle caratteristiche fisiche del terreno quali la sua densità e diffusività termica. Un meccanismo simile si ha anche quando la superficie è liquida invece che solida. Nella **Fig. 6.62** è presentata la variazione nel tempo del flusso di calore nel terreno raffrontato con l'andamento corrispondente di radiazione solare globale e radiazione netta.

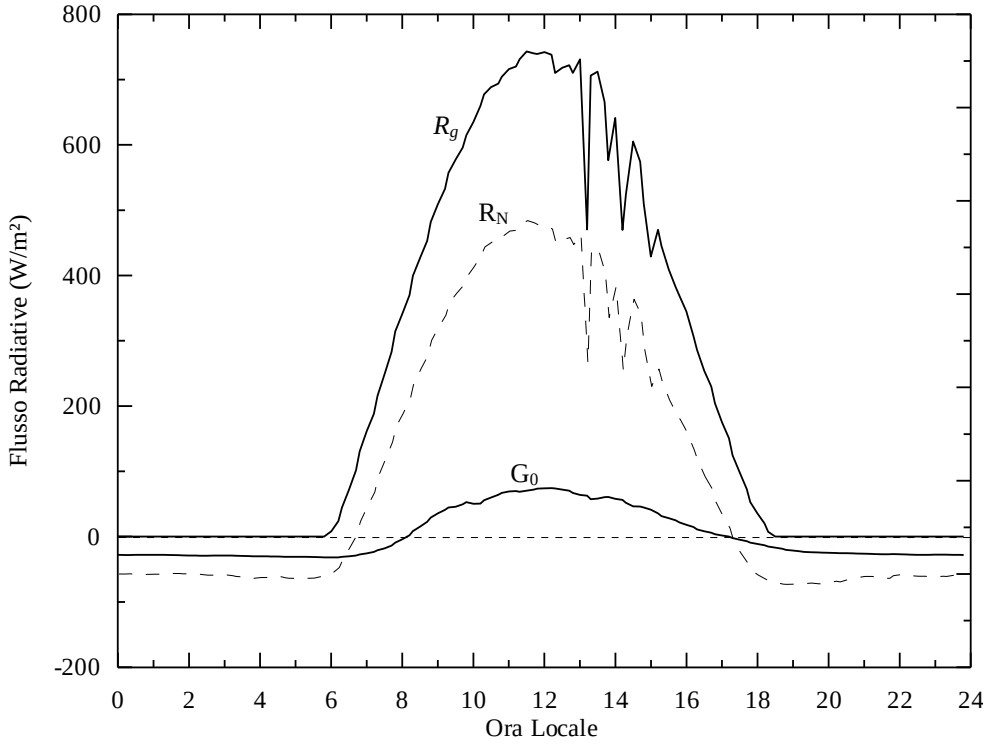


Fig. 6.62: Radiazione Solare Globale, Radiazione Netta e Flusso di Calore nel terreno registrate presso una stazione meteorologica al centro Italia.

6.8.1 LA MODELLIZZAZIONE MATEMATICA

Lo studio del flusso di calore nel terreno non è semplice, soprattutto se si considera la complessità che può possedere una superficie naturale. Tuttavia, l'introduzione di alcune ipotesi semplificative consente di rendere più trattabile il fenomeno. La prima e più importante di esse è quella di considerare questo flusso termico omogeneo in senso orizzontale, cosa che molto frequentemente

è vicina alla realtà. Se si adotta questa ipotesi, il problema diventa monodimensionale ed il flusso di calore nel terreno viene a dipendere solo dalla profondità *z* (positiva verso profondità maggiori) cui si è interessati. Se poi si schematizza il suolo come una piastra piana di dimensione orizzontale e spessore infinito e se si studia il trasferimento del calore al suo interno, è possibile, almeno in prima approssimazione, ritenere che la *conduzione* sia il meccanismo principale di scambio termico, anche se la convezione e l'irraggiamento non sono completamente assenti (Garratt 1992, Carslaw e Jaeger 1986).

Questa è la ragione per cui il *Flusso Specifico di Calore* (*G*) ad una profondità *z* (al di sotto della superficie) può essere descritto dalla *legge di Fourier* scritta per la conduzione unidirezionale di calore in un mezzo solido. In sostanza, se in un mezzo continuo ad una certa profondità *z* si ha un gradiente termico locale non nullo, allora in quella posizione si verrà ad instaurare un flusso di calore per conduzione proporzionale e di segno opposto al gradiente termico stesso. L'ammontare effettivo di questo flusso di calore non solo dipende dal gradiente termico, ma anche dalla *resistenza* che il mezzo continuo oppone al flusso di calore. In pratica, se si considera l'asse verticale *z* positivo verso il basso, la legge di Fourier nel caso monodimensionale qui considerato può essere così espressa:

$$G(z) = -K_T \frac{\partial T}{\partial z} \qquad [6.133a]$$

dove T è la temperatura del suolo alla profondità z e K_T è la sua <u>*conducibilità termica*</u> sempre alla profondità *z*. In questa relazione non si è tenuto conto di un eventuale termine legato al calore latente che coinvolge il gradiente verticale di umidità nel terreno, ciò perché spesso tale termine è di scarsa rilevanza, tuttavia la dipendenza di K_T dall'acqua presente nel suolo come umidità è rilevante. In effetti quando piove, l'aria, originariamente presente negli interstizi tra le celle solide e cattiva conduttrice di calore, è rimpiazzata dall'acqua, buon conduttore di calore. Spesso i valori sperimentali di K_T tengono conto in maniera globale di tutto ciò, pertanto è opportuno indicare tale parametro col nome di <u>*conduttività termica apparente*</u>. Va inoltre ricordato che la (6.133a) presuppone una omogeneità orizzontale del terreno tale da rendere trascurabili la conduzione di calore in senso orizzontale.

Se non sono presenti sorgenti o pozzi di calore, la legge di conservazione dell'energia porta alla relazione seguente:

$$C_T \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial G}{\partial z} \qquad [6.133b]$$

in cui la <u>*capacità termica volumetrica*</u>, cioè la quantità di energia necessaria per innalzare di 1 K la temperatura di una unità di volume del terreno, è pari a $C_T = \rho_T c_T$, dove ρ_T è la densità del suolo e c_T è il relativo calore specifico. Questa equazione ha una notevole rilevanza perché, se si considera uno spessore Δz di suolo (cioè uno strato di suolo con superfici orizzontali S_1 ed S_2) e se la capacità termica volumetrica può essere ritenuta costante, l'integrazione della (6.133b) porta alla seguente relazione tra il gradiente termico a cavallo dello spessore Δz ed i flussi termici all'estremità superiore ed inferiore:

$$G_1 - G_2 = -C_T \frac{T_1 - T}{z_1 - z_2} \qquad [6.133c]$$

Combinando la relazione (6.133a) e la (6.133b) si ottiene l'<u>*equazione di conduzione del calore nel suolo*</u> così espressa:

$$C_T \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_T \frac{\partial T}{\partial z}\right) \qquad [6.133d]$$

In questa forma essa ammette che sia la conducibilità che la capacità termica del suolo possano variare con *z*, cosa che spesso avviene. Tuttavia nei casi pratici spesso si può trascurare la dipendenza di K_T e C_T da *z* e ciò permette di riscrivere questa equazione nel modo seguente:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \qquad [6.134a]$$

dove la quantità $D_T = K_T/C_T$ è la *diffusività termica del suolo*, cioè la capacità di trasferire il calore che possiede il terreno.

Per completezza, va rilevato che è possibile tener conto esplicitamente anche della convezione che accompagna la conduzione nel trasporto di calore nel suolo. In questo caso (Gao e al., 2003; Gao, 2005) si giunge all'equazione:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + W \frac{\partial T}{\partial z} \qquad [6.134b]$$

dove *W* è la densità di flusso dell'acqua liquida.

Quando il *suolo* è costituito da specchi d'acqua abbastanza profondi, come laghi o mare o grandi fiumi, contribuiscono al flusso termico *G* molti meccanismi di trasporto, come la conduzione e la convezione verticale di calore sensibile e la penetrazione della radiazione sotto la superficie. In questo caso, la trattazione analitica del flusso di calore è molto complessa e non è questa la sede per una sua trattazione esauriente.

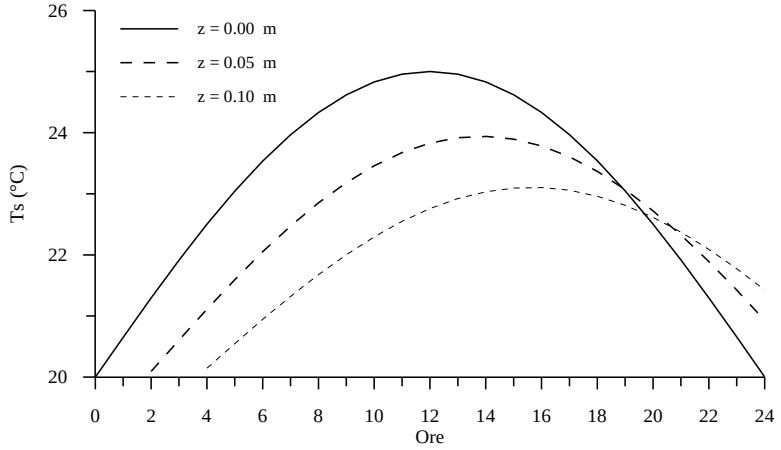


Fig. 6.63: andamenti della temperatura del suolo a varie profondità in risposta ad una temperatura superficiale periodica.

La soluzione armonica monocromatica

Consideriamo ora la relazione (6.134a) come legge rappresentativa della temperatura all'interno del suolo e con ciò adottiamo l'ipotesi di omogeneità orizzontale e di invarianza delle proprietà termiche del terreno con la profondità. Questa equazione differenziale alle derivate parziali di tipo parabolico è stata ben studiata dalla Fisica Matematica. Per poterne ottenere la soluzione è necessario imporre che sia nota la condizione al contorno relativa a $z = 0$, cioè alla superficie. In generale, la temperatura superficiale potrebbe essere descritta da una funzione qualsiasi, tuttavia si può sempre ipotizzare che tale funzione sia scomponibile in serie di Fourier. Proprio per questo, immaginiamo inizialmente che l'evoluzione nel tempo della temperatura nel suolo sia descritta da una semplice relazione trigonometrica del tipo:

$$T(0,t) = \bar{T} + A_0 \sin(\Omega t) \qquad [6.135a]$$

dove $\bar{T}$ è la temperatura media giornaliera, $2A_0$ è l'escursione termica giornaliera e Ω è la velocità di rotazione terrestre pari a $\Omega = 2\pi/(24 \cdot 3600) = 7.292 \cdot 10^{-5}$ rad·s^{-1}. Questo tipo di variazione temporale della temperatura superficiale non è poi così lontano dalla realtà. In effetti rappresenta abbastanza bene ciò che avviene in un tipico giorno soleggiato, con assenza di nuvolosità purché il tempo *t* sia riferito ad un opportuno istante iniziale. La soluzione della (6.134a) con le condizioni precisate, è ben nota se D_T è costante e risulta pari a (Tichonov e Samarskij, 1981):

$$T(z,t) = \bar{T} + A_0 \cdot \exp\left(-\frac{z}{D}\right) \cdot \sin\left(\Omega t - \frac{z}{D}\right) \qquad [6.135b]$$

in cui:

$$D = \sqrt{\frac{2D_T}{\Omega}} \qquad [6.135c]$$

è la *damping depth* e rappresenta la profondità a cui l'onda termica si è ridotta di un fattore 1/*e* (cioè di 0.3679 volte) rispetto all'ampiezza superficiale. Per suoli tipici, *D* è dell'ordine di 0.2 m. Nella **Fig. 6.63** è mostrato l'andamento nel tempo della temperatura a varie profondità per un suolo con *D* pari a 0.2 m e con un andamento giornaliero della temperatura in cui il valore medio è pari a 20°C e la semiampiezza A_0 è di 5°C. Se si confronta questa figura con la **Fig. 6.64** in cui sono presentati gli andamenti temporali della temperatura superficiale e della temperatura alla profondità di 2.5, 5.0, 10 e 50 cm ottenuti sperimentalmente durante una giornata estiva senza nuvole, si nota come gli andamenti ottenuti analiticamente ipotizzando una forzante superficiale periodica siano molto simili a quelli ottenuti nella realtà quando il contributo energetico solare non risulta perturbato dalla presenza di una copertura nuvolosa.

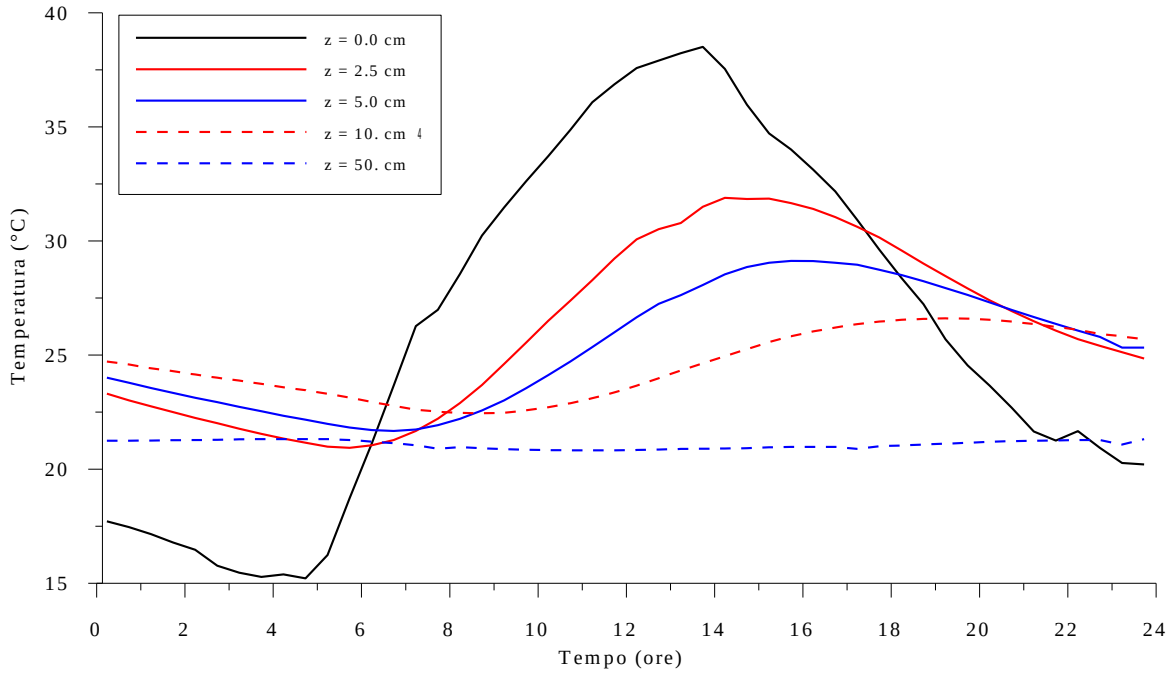


Fig.6.64: andamenti temporali della temperatura del suolo a varie profondità in una giornata estiva serena

La soluzione analitica ottenuta per una condizione al contorno di tipo puramente sinusoidale presenta le seguenti caratteristiche:

- se la temperatura superficiale ($z = 0$) varia periodicamente, anche la temperatura ad una generica profondità *z* varierà con la medesima periodicità;
- l'ampiezza dell'oscillazione decresce con la profondità in maniera esponenzialmente secondo la legge:

$$A(z) = A_0 \cdot exp\left[-\sqrt{\Omega/2D} \cdot z\right] \qquad [6.135a]$$

  e la profondità di penetrazione del calore nel suolo dipende dal periodo di oscillazione della temperatura in superficie;
- le oscillazioni della temperatura nel suolo sono accompagnate da uno sfasamento. Il tempo di ritardo δ delle temperature massime nel suolo, rispetto a quanto avviene in superficie, è proporzionale alla profondità nel modo seguente:

$$\delta(z) = \sqrt{1/(2\Omega D)} \cdot z \qquad [6.135b]$$

Una volta nota l'espressione analitica per la distribuzione spazio-temporale della temperatura del suolo, dalla (6.134b) è immediato ottenere un'analoga espressione analitica che esprime il flusso di calore nel suolo ad una generica profondità *z*:

$$G(z,t) = \frac{K_T}{D} A_0 e^{-z/D} [\sin(\Omega t - z/D) + \cos(\Omega t - z/D)] \qquad [6.136a]$$

Il flusso di calore al suolo G_0, cioè all'interfaccia aria-suolo, è descritto dalla relazione precedente in cui si pone $z = 0$, ottenendo:

$$G(z,t) = \frac{\sqrt{2}K_T}{D} A_0 \sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{4}\right) = \rho_T C_T \sqrt{D_T \Omega} A_0 \sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{4}\right) \qquad [6.136b]$$

La soluzione armonica completa

Per poter trattare il problema con un certo grado di generalità, conviene ipotizzare che l'andamento della temperatura superficiale sia dato da una funzione qualsiasi ma sostanzialmente periodica e con un periodo fondamentale pari al periodo giornaliero τ. Come noto, una funzione continua, periodica e *squared integrable* può essere espressa come una serie di Fourier con infiniti termini (armoniche) ciascuno dei quali è costituito dalla somma pesata di un termine seno e di un termine coseno. Dato che il mezzo è semi infinito, le condizioni iniziali ed al contorno da applicare alla legge di conduzione del calore (6.134a) sono:

- condizioni iniziali ($t = 0$): la distribuzione verticale iniziale di temperatura è:

$$T(z) = T_0 - \gamma z \qquad z \geq 0 \qquad [6.137a]$$

- condizioni al contorno: al suolo ($z = 0$) si ha che per $t > 0$:

$$T(0,t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{\tau} t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{\tau} t\right) \right\} = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cos\left[\frac{2n\pi}{\tau}(t - \delta_n^0)\right] \right\} \qquad [6.137b]$$

dove il coefficiente T_0 è la temperatura media giornaliera ed i coefficienti di Fourier a_n e b_n rappresentano le ampiezze delle varie armoniche che compongono il segnale termico. Le ampiezze A_n delle varie armoniche e gli sfasamenti relativi δ_n sono dati da:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \delta_n^0 = \frac{\tau}{2\pi n} \cdot \tan^{-1}(b_n/a_n) \qquad [6.137c]$$

L'equazione (6.134a), che descrive la diffusione di calore per conduzione in una piastra semi infinita ed omogenea, può essere risolta analiticamente col classico metodo di Fourier (Tichonov e Samarskij, 1981 e Zuo et al., 2011). Il risultato analitico che si ottiene (Cautenet et al., 1986) è il seguente:

$$T(z,t) = T_0 - \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n z} \{ a_n \cos(n\Omega t - \alpha_n z) + b_n \sin(n\Omega t - \alpha_n z) \} \qquad [6.138a]$$

dove $\alpha_n = \sqrt{n\Omega/(2D_T)}$ è un parametro che dipende dall'ordine *n* dell'armonica, dalla velocità angolare della terra e dalla diffusività termica apparente del suolo D_T. Pur essendoci nella soluzione generale (6.138a) una chiara dipendenza lineare con *z*, normalmente il termine γz è piccolo e perciò trascurabile. Inoltre, per comodità algebrica, questa equazione può essere riscritta nella più semplice forma:

$$T(z,t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n(z)\cos(n\Omega t) + B_n(z)\sin(n\Omega t)\} \quad [6.139a]$$

In questo caso, i coefficienti di Fourier presenti nella relazione non sono quelli che caratterizzano l'andamento della temperatura superficiale, ma variano con la profondità *z* e dipendono dalla diffusività termica che caratterizza il suolo secondo le relazioni:

$$\begin{aligned} A_n(z) &= exp[-\alpha_n z] \cdot [a_n \cos(\alpha_n z) - b_n \sin(\alpha_n z)] \\ B_n(z) &= exp[-\alpha_n z] \cdot [a_n \sin(\alpha_n z) + b_n \cos(\alpha_n z)] \end{aligned} \quad [6.139b]$$

Quindi, il quadrato dell'ampiezza dell'armonica *n*-esima risulta pari a:

$$A_n^2(z) + B_n^2(z) = exp[-2\alpha_n z] \cdot [a_n^2 + b_n^2] \quad [6.139c]$$

Come si vede, i coefficienti A_n e B_n alle varie profondità *z* sono strettamente legati ai coefficienti di Fourier che caratterizzano l'andamento temporale della temperatura all'interfaccia aria-suolo. Inoltre valgono le relazioni inverse:

$$\begin{aligned} a_n &= [A'_n(z) \cdot \cos(\alpha_n z) + B'_n(z) \cdot \sin(\alpha_n z)] \\ b_n &= [B'_n(z) \cdot \cos(\alpha_n z) - A'_n(z) \cdot \sin(\alpha_n z)] \end{aligned} \quad [6.139d]$$

dove $A'_n = A_n(z)/exp(-\alpha_n z)$ e $B'_n = B_n(z)/exp(-\alpha_n z)$.

La legge di Fourier (6.133a) stabilisce la proporzionalità diretta tra il flusso di calore *G* ad una profondità *z* ed il gradiente termico a quella profondità ed il coefficiente di proporzionalità è la conducibilità termica apparente K_T del suolo. Si consideri il flusso di calore *G*(*z*) che si instaura alla profondità *z*. Il suo andamento temporale, essendo legato alla temperatura dalla legge di Fourier, mostrerà in generale un andamento periodico (o approssimativamente tale) e sarà espresso, come la temperatura superficiale, da una funzione che possiamo considerare continua, periodica e *squared integrable*, cosa che consente di esprimere anche l'andamento di *G*(*z*) con una serie di Fourier infinita. Pertanto, se la conducibilità termica apparente K_T è ipotizzata costante nello spazio e nel tempo, si ha che:

$$G(z,t) = \bar{G} + \sum_{n=1}^{\infty} \{W_n(z)\cos(n\Omega t) + BY_n(z)\sin(n\Omega t)\} \quad [6.140a]$$

D'altro canto la legge di Fourier evidenzia come il flusso di calore *G* sia dipendente dal gradiente verticale di temperatura alla medesima profondità, quindi è facile verificare che il flusso di calore *G* può anche essere espresso dalla relazione:

$$G(z,t) = -K_T \frac{dT}{dz} = -K_T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{dA_n(z)}{dz}\cos(n\Omega t) + \frac{dB_n(z)}{dz}\sin(n\Omega t) \right\} \quad [6.140b]$$

dove, dalle relazioni (6.139b) si ha che:

$$\begin{aligned} \frac{dA_n}{dz} &= -\alpha_n \cdot exp(-\alpha_n z)\{\cos(\alpha_n z) \cdot (a_n + b_n) + \sin(\alpha_n z) \cdot (a_n - b_n)\} \\ \frac{dB_n}{dz} &= -\alpha_n \cdot exp(-\alpha_n z)\{-\cos(\alpha_n z) \cdot (a_n - b_n) + \sin(\alpha_n z) \cdot (a_n + b_n)\} \end{aligned} \quad [6.140b]$$

Con queste relazioni si è stabilita una relazione biunivoca tra i coefficienti dell'espansione in serie di Fourier della temperatura *T*(*z*,*t*) ed i coefficienti di Fourier dell'espansione in serie del flusso di calore *G*(*z*,*t*). In sostanza, ogni armonica dell'onda termica determina un corrispondente contributo al flusso di calore locale. Più specificatamente, i coefficienti di Fourier della relazione (6.140a) risultano espressi come:

$$\begin{aligned} W_n &= K_T \alpha_n \cdot exp(-\alpha_n z) \cdot \{\cos(\alpha_n z) \cdot (a_n + b_n) + \sin(\alpha_n z) \cdot (a_n - b_n)\} \\ Y_n &= K_T \alpha_n \cdot exp(-\alpha_n z) \cdot \{-\cos(\alpha_n z) \cdot (a_n - b_n) + \sin(\alpha_n z) \cdot (a_n + b_n)\} \end{aligned} \quad [6.140b]$$

In questo modo, i coefficienti di Fourier presenti nell'espansione (6.140a) sono stati espressi in funzione della profondità *z*, della diffusività termica apparente (attraverso il parametro α_n), della conducibilità termica apparente *k* e dei coefficienti di Fourier a_n e b_n della forzante superficiale.

Altre soluzioni analitiche

Sono possibili anche altre soluzioni analitiche dell'equazione di diffusione del calore in un mezzo continuo che derivano da scelte diverse per le condizioni iniziali ed al contorno. Una di queste soluzioni che si presenta promettente per le applicazioni è quella che si ottiene applicando il *fractional calculus* alla trasmissione del calore. I dettagli matematici del *fractional calculus* sono piuttosto complessi ed in generale possono essere trovati nel lavoro di Protic e al. (2012), mentre in Wang e Bras (1999), Bennett e al. (2008) e in Hsieh e al. (2009) sono presentati i risultati ottenuti applicando il calcolo frazionario all'equazione di diffusione del calore.

Un'altra soluzione non armonica è stata proposta da Z-H Wang e da E. Bou-Zeid che, per molti aspetti ricorda la precedente soluzione, anche se appare decisamente meno *magica*. I complessi dettagli matematici possono essere trovati sinteticamente in Z-H Wang e E. Bou-Zeid (2012) e Z-H Wang (2012).

La soluzione armonica è sicuramente la soluzione analitica dell'equazione della diffusione del calore più celebre e più usata, anche se sono state ottenute altre soluzioni analitiche basate su condizioni iniziali ed al contorno differenti. Le due soluzioni precedentemente descritte ne sono un esempio concreto ed altre se ne incontrano in Carslaw e Jaeger (1986). In pratica, solo la soluzione analitica basata sulla Trasformata di Laplace è una delle poche effettivamente impiegate nello studio del flusso di calore nel suolo, come evidenziato da Passerat de Silans e al. (1996).

Tipo di Suolo	K_T (W m^{-1}K^{-1})	C_T (J kg^{-1}K^{-1})	ρ_T (kg·m^{-3})
Suolo Sabbioso secco	0.30	800	1600
Suolo sabbioso saturato	2.20	1480	2000
Suolo argilloso secco	0.25	890	1600
Suolo argilloso saturato	1.58	1550	2000
Suolo di torba secco	0.06	1920	300
Suolo di torba saturato	0.5	3650	1100
Neve fresca	0.08	2090	100
Neve vecchia	0.42	2090	480
Ghiaccio	2.24	2100	920
Acqua (4°C)	0.57	4180	1000

Tab. 6.18: valori caratteristici di densità, calore specifico e conducibilità termica

Le proprietà termiche del suolo

Per poter utilizzare queste relazioni analitiche o direttamente le equazioni differenziali che descrivono la trasmissione del calore entro il suolo è necessario conoscerne le proprietà termiche, cioè il calore specifico, la densità e la conducibilità termica. Queste proprietà variano a seconda del tipo di suolo considerato e nella **Tab. 6.18**, sono presentati alcuni valori per la conducibilità termica, densità e calore specifico di alcuni tipi di suolo.

Seguendo Brutsaert (1984) è possibile determinare la capacità termica C_T una volta note le frazioni volumetriche del materiale minerale θ_m, del materiale organico θ_c, dell'acqua θ_w e dell'aria θ_a, con la relazione:

$$C_T = \rho_m \theta_m c_m + \rho_c \theta_c c_c + \rho_W \theta_W c_W + \rho_a \theta_a c_a \qquad [6.141a]$$

dove i termini *c* ed i termini ρ indicano i calori specifici e le densità dei quattro tipi di costituenti principali. Valori tipici per i vari costituenti sono riportati nella **Tab. 6.19**. Usando questi valori si ottiene la relazione:

$$C_T = 1.94\theta_m + 2.50\theta_c + 4.19\theta_W \qquad [6.141b]$$

	Calore specifico C_T (J $Kg^{-1}K^{-1}$)	Densità ρ (Kg m^{-1})
Materiali minerali	733	2650
Materiale organico	1926	1300
Acqua	4182	1000
Aria	1005	1.20

Tab.6.19: proprietà dei costituenti del suolo a 193 K.

6.8.2 LE PARAMETRIZZAZIONI

Come vedremo, il flusso di calore nel terreno può essere misurato con relativa facilità anche a profondità molto piccole (tipicamente 5 o 10 cm sotto l'interfaccia atmosfera-suolo), mentre resta ancora un notevole problema tecnico la sua misura esattamente all'interfaccia aria-suolo. Di tutto ciò si tratterà nel Cap. 15. Tuttavia, molto spesso per ragioni operative è necessario stimare il flusso di calore G_0 all'interfaccia aria-suolo e a questo scopo sono state messe a punto delle parametrizzazioni opportune. Un elemento che accomuna quasi tutti i metodi proposti è l'ipotesi, ben supportata dalle misure disponibili, di una proporzionalità diretta tra radiazione netta e flusso di calore nel terreno.

Modelli di Holtslag

Il più semplice modello è stato proposto da De Bruin e Holtslag (1982). Secondo tale modello G_0 (il flusso di calore all'interfaccia aria-suolo) risulterebbe direttamente proporzionale alla radiazione netta R_N secondo una relazione del tipo:

$$G_0 = c_G R_N \qquad [6.142a]$$

dove la costante di proporzionalità c_G risulterebbe pari a 0.1 nelle situazioni diurne e per superfici vegetate e 0.5 nelle situazioni notturne. Questo modello è stato ulteriormente sviluppato da Holtslag e van Ulden (1983), ottenendo la seguente espressione per la costante c_G:

$$c_G = \frac{C_H A_G}{4\sigma_B T_r^3} \qquad [6.142b]$$

dove:

- A_G è un coefficiente empirico di trasporto termico pari a 5 $Wm^{-2}K^{-1}$ o, come consigliato in De Roy e Holtslag (1999), di 9 $Wm^{-2}K^{-1}$;
- σ_B è la costante di Stefan-Boltzmann (5.6710-8 $Wm^{-2}K^{-4}$);
- T_r è la temperatura di riferimento (2 metri dal suolo);
- C_H è un coefficiente che dipende dal tipo di suolo e dalle condizioni di umidità dell'aria. Vale circa 0.12 e può essere stimato grazie alla relazione seguente:

$$C_H = 0.38 \cdot \left[\frac{(1-\alpha)+\gamma/s}{1+\gamma/s}\right] \qquad [6.142c]$$

in cui:

$$\gamma/s = exp[-0.055 \cdot (T_r - 279)] \qquad [6.142d]$$

e α è dato nella *Tab*. 6.14 per alcune situazioni tipiche.

Modello di Berkowicz e Prahm (1982a)

Secondo questo modello G_0 risulterebbe direttamente proporzionale al flusso turbolento di calore sensibile H_0 secondo la relazione:

$$G_0 = K \cdot H_0 \qquad [6.143]$$

in cui il coefficiente *K* risulterebbe pari a 0.3 per superfici vegetate.

Modello con isteresi

Un modello che pare essere molto promettente è quello presentato da Grimmond, Cleugh e Oke (1991) in ambito urbano. In tale modello la dipendenza di G_0 da R_N è maggiormente complessa rispetto ai modelli precedenti ed è data dalla relazione seguente in cui il flusso di calore nel suolo è direttamente proporzionale sia alla radiazione netta che alla sua derivata temporale:

$$G_0 = a_1 R_N + a_2 \frac{dR_N}{dt} + a_3 \qquad [6.144]$$

I tre parametri numerici presenti nella relazione variano col tipo di suolo e con le sue caratteristiche (umidità presente e variabile nel tempo). Rimandando al riferimento citato per maggiori informazioni, nella **Tab. 6.20** vengono forniti alcuni tipici valori ottenuti sperimentalmente.

Tipo di Suolo	a_1	a_2	a_3
Short grass	0.32	0.54	-27.4
Grassland	0.33	0.03	-11.0
Bare soil	0.38	0.56	-27.3
Asfalto	0.36	0.23	-19.3
Cemento	0.81	0.48	-79.9
Area Urbana tipo	0.35	0.25	-29.4

Tab. 6.20: Tipici valori per i coefficienti prenseti nella (6.166) da Grimmond e al. 1991

Modello periodico

Un'ulteriore parametrizzazione è stata sviluppata da Santanello e Friedl (2003). Sulla base di un'estesa base sperimentale relativa a tipi di terreno differenti e dall'impiego in parallelo di opportuni modelli numerici, gli Autori hanno individuato ancora una volta una relazione di proporzionalità tra R_N e G_0, in questo caso però modulata dal tempo. In particolare propongono:

$$\frac{G_0}{R_N} = A \cdot \cos\left[2\pi \frac{t + C}{B}\right] \qquad [6.145a]$$

dove *t* è il tempo in secondi relativo al mezzogiorno solare e *A, B e C* sono opportuni parametri numerici. Come era logico supporre, tali parametri non sono costanti universali e gli Autori hanno individuato valori caratteristici per *A* e *B* per tre tipiche classi di suoli: suoli aridi, suoli mediamente umidi e suoli umidi. Nella **Tab. 6.21** sono riportati i valori attribuiti a queste due costanti. Dall'analisi delle misure disponibili non è apparso che la costante *C* vari sostanzialmente al variare del tipo di suolo.

Tipo Suolo	***A***	***B***
Suolo arido	0.31	74000
Suolo mediamente umido	0.33	85000
Suolo umido	0.35	100000

Tab. 6.21: alcuni valori caratteristici dei parametri A e B del modello di Santarello e Friedl

Un'analisi accurata condotta dagli Autori ha evidenziato una relazione tra *A* e *B* e la variazione diurna della temperatura superficiale (ΔT_{rad}), ottenendo le relazioni semiempiriche seguenti:

$$A = 0.0074 \cdot \Delta T_{rad} + 0.088$$
$$B = 1729 \cdot \Delta T_{rad} + 65013 \qquad [6.145b]$$

Queste relazioni rendono evidentemente il metodo ben più generale, anche se richiedono, per la

loro applicazione, un laborioso schema iterativo che coinvolge la stima dei parametri caratteristici della turbolenza del *SL*. Partendo, però, dall'osservazione che, in generale, una variazione di ±0.05 in *A* e di ±15000 in *B* presentava un impatto decisamente limitato sulla stima, si può pensare di semplificare l'impiego di tale modello adottando per i parametri numerici del modello i valori *A* = 0.33, *B* = 85000 e *C* = 10800.

6.9 IL BILANCIO ENERGETICO SUPERFICIALE

Consideriamo il sistema fisico costituito dalla superficie terrestre e da ciò che la sovrasta (vegetazione, manufatti umani ecc.): dal bilancio radiativo superficiale è evidente che per esso risulta una *disponibilità energetica* pari alla Radiazione Netta R_N che è il risultato complessivo dei complessi meccanismi messi in atto dalla radiazione solare incidente. Al suo interno esistono fonti energetiche ulteriori, come per esempio il calore derivante dalle attività umane (si pensi per esempio alle immissioni di calore che si riscontrano nei centri abitati e nelle zone industriali). Tutta questa energia disponibile viene completamente utilizzata in vari modi. Una parte di essa viene trasferita al sottosuolo e ciò è quantificato dal flusso di calore nel suolo G_0. Parte del calore disponibile verrà pure immagazzinato da questo sistema fisico ed il calore che rimane verrà trasferito al *PBL* sia come calore vero e proprio, sia come vapor d'acqua che evapora dalla superficie terrestre. Se si trascura il calore derivante dalle attività umane, l'avvezione ed eventuali fonti come quella di tipo biologico, si ottiene il *bilancio energetico superficiale* così espresso:

$$R_N - G_0 - H_0 - H_E = \frac{\partial W}{\partial t} \qquad [6.146a]$$

dove H_E è il *flusso turbolento di calore latente* derivante dall'evaporazione dell'acqua superficiale, H_0 il *flusso di calore sensibile* e dove il membro di destra dell'equazione di bilancio rappresenta lo *storage di energia* del sistema. Quest'ultimo termine, normalmente trascurato quando si trattano situazioni caratterizzate da suoli non coperti da alberi, diventa importante in presenza di vegetazione ad alto fusto, specialmente attorno all'alba ed al tramonto, quando risulta essere dello stesso ordine di grandezza della R_N. Quando poi la superficie che si sta considerando è coperta di neve o ghiaccio, questo termine diventa generalmente il più importante perché esso include anche l'energia utilizzata per la fusione. Trascurando quindi il termine di *storage*, il bilancio energetico superficiale risulta espresso in ogni istante come:

$$R_N - G_0 = H_0 + H_E \qquad [6.146b]$$

Risulta perciò evidente come la parte di radiazione netta non trasferita al sottosuolo venga impiegata o per fornire all'aria del *PBL* immediatamente sovrastante energia sufficiente a mantenerne attivi i moti turbolenti (H_0) o per attivare l'evaporazione dell'acqua presente in corrispondenza dell'interfaccia aria-suolo (H_E). Come esempio concreto, nella **Fig. 6.65** viene presentato un bilancio energetico superficiale che evidenzia i differenti termini della relazione (1.146b). Su una superficie semiarida, come quella considerata in figura, durante le ore diurne tutti i termini del bilancio energetico superficiale risultano positivi, mentre nelle ore notturne essi diventano tutti negativi, situazione che si riscontra normalmente nelle giornate serene in tutti i siti semiaridi o coltivati. In questi ultimi e più ancora nei siti con forte presenza di vegetazione e con suolo umido, il flusso turbolento di calore latente spesso risulta più elevato del flusso di calore sensibile sia nelle ore diurne che (in modulo) in quelle notturne. Si possono incontrare, però, anche situazioni molto differenti da queste. Infatti, uno dei più tipici è l'*effetto oasi*, in cui nelle ore diurne dell'aria secca e calda proveniente dal deserto passa sopra un'oasi molto meno calda e molto più umida. Il risultato è una forte evaporazione, con un conseguente elevato flusso di calore latente, mentre il flusso sensibile spesso raggiunge valori negativi. Un altro esempio interessante è quello costituito dalle grandi distese d'acqua (mari ed oceani). In questo caso la temperatura dell'acqua marina varia molto lentamente nel tempo e in pratica è poco influenzata dalla radiazione solare. Il

risultato è un elevato flusso di calore entro il mare ed i flussi sensibile e latente, pur essendo prevalentemente positivi, risultano di piccola entità determinando sopra le superfici marine una situazione molto vicina a quella adiabatica.

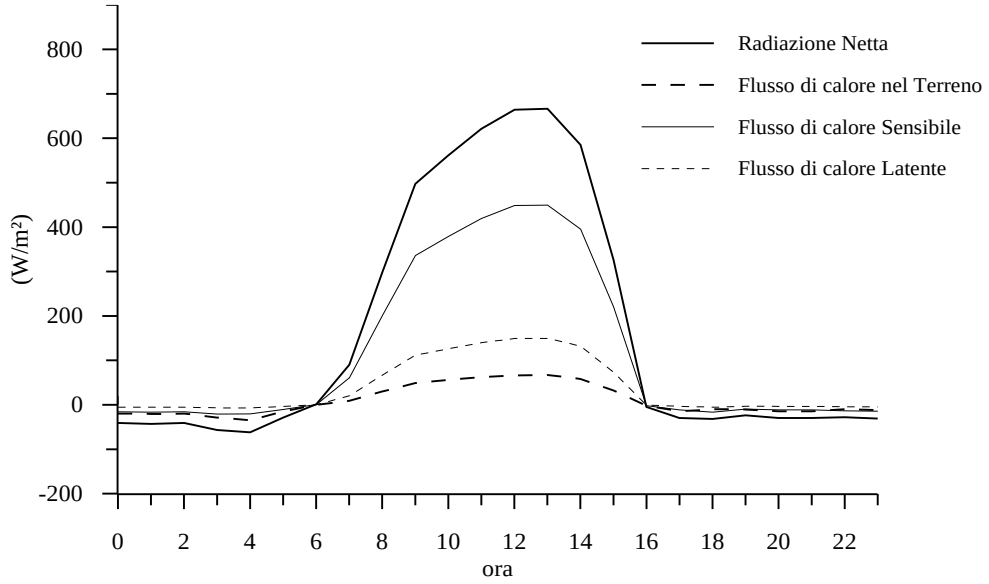


Fig. 6.65: bilancio energetico superficiale a Città del Messico (stazione di Texcoco) il giorno 20/5/1992.

I meccanismi che trasferiscono energia dall'interfaccia aria-suolo ai primi millimetri di aria sovrastanti il suolo sono *meccanismi di diffusione molecolare.* In particolare ha luogo un trasferimento di calore per *conduzione* che determina il passaggio del calore dalla superficie terrestre al primo strato di aria sovrastante, di dimensione estremamente ridotta. Tale trasferimento è regolato dalla ben nota legge di Fourier:

$$Q_H = k_H \frac{dT}{dz} \qquad [6.147]$$

dove Q_H è il flusso di calore e k_H è la diffusività termica molecolare che, per l'aria risulta pari a $2.53 \cdot 10^{-5}$ $Wm^{-1}K^{-1}$. È facile verificare come in questo straterello di aria i gradienti termici siano molto elevati. Se infatti si avesse un flusso di calore di 200 Wm^{-2}, in uno straterello di un millimetro d'aria si otterrebbe una diminuzione di temperatura di circa 8 K. Tutto questo però si esaurisce in uno strato d'aria molto piccolo in cui, in pratica, ha luogo *tutto* il trasferimento di energia al *PBL*. Sopra di esso il meccanismo principale di trasferimento termico diventa la turbolenza, con i meccanismi già considerati ai Capitoli precedenti. Ciò che è stato detto per il trasferimento di calore sensibile è vero anche per il trasferimento di calore latente. Per semplicità, è conveniente considerare una quota dove l'azione dei meccanismi molecolari risulti trascurabile e dove i principali meccanismi siano quelli turbolenti. A tale quota, i flussi sensibile e latente sono espressi, come già detto, dalle relazioni:

$$H_0 = \rho C_p \overline{w'\theta'} \qquad H_0 = \lambda \rho \overline{w'q'} \qquad [6.148a]$$

quindi il *bilancio energetico superficiale* risulta così espresso:

$$R_N - G_0 = \rho C_p \overline{w'\theta'} + \lambda \rho \overline{w'q'} \qquad [6.148b]$$

A questo punto è opportuno fare alcune considerazioni.

In precedenza è stata introdotta la temperatura virtuale il cui uso è generale in tutta la teoria del *PBL*. È importante mettere in relazione il flusso di calore sensibile così definito col

flusso di calore che si avrebbe usando al posto della temperatura potenziale la temperatura potenziale virtuale. Non è difficile verificare che:

$$\overline{w'\theta'_v} = \overline{w'\theta'} \cdot \left(1 + 0.61\frac{\overline{w'q'}}{\overline{w'\theta'}}\right) \qquad [6.149]$$

dove per la prima volta è stato introdotto il rapporto tra la covarianza verticale dell'umidità e quella della temperatura. Da tale rapporto deriva il ben noto ***Rapporto di Bowen***, definito come il rapporto tra il flusso di calore sensibile ed il flusso di calore latente:

$$B = \frac{H_0}{H_E} = \frac{C_p\overline{w'\theta'}}{\lambda\overline{w'q'}} = \gamma\frac{\overline{w'\theta'}}{\overline{w'q'}} \qquad [6.150]$$

dove $\gamma = C_p/\lambda$ è la *costante psicrometrica* che vale circa 0.0004 (g_{acqua}/g_{aria}) K^{-1}. Dalla definizione risulta evidente come *B* sia piccolo su superfici umide, a causa dell'evaporazione, e grande su superfici secche dove la maggior parte della radiazione netta verrà trasformata in calore sensibile. Valori tipici si *B* sono:

- 5 per regioni semiaride
- 0.5 per prati e foreste
- 0.1 per il mare
- valori negativi per le oasi.

Quello che risulta interessante in questa discussione è il ruolo di primario interesse che la presenza delle acque superficiali in varia forma assume nel bilancio energetico superficiale e quindi nella dinamica del *PBL*. Era evidente che il ciclo delle acque avrebbe dovuto avere una qualche influenza sulla dinamica del *PBL*, però solo a questo punto se ne comincia a vedere l'importanza. Il *PBL* non è un sistema isolato, anche se lo si tratta come tale per semplicità; esso è viceversa estremamente legato al ciclo delle acque e tra loro esiste un *feedback* inscindibile.

PROBLEMI

P06.01 Un oggetto radiante emette 1026 fotoni al secondo caratterizzati da $\lambda = 10^{-3}$ μm (quindi nella banda X). Determinare la potenza dell'oggetto radiante.

P06.02 Si consideri una superficie di acqua (per esempio la superficie di lago) sovrastata da uno spessore di ghiaccio. Se un raggio di luce rossa proveniente dall'aria sovrastante il lago incide sul ghiaccio con angolo di incidenza di 60°, determinare l'angolo di rifrazione nel ghiaccio e nell'acqua sottostante.

P06.03 Si consideri un corpo nero alla temperatura di 3000K. A quale lunghezza d'onda l'irradianza monocromatica risulta pari a $1 \cdot 10^6$ W m^{-2} μm^{-1}?

P06.04 Se una lampada emette luce a $\lambda = 0.6$ μm e se la luce emessa risulta pari a $2.6 \cdot 10^{20}$ fotoni s^{-1}, qual è la potenza della lampada?

P06.05 Si consideri la Tab. 6.2 in cui sono riportate le lunghezze d'onda corrispondenti ai vari colori. Determinare a quale temperatura si dovrebbe portare un corpo nero perché il picco di irradianza emessa corrisponda ai vari colori riportati in tabella.

P06.06 Si considerino due radiazioni elettromagnetiche, una con $\lambda = 10$ μm (infrarosso) e l'altra con $\lambda = 0.01$ μm (ultravioletto). Determinare l'energia trasportata da un fotone di ciascun tipo di radiazione considerata.

P06.07 Dimostrare la relazione (6.12d).

P06.08 Riscrivere la legge di Wien partendo dalla funzione di Planck espressa in termini di frequenza e constatare che i risultati a cui si giunge sono differenti. Nel fare ciò, mettere a punto un metodo numerico iterativo per risolvere l'equazione trascendentale che si ottiene nello sviluppo dei calcoli.

P06.09 Calcolare la sezione d'urto di singolo scattering in corrispondenza di una radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda 0.5 μm.

P06.10 Dato che il valore del raggio medio dell'orbita terrestre è di 149.6 10^6 km ed il raggio della terra è di circa 6371 km, calcolare l'angolo solido con cui il Sole vede la Terra.

P06.11 Se la costante solare vale 1368 Wm^{-2}, calcolare la temperatura della superficie solare

P06.12 Si immagini che i raggi solari attraversino perpendicolarmente l'atmosfera (cioè abbiano una direzione perpendicolare alla superficie terrestre). Se lo spessore ottico dell'intera atmosfera (dal TOA alla superficie) è pari a 0.4, qual è la riduzione percentuale d'irradianza solare tra il TOA ed il livello del mare?

P06.13 Calcolare e graficare la declinazione solare per ogni giorno dell'anno.

P06.14 Calcolare il valore orario dell'angolo di elevazione solare caratteristico della città di Roma (latitudine = 41°53', longitudine = -12°19', fuso orario = +1) all'equinozio (20 marzo), al solstizio d'estate (22 giugno) ed al solstizio d'inverno (22 dicembre).

P06.15 Calcolare la variazione annua dell'ora dell'alba e del tramonto a Roma (latitudine = 41°53', longitudine = -12°19', fuso orario = +1), a Città del Messico (latitudine = 19°24', longitudine = 99°6', fuso orario = -6) e a Buenos Aires (latitudine = -34°40', longitudine = 58°30', fuso orario = -3).

P06.16 Calcolare per il giorno 29 luglio a Roma il valore orario di radiazione solare globale se alle varie ore la copertura totale del cielo risulta pari ai valori riportati nella tabella seguente.

ora	Copertura (ottavi)	ora	Copertura (ottavi)
0	0	13	0
2	0	14	1
3	1	15	4
4	0	16	2
5	1	17	4
6	2	18	6
7	3	19	2
8	5	20	1
9	5	21	2
10	3	22	1
11	2	23	3
12	0		

P06.17 Si considerino le misure di copertura totale del cielo e di temperature vicino al suolo riportate nella tabella seguente relative al giorno 15 luglio a Roma.

ora	Copertura (ottavi)	Temp. (°C)	ora	Copertura (ottavi)	Temp. (°C)
0	0	11	13	0	32
2	0	9	14	1	33
3	1	7	15	4	32
4	0	9	16	2	29
5	1	11	17	4	27
6	2	14	18	6	24
7	3	17	19	2	21
8	5	20	20	1	18
9	5	21	21	2	13
10	3	26	22	1	11
11	2	30	23	3	9
12	0	31			

Se il sito presenta un coefficiente medio di albedo di 0.12, calcolare per quel giorno l'andamento orario della radiazione solare globale, della radiazione atmosferica, della radiazione terrestre e della radiazione netta.

P06.18 Utilizzando i risultati ottenuti al problema precedente, si usi uno dei metodi proposti per ripartire la radiazione solare globale in radiazione diretta e radiazione diffusa.

P06.19 Utilizzando i risultati ottenuti al problema precedente ed ipotizzando che il luogo considerato sia un prato verde, determinare il valore del coefficiente di albedo integrale tenendo conto dell'angolo di elevazione solare.

P06.20 Si consideri un'area urbana. Se la temperatura misurata nei pressi del suolo (2 m) è pari a 25°C, calcolare la radiazione infrarossa terrestre.

P06.21 Nella medesima area urbana si misuri una temperatura ed una umidità relativa nei pressi del suolo pari rispettivamente a 20°C e 60%. Inoltre la pressione sia di 1000 mbar. Se la copertura del cielo è di 6 ottavi, calcolare l'infrarosso atmosferico.

P06.22 Si calcoli la variazione giornaliera di temperatura alla profondità di 19 cm in un suolo avente come conducibilità termica K_T, calore specifico c_t e densità ρ rispettivamente i valori 0.25 $Wm^{-1}K^{-1}$, 890 $J\,kg^{-1}K^{-1}$ e 1600 $kg\,m^{-3}$ ipotizzando che la temperatura media giornaliera sia di 25°C e l'escursione termica giornaliera di 16°C.

P06.23 In un campo caratterizzato da una completa omogeneità orizzontale è operativa una postazione meteorologica per la sorveglianza dello stress idrico delle colture. Si ipotizzi che in un giorno

estivo, sereno e soleggiato siano state raccolte le misure di radiazione netta e di flusso di calore nel suolo riportate nella tabella seguente, tutte espresse in Wm^{-2}.

ora	R_N	G_0
0	-13	-6
1	-7	-4
2	-14	-7
3	-22	-3
4	-8	-4
5	-2	-1
6	2	0,4
7	100	20
8	300	60
9	450	90
10	520	104
11	710	142
12	750	150
13	740	148
14	600	120
15	300	60
16	10	2
17	-1	0
18	-9	-4
19	-8	-4
20	-15	-7
21	-20	-10
22	-25	-11
23	-30	-10

Se mediamente si è misurato un Rapporto di Bowen B = 0.3, determinare il valore orario del flusso turbolento di calore latente e dell'evapotraspirazione del campo.

P6.23 Sulla base delle misure e dei risultati del problema precedente, determinare il valore orario del flusso di galleggiamento (cioè del flusso di calore sensibile espresso in termini di temperatura potenziale virtuale).

7. MODELLI NUMERICI DEL PBL

Le leggi di conservazione della Fisica, applicate a quella porzione di Troposfera prossima alla superficie terrestre che è il *PBL*, hanno condotto (Cap. 2) ad un modello fluidodinamico completo e coerente costituito da un insieme di equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo prognostico in cui compaiono, come normale nella Fisica Classica, i *valori istantanei* e *puntuali* delle principali variabili di interesse (la temperatura, il contenuto di acqua in fase liquida, solida e gassosa, il vettore del moto, la pressione, ecc.). Essendo di tipo prognostico, questo modello a rigore consentirebbe di individuare, una volta note esattamente la condizione iniziale e le necessarie condizioni al contorno, lo stato e l'evoluzione nello spazio e nel tempo di tutte le grandezze fisiche che quantificano il *PBL*. E le nostre esigenze sarebbero così soddisfatte. Ma, come si è visto, purtroppo le cose non stanno proprio in questo modo. Questo modello differenziale, altamente non lineare, mostra chiaramente come il *PBL* sia un sistema caotico, cosa evidenziata dalle irregolarità apparentemente casuali che caratterizzano gli andamenti spaziali e temporali delle variabili che lo descrivono, variabilità che globalmente chiamiamo *turbolenza atmosferica*. Tutto ciò, per quanto ne sappiamo ad oggi, ci preclude una ragionevole descrizione puntuale ed istantanea di questa porzione di Troposfera. Si è poi cercato di studiare i vari aspetti della turbolenza del *PBL* (Cap. 3 e Cap. 4) e si è concluso, sulla base delle conoscenze sperimentali, che una possibile strada operativa è quella di utilizzare nella sua descrizione un approccio stocastico. Ciò è sostanzialmente un'ipotesi di lavoro che non contraddice le evidenze sperimentali. La sua adozione (Cap.5) ha consentito di riscrivere le equazioni di conservazione della Fluidodinamica non più in termini di valori istantanei e puntuali delle grandezze fisiche descrittrici del *PBL*, ma in termini di valori medi (statistici) e di momenti di ordine superiore e questo è il *Modello Operativo del PBL*. In pratica, abbiamo abbandonato la speranza di poter dire quale possa essere il valore *vero* di una generica variabile (per esempio la temperatura dell'aria) in un punto e in un istante ben preciso, accontentandoci di cercare per questa variabile il valor medio, la sua varianza, i suoi momenti di ordine superiore e la sua covarianza con altre variabili. Tuttavia, in senso stretto, anche questo modello non è veramente applicabile visto che dovrebbe essere costituito da infinite equazioni differenziali alle derivate parziali e che i momenti coinvolti sono a rigore infiniti. L'introduzione del *concetto di chiusura*, però, rende il problema dominabile ed il modello matematico che ne deriva questa volta ha un numero di equazioni finito. Questo è il vero modello operativo del *PBL*, che ci consente di ricostruire e prevedere lo stato e l'evoluzione dell'atmosfera ed è congruente con quanto siamo in grado di misurare, anche se la misura presenta non pochi problemi e difficoltà, come avremo occasione di vedere nei capitoli successivi. Di fatto, il problema vero è come *stendere un ponte* tra la realtà fisica in cui siamo in grado di stimare medie temporali (o spaziali) e momenti campionari e la realtà stocastica parallela in cui la media è la media d'insieme ed i momenti sono riferiti ad essa. Ciò sarebbe il compito dell'ipotesi di ergodicità (Cap. 3) difficile da verificare nella realtà, soprattutto nella realtà del *PBL* stabile.

Il modello operativo del *PBL* (completo di chiusura) è un modello differenziale alle derivate parziali che non ammette, se non in casi estremamente semplificati, soluzioni analitiche e perciò è necessario individuare delle metodologie numeriche adatte ad ottenerne almeno una soluzione numerica. L'importanza pratica di ciò è immediata. La necessità di ottenere una ricostruzione spaziale e temporale delle variabili che descrivono il *PBL* è evidente quando, per esempio, si cerca di comprendere quanto è esteso un fenomeno di inquinamento atmosferico, cosa che si ottiene *iniettando* nella complessa struttura atmosferica che caratterizza questa parte bassa della Troposfera gli inquinanti emessi dalle strade, dalle industrie e dalle altre sorgenti emissive presenti in un territorio. Senza una conoscenza dettagliata e profonda delle caratteristiche del *PBL* ciò sarebbe impossibile. Ma la cosa più evidente è la necessità attuale di ottenere previsioni delle

caratteristiche atmosferiche (le previsioni del tempo) che ormai condizionano la nostra vita di tutti giorni, che consentono di prevedere situazioni di crisi ambientale, i dissesti idrogeologici e le situazioni critiche di inquinamento atmosferico. Il modello operativo del *PBL* è quindi uno strumento essenziale nella ricostruzione e nella previsione dello stato e dell'evoluzione di questa parte di Troposfera, ma è pur sempre un modello differenziale e quindi complesso. In certe situazioni operative è pensabile e possibile una sua semplificazione in funzione anche dell'utilizzo che se ne fa. In effetti, nella pratica corrente sono entrate nell'uso diverse forme di semplificazione. Quando, poi, si è in condizioni stazionarie ed orizzontalmente omogenee, come vedremo al Cap. 8, è sufficiente impiegare la Teoria della Similarità che, in queste situazioni, di fatto è in grado di semplificare e addirittura in certi casi di sostituire il modello differenziale originario.

L'obiettivo di questo Capitolo è presentare un'introduzione alla modellizzazione numerica del *PBL*, cioè alla costruzione di codici di calcolo per computer in grado di descrivere e prevedere *numericamente* i vari campi meteorologici e micrometeorologici caratterizzanti il *PBL*. La trattazione, decisamente preliminare e semplificata, che faremo avrà uno sviluppo *top-down*, cioè inizierà considerando i modelli di complessità maggiore fino a terminare con le molto più modeste esigenze legate ad una stima preliminare della dispersione di inquinanti in aree limitate. Per prima cosa, però, è indispensabile classificare in qualche modo i possibili modelli numerici del *PBL*.

La prima classe di modelli numerici è la classe dei *modelli prognostici*, che comprende una moltitudine di modelli differenti aventi in comune il fatto di prevedere sia l'evoluzione spaziale che l'evoluzione temporale dei principali campi meteorologici medi e degli altri indicatori statistici (varianze, covarianze, energia cinetica turbolenta, ecc.). I modelli di questa classe hanno un'applicabilità del tutto generale. In tale classe di modelli, le misure sperimentali disponibili normalmente concorrono a definire le condizioni iniziali ed al contorno delle varie equazioni costituenti il modello, oltre che costituire un mezzo per valutarne le previsioni. Va detto che attualmente la vasta e continua disponibilità di dati meteorologici contemporanei di vario tipo prodotti dal circuito meteorologico internazionale ha consentito lo sviluppo di una disciplina potente ma complessa nota come *Data Assimilation*. Essa si pone come obiettivo di integrare periodicamente le misure disponibili nelle previsioni meteorologiche in modo da *correggerle* in maniera oggettiva sulla base della realtà misurata. Il tema è complesso ed in continua evoluzione e di esso qui non tratteremo. Si rimanda chi fosse interessato a Kalnay (2003, Cap. 5).

La seconda classe di modelli è la classe dei *modelli diagnostici*. La logica che contraddistingue questi modelli è completamente differente. In questo caso la struttura matematica su cui essi si basano è decisamente più *leggera* ed è costituita da un numero estremamente ridotto di relazioni di conservazione (generalmente la sola conservazione della massa) e da relazioni di Similarità (Cap. 8) e tutto ciò si fonda sull'impiego diretto e massiccio delle misure realizzate nella zona oggetto della simulazione modellistica. Ovviamente questi modelli non hanno un'applicabilità generale, visto che ipotizzano un'evoluzione temporale dei fenomeni meteorologici lenta e quindi approssimabile come una sequenza di stati quasi stazionari.

L'ultima classe di modelli, anche se a rigore sarebbe improprio considerarli tali, è la classe dei *processori meteorologici monodimensionali* per i modelli di simulazione della dispersione degli inquinanti in aria, normalmente di tipo ingegneristico. Dato che, per poter simulare la dispersione degli inquinanti in atmosfera, è indispensabile descrivere lo stato del *PBL*, ognuno di questi modelli ha bisogno di un adeguato modello numerico di *PBL*. Mentre i modelli di simulazione della dispersione degli inquinanti di media ed alta complessità richiedono modelli meteorologici appartenenti ad una delle due categorie precedenti, i modelli di simulazione di tipo ingegneristico normalmente impiegati nelle valutazioni preliminari di impatto hanno minori esigenze e per essi è sufficiente una descrizione monodimensionale approssimata dello stato del *PBL*. In pratica, più che di veri e propri modelli monodimensionali, essi in realtà sono semplici *processori meteorologici*, cioè programmi che, sulla base di informazioni meteorologiche (generalmente di *routine*) disponibili in un punto del territorio, frequentemente nelle prossimità del suolo, ricostruiscono i parametri meteorologici e micrometeorologici che ogni modello dispersivo richiede.

7.1 I MODELLI PROGNOSTICI DEL PBL

7.1.1 GENERALITÀ

Un *modello prognostico* è un modello numerico in grado di ricostruire e/o prevedere l'evoluzione spaziale e temporale dei campi meteorologici medi che caratterizzano l'intero *PBL* e, a volte, anche i campi di quelle variabili, come l'energia cinetica turbolenta e le varianze delle componenti del moto, della temperatura e del vapor d'acqua, che quantificano la turbolenza del *PBL*. Nella realtà dei fatti non c'è una reale distinzione di principio tra modelli che operano su domini spaziali molto diversi. A rigore, i *modelli globali*, che prendono come dominio di calcolo l'intero globo terrestre, i *modelli a mesoscala* che operano su territori di vaste dimensioni ed i *modelli a microscala* che operano su estensioni territoriali di dimensioni estremamente contenute, sono concettualmente simili, anche se all'atto pratico ciascuno di essi presenta caratteristiche proprie (nel tipo e nella forma del dominio di calcolo considerato, nel sistema di coordinate adottato, nella porzione di Troposfera considerata, nel tipo di semplificazioni introdotte nelle equazioni differenziali e nel tipo di chiusura adottata). Comunque sia, la costruzione di un modello prognostico di *PBL* passa necessariamente attraverso tre stadi logici:

- la <u>*scelta delle equazioni matematiche che costituiscono il modello*</u>: questo passo non è scontato e quanto riportato nei Cap.2 e 5 dovrebbe averlo dimostrato. Infatti, la scelta del dominio di calcolo, cioè dell'ambito spaziale e temporale cui si riferisce il modello, condiziona sempre la decisione di operare o meno opportune semplificazioni alle equazioni fluidodinamiche di base;
- la <u>*scelta del tipo di chiusura da adottare*</u>: questo stadio logico è condizionato dal precedente e, a sua volta, spesso lo condiziona. Infatti, una volta scelte le equazioni prognostiche per le principali variabili meteorologiche d'interesse, la scelta della loro chiusura spesso richiede che entrino a far parte del modello anche altre equazioni prognostiche. Per esempio, se si adotta una chiusura di tipo *K*, l'unica scelta possibile è quella delle relazioni semiempiriche con cui esprimere i coefficienti di diffusione. Viceversa, se si adotta una chiusura Mellor-Yamada o una chiusa k-ε, probabilmente alle equazioni che originariamente costituivano il modello si aggiungeranno altre equazioni prognostiche (per esempio quella dell'evoluzione temporale dell'energia cinetica turbolenta);
- la <u>*soluzione numerica del modello matematico*</u>. Anche se ci sono alcuni esempi di soluzione analitica delle equazioni fluidodinamiche (si veda per esempio il lavoro di Otte e Wyngaard, 1996) che costituiscono un modello prognostico (praticamente tutte riferite a situazioni molto idealizzate e quindi di interesse pratico veramente molto limitato), nella maggioranza dei casi è indispensabile operare una risoluzione numerica delle equazioni. Finora non è emersa una tecnica numerica risolutiva valida ed applicabile in generale e quindi, di volta in volta, si devono adottare strategie numeriche congruenti con il modello matematico adottato, con il computer utilizzato e con le necessità scientifiche che si intendono soddisfare.

7.1.2 SELEZIONE DELLE EQUAZIONI E SCELTA DELLA CHIUSURA

Trattare questo argomento in maniera rigorosa e completa è ben lontano dagli scopi di questo libro e la Letteratura disponibile è enorme e *magmatica* e, per certi versi, anche *scoraggiante*. A chi fosse interessato professionalmente all'argomento o costretto dagli eventi ad occuparsene è consigliabile riferirsi inizialmente a quanto riportato in Garratt (1992) e Sorbjan (1989) e a Pielke (2002), riferimento in cui almeno potrà orientarsi prima di immergersi nella sconfinata bibliografia di riferimento. Utili possono essere anche i lavori di Thunis e Bornstein (1996) e Avisar e al.

(1990). Comunque, una possibile guida didattica potrebbe essere costituita dal manuale del modello *TAMP* (Hurley, 2008) che ha il pregio di descrivere nel dettaglio tutte le equazioni considerate dalla parte meteorologica del modello, tutte le approssimazioni numeriche adottate, le strategie usate per definire le condizioni iniziali ed al contorno e tutti gli altri dettagli (tutt'altro che marginali) che consentono al modello di operare.

7.1.2.1 I modelli "Full Simulation" o DNS

Una prima possibilità di scelta per le equazioni del modello è costituita dall'adozione delle equazioni fluidodinamiche relative alle variabili istantanee descritte al Cap. 2. Ciò significa cercare di descrivere nel dettaglio le caratteristiche caotiche del *PBL*. Per poter fare ciò è necessario utilizzare una risoluzione spaziale e temporale molto elevata e ciò, inevitabilmente comporta che modelli di questo genere richiedano tempi di calcolo elevatissimi a fronte di domini di calcolo notevolmente ridotti e di ben poca utilità pratica. Questa scelta non ha una reale applicazione pratica negli studi del *PBL*, ma di fatto costituisce una sorta di *laboratorio fluidodinamico di tipo numerico* con cui ricostruire porzioni limitate di fluido e studiarne nel dettaglio le caratteristiche turbolente. Questo tipo di modello non richiede naturalmente alcun tipo di chiusura, ma, come detto, tempi di calcolo enormi ed un'interpretazione dei risultati ottenuti niente affatto immediata. Esso, quindi, è solo un interessante strumento di ricerca di base e per ora non costituisce uno strumento veramente operativo.

7.1.2.2 I modelli LES

Una seconda possibilità è costituita da una famiglia di modelli fluidodinamici noti col nome di *LES (Large Eddy Simulation Models)* che hanno come obbiettivo quello di *risolvere* (cioè di ricostruire numericamente nel dettaglio) i vortici di medie e grandi dimensioni presenti entro il *PBL*, parametrizzando con opportune chiusure i vortici di dimensioni inferiori. Le equazioni che li costituiscono sono derivate dalla mediazione spaziale (sul volume di una cella di dimensioni estremamente ridotte) delle equazioni fluidodinamiche non mediate. Dato che il modello è costituito da equazioni relative a valori medi, sarà necessariamente richiesta una chiusura che però questa volta sarà concettualmente molto più semplice, dato che dovrà tener conto solo delle strutture turbolente a minor scala (*subgrid parameterization*).

Questi modelli sono stati ampiamente impiegati su domini di calcolo di dimensioni contenute, anche se, rispetto ai modelli precedenti, tali domini rappresentano veramente il *PBL*. Nonostante i notevoli progressi nel loro sviluppo, grazie anche all'accresciuta potenza degli strumenti di calcolo, non possono ancora essere considerati dei veri modelli operativi ed il loro impiego è limitato quasi esclusivamente alla ricerca di base, visti gli enormi tempi di calcolo richiesti per le simulazioni. Altre informazioni si possono trovare in Moeng (1984) e nell'**Appendice 4**.

7.1.2.3 I modelli integrali

Le due possibilità presentate costituiscono le scelte scientificamente più rigorose possibili. Se, invece, consideriamo la scelta meno rigorosa possibile, arriviamo ai *modelli integrali (o slab models)* che utilizzeremo nel Cap. 8 per la previsione dell'estensione verticale del *PBL* convettivo. In pratica, essi si possono applicare solo a un *PBL* convettivo e lo descrivono impiegando solo il valore medio sull'intera estensione verticale del *PBL* delle principali variabili meteorologiche (in particolare, le componenti orizzontali della velocità del vento e della temperatura potenziale).

Un modello integrale parte dalla constatazione sperimentale che in un *PBL* convettivo il valore delle variabili meteorologiche medie varia poco in verticale (se si eccettuano i forti gradienti entro il *SL*). Quindi, se si integrano le equazioni fluidodinamiche medie su tutta l'estensione del *PBL*, supposto orizzontalmente omogeneo e isotropo, si ottengono le relazioni seguenti per le due componenti orizzontali del vento (U_m, V_m) mediate sull'intero *PBL* e per la temperatura potenziale (θ_m) anch'essa mediata dal suolo alla sommità (Sorbjan, 1989):

$$\frac{dU_m}{dt} = f \cdot (V_m - V_g) + \frac{\overline{u'w'}_s - \overline{u'w'}_{z_i}}{z_i}$$
$$\frac{dV_m}{dt} = -f \cdot (U_m - U_g) + \frac{\overline{v'w'}_s - \overline{v'w'}_{z_i}}{z_i} \qquad [7.1a]$$
$$\frac{d\theta_m}{dt} = \frac{\overline{w'\theta'}_s - \overline{w'\theta'}_{z_i}}{z_i}$$

in cui U_g e V_g sono le componenti del vento geostrofico ed i *pedici s* e z_i indicano che le diverse covarianze si riferiscono rispettivamente al loro valore assunto al suolo e alla sommità del *PBL*. Queste equazioni normalmente vengono completate da altrettante equazioni che descrivono l'evoluzione temporale della differenza di temperatura potenziale ($\Delta\theta$), e della differenza delle componenti U e V (ΔU e ΔV) che si hanno all'interfaccia tra la sommità del *PBL* e l'atmosfera libera:

$$\frac{d(\Delta U_m)}{dt} = S_x \frac{dz_i}{dt} - \frac{\overline{u'w'}_s - \overline{u'w'}_{z_i}}{z_i} + f\Delta V$$
$$\frac{d(\Delta V_m)}{dt} = S_y \frac{dz_i}{dt} - \frac{\overline{v'w'}_s - \overline{v'w'}_{z_i}}{z_i} - f\Delta U \qquad [7.1b]$$
$$\frac{d(\Delta\theta_m)}{dt} = \frac{d\theta}{dz} \cdot \frac{dz_i}{dt} - \frac{d\theta_m}{dt}$$

dove $S_x=(dU_g/dz)$ e $S_y=(dV_g/dz)$. L'insieme di queste equazioni costituisce ovviamente un modello prognostico, vista la presenza delle derivate temporali, che però richiede un'appropriata chiusura. In pratica (Lilly, 1968; Sorbjan, 1989), le equazioni di chiusura mettono in relazione le covarianze alla sommità del *PBL* con le differenze di temperatura potenziale, di U e di V che si riscontrano alla quota z_i e con la variazione della stessa z_i col tempo, come mostrato qui di seguito:

$$\overline{u'w'}_{z_i} = \Delta U \frac{dz_i}{dt}$$
$$-\overline{v'w'}_{z_i} = \Delta V \frac{dz_i}{dt} \qquad [7.1c]$$
$$-\overline{w'\theta'}_{z_i} = \Delta\theta \cdot \frac{dz_i}{dt}$$

Così formulato, il modello integrale risulta estremamente comodo, essendo costituito da un sistema di equazioni differenziali ordinarie che ammettono quindi metodi numerici di risoluzione standard ed efficienti. I tempi di calcolo richiesti sono modesti ed essi sono utilizzabili con successo ogni volta che si sia interessati a ricostruire in termini molto sintetici un *PBL* convettivo. Aggiungendo ad un modello così formulato opportune relazioni di Similarità (di tipo algebrico) che descrivono il profilo verticale di altre variabili di interesse, come per esempio la deviazione standard delle tre componenti del vento, della temperatura potenziale e delle relative *skewness*, alla fine si ottiene un modello di *PBL* sufficientemente dettagliato per poter studiare la dispersione degli inquinanti in situazioni convettive su aree limitate e a forte omogeneità orizzontale, del tutto concorrenziale con alcuni modelli di tipo diagnostico. Dettagli ulteriori su questa classe di modelli possono essere trovati nei lavori di Garret (1983) e Novak (1991).

7.1.2.4 I modelli prognostici operazionali

La maggior parte dei modelli prognostici utilizzati nelle applicazioni più comuni, avendo la necessità di descrivere la variabilità spaziale e temporale di un *PBL* in situazioni più generali (per esempio caratterizzate da una notevole estensione superficiale e da scarsa omogeneità orizzontale), si basano sulle equazioni fluidodinamiche relative alle variabili medie del *PBL*, illustrate al Cap. 5. Anche se si assiste ad una enorme variabilità dovuta prevalentemente ai differenti metodi di chiusura adottati, le equazioni che vengono selezionate in linea di principio sono:

- le equazioni prognostiche per le tre componenti medie del vento, che esprimono la conservazione della quantità di moto;
- l'equazione prognostica per la temperatura potenziale virtuale, che esprime la conservazione dell'entalpia;
- le relazioni prognostiche per il contenuto di acqua;
- la relazione differenziale che esprime la conservazione della massa;
- la equazione dei gas perfetti.

La scelta della chiusura potrebbe richiedere la presenza nel modello anche di altre equazioni prognostiche. Ricordando quanto presentato sempre nel Cap. 5, se si adotta una chiusura locale di tipo *K* o la chiusura non locale di Stull, non è necessario l'introduzione nel modello di altre equazioni prognostiche. Quello che è necessario, invece, è la determinazione, nel primo caso, di opportune relazioni semiempiriche per esprimere i coefficienti diffusivi e, nel secondo caso, di un modello (di tipo sostanzialmente algebrico) per l'implementazione del meccanismo di dispersione non locale (per esempio la determinazione del potenziale ed alla fine della *transilient matrix*). Se, invece, le chiusure sono di ordine superiore, è indispensabile individuare altre equazioni prognostiche che, nella maggior parte dei casi, si riducono alla sola equazione relativa all'energia cinetica turbolenta. Chiaramente il tempo di calcolo richiesto dal modello sarà più che proporzionale al numero di equazioni prognostiche da integrare numericamente.

Dato che, però, questi tipi di modelli saranno applicati a situazioni reali, potranno sorgere anche altri tipi di problemi. Il primo è legato al sistema di coordinate da adottare e ciò dipende, almeno in parte, dal dominio di calcolo considerato.

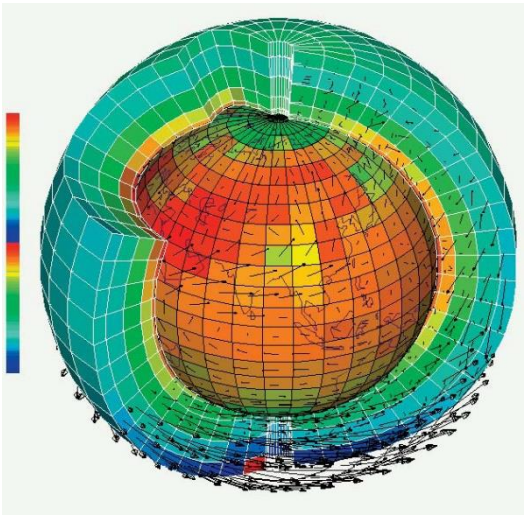


Fig. 7.1: dominio di calcolo di un modello globale

Consideriamo inizialmente un *modello globale* che si incarica di ricostruire e predire lo stato e l'evoluzione dell'atmosfera su tutto il globo. Inevitabilmente il dominio di calcolo che lo caratterizza è rappresentato da un dominio sferico che avvolge l'intera superficie terrestre, come mostrato in **Fig. 7.1**. Questo dominio, che, come è evidente, ha la proprietà di avere condizioni al contorno periodiche, richiede naturalmente che tutte le equazioni differenziali vengano riscritte impiegando le coordinate sferiche.

Se, invece, si considera un *modello ad area limitata* il cui dominio di calcolo è rappresentato da un'estesa area, come per esempio l'intera Europa (**Fig. 7.2**), allora le coordinate potranno essere le coordinate geografiche (latitudine e longitudine). Come si vede, in questo tipo di modelli bisogna comunque tener conto della curvatura terrestre.

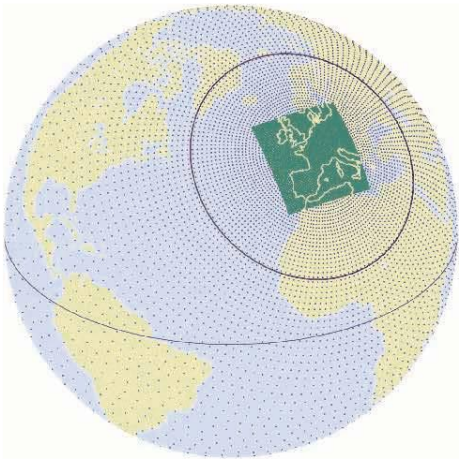


Fig. 7.2: dominio tipico di un modello ad area limitata

Se, infine, si considera *un modello di PBL* con una dimensione caratteristica del dominio dell'ordine delle decine o centinaia di chilometri (**Fig. 7.3**), le coordinate più logiche da utilizzare sono le normali coordinate cartesiane ortogonali se la superficie è piatta o le coordinate cartesiane ortogonali in orizzontale ed una coordinata *terrain-following* per descrivere la verticale in presenza di orografia significativa.

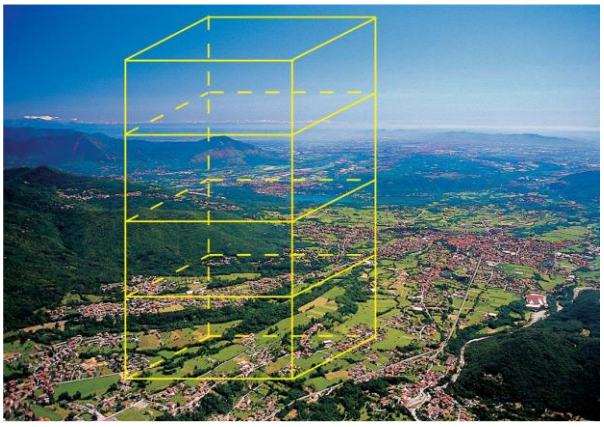


Fig. 7.3: dominio tipico di un modello di PBL

In ogni caso, qualunque sia il sistema di coordinate più funzionale al dominio di calcolo scelto, è sempre possibile trasformarle in coordinate cartesiane ortogonali e viceversa. Infatti, consideriamo inizialmente un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Le equazioni fluidodinamiche sono state scritte e presentate in termini di coordinate cartesiane (x,y,z), riferite ad un sistema cartesiano ortogonale arbitrario, che frequentemente (ma non sempre) è quello meteorologico ben noto. Tuttavia, se la regione su cui viene applicato il modello è vasta, è probabile che sia necessario adottare altri tipi di coordinate, come per esempio la latitudine e la longitudine. Per quanto riguarda la coordinata verticale z, anche se potrebbe sembrare una scelta naturale e ragionevole, spesso il suo uso risulta estremamente difficoltoso in presenza di orografia. Alla luce di ciò, spesso i modellisti adottano sistemi di riferimento non cartesiani che richiedono la riscrittura delle equazioni prognostiche in funzione del nuovo sistema di coordinate e ciò sempre comporta una complicazione formale in queste equazioni. Dal punto di vista matematico, la *trasformazione di coordinate* può essere trattata nel modo seguente.

Si consideri un sistema di riferimento cartesiano (x,y,z) ed un secondo sistema di riferimento (ξ,η,ζ) in cui ci interessa trasformare le varie equazioni differenziali considerate. Formalmente, tra i due sistemi di riferimento esisterà la trasformazione:

$$\begin{aligned} x = x(\xi,\eta,\zeta) \quad &\Leftrightarrow \quad \xi = \xi(x,y,z) \\ y = y(\xi,\eta,\zeta) \quad &\Leftrightarrow \quad \eta = \eta(x,y,z) \\ z = z(\xi,\eta,\zeta) \quad &\Leftrightarrow \quad \zeta = \zeta(x,y,z) \end{aligned} \qquad [7.2a]$$

Queste relazioni, qui scritte in maniera del tutto generica, legano funzionalmente tra di loro i due sistemi di coordinate e ciò consente di passare da un sistema all'altro in maniera relativamente semplice. Infatti, se il *Determinante Jacobiano*, definito come:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \qquad [7.2b]$$

risulta non nullo e positivo, allora è immediato verificare che valgono le relazioni seguenti:

$$\begin{vmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{vmatrix} \qquad [7.2c]$$

Esse consentono quindi di *trasformare* le derivate parziali originariamente scritte rispetto alle coordinate cartesiane (*x*,*y*,*z*) nel nuovo sistema di riferimento. Se, per esempio, consideriamo una generica derivata parziale rispetto a *x*, si ha che:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \qquad [7.3a]$$

e quindi è chiaro che l'introduzione del nuovo sistema di riferimento rende notevolmente più complica la scrittura delle varie equazioni di bilancio che costituiscono il modello operativo del *PBL*. Se, per esempio, considerassimo la semplice relazione seguente in cui compaiono contemporaneamente le derivate parziali prime temporali e spaziali rispetto al sistema di coordinate cartesiane ortogonali (*x*,*y*,*z*):

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial z} = E \qquad [7.3b]$$

essa si trasformerebbe nella ben più complessa forma seguente se volessimo esprimerla rispetto ad un nuovo sistema di coordinate (ξ,η,ζ) legato al sistema (*x*,*y*,z) dalle relazioni (7.2a):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(IA) + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(J\frac{\partial \xi}{\partial x}B + J\frac{\partial \xi}{\partial y}C + J\frac{\partial \xi}{\partial z}D\right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(J\frac{\partial \eta}{\partial x}B + J\frac{\partial \eta}{\partial y}C + J\frac{\partial \eta}{\partial z}D\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(J\frac{\partial \zeta}{\partial x}B + J\frac{\partial \zeta}{\partial y}C + J\frac{\partial \zeta}{\partial z}D\right) = JE \end{aligned} \qquad [7.3c]$$

Ulteriori dettagli su questo difficile argomento possono essere trovati in Pielke (2002) e Xue e al. (1995). Nel seguito, dato che il nostro obiettivo primario è esclusivamente didattico, trascureremo tale problema e considereremo sempre le equazioni prognostiche scritte in termini di coordinate cartesiane, anche se in Hurley (2008) si può analizzare il dettaglio delle varie equazioni scritte in un particolare tipo di coordinate *terrain-following*.

Un altro problema da risolvere è la scelta della *dimensionalità* del modello. Anche se la logica vorrebbe che il modello fosse tridimensionale, il tempo di calcolo richiesto dall'integra-

zione delle equazioni differenziali che lo compongono, più che proporzionale alla dimensionalità del problema, a volte può consigliare scelte diverse. Per esempio, se si sta studiando il *PBL* costiero, è ragionevole ritenere che sia presente in un tale problema un certo grado di omogeneità lungo la direzione parallela alla costa e quindi può essere consigliabile riscrivere le equazioni del modello in modo tale da evidenziare esclusivamente la variabilità spaziale lungo la direzione perpendicolare alla linea di costa e lungo la verticale. Quando, invece, si sta considerando una regione pianeggiante e fortemente omogenea in orizzontale, può essere sufficiente ridursi ad un modello monodimensionale che evidenzi solo la variabilità verticale del problema.

Ciò premesso, cerchiamo ora di definire una situazione realistica che dovrà servirci a livello didattico per descrivere in pratica come è articolato un modello di tipo prognostico. Per gli scopi di questo libro ci sembra sufficiente cercare di sviluppare un caso relativamente semplice di modello prognostico di *PBL* nella maniera più didattica possibile, sperando che ciò consenta al lettore di orientarsi poi in riferimenti bibliografici più sofisticati e più complessi. Per prima cosa, cerchiamo di limitare l'attenzione al problema del *PBL* e quindi consideriamo un dominio di calcolo relativamente limitato, con un'estensione orizzontale di qualche decina (al massimo un centinaio) di chilometri e un'estensione verticale che non superi 1.5÷2 volte l'estensione verticale massima del *PBL* (z_i) (indicativamente circa 3000-4000 metri). In questo modo, è sufficiente considerare un sistema di coordinate orizzontali di tipo cartesiano ortogonale, evitando l'impiego di coordinate differenti (latitudine e longitudine per esempio) che complicherebbero fortemente la scrittura delle equazioni differenziali del modello. Per quel che riguarda la coordinata verticale, immaginiamo per semplicità che il suolo su cui stiamo ricostruendo numericamente il *PBL* (la superficie inferiore del dominio di calcolo) sia piana e quindi che la normale coordinata *z* sia una scelta naturale ed immediata. Pertanto, sotto queste ipotesi semplificative, è possibile continuare a considerare il normale sistema di riferimento cartesiano ortogonale normalmente impiegato in meteorologia. Nel Cap. 5 è stato dettagliatamente presentato il modello operativo del *PBL* e da lì dobbiamo trarre le relazioni matematiche da impiegare. Anche in questo caso la materia è *magmatica e disorientante* e non è facile raccapezzarsi tra differenti tipi di approssimazioni e differenti tipi di chiusure usate e presentate dai vari Autori nella Letteratura scientifica. Dato che il nostro obiettivo è in questo caso puramente didattico, è sufficiente considerare la situazione idrostatica ed una chiusura di tipo *K*. Quindi, seguendo Panofsky e Dutton (1983) e Bornstein e al. (1987), le equazioni prognostiche che verranno considerate, trascurando il vapor d'acqua ed eventuali sostanze inquinanti, sono:

- il bilancio della quantità di moto che porta alle due equazioni prognostiche che descrivono l'evoluzione spaziale e temporale delle due componenti orizzontali medie del moto dell'atmosfera:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial x}&=f(v-v_g)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_m\frac{\partial u}{\partial z}\right)+K_H\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial v}{\partial x}&=f(u_g-u)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_m\frac{\partial v}{\partial z}\right)+K_H\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\end{aligned} \qquad [7.4a]$$

- l'equazione di continuità in forma incomprimibile che esprime il bilancio di massa:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad [7.4b]$$

- l'equazione di bilancio dell'entalpia che conduce all'equazione prognostica per la temperatura potenziale virtuale:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}+u\frac{\partial \theta}{\partial x}+v\frac{\partial \theta}{\partial x}+w\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}\left(K_h\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)+K_H\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{\rho C_p}\frac{\partial R}{\partial z} \qquad [7.4c]$$

In queste equazioni con *u*, *v* e *w* sono indicate le componenti cartesiane medie del moto e con θ

la temperatura potenziale media. Il modello viene, poi, completato dall'equazione idrostatica che descrive la variazione della pressione con la quota, dalla legge di stato dei gas e dalla definizione di temperatura potenziale. Tutte le variabili presenti in queste relazioni sono tutte *variabili medie* ed i vari coefficienti di diffusione turbolenta *K* presenti stanno ad indicare l'adozione della semplice chiusura del primo ordine (chiusura di tipo *K*). Questi ultimi non costituiscono un problema pratico: una volta noti i parametri caratteristici del *PBL* (u_*, H_0 *e* z_i) la loro determinazione risulta semplice, applicando le diverse correlazioni semiempiriche riportate in Letteratura e presentate in precedenza.

Nel caso in cui fosse possibile ridurre questo problema tridimensionale ad un problema monodimensionale per simulare una situazione fortemente omogenea in senso orizzontale, tali equazioni si ridurrebbero alla forma seguente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= f(v - v_g) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_m \frac{\partial u}{\partial z}\right)\\ \frac{\partial v}{\partial t} &= f(u_g - u) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_m \frac{\partial v}{\partial z}\right)\\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(K_h \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) + \frac{1}{\rho C_p}\frac{\partial R}{\partial z}\end{aligned} \qquad [7.5]$$

A questo punto, definito l'insieme delle equazioni che costituiscono il modello matematico del *PBL* che ci sembrano rappresentare la situazione su cui dobbiamo operare e le dimensioni e la forma del dominio di calcolo cui siamo interessati, è necessario sviluppare un metodo numerico per la sua integrazione.

7.1.3 METODI NUMERICI DI INTEGRAZIONE DEL MODELLO DI PBL

Prendiamo a riferimento il modello di *PBL* definito dalle equazioni (7.4) in cui sono state adottate le normali coordinate cartesiane ortogonali. Per prima cosa definiamo il *dominio di calcolo*, cioè l'ambito spaziale entro cui effettuiamo i calcoli. Tale dominio, schematicamente rappresentato nella parte sinistra della **Fig. 7.4,** è un parallelepipedo caratterizzato da un'estensione L_x in direzione *x*, L_y in direzione *y* e L_z in direzione *z* e che, per semplicità, ripartiamo in celle regolari aventi gli spigoli di dimensione Δx, Δy e Δz rispetto ai tre assi coordinati.

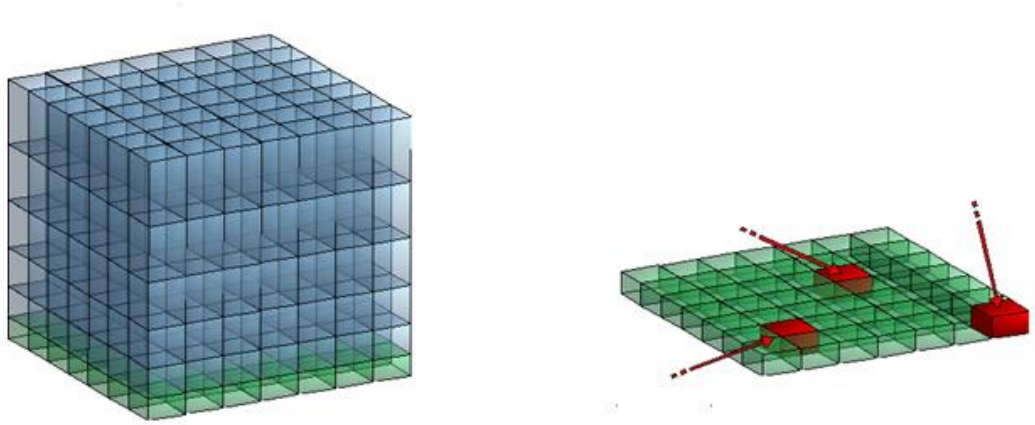


Fig. 7.4: il dominio di calcolo di un modello prognostico del PBL.

Il dominio di calcolo che consideriamo non è più, come nel caso del dominio di indagine, una porzione continua di spazio fisico, ma è diventato un insieme discreto di celle elementari e ciò ha un profondo significato fisico e notevoli implicazioni pratiche. Così facendo, si abbandonano infatti le *speranze* di poter conoscere in ogni punto dello spazio il valore delle diverse grandezze che caratterizzano il *PBL* e ci si *accontenta* di attribuire ad ogni singola cella del dominio un

unico valore per ciascuna grandezza. Quindi, la *risoluzione spaziale* della soluzione numerica del modello operativo del *PBL* è determinata rigidamente dalle dimensioni della cella e sarà tanto maggiore, quanto più piccola è la cella elementare. Ma, dato un dominio di calcolo definito, minore è il volume della cella, maggiore sarà il numero complessivo di celle che lo compongono e dato che il tempo di calcolo richiesto per risolvere le varie equazioni del modello è in sostanza proporzionale al numero di celle, l'aumento della risoluzione spaziale del modello corrisponde anche ad un aumento del tempo di calcolo necessario per ottenere la soluzione numerica. Nella parte destra di **Fig. 7.4** viene evidenziato lo strato orizzontale di celle a diretto contatto col suolo. In esse ha luogo lo scambio di quantità di moto, di calore e di gas atmosferici (per esempio vapor d'acqua) e in alcune di esse (quelle colorate in rosso ed evidenziate da una freccia) possono essere localizzate stazioni meteorologiche e/o micrometeorologiche che misurano alcune grandezze caratterizzanti il *PBL*. A questo proposito va fatta una considerazione importante. Consideriamo, per fissare le idee, la temperatura dell'aria misurata in una stazione meteorologica posta ad una quota *z* e in un punto *P* entro una delle celle rosse della figura. Questa misura è rappresentativa della posizione locale in cui essa è stata realizzata, mentre il modello operativo di *PBL* fornirà una soluzione numerica nello stesso istante in cui è stata realizzata la misura che però è rappresentativa dell'intera cella in cui è posta la stazione. Mentre la misura non vede tutta la realtà della cella ma solo ciò che influenza sé stessa effettivamente, così la soluzione numerica del modello relativo a quella cella ignora completamente i dettagli che caratterizzano la cella stessa, considerandola completamente omogenea. Questa considerazione è di fondamentale importanza quando si confrontano tra loro le simulazioni modellistiche e le corrispondenti misure sperimentali.

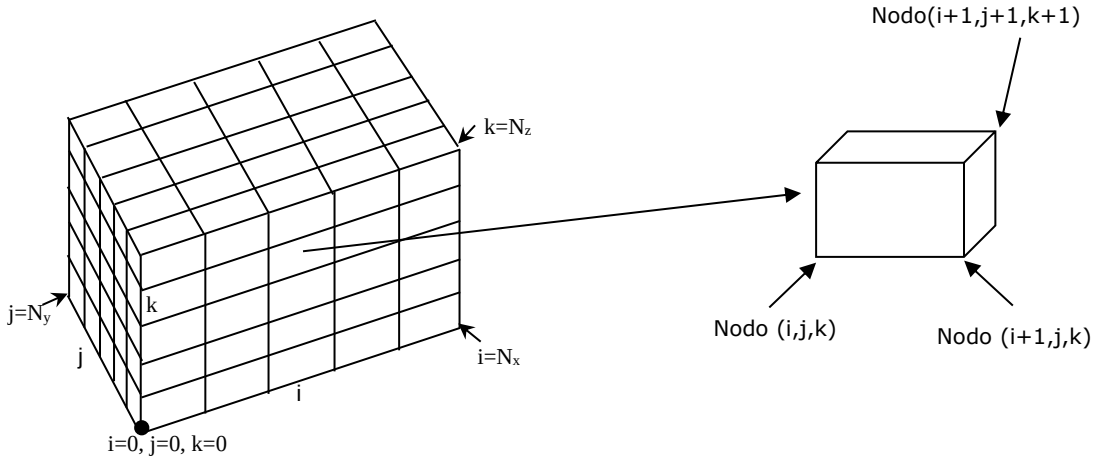


Fig. 7.5: la convenzione di indici utilizzata

Il dominio di calcolo è quindi costituito da un insieme di celle elementari e ciò può essere visto in maniera del tutto equivalente come la sovrapposizione di *una griglia di calcolo* al dominio di calcolo in cui sono evidenziati un insieme di *nodi* che possono essere identificati col centro di ogni cella o con gli spigoli di ognuna di esse. Per identificare i nodi della griglia in maniera univoca si utilizza convenzionalmente (**Fig. 7.5**) una terna di indici (i, j, k). L'indice i individua la coordinata x; la distanza tra il nodo i e il nodo $i+1$, è Δx e l'indice i varia da 0 a $N_x = L_x/\Delta x$. Analogamente capiterà per l'indice j (relativo all'asse y) e per l'indice k (relativo all'asse z). Per ragioni di semplicità didattica, qui si è ipotizzato di considerare il dominio di calcolo suddiviso in celle elementari identiche. Nella realtà delle implementazioni spesso si varia la dimensione verticale Δz delle celle che compongono gli strati orizzontali che si vanno a sovrapporre. I metodi utilizzati per effettuare questa variazione della dimensione verticale delle celle possono essere i più vari, comunque la strategia più diffusa è quella di aumentare progressivamente Δz con l'aumentare della distanza tra lo strato orizzontale di celle ed il suolo.

In realtà, il dominio dovrebbe essere *quadridimensionale*, con la quarta dimensione

costituita dal tempo. La simulazione partirà ad un generico tempo $t_0 = 0$ e terminerà dopo un periodo T. Possiamo, anche in questo caso, dividere l'intero tempo di simulazione in intervalli temporali Δt e analogamente potremo definire un *indice temporale n*, $n = 0,1,..,N_t$, con $N_t = T/\Delta t$.

Tutte le equazioni che costituiscono il modello sono equazioni differenziali alle derivate parziali e nessuna di esse, in condizioni realistiche, ammette soluzioni di tipo analitico. Tra l'altro, se consideriamo per esempio una delle (7.4a), notiamo che non può essere classificata in una delle classi tipiche (ellittica, parabolica ed iperbolica) previste dalla Teoria delle Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali. Non essendo possibile in generale una loro integrazione analitica, sarà pertanto indispensabile una loro *approssimazione numerica* per far sì che sia possibile una loro risoluzione. Per una trattazione più dettagliata dell'argomento si rimanda a Pielke (2002), Ferziger e Perìc (1997), Patankar (1980), Duran (1999) e a Mitchell e Griffiths (1995) e si segnalano i libri di Causon e Mingham (2010) e di Sayma (2009) per una trattazione decisamente più semplice. In questa sede si presenterà solo un'introduzione al problema dell'approssimazione numerica delle equazioni del modello di *PBL* con esclusivo interesse didattico (privilegiando la comprensione a scapito del rigore), anche se parecchie tecniche presentate sono state realmente applicate in modelli reali. La chiave di volta della soluzione delle (7.4a) e delle altre equazioni differenziali costituenti il modello sta nell'individuare la loro parentela con equazioni differenziali più semplici e più facilmente trattabili, cosa che faremo immediatamente di seguito e nel ricordare che la risoluzione numerica delle equazioni differenziali alle derivate parziali è un mestiere complesso che non si improvvisa.

7.1.3.1 Le basi del Metodo alle Differenze Finite

Il primo passo necessario alla risoluzione numerica di qualsiasi equazione differenziale alle derivate parziali è la loro approssimazione discreta. Prima di iniziare ad esplorare questo argomento, è importante sottolineare la profonda differenza concettuale tra la *risoluzione analitica* di una equazione differenziale alle derivate parziali e la sua *risoluzione numerica*. Nel primo caso, una volta definito un dominio di calcolo continuo ed opportune condizioni iniziali ed al contorno, si ricerca una funzione che sia la soluzione di questa equazione nell'intero dominio. Se siamo stati in grado di ottenere la soluzione di questa equazione differenziale, saremo sicuramente in grado di determinare il valore esatto della soluzione in qualsiasi punto del dominio quadridimensionale di calcolo. Nel caso, invece, della risoluzione numerica di un'equazione differenziale, le cose non stanno così. Come abbiamo visto, non si considera più un dominio di calcolo continuo, bensì si limita l'attenzione ad un dominio di calcolo discreto, costituito da un numero finito di punti e si cercherà il valore della soluzione solo in corrispondenza a questi punti. Per chiarire il concetto, si consideri un'equazione differenziale in cui sia presente una variabile ξ (per es. la temperatura potenziale) ed un dominio spaziale costituito da un insieme di punti equidistanti collocati sull'asse x. Il dominio di calcolo (limitato e discreto) è quindi costituito dagli N punti $x_i = x_0 + (i\text{-}1)\cdot\Delta x$ con $i = 1, 2,\ldots, N$, dove Δx è la spaziatura tra un punto e l'altro, x_0 è l'estremo inferiore del dominio di calcolo e $x_0 + (N\text{-}1)\cdot\Delta x$ è il relativo estremo superiore. La soluzione analitica dell'equazione differenziale sarà la funzione $\xi = \xi(x)$, mentre la soluzione numerica sarà l'insieme di valori (numeri, quindi) ξ_i in corrispondenza degli N punti (nodi) del dominio di calcolo (*griglia*).

La risoluzione numerica di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali (*PDE*) può essere ottenuta con diverse tecniche numeriche, tra le quali le principali sono il Metodo alle Differenze Finite, il Metodo agli Elementi Finiti ed il Metodo ai Volumi Finiti. Per una breve descrizione di ognuno di essi si rimanda a Sayma (2009). Dato che la maggior parte dei modelli di *PBL* usa come metodo numerico di integrazione delle equazioni differenziali il Metodo delle Differenze Finite, qui ci concentreremo solo nella descrizione delle caratteristiche essenziali di tale metodo.

Il cuore del Metodo alle Differenze Finite è la sostituzione nelle equazioni differenziali alle derivate parziali di tutte le derivate con delle loro opportune approssimazioni. Così facendo si eliminano tutti gli operatori differenziali presenti nelle equazioni che quindi si riducono ad un

sistema di equazioni algebriche. Lo strumento utilizzato dal Metodo alle Differenze Finite è il *Teorema di Taylor* secondo cui, data una generica funzione $\xi(x)$, continua e dotata di n derivate continue in un intervallo (a,b), il suo valore nel punto $x + h$ ($x + h < b$) è dato esattamente dalla seguente espansione in serie:

$$\xi(x+h) = \xi(x) + h\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}\xi}{\partial x^{n-1}} + O(h^n) \qquad [7.6a]$$

dove $O(h^n)$ è un errore incognito su cui è necessario fare alcune riflessioni. Se in questa espansione in serie si trascura l'errore $O(h^n)$, allora la serie troncata che resta è l'*approssimazione* di $\xi(x+h)$. Per definizione, se poniamo $f(h) = O(h^n)$, allora per h sufficientemente piccoli abbiamo:

$$\frac{f(h)}{h^n} \approx C \qquad \Longrightarrow \qquad O(h^n) = f(h) \approx Ch^n \qquad [7.6b]$$

dove C è una costante. In pratica, se l'errore è $O(h^2)$, dimezzando h l'errore si riduce di un fattore $2^2 = 4$.

Esercizio 7.1

Consideriamo la funzione $U(x) = x^2$. La serie di Taylor troncata al primo termine ci consente di esprimere la sua derivata prima in funzione di h. Infatti, è immediato verificare che:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U(x+h) - U(x)}{h}$$

Questo comporta che:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Se consideriamo il punto $x = 3$, il valore esatto della derivata prima della funzione è pari a 6. Se $h = 0.1$, vediamo immediatamente come la sua approssimazione ottenuta troncando al primo termine la serie di Taylor risulti pari a 6.1. Come si vede, l'errore di troncamento è direttamente proporzionale (in questo caso è uguale) all'incremento h. Se invece $h = 0.05$, cioè la meta del precedente, si vede immediatamente come l'approssimazione della derivata prima sia pari a 6.05.

L'espansione in Serie di Taylor di una funzione ed il suo troncamento può essere realizzato in molti modi differenti, ottenendo di volta in volta schemi diversi di approssimazione per le derivate prime e seconde, ognuna con errori di troncamento differenti. Qui di seguito studieremo sistematicamente come sia possibile ottenere queste approssimazioni numeriche degli operatori differenziali che compaiono nelle diverse equazioni differenziali che compongono il modello operativo del *PBL*, caratterizzando ogni schema ottenuto col proprio errore di troncamento. Nelle equazioni del modello una generica variabile ξ dipende sia dalle variabili spaziali (x,y,z) che dal tempo t, ma senza perdere di generalità, per studiare i vari schemi di approssimazione è sufficiente considerare una funzione ad una variabile, che indicheremo con $\xi(x)$, ed un dominio monodimensionale discreto costituito da punti equispaziati alla distanza Δx.

Schemi *forward* e *backward* delle derivate spaziali

Anche se, a prima vista, l'approssimazione numerica di una derivata parziale può *sembrare* un gioco fantasioso ed arbitrario, in realtà rispetta regole chiare e rigorose. Per dimostrare ciò, si consideri un dominio monodimensionale localizzato lungo l'asse x e costituito dai punti di griglia $x_i = x_0 + (i\text{-}1)\Delta x$. I suoi estremi sono x_0 (estremo inferiore) e x_N (estremo superiore). Per comodità, si immagini di adottare come unità di misura la distanza $(x_N - x_0)$, quindi $\Delta x = (x_N - x_0)/(N\text{-}1)$, perciò sicuramente un numero inferiore a 1. Nelle applicazioni pratiche non si usa questa unità di misura, ma nelle considerazioni teoriche è di notevole aiuto per la stima degli errori di approssimazione. Consideriamo ora l'espansione in serie di Taylor della variabile $\xi(x_i+\Delta x) = \xi_{i+1}$ nel nodo $i + 1$:

$$\xi(x_i + \Delta x) = \xi_{i+1} = \xi_i + \Delta x \left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_i + \left.\frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right|_i + \left.\frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3}\right|_i + \cdots \quad [7.7a]$$

Da questa equazione di infiniti termini si ottiene:

$$\left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_i = \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\Delta x} - \left.\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right|_i - \left.\frac{\Delta x^2}{3!}\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3}\right|_i - \cdots \quad [7.7b]$$

In pratica questa relazione ci garantisce che la derivata parziale di ξ nel nodo x_i è data dal rapporto incrementale tra i nodi x_i e x_{i+1} a cui si sottraggono infiniti termini, il primo proporzionale a Δx, il secondo proporzionale a $(\Delta x)^2$ e così via. Relativamente a Δx, il primo termine proporzionale a Δx ed indicato come $O(\Delta x)$, risulta superiore al secondo, proporzionale a $(\Delta x)^2$ ed il secondo sarà superiore al terzo e così via. Quindi, a parole, possiamo dire che dalla (7.7b) risulta che la derivata parziale di ξ risulta pari al rapporto incrementale tra i nodi x_i e x_{i+1} più infiniti termini che, complessivamente, rappresentano un *termine di errore* proporzionale a Δx, cioè un termine $O(\Delta x)$. Trascurando i termini di errore nella (7.7b), abbiamo quindi individuato *l'Approssimazione Forward* per la derivata parziale prima di ξ:

$$\left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_i \cong \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\Delta x} \quad [7.7c]$$

che è caratterizzata da un errore di approssimazione del primo ordine $O(\Delta x)$.

Consideriamo, ora, il punto dell'asse spaziale discretizzato x_i -Δx. Per esso lo sviluppo in serie di Taylor risulta essere pari a:

$$\xi(x_i - \Delta x) = \xi_{i-1} = \xi_i - \Delta x \left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_i + \left.\frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right|_i - \left.\frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3}\right|_i + \cdots \quad [7.8a]$$

È immediato constatare che da questa equazione è possibile ottenere una nuova approssimazione per la derivata parziale di ξ nel punto x_i; ancora del primo ordine con un errore $O(\Delta x)$. Tale approssimazione, nota come *Approssimazione Backward*, risulta data dalla relazione seguente:

$$\left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_i \cong \frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{\Delta x} \quad [7.8b]$$

anch'essa caratterizzata da un errore di approssimazione $O(\Delta x)$. A questo punto siamo stati in grado di ottenere due schemi diversi di approssimazione della derivata parziale prima di ξ.

Dedichiamoci ora alla ricerca di *schemi approssimati per la derivata seconda*. Se consideriamo, a tal proposito, le due espansioni di Taylor seguenti:

$$\xi(x_i + \Delta x) = \xi_{i+1} = \xi_i + \Delta x \left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_i + \left.\frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right|_i + \left.\frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3}\right|_i + \cdots \quad [7.9a]$$

$$\xi(x_i + 2\Delta x) = \xi_{i+2} = \xi_i + 2\Delta x \left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_i + \left.\frac{4\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right|_i + \left.\frac{8\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3}\right|_i + \cdots \quad [7.9b]$$

e sottraiamo alla (7.9b) la (7.9a) moltiplicata per 2, alla fine otteniamo:

$$\left.\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right|_i = \frac{\xi_{i+2} - 2\xi_{i+1} + \xi_i}{(\Delta x)^2} - \Delta x \left.\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3}\right|_i - \cdots \quad [7.9c]$$

Da questa relazione è immediato individuare un'*Approssimazione Forward per la derivata parziale seconda*, data da:

$$\left.\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right|_i \cong \frac{\xi_{i+2} - 2\xi_{i+1} + \xi_i}{(\Delta x)^2} \quad [7.9d]$$

con un errore di approssimazione dell'ordine di Δx, cioè $O(\Delta x)$. Con ragionamenti del tutto

analoghi si giunge all'*Approssimazione Backward per la derivata seconda*:

$$\left.\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right|_i \cong \frac{\xi_i - 2\xi_{i-1} + \xi_{i-2}}{(\Delta x)^2} \qquad [7.9e]$$

anch'essa caratterizzata da un errore $O(\Delta x)$.

Gli schemi *forward* e *backward* fin qui ottenuti presentano tutti (sia per le derivate prime che per le derivate seconde) un errore di approssimazione $O(\Delta x)$ e quindi vengono indicati come *approssimazioni del primo ordine*, ovviamente in Δx.

Potremmo essere interessati anche a schemi di approssimazione di ordine maggiore, cioè a schemi caratterizzati da un termine di errore proporzionale a $(\Delta x)^2$ (secondo ordine), $(\Delta x)^3$ (terzo ordine) e così via, virtualmente più precisi. Ciò è ovviamente possibile, anche se la loro deduzione risulta un poco macchinosa (Jacobson, 2000). Come esempio concreto, consideriamo la (7.7a) da cui otteniamo:

$$\left.\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|_i = \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{2}\left.\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right|_i - \frac{\Delta x^3}{3!}\left.\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}\right|_i + \cdots \qquad [7.10a]$$

e sostituiamo alla derivata seconda l'approssimazione (7.9d), ottenendo, dopo un po' di algebra, la relazione:

$$\left.\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|_i = \frac{-\xi_{i+2} + 4\xi_{i+1} - 3\xi_i}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{3}\left.\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}\right|_i + \cdots \qquad [7.10b]$$

Quindi lo schema seguente:

$$\left.\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|_i \cong \frac{-\xi_{i+2} + 4\xi_{i+1} - 3\xi_i}{2\Delta x} \qquad [7.10c]$$

è un'approssimazione *forward* per la derivata parziale prima di ξ con un errore dell'ordine di $(\Delta x)^2$, cioè $O(\Delta x^2)$ e quindi è un'approssimazione del secondo ordine.

Esercizio 7.2

Gli schemi numerici finora presentati per il calcolo alla Differenze Finite in un nodo di griglia coinvolgono, oltre al nodo di riferimento, anche uno o più nodi adiacenti. In realtà è possibile costruire schemi numerici per la derivata prima (ed anche per le derivate di ordine superiore) coinvolgendo un numero arbitrario di nodi di griglia oltre a quello in cui si è interessati a stimare la derivata. A volte ciò è utile per aumentare l'accuratezza dello schema.

Sviluppiamo l'esempio seguente che può essere facilmente generalizzato. Consideriamo un nodo *i* della griglia e cerchiamo uno schema numerico *backward* del secondo ordine che coinvolga i nodi *i*-2, *i*-1 e *i*. In pratica, ciò che si cerca è uno schema del tipo:

$$\left.\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|_i = \frac{a\xi_{i-2} + b\xi_{i-1} + c\xi_i}{\Delta x} + O[(\Delta x)^2]$$

in cui i coefficienti *a*, *b* e *c* devono essere determinati in modo appropriato. La relazione precedente, una volta eliminato il termine di errore, può anche essere riscritta come:

$$a\xi_{i-2} + b\xi_{i-1} + c\xi_i \cong \Delta x \cdot \left.\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|_i \qquad (*)$$

Per poter determinare i coefficienti *a*, *b*, *c* si utilizza l'espansione in Serie di Taylor di ξ_{i-1} e ξ_{i-2} e da queste due equazioni si ottiene un sistema di equazioni lineari che può essere risolto nelle variabili *a*, *b*, *c*. In pratica si ha che:

$$\xi_{i-1} \cong \xi_i - \Delta x\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_i + \frac{(\Delta x)^2}{2}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(\Delta x)^3}{3}\left(\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}\right)_i$$

$$\xi_{i-2} \cong \xi_1 - 2\Delta x\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_i + \frac{(2\Delta x)^2}{2}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(2\Delta x)^3}{3}\left(\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}\right)_i$$

Sommiamo ora la prima equazione moltiplicata per *b* e la seconda moltiplicata per *c* e

aggiungiamo ad entrambi i membri $a\xi_i$. In questo modo si ha che

$$a\xi_i + b\xi_{i-1} + c\xi_{i-2} = (a+b+c)\xi_i - \Delta x(2c+b)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_i + \frac{(\Delta x)^2}{2}(4c+b)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x^2}\right)_i$$

Confrontando questa equazione con la relazione (*) si vede che:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 0 \\ -(2c+b) &= 1 \\ 4c+b &= 0 \end{aligned}$$

cioè che $a = \frac{3}{2}, b = -2\,, c = \frac{1}{2}$. Quindi, lo schema numerico del secondo ordine cercato è:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} \approx \frac{0.5\xi_{i-2} - 2\xi_{i-1} + 1.5\xi_i}{\Delta x}$$

In Jacobson (2005, paragrafo 6.4.3) questa metodologia viene generalizzata consentendo di ottenere approssimazioni per la derivata prima e seconda di ordine arbitrario.

Schemi centrali per le derivate parziali

Gli schemi di approssimazione presentati risultano *asimmetrici*, visto che per rappresentare la derivata prima o seconda nel punto x_i sono necessari i valori di ξ nel punto x_i e nei punti successivi per gli schemi *forward* o precedenti per gli schemi *backward*. Spesso la fisica del fenomeno può richiedere una maggiore *simmetria* e quindi suggerire la scelta di schemi più centrati nel punto che si sta analizzando. Consideriamo quindi i due sviluppi di Taylor seguenti:

$$\begin{aligned} \xi_{i+1} &= \xi_i + \Delta x\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big|_i + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Big|_i + \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}\Big|_i + \cdots \\ \xi_{i-1} &= \xi_i - \Delta x\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big|_i + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Big|_i - \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}\Big|_i + \cdots \end{aligned} \qquad [7.11a]$$

Sottraendo membro a membro le due serie precedenti otteniamo l'approssimazione seguente per la derivata prima nel punto *i:*

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big|_i = \frac{\xi_{i+1} - \xi_{i-1}}{2\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{6}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Big|_i + \cdots \qquad [7.11b]$$

che è costituito, come sempre, da infiniti termini. Se ignoriamo tutti i termini correttivi, otteniamo lo *schema centrale di approssimazione della derivata parziale prima* che non considera il valore di ξ nel punto *i* ma il valore della variabile nel punto immediatamente a monte e a valle:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big|_i \cong \frac{\xi_{i+1} - \xi_{i-1}}{2\Delta x} \qquad [7.11c]$$

con un errore di approssimazione $O(\Delta x^2)$, cioè del secondo ordine.

Sommando, invece, membro a membro le relazioni (7.11a) si ottiene lo *schema di approssimazione della derivata seconda*, anch'esso con un errore del secondo ordine:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Big|_i \cong \frac{\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}}{(\Delta x)^2} \qquad [7.12]$$

Schemi per la discretizzazione della derivata parziale rispetto al tempo

Consideriamo ora l'asse dei tempi *t* ed in particolare il semiasse positivo a partire da un istante iniziale che, senza perdita di generalità, possiamo assumere pari a 0. Consideriamo istanti discreti t_n, $n = 1,2,\ldots N_t$ e l'intervallo temporale tra il generico istante t_n e t_{n+1} sia pari a Δt. Se siamo interessati ad osservare il fenomeno fino all'istante $T = N_t \cdot \Delta t$ e se consideriamo T come unità di misura del tempo, Δt sarà sicuramente un numero inferiore a 1. Il problema che ci accingiamo ad

affrontare è l'individuazione di uno schema di approssimazione numerica della derivata parziale di ξ rispetto al tempo. Consideriamo quindi la seguente espansione in serie di Taylor:

$$\xi^{n+1} = \xi^n + \Delta t \left.\frac{\partial \xi}{\partial t}\right|^n + \frac{(\Delta t)^2}{2}\left.\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right|^n + \frac{(\Delta t)^3}{6}\left.\frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3}\right|^n + \cdots \qquad [7.13a]$$

che descrive come varia, ad un generico nodo della griglia spaziale, la variabile ξ dall'istante t^n all'istante t^{n+1}. Da essa si ottiene:

$$\left.\frac{\partial \xi}{\partial t}\right|^n = \frac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2}\left.\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right|^n - \frac{(\Delta t)^2}{6}\left.\frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3}\right|^n + \cdots \qquad [7.13b]$$

quindi abbiamo individuato lo schema <u>*avanti nel tempo*</u> (*forward-in-time, FT*) seguente:

$$\left.\frac{\partial \xi}{\partial t}\right|^n \cong \frac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\Delta t} \qquad [7.13c]$$

caratterizzato da un errore di approssimazione $O(\Delta t)$. Quindi anche in questo caso siamo arrivati ad un'approssimazione del primo ordine. Se, invece, si considera:

$$\xi^{n-1} = \xi^n - \Delta t \left.\frac{\partial \xi}{\partial t}\right|^n + \frac{(\Delta t)^2}{2}\left.\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right|^n - \frac{(\Delta t)^3}{6}\left.\frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3}\right|^n + \cdots \qquad [7.14a]$$

sottraendo l'equazione precedente alla (7.13a) si ottiene:

$$\left.\frac{\partial \xi}{\partial t}\right|^n = \frac{\xi^{n+1} - \xi^{n-1}}{\Delta t} - \frac{(\Delta t)^2}{6}\left.\frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3}\right|^n + \cdots \qquad [7.14b]$$

che porta allo schema numerico seguente noto come schema del <u>*salto della cavallina*</u> (*leap-frog*):

$$\left.\frac{\partial \xi}{\partial t}\right|^n \cong \frac{\xi^{n+1} - \xi^{n-1}}{2\Delta t} \qquad [7.14c]$$

Questo schema presenta un errore di approssimazione del secondo ordine $O(\Delta t^2)$.

<u>Osservazioni</u>

A prima vista quanto detto sembrerebbe più che sufficiente per risolvere numericamente le equazioni differenziali (7.4a). Purtroppo, non è così! Per ragioni che saranno più chiare nel seguito, è più opportuno concentrare l'attenzione su alcune equazioni differenziali alle derivate parziali *tipiche* che altro non sono che forme semplificate delle equazioni che stiamo studiando e svilupparne i dettagli risolutivi, cosa che ci accingiamo a fare nei prossimi paragrafi.

7.1.3.2 Il Metodo alle Differenze Finite per l'Avvezione

Se trascuriamo i termini diffusivi ed i termini di sorgente, le equazioni (7.4) contengono solo *termini avvettivi* che vengono bilanciati dal termine prognostico. Esse, fisicamente, rappresentano per esempio il trasporto di una sostanza inquinante in un fluido non turbolento con la diffusività molecolare trascurabile. Semplificando ulteriormente, se annulliamo per il momento tutte le componenti del moto tranne la componente *u* diretta lungo l'asse *x*, ciò che resta è la forma più semplice del *trasporto* (o <u>*avvezione*</u>):

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -u\frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad [7.15]$$

All'apparenza, questa equazione ci pare semplice e del tutto innocente. Nella realtà è sicuramente una delle equazioni differenziali che più ha dato e dà problemi ai modellisti. Molto è stato scritto sull'argomento, con il risultato che si è di fronte ad un *ribollire caotico* di considerazioni, tra cui è difficile districarsi. La ragione di tutto ciò può essere illustrata rozzamente nel modo seguente. L'equazione del trasporto ci indica che se ξ presenta una forma iniziale lungo l'asse *x*, per esempio

una campana abbastanza stretta localizzata attorno ad un punto x^*, col trascorrere del tempo questa campana dovrà muoversi lungo l'asse delle *x* con una ben precisa velocità *u senza deformarsi*. Dovrebbe essere una traslazione del segnale nel tempo concordemente alla direzione del vento ed è proprio questo ciò che è difficile riprodurre in maniera corretta.

Iniziamo la nostra discussione approssimando la (7.15) nel modo più intuitivo possibile, con un'approssimazione *forward-in-time* per la derivata temporale e con una approssimazione *centered-in-space* per la derivata spaziale (lo schema lo si indica sinteticamente come schema FTCS):

$$\xi_i^{n+1} - \xi_i^n = -\frac{u\Delta t}{\Delta x} \cdot (\xi_{i+1}^n - \xi_{i-1}^n) \qquad [7.16]$$

Ricordiamo che *i* è l'indice del nodo lungo l'asse *x* ed *n* è l'indice dell'istante temporale. Così facendo abbiamo cercato di assicurare un'accuratezza del primo ordine nel tempo e del secondo ordine nello spazio ed anche una certa *simmetria* all'approssimazione della derivata spaziale che ci pare la più critica. Lo schema numerico *FTCS* che descrive in maniera numerica ed approssimata l'avvezione è sicuramente uno *schema esplicito*: ciò sta a significare che il valore della variabile ξ nel dominio di calcolo all'istante $n + 1$ è completamente calcolabile una volta noto il valore di ξ all'istante precedente *n*. Comodo, ovviamente! C'è però un problema!

Consideriamo il primo nodo del dominio spaziale di calcolo $i = 1$. Lo schema (7.16) richiederebbe la conoscenza al tempo *i* del valore di ξ in un nodo $n = 0$ che non esiste nella realtà. Perché sia possibile applicare questo schema numerico è necessario che il dominio di calcolo venga esteso a sinistra con un nuovo nodo, un *nodo fantasma* (*Ghost node*) per cui è necessario definire una regola con cui attribuirne un valore. Se, poi, applichiamo questo schema numerico all'ultimo nodo del dominio (il nodo $i = N$) vediamo che sarebbe necessaria la conoscenza, anche in questo caso, di un nodo fantasma $i = N + 1$ per il quale è necessario individuare una regola con cui attribuire un valore. Se poi considerassimo un problema avvettivo bidimensionale e scomponessimo l'avvezione nei due contributi rispetto ai due assi coordinati, ci accorgeremmo che per applicare lo schema numerico *FTCS* è necessario una *bordatura* del dominio bidimensionale discreto originario, tutta costituita da nodi fantasma come ben si vede nella **Fig. 7.6**. Ciò è un'evidente conseguenza del fatto che l'integrazione di ogni equazione differenziale richiede la *conoscenza delle condizioni al contorno*. Come definire queste regole, dipende dalla natura del problema fisico che si sta trattando e di ciò parleremo nel seguito.

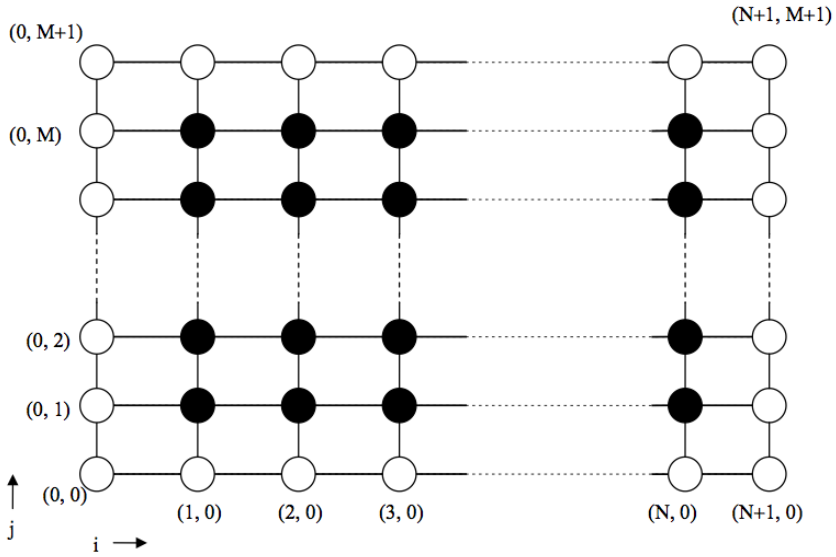


Fig. 7.6: dominio bidimensionale in cui sono evidenziati i nodi veri della griglia (neri) e quelli fantasma (bianchi)

Un'ulteriore considerazione va fatta quando si considera il primo *time step n* = 1. Il metodo *FTCS* richiederebbe di conoscere il valore di ξ all'istante precedente e ciò deve essere noto. Anche in questo caso c'era da aspettarselo: nessuna equazione differenziale prognostica può essere risolta senza che vengano fissate opportune *condizioni iniziali*.

Una volta definite le opportune condizioni iniziali ed al contorno, ci si potrebbe chiedere se lo schema *FTCS* è appropriato alle nostre esigenze. In sostanza, approssimando numericamente in questo modo l'equazione monodimensionale dell'avvezione, i risultati che otteniamo sono vicini all'andamento reale del fenomeno? Nella **Fig. 7.7** viene mostrato come l'avvezione venga trattata dallo schema *FTCS*. La curva rossa mostra la condizione iniziale. Come si vede, questa forma d'onda, col tempo, viene completamente deformata e già dopo tre iterazioni non c'è alcuna somiglianza tra la soluzione numerica e la soluzione esatta. In sostanza, questo esempio mostra come lo schema numerico *FTCS*, per quanto logico, non è certamente adatto in generale a rappresentare l'avvezione.

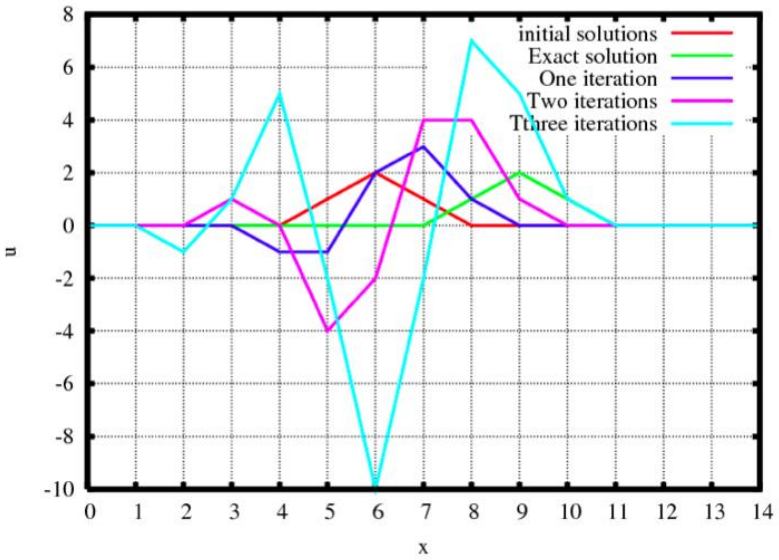


Fig. 7.7: comportamento dello schema numerico FTC

Per studiare con un certo dettaglio il comportamento dell'algoritmo *FTCS* è opportuno ricordare che un qualsiasi segnale può essere visto come la sovrapposizione di *armoniche monocromatiche* (*Teorema di Fourier*). Dato che l'equazione differenziale è lineare e la decomposizione in armoniche è anch'essa lineare, per i nostri scopi è sufficiente considerare una sola di queste armoniche ed immaginare che sia la *soluzione vera* dell'equazione (7.15). Se, per evitare confusioni, con *j* indichiamo l'unità immaginaria, con *i* l'indice spaziale e con *n* l'indice temporale, la nostra soluzione armonica può quindi essere scritta come:

$$\xi = K \cdot exp[j(kx + \omega t)] \qquad [7.17a]$$

Essa rappresenta, quindi, un'armonica bidimensionale con frequenza *k* nello spazio ed ω nel tempo. Dato che sia l'asse dei tempi che quello delle *x* è *discretizzato*, la relazione precedente può essere riscritta nella forma discreta seguente:

$$\xi = K \cdot exp[j(k \cdot i \cdot \Delta x + \omega \cdot n \cdot \Delta t)] \qquad [7.17b]$$

Il metodo di indagine consiste ora nell'introdurre la relazione (7.17b) nell'approssimazione *FTCS* dell'equazione dell'avvezione e nello studiarne il risultato. I dettagli di questa analisi sono riportati in Pielke (2002). I calcoli sono semplici, ma piuttosto noiosi e da essi si può verificare almeno se lo schema *FTCS amplifica* o *deamplifica* l'armonica con l'evolvere nel tempo del fenomeno. A tale proposito si vede che il fattore di amplificazione λ dell'armonica risulta pari a:

$$\lambda = \pm\sqrt{1 + C^2 \sin^2(k \cdot \Delta x)} \qquad [7.17c]$$

dove C è il *numero di Courant*, definito come $C = u \cdot \Delta t/\Delta x$. Se $C > 1$, la distanza percorsa dal segnale durante l'intervallo Δt per avvezione è superiore alla distanza che separa due nodi di griglia contigui. La funzione seno al quadrato presente nella relazione tenderà a zero solo per numeri d'onda molto piccoli (cioè per estensione del dominio di calcolo infinito) o per dimensioni di griglia nulli. In tutti gli altri casi è immediato notare (7.17c) come λ sia sempre maggiore dell'unità e quindi l'algoritmo *FTCS* costantemente amplifichi l'armonica. Un segnale generico, somma di varie armoniche, ne risulterà quindi distorto visto che armoniche con frequenze spaziali diverse verranno amplificate in modo differente. *Un algoritmo che presenta una caratteristica di questo genere si dice incondizionatamente instabile.* Anche se l'algoritmo *FTCS* è lo schema numerico più naturale che si possa scrivere, viste le sue caratteristiche sicuramente non andrà mai impiegato in un modello di *PBL*.

Una variante interessante dal metodo *FTCS* è il *metodo di Lax* (Press e al., 1992). Esso consiste nel sostituire nella (7.16) ξ_i^n con la media di ξ^n_{i+1} e ξ^n_{i-1}, cioè:

$$\xi_i^{n+1} - \frac{1}{2}(\xi_{i+1}^n + \xi_{i-1}^n) = -\frac{u\Delta t}{\Delta x} \cdot (\xi_{i+1}^n - \xi_{i-1}^n) \qquad [7.18a]$$

che, riorganizzata, porta alla relazione seguente:

$$\xi_i^{n+1} = \frac{1 - C}{2}\xi_{i+1}^n + \frac{1 + C}{2}\xi_{i-1}^n \qquad [7.18b]$$

dove con C ancora una volta si è indicato il numero di Courant. Si può dimostrare che la condizione di stabilità $|\lambda|^2 < 1$ è soddisfatta per $C \leq 1$, nota come *Condizione di Courant*. *Il metodo di Lax risulta quindi stabile con condizione* cioè è stabile solo quando $\Delta x \geq u \cdot \Delta t$. Parrebbe che finalmente abbiamo incontrato uno schema di discretizzazione soddisfacente e quindi applicabile. Ci aspetta, invece, una bella sorpresa! Infatti, lo schema numerico (7.18a) può anche essere riscritto come:

$$\frac{\xi_i^{n+1} - \xi_i^n}{\Delta t} = -u\frac{\xi_{i+1}^n - \xi_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{\xi_{i+1}^n - 2\xi_i^n + \xi_{i-1}^n}{2\Delta t} \qquad [7.18c]$$

che è esattamente la rappresentazione *FTCS* dell'equazione:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -u\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \qquad [7.18d]$$

Sorprendentemente, il metodo di Lax stabilizza lo schema *FTCS* dell'equazione dell'avvezione *introducendo un termine diffusivo completamente artificiale*, cosa non molto desiderabile visto che il coefficiente di diffusione numerica non è facilmente controllabile e minimizzabile.

Un'altra approssimazione molto interessante dell'equazione dell'avvezione è l'*approssimazione sopravvento* (*upwind*). Essa parte dalla visione fenomenologica secondo cui ogni grandezza fisica viene trasportata dalla componente media del moto e ciò viene fatto seguendo la direzione del moto. Traducendo in relazioni matematiche queste considerazioni fenomenologiche, si può giungere alla formulazione del seguente schema numerico per l'avvezione:

$$\frac{\xi_i^{n+1} - \xi_i^n}{\Delta t} = \begin{cases} -u\dfrac{\xi_{i+1}^n - \xi_i^n}{\Delta x} & se\ u < 0 \\ -u\dfrac{\xi_i^n - \xi_{i-1}^n}{\Delta x} & se\ u \geq 0 \end{cases} \qquad [7.19a]$$

Si può dimostrare come anche *questo schema sia stabile con condizione*, purché $C \leq 1$. Inoltre, anche questo schema presenta una diffusione numerica del tutto artificiale, visto che equivale alla discretizzazione dell'equazione (Pielke, 2002):

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\Delta t - \frac{1}{2}u\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\Delta x \qquad [7.19b]$$

Tuttavia, si dimostra anche che la diffusione numerica in questo caso è più facilmente dominabile. Per quanto visto fin qui, risulta che lo *schema up-wind* è il metodo alle differenze finite più promettente e per questo è stato frequentemente utilizzato nella realizzazione dei modelli numerici di *PBL*. Lo sforzo dei vari ricercatori si è quindi concentrato nell'aumentarne la stabilità, nel garantirne la conservazione del flusso e nel diminuirne la diffusione numerica artificiale.

Fin qui abbiamo considerato nella (7.15), e quindi nei vari schemi di discretizzazione, la componente *u* del moto come se fosse stata una costante. Ciò ovviamente non è vero in generale e quindi, se consideriamo due facce opposte di una cella cubica, è immediato rendersi conto che il flusso entrante da una faccia non è pari al flusso uscente dall'altra se la velocità caratteristica delle due facce non è uguale. Quindi la massa non si conserva! Per conservare quindi la massa, lo schema *up-wind* può essere riproposto nel modo seguente:

$$\xi_i^{n+1} = \xi_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(u_e\xi_e - u_w\xi_w) \qquad [7.20a]$$

dove, per esempio, si ha che:

$$u_e = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{2} \qquad u_w = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{2} \qquad [7.20b]$$

e ξ_e e ξ_w sono definiti, a seconda del valore di u_e e u_w, nel modo seguente:

$$\xi_e = \begin{cases} \xi_i & se\ u_e \geq 0 \\ \xi_{i+1} & se\ u_e < 0 \end{cases} \qquad \xi_w = \begin{cases} \xi_{i-1} & se\ u_w \geq 0 \\ \xi_i & se\ u_w < 0 \end{cases} \qquad [7.20c]$$

Questo schema è una rozza semplificazione del celebre schema noto come ***donor-cell*** descritto nei dettagli da Bornstein e al. (1987).

I lavori di ricerca realizzati per mettere a punto schemi efficienti per la descrizione numerica dell'avvezione sono così numerosi da rendere impossibile in questa sede una loro sintesi ragionevole. A titolo di esempio si può far riferimento a Crowley (1968), Smolarkiwicz (1983), Bott (1989, 1992), Easter (1993), Walcek e Aleksic (1998).

Tutti gli schemi proposti ed in particolare gli schemi *up-wind* (che, come si è visto, sono i più promettenti) sono *schemi totalmente espliciti*. In altre parole, per poter conoscere il valore della variabile ξ nel nodo *i*-esimo al tempo t^{n+1} è necessario solamente conoscere il campo di *u* e di ξ (se con ξ già non si è indicata la componente del vento *u*) all'istante t^n. L'unico problema sta nelle condizioni iniziali ed al contorno. All'istante $t = 0$ deve essere conosciuto ogni campo meteorologico presente nelle equazioni prognostiche del modello di *PBL* e, nel nostro caso particolare, ξ_i^0 per ogni valore dell'indice *i*. Nel caso monodimensionale che stiamo considerando (l'avvezione lungo l'asse *x*) le condizioni al contorno riguardano i due estremi del dominio di calcolo. Molte sono le opzioni possibili e come al solito, si rimanda a Pielke (1984) per approfondimenti. Il caso più semplice è il seguente. Si determini in quale dei due estremi è presente un flusso entrante di aria ed in quale si stabilisce, invece, un flusso uscente. Al nodo estremo in cui si stabilisce il flusso entrante (sia $i = 0$ per fissare le idee) ad ogni variabile verrà attribuito un valore fissato o variabile nel tempo, ma comunque noto. Per fissare le idee si avrà per esempio $\xi_0^n = f(t)$, funzione nota e data. All'altro estremo, in cui il flusso è uscente ($i = N_x$), si imporrà invece un gradiente nullo, cioè si porrà $\xi_{N_x}^n = \xi_{N_x-1}^n$ per ogni valore di *n*. Va comunque ricordato che questo metodo per imporre le condizioni al contorno ed anche agli altri metodi più sofisticati proposti *introducono inevitabilmente effetti di bordo*. L'unica cura efficace che si può mettere in atto è quella di ampliare il dominio di calcolo in modo che nella porzione di dominio di reale interesse tali effetti siano i più piccoli possibili.

In pratica, se si prende come schema di approssimazione dell'equazione dell'avvezione lungo l'asse *x* lo *schema upwind* descritto dalla relazione (7.20), l'approssimazione numerica dell'avvezione lo si può realizzare impiegando la procedura seguente per ottenere il valore di ξ al tempo t^{n+1} nei vari nodi della griglia di calcolo:

- sia noto il campo ξ_i^n e u_i^n al tempo t^n per ogni nodo di griglia i;
- si determini il nodo estremo della griglia caratterizzato da un flusso entrante e quello caratterizzato da un flusso uscente (si immagini, per fissare le idee, che siano rispettivamente $i = 0$ e $i = N_x$);
- si ponga $\xi_0^{n+1} = f(t^{n+1})$;
- per ogni nodo $i = 1,2,\ldots,N_x\text{-}1$ si applichi lo schema *up-wind* (7.20);
- si ponga $\xi_{Nx}^{n+1} = \xi_{Nx-1}^{n+1}$.

Se invece di considerare l'avvezione nella direzione x considerassimo l'avvezione nella direzione y, tutto si riproporrebbe in maniera analoga.

Tutti gli schemi numerici per l'avvezione fin qui discussi sono tutti schemi espliciti. Infatti, per poter descrivere l'avvezione all'istante t^{n+1} richiedono esclusivamente la conoscenza del campo della variabile ξ in tutti i nodi della griglia di calcolo all'istante precedente t^n impiegando una formula esplicita. La semplicità computazionale che li caratterizza ha come contropartita inevitabile la loro instabilità che può essere attenuata o limitata solo adottando passi spaziali e temporali Δx e Δt tali da rispettare sempre la condizione di Courant in cui è fondamentale il ruolo della velocità del trasporto.

È possibile, però, mettere a punto anche *schemi numerici impliciti*, cioè schemi che per determinare il valore di ξ al tempo t^{n+1} richiedono sia i valori di ξ al tempo t^n che quelli al tempo t^{n+1}, che ovviamente non sono noti. La caratteristica principale positiva di tutti questi metodi è quella di non porre restrizioni sul *time step* Δt, che può essere scelto seguendo solo considerazioni di accuratezza, mentre la caratteristica negativa comune a tutti questi schemi è il fatto che, alla fine della discretizzazione, ci si ritrova a dover risolvere un sistema lineare di equazioni algebriche di grandi dimensioni, cosa che può essere affrontata solo in maniera numerica e che è facilitata se la matrice del sistema presenta una struttura particolare per cui sono disponibili algoritmi numerici risolutivi semplici, efficienti e veloci. A titolo di esempio, consideriamo qui di seguito lo *Schema di Crank-Nicolson*.

Questo schema prende in considerazione sia il campo della variabile ξ al *time step* precedente t^n sia il campo di ξ (incognito) al *time step* corrente t^{n+1} ed approssima la derivata spaziale come un'opportuna combinazione lineare tra un'approssimazione centrata a t^n e l'equivalente approssimazione centrata a t^{n+1}:

$$\left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_i^{n+1} \cong \alpha \frac{\xi_{i+1}^n - \xi_{i-1}^n}{2\Delta t} + (1-\alpha)\frac{\xi_{i+1}^{n+1} - \xi_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \qquad [7.21a]$$

dove con α si è indicato il peso della combinazione lineare. Se si pone $\alpha = ½$ e si adotta per approssimare la derivata temporale uno *schema Forward*, si ottiene, dopo un po' di calcoli algebrici, che:

$$\xi_i^{n+1} = \xi_i^n - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}\left(\frac{\xi_{i+1}^n - \xi_{i-1}^n}{2} + \frac{\xi_{i+1}^{n+1} - \xi_{i-1}^{n+1}}{2}\right) \qquad [7.21b]$$

Ponendo:

$$c = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \qquad [7.21c]$$

e manipolando algebricamente la (7.21b) si giunge infine alla relazione relativa al nodo di griglia i-esimo:

$$-c\xi_{i-1}^{n+1} + 4\xi_i^{n+1} + c\xi_{i+1}^{n+1} = c\xi_{i-1}^n + 4\xi_i^n + c\xi_{i+1}^n \qquad [7.21d]$$

Dato che all'istante t^n ξ è nota in ogni nodo della griglia, la parte destra della relazione precedente è nota e può essere indicata con il simbolo d_i^n, quindi:

$$-c\xi_{i-1}^{n+1} + 4\xi_i^{n+1} + c\xi_{i+1}^{n+1} = d_i^n \qquad [7.21e]$$

Se, ora, si considerano tutti i nodi (i = 1, 2, .., N) della griglia di calcolo, si ottiene il sistema di equazioni lineari seguente:

$$\begin{aligned}
-c\xi_0^{n+1} + 4\xi_1^{n+1} + c\xi_2^{n+1} &= d_1^n \\
-c\xi_1^{n+1} + 4\xi_2^{n+1} + c\xi_3^{n+1} &= d_2^n \\
-c\xi_2^{n+1} + 4\xi_3^{n+1} + c\xi_4^{n+1} &= d_3^n \\
&\vdots \\
-c\xi_{N-2}^{n+1} + 4\xi_{N-1}^{n+1} + c\xi_N^{n+1} &= d_{N-1}^n \\
-c\xi_{N-1}^{n+1} + 4\xi_N^{n+1} + c\xi_{N+1}^{n+1} &= d_N^n
\end{aligned} \qquad [7.21f]$$

costituito da N equazioni relative agli N nodi della griglia più i due nodi fantasma $i = 0$ e $i = N+1$. Come si nota, la matrice dei coefficienti del sistema lineare ottenuto è tridiagonale e non sparsa e ciò garantisce che il sistema possa essere risolto con algoritmi numerici standard di elevata efficienza. I valori di ξ relativi ai nodi fantasma possono essere noti direttamente o essere calcolati dai valori relativi ai nodi adiacenti a seconda del tipo di condizioni al contorno adottate. Nel primo caso possiamo inglobarli nella parte destra della prima e dell'ultima relazione:

$$\begin{aligned}
d_1^{n\prime} &= d_i^n + c\xi_0^{n+1} \\
d_N^{n\prime} &= d_N^n + c\xi_{N+1}^{n+1}
\end{aligned} \qquad [7.21g]$$

ottenendo:

$$\begin{aligned}
4\xi_1^{n+1} + c\xi_2^{n+1} &= d_1^{n'} \\
-c\xi_1^{n+1} + 4\xi_2^{n+1} + c\xi_3^{n+1} &= d_2^n \\
-c\xi_2^{n+1} + 4\xi_3^{n+1} + c\xi_4^{n+1} &= d_3^n \\
&\vdots \\
-c\xi_{N-2}^{n+1} + 4\xi_{N-1}^{n+1} + c\xi_N^{n+1} &= d_{N-1}^n \\
-c\xi_{N-1}^{n+1} + 4\xi_N^{n+1} &= d_N^{n'}
\end{aligned} \qquad [7.21h]$$

Questo sistema lineare può essere espresso in forma matriciale come:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\xi}^{n+1} = \boldsymbol{d}^n \qquad [7.21i]$$

dove:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
4 & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
-c & 4 & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -c & 4 & c & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & -c & 4 & c & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & -c & 4 & c \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -c & 4
\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}^n = \begin{pmatrix}
\xi_1^{nn+1} \\ \xi_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \xi_{N-1}^{n+1} \\ \xi_N^{n+1}
\end{pmatrix} \quad \mathbf{d}^n = \begin{pmatrix}
d_1^{n'} \\ d_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{N-1}^n \\ d_N^{n'}
\end{pmatrix} \qquad [7.21j]$$

Per la sua struttura, questo sistema può essere risolto con noti ed efficienti metodi numerici dell'Algebra Lineare. Questo schema numerico implicito è intrinsecamente stabile.

Per concludere questa breve esposizione sui metodi numerici per la risoluzione dei problemi avvettivi va sottolineato che l'avvezione può essere trattata numericamente anche in maniera differente. Senza tentare minimamente di entrare nei dettagli, va evidenziato come siano stati adottati anche altri due metodi operativi.

Il primo dei due metodi numerici parte dal presupposto che per determinare le derivate di ξ al tempo t^{n+1} è anche possibile operare direttamente su un'interpolazione opportuna ed analitica dei valori ottenuti nel dominio di calcolo all'istante t^n. Chi fosse interessato a questa elegante e

promettente tecnica può far riferimento a Pielke (2002, al paragrafo 10.2) che sviluppa nei dettagli un algoritmo di questo genere.

Il secondo metodo, invece, parte dal dualismo Euleriano-Lagrangiano con cui si descrivono i processi fluidodinamici, e quindi anche l'avvezione. Infatti, l'equazione dell'avvezione riportata nella relazione differenziale (7.15), scritta in termini Euleriani, introducendo la derivata totale definita come:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial}{\partial x} \qquad [7.22a]$$

può essere riscritta in termini Lagrangiani nei termini seguenti:

$$\frac{D\xi}{Dt} = 0 \qquad [7.22b]$$

affermando che, in assenza di sorgenti, il valore di ξ posseduto da una generica particella Lagrangiana si conserva nel tempo. Ovviamente le due espressioni sono del tutto equivalenti, ma quest'ultima consente un'interpretazione dell'avvezione non convenzionale che ha portato alla definizione e messa a punto di *metodi* detti *semi-Lagrangiani* di cui Staniforth e Coté (1991) hanno fornito una chiara rassegna. Il concetto fondamentale di ogni metodo semi-Lagrangiano può essere così espresso. Consideriamo sempre un dominio bidimensionale (x, t) discretizzato in maniera regolare con passo spaziale Δx e passo temporale Δt. Ipotizziamo, poi, che ad un certo istante t^n lungo il dominio monodimensionale x siano distribuite delle particelle in maniera, per esempio, equispaziata e che ogni generica particella k che si trova nella posizione x_k possieda il valore ξ_k pertinente alla posizione occupata. Dopo un intervallo dt, cioè al tempo $t^{n+1} = t^n + dt$, ognuna di queste particelle varierà la propria posizione sull'asse x di un ammontare dx_k (spostamento della particella k che stava nel punto x_k), quindi ciò sta a significare che nell'intervallo infinitesimo dt ogni generica particella sarà dotata di una velocità pari a $u = dx/dt$. Tale velocità potrà in generale dipendere dalla posizione occupata dalla particella. Inoltre, non essendoci sorgenti, il valore ξ_k di ciascuna particella k resterà conservato. Quindi, dopo dt la distribuzione spaziale della variabile ξ sarà data dalle nuove posizioni assunte dalle diverse particelle che all'istante t^n se ne stavano equispaziate. Se la velocità u è una costante, la funzione $\xi(x,t)$ verrà semplicemente traslata rigidamente lungo l'asse x di un ammontare pari a udt, realizzando una vera avvezione. Va notato che le particelle che al tempo t^n se ne stavano equispaziate in certe posizioni del dominio monodimensionale x, dopo il time-step dt resteranno ancora equispaziate ma si verranno a trovare spostate di udt sottovento rispetto alla posizione originaria.

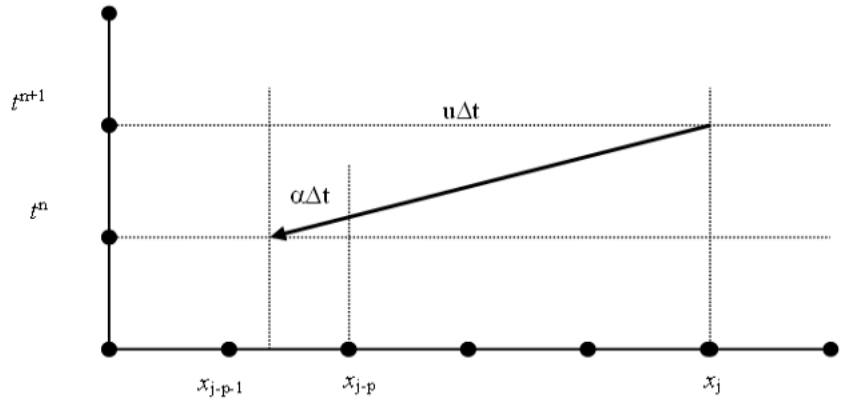


Fig. 7.8: porzione del dominio bidimensionale e geometria del metodo semi-Lagrangiano

Ovviamente, come sempre accade trattando i problemi fluidodinamici in maniera Lagrangiana, questo modo di vedere le cose è estremamente affascinante ed ha stimolato la ricerca di metodi che lo realizzassero in pratica, superando l'evidente controindicazione costituita dal fatto che ad ogni passo temporale, anche in caso di vento costante u, la griglia di calcolo cambia posizione nel

dominio, cosa decisamente non desiderabile. Per meglio comprendere la vera essenza di un metodo di approssimazione semi-Lagrangiano, consideriamo (Durran, 1999) la relazione (7.22b) che può essere approssimata in un *time-step* Δt nel modo seguente:

$$\frac{\xi\left(x_j, t^{n+1}\right) - \xi\left(\tilde{x}_j^n, t^{n+1}\right)}{\Delta t} = 0 \qquad [7.23a]$$

dove con $\tilde{x}_j^n$ si è indicata la posizione occupata al tempo t^n da quella particella che al tempo t^{n+1} si viene a trovare nella posizione della griglia di calcolo x_j che è il punto in cui siamo interessati a valutare l'avvezione. In sostanza, la relazione precedente asserisce che il valore posseduto dalla particella al tempo t^n nella posizione $\tilde{x}_j^n$ coincide col valore di ξ nel nodo del dominio di calcolo desiderato x_j al tempo t^{n+1} proprio perché tale particella lì si è spostata dopo un intervallo temporale Δt. Le considerazioni che seguono risultano sicuramente facilitate dalla **Fig. 7.8** che evidenzia una porzione del dominio bidimensionale (x, t).

Se la velocità u è costante, la traiettoria all'*indietro* di una particella che a t^{n+1} si trova nella posizione x_j evidenzia come la precedente posizione di questa particella era a:

$$\tilde{x}_j^n = x_j - u\Delta t \qquad [7.23b]$$

Sia poi p il valore intero per difetto del rapporto $u\Delta t/\Delta x$ e, senza perdere in generalità, ipotizziamo che $u > 0$. In questo caso, come risulta evidente dalla **Fig.7.8**, il punto $\tilde{x}_j^n$ si viene a trovare entro l'intervallo $x_{j-p} \leq x \leq x_{j-p-1}$. Se definiamo:

$$\alpha = \frac{x_{j-p} - \tilde{x}_j^n}{\Delta x} \qquad [7.23c]$$

ed approssimiamo la variabile ξ in quel punto, cioè $\xi\left(\tilde{x}_j^n, t^n\right)$, usando un'interpolazione lineare, la relazione (7.23a) diventa:

$$\xi_j^{n+1} = (1-\alpha)\xi_{j-p}^n + \alpha\xi_{j-p-1}^n \qquad [7.23d]$$

Se la velocità u non è una costante nello spazio e nel tempo, tutto si complica notevolmente, anche se questa è proprio la realtà dei fatti. Un metodo per ottenere uno schema di approssimazione semi-Lagrangiana è il seguente *metodo a due passi* che parte sempre dalla relazione (7.23d) e che trova un modo per ottenere il punto $\tilde{x}_j^n$ di partenza della particella che si verrà a trovare al tempo t^{n+1} a x_j. Si ipotizzi, a tal proposito, di conoscere i valori u_j per ogni punto x_j della griglia di calcolo sia al tempo t^n che al tempo t^{n+1}. In questo modo, il punto $\tilde{x}_j^n$ desiderato lo si ottiene prima individuando il punto intermedio x_* con la relazione:

$$x_* = x_j - u\left(x_j, t^n\right) \cdot \Delta t/2 \qquad [7.23e]$$

ed ottenendo alla fine il punto desiderato dato da:

$$\tilde{x}_j^n = x_j - u\left(x_*, t^{n+1/2}\right) \cdot \Delta t \qquad [7.23f]$$

Ovviamente, per poter avere il valore di u nella posizione x_* al tempo $t^{n+1/2}$ è necessario eseguire un'interpolazione nello spazio e nel tempo che potrebbe essere semplicemente lineare. Metodi più efficienti e accurati, ma più complessi, sono descritti da Durran (1999). Rimandando ancora a Durran (1999) per tutti i dettagli, si può asserire che lo schema di approssimazione semi-Lagrangiana dell'equazione di avvezione è sempre stabile e che la sua accuratezza (e quindi anche la sua pseudo-diffusione) dipendono molto dal modo con cui si effettua l'interpolazione della variabile ξ. Più elevato è l'ordine dell'interpolazione, migliore è l'accuratezza che si ottiene. Limitando a queste poche note la discussione sui metodi semi-Lagrangiani, conviene concludere sottolineando come la stabilità sempre garantita dell'algoritmo consenta di utilizzare *time-step* molto più elevati rispetto a ciò che si potrebbe fare con un metodo Euleriano *up-wind* e che la sua struttura filtra naturalmente le onde acustiche indesiderate nella soluzione numerica di un problema avvettivo.

7.1.3.3 Il metodo alle Differenze Finite per la Diffusione

Se nelle equazioni di bilancio trascurassimo ora tutti gli effetti di sorgenti, gli effetti *avvettivi* e la diffusione turbolenta in *y* e *z*, otterremmo la semplice equazione differenziale monodimensionale seguente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad [7.24a]$$

tipica di un processo diffusivo, che nella forma più semplice diventa:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad [7.24b]$$

in cui il coefficiente di diffusione *D* è costante in tutto il dominio di calcolo. Per mettere a punto uno schema numerico in grado di trattare la diffusione, per quanto riguarda la derivata rispetto al tempo possiamo adottare ancora una volta lo schema *forward-in-time* senza problemi. Per quanto riguarda, invece, la derivata spaziale seconda potremmo utilizzare lo schema centrato (7.12) con alcune possibilità operative differenti.

Se immaginiamo che la derivata spaziale seconda all'istante t^{n+1} possa essere stimata sulla base dei valori assunti da ξ all'istante t^n, lo schema risolutivo che ne risulta è ancora una volta uno schema *FTCS* del tipo:

$$\frac{u_i^{n+1} - u}{\Delta t} = D \cdot \left(\frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{(\Delta x)^2}\right) \qquad [7.25]$$

estremamente semplice perché *totalmente esplicito*, ma purtroppo *instabile*, come evidenziato per esempio in (Press e al., 1992). È necessario quindi trovare un modo per stabilizzarlo. Una possibilità sarebbe quella di calcolare la derivata seconda spaziale impiegando i valori dello *step* temporale t^{n+1} e non t^n e si dimostra che ciò renderebbe notevoli benefici alla stabilità, ottenendo quindi la relazione seguente:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = D \cdot \left(\frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u + u_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}\right) \qquad [7.26]$$

cosa che però complica di molto la soluzione del problema visto che *la forma è completamente implicita* e per risolvere il campo ξ al passo t^{n+1} abbiamo bisogno di risolvere un sistema di equazioni algebriche lineari di grandi dimensioni che, anche se di forma semplice, richiede notevole spazio di memoria sul computer. Una soluzione parziale a questo problema viene dal mediare lo schema esplicito (7.25) e lo schema implicito (7.26), producendo quello che è noto come <u>*schema di Crank-Nicholson per la diffusione*</u>. Così facendo, si ottiene che:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{D}{2} \cdot \left(\frac{(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)}{(\Delta x)^2}\right) \qquad [7.27a]$$

Se il coefficiente di diffusione *D* non è una costante, nella (7.27a) verrà introdotto il valore di *D* richiesto al nodo *i* al tempo t^{n+1}. Questo *schema*, che è solo *parzialmente implicito*, presenta due proprietà interessanti. La prima è che è uno *schema incondizionatamente stabile* e quindi sicuro nella sua applicazione. La seconda proprietà deriva dallo sviluppo algebrico della relazione (7.27a). In effetti, sviluppando i vari termini si ha che:

$$-au_{i-1}^{n+1} + (1+2a)u_i^{n+1} - au_{i+1}^{n+1} = au_{i+1}^n + (1+2a)u_i^n + au_{i-1}^n \qquad [7.27b]$$

dove:

$$a = \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \qquad [7.27c]$$

Ipotizzando che i punti estremi del dominio in *x* abbiano come condizione al contorno la nullità del gradiente, allora è immediato accorgersi che il sistema di equazioni che si ottiene dalla (7.27b) applicata a tutti i nodi *i* è un *sistema tridiagonale* di rapida e semplice soluzione (Press e al.,1992).

7.1.3.4 Il metodo alle Differenze Finite per il termine di sorgente

Se si eliminano dalle due equazioni che rappresentano la conservazione della quantità di moto i termini convettivi ed avvettivi, si ottiene il seguente sistema che evidenzia il *termine di sorgente* dovuto all'accelerazione di Coriolis:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -fu \qquad [7.28a]$$

La semplicità di questo sistema di equazioni ci può indurre erroneamente ad adottare schemi numerici risolutivi estremamente semplici, che però si mostrano essere completamente instabili. Seguendo Pielke (2002), uno schema stabile e semplice per risolvere tale sistema di equazioni è invece il seguente:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = f v_i^n \qquad \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} = -f u_i^{n+1} \qquad [7.28b]$$

In pratica, all'istante t^{n+1} si opera nel modo seguente:

- si calcola il nuovo campo di *u* impiegando i valori di *u* e *v* ottenuti al passo temporale t^n;
- si calcola il nuovo campo di *v*, impiegando il campo di *v* ottenuto al passo temporale t^n ed il campo di *u* ottenuto a t^{n+1}.

7.1.3.5 Il metodo alle Differenze Finite per il bilancio di massa

Dalle equazioni (7.4) si vede come l'unico modo per ottenere la componente verticale *w* del moto sia invocare il bilancio di massa. Quindi, il gradiente verticale della componente w del moto è:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right] \qquad [7.29a]$$

Si consideri il solito dominio di calcolo in cui un generico nodo interno sia univocamente individuato dagli indici *i* (asse *x*), *j* (asse *y*) e *k* (asse *z*). Se impieghiamo uno schema *forward* per l'approssimazione della derivata rispetto a *z* e uno schema centrato per le altre due derivate, alla fine otteniamo:

$$\frac{w_{i,j,k+1} - w_{i,j,k}}{\Delta z} = -\left[\frac{u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1,k} - u_{i,-1j,k}}{2\Delta y}\right] \qquad [7.29b]$$

Se i nodi al suolo sono caratterizzati da $k = 0$, si ha per la *no-slip condition* che $w_0 = 0$ qualunque valore assumano gli indici *i* e *j*. Alla luce di tutto ciò, se sono noti i campi *u e v* e i *valori* assunti da *w* ai nodi di indice verticale *k*, il valore assunto da *w* ai nodi con indici *k+1* sarà facilmente ottenuto impiegando direttamente la (7.29b).

7.1.3.6 L'operazione di splitting

Se consideriamo la prima delle equazioni (7.4) notiamo come in essa siano combinati tutti i tipi di equazioni differenziali fin qui considerate singolarmente. Naturalmente si potrebbero sostituire nelle varie equazioni gli schemi numerici considerati finora e si arriverebbe ad un sistema lineare di equazioni algebriche quadrimensionale di proporzioni enormi e con difficili problemi di stabilizzazione. Di fatto, questa metodologia diretta ed ovvia risulta all'atto pratico improponibile, richiedendo risorse di calcolo e di memoria estremamente elevate.

Per ovviare a ciò, il problema che ci si pone è se sia possibile in qualche modo sfruttare quanto fin qui sviluppato per risolvere numericamente questa equazione e le altre che (ad eccezione dell'equazione del bilancio di massa) risultano formalmente identiche. Una delle risposte possibili è costituita dell'*operazione di time and operator splitting*. Molto si è fatto e scritto in proposito (si veda per esempio Yanenko, 1971; Skamarock e Klemp, 1992, Wicker e Skamarock,

2002) e le conclusioni (confortanti) sono che, adottando questa metodologia, il risultato che si ottiene è del tutto *equivalente* al risultato che si otterrebbe affrontando direttamente il problema quadridimensionale originario. L'equivalenza tra la soluzione ottenuta considerando direttamente il problema quadridimensionale e quella ottenuta col metodo di *time splitting* significa che le due soluzioni ottenute presentano errori di discretizzazione che sono dello stesso ordine di grandezza.

Per semplicità didattica, consideriamo una generica equazione differenziale alle derivate parziali del tipo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Psi(u) \qquad [7.30a]$$

in cui Ψ è un generico operatore differenziale, definito come la somma di operatori che agiscono in modo additivo sulla variabile *u* nel modo seguente:

$$\Psi(u) = \Psi_1(u) + \Psi_2(u) + \cdots + \Psi_m(u) \qquad [7.30b]$$

Immaginiamo, inoltre, che per i vari operatori Ψ_1, Ψ_2, ..,Ψ_m siano disponibili schemi di approssimazione stabili ed efficienti. In questo caso, si può dimostrare che la risoluzione della (7.30a) può essere ottenuta nel modo seguente.

Si supponga di conoscere il campo di *u* all'istante t^n in tutti i nodi della griglia di calcolo. Basandoci su tale campo si risolva (numericamente) l'equazione:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Psi_1(u) \qquad [7.31a]$$

da cui si ottiene un nuovo campo di *u* (che indichiamo come $u^{(1)}$) che però non sarà il campo voluto all'istante t^{n+1}. Usando $u^{(1)}$ come campo iniziale, se risolviamo l'equazione:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Psi_2(u) \qquad [7.31b]$$

otterremo un nuovo campo intermedio $u^{(2)}$ che terrà conto sia dell'azione dell'operatore Ψ_1 che dell'operatore Ψ_2. Continuando questa metodologia fino all'esaurimento degli *m* operatori in cui è stato possibile scomporre l'operatore differenziale originario, alla fine si otterrà il campo $u^{(m)}$ che è effettivamente il campo cercato per l'istante temporale t^{n+1} (cioè $u^{n+1} = u^{(m)}$). Questo metodo rappresenta la soluzione ideale ai nostri problemi. In effetti, se consideriamo ancora una volta la prima delle (7.4), vediamo come la sequenza di operazioni richiesta dallo *splitting* sia la seguente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x} \qquad [7.32a]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial y} \qquad [7.32b]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -w\frac{\partial u}{\partial z} \qquad [7.32c]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(v - v_g\right) \qquad [7.32d]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_m\frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad [7.31e]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K_H\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad [7.31f]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K_H\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad [7.31g]$$

In pratica all'istante t^{n+1}, la prima delle equazioni differenziali elencate verrà risolta numericamente (con uno dei metodi illustrati in precedenza). Il campo così ottenuto verrà utilizzato come campo iniziale per lo schema numerico che risolve la seconda equazione della lista e si procederà in questo modo fino ad esaurire tutte le equazioni differenziali della lista. L'ultimo campo ottenuto

per la variabile *u* sarà il campo relativo all'istante temporale t^{n+1}.

7.1.3.7 L'algoritmo risolutivo completo

Forse non sarà sfuggito al lettore il fatto che nella descrizione dell'operazione di *splitting* non si è fatta menzione esplicita del fatto che nelle singole equazioni (7.31) non è presente una sola variabile, ma coesistono, interagendo matematicamente tra loro, variabili diverse. In pratica ogni equazione differenziale alle derivate parziali del sistema che costituisce il modello operativo del *PBL* è strettamente legata alle altre equazioni del sistema in maniera inestricabile. Per mostrare come operativamente il modello può funzionare conviene far riferimento all'algoritmo seguente:

1. quando $t^n = 0$ (cioè quando siamo all'istante iniziale), conosciamo completamente i valori dei campi *u, v, w,* θ in tutti i nodi della griglia di calcolo e tali campi costituiscono le condizioni iniziali da cui parte la previsione modellistica;

2. ad un generico istante t^{n+1}, operiamo seguendo i passi seguenti:

   - consideriamo l'equazione per il campo di θ ed applichiamo ad essa l'operazione di *splitting*, usando come campi di *u, v* e *w* quelli dell'istante t^n. Il termine di divergenza radiativa potrà essere calcolato come indicato al Cap. 6. Il campo di θ così ottenuto sarà il campo finale per l'istante t^{n+1}.

   - consideriamo ora le due equazioni prognostiche per le componenti del vento *u* e *v* e operiamo un primo *splitting* considerando le equazioni ridotte:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial x} &= f(v - v_g)\\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial v}{\partial x} &= f(u_g - u)\end{aligned} \qquad [7.32a]$$

   relative alla sola avvezione ed al termine di Coriolis. Risolviamole, sempre con la metodologia di *splitting*, avendo come campi iniziali per *u, v* e *w* quelli relativi all'istante t^n. A questo punto, impiegando i campi intermedi aggiornati per *u* e *v* ed il campo *w* all'istante t^n, risolviamo, sempre applicando la metodologia di *splitting* le equazioni seguenti che tengono conto della diffusione:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(K_m\frac{\partial u}{\partial z}\right) + K_H\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y x^2}\right)\\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(K_m\frac{\partial v}{\partial z}\right) + K_H\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y x^2}\right)\end{aligned} \qquad [7.32b]$$

   A questo punto i campi così ottenuti per le variabili *u* e *v* saranno quelli definitivi per l'istante t^{n+1}, mentre, applicando lo schema numerico rappresentato dalla relazione (7.29b) otterremo finalmente anche il campo finale per la variabile *w*.

La sequenza di *splitting*, se rimanesse fissa ad ogni *time-step*, potrebbe ridurre l'accuratezza della stima numerica e per ovviare a ciò, spesso si è adottata la strategia di invertire ad ogni *time-step* l'ordine degli operatori considerati.

Il metodo descritto è stato notevolmente semplificato per renderlo didatticamente comprensibile. Se si fosse interessati a prendere visione dei metodi risolutivi impiegati in modelli di *PBL* reali, conviene riferirsi a Xue (1995) che descrive nel dettaglio il metodo usato nel modello *ARPS* (dove purtroppo non vengono impiegate le normali coordinate *x,y,z*). Una descrizione analoga viene fatta in Hurley (2005). Per una visione più completa ed approfondita dei modelli numerici di *PBL* attualmente disponibili è conveniente riferirsi a Pielke e Pearce (1994).

7.1.3.8 Le condizioni al contorno

Consideriamo una generica Equazioni Differenziale alle derivate Parziali (*PDE*) relativa ad una variabile ξ. La teoria asserisce che una delle condizioni per poterne ottenere una soluzione $\xi(x,y,z;t)$ in un generico dominio di interesse Ω è che siano definite opportune condizioni al contorno. In sostanza è necessario dire che cosa succede ad ogni istante *t* alla frontiera del dominio Ω. Ciò vale anche nel caso in cui la *PDE* venga risolta numericamente. È la fisica del problema e la natura dei bordi esterni del dominio che determina quali siano queste condizioni. Dal punto di vista puramente teorico possono essere specificati due tipi di condizioni al contorno:

- le *condizioni di Dirichlet* che consistono nello specificare un opportuno valore per la variabile ξ ad ogni istante *t* di interesse in tutti i punti (nel caso discreto, in tutti i nodi) della frontiera del dominio o di una parte di essa. Per esempio, se consideriamo una qualsiasi delle componenti del moto dell'aria nel *PBL* ed un dominio di calcolo costituito da un parallelepipedo con base inferiore in corrispondenza del suolo, ciò che sappiamo dalle Fluidodinamica è che per un fluido viscoso come l'aria vale la *no-slip condition* e quindi che in corrispondenza di una superficie solida il vettore velocità è nullo. In questo caso e per questa parte della frontiera del dominio di calcolo, la condizione da applicare è quella di Dirichlet ed in particolare bisogna che tutte le componenti del moto in corrispondenza dei nodi di griglia giacenti su questa parte della frontiera siano identicamente nulle ad ogni istante di interesse.

- le *condizioni di von Neumann* che consistono nello specificare un opportuno valore delle derivate parziali della variabile ξ ad una specificata porzione della frontiera del dominio Ω in modo da descrivere alcune ben precise proprietà fisiche del campo di ξ. Un'applicazione naturale delle condizioni di von Neumann è quella in cui la natura fisica del problema evidenzia particolarità che i flussi devono possedere in corrispondenza di una frontiera, rigida o meno.

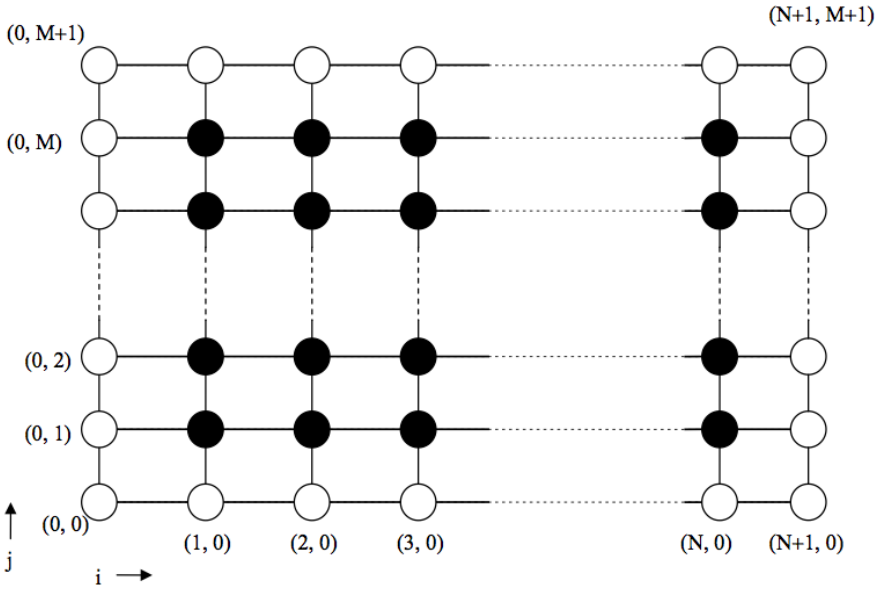


Fig. 7.9: dominio bidimensionale in cui sono evidenziati i nodi veri della griglia (neri) e quelli fantasma (bianchi)

Il modo con cui vengono imposte le condizioni al contorno nei vari modelli di *PBL* realizzati varia da modello a modello (si veda, per es., Bougeault, 1983; Davies, 1983; Klemp e Durran, 1983), ma un modo semplice, come già accennato, è quello di circondare la griglia di calcolo con un contorno di *nodi fantasma* (*Ghost node*) come si è fatto nella **Fig. 7.9** dove viene

mostrato un dominio bidimensionale di *N* nodi in direzione *x* (indice *i*) ed *M* nodi in direzione *y* (indice *j*). Come si vede, attorno alla griglia reale è stata aggiunto un bordo di *nodi fantasma* (cerchi bianchi) a cui corrispondono indici *i* pari a 0 o a $N+1$ e indice *j* pari a 0 o a $M+1$. L'applicazione pratica delle *condizioni di Dirichlet* a questo dominio consiste semplicemente nell'attribuire a tutti i *nodi fantasma* presenti un ben preciso valore che sarà noto, generalmente variabile da nodo a nodo e nei vari istanti *t* di interesse.

Immaginiamo, invece, di dover applicare le *condizioni di von Neumann*. Ciò consiste nel definire per ogni nodo del bordo a cui si applica questo tipo di condizione al contorno la relazione:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = f(\xi) \qquad [7.33a]$$

dove $f(\xi)$ è una funzione nota al tempo t^n e variabile nel tempo. Ciò può essere fatto in due modi.

Nel primo modo, il valore $\xi(0,1)$ nel *nodo fantasma* può essere calcolato approssimando la derivata con uno schema centrato ed ottenendo:

$$f(\xi) = \frac{\xi_{2,1}^n - \xi_{0,1}^n}{2\Delta x} \qquad [7.33b]$$

cioè:

$$\xi_{0,1}^n = \xi_{2,1}^n - 2\Delta x \cdot f(\xi) \qquad [7.33c]$$

Nel secondo modo, invece viene specificata la derivata della variabile ξ rispetto alla direzione **k** normale alla frontiera e positiva verso l'esterno del dominio. In questo caso:

$$\frac{\partial \xi}{\partial k} = f(\xi) \qquad [7.33d]$$

che, sempre adottando uno schema centrato, diventa:

$$f(\xi) = \frac{\xi_{0,1}^n - \xi_{2,1}^n}{2\Delta x} \qquad [7.33e]$$

cioè:

$$\xi_{0,1}^n = \xi_{2,1}^n + 2\Delta x \cdot f(\xi) \qquad [7.33f]$$

In questi esempi è stato adottato uno schema centrato per la discretizzazione della derivata spaziale, ma in alternativa può essere adottato ogni possibile schema di discretizzazione. In particolare, sarebbe opportuno adottare uno schema che abbia la medesima accuratezza spaziale dello schema adottato per i punti interni al dominio.

Condizioni al contorno comuni

Le applicazioni pratiche delle condizioni di Dirichlet e di von Neumann nei modelli meteorologici hanno portato ad evidenziare delle situazioni ricorrenti che conviene considerare con un certo dettaglio. In pratica, nei modelli meteorologici, a parte il tipo di coordinate utilizzate, sono presenti frontiere di tipo trasmissivo e frontiere di tipo riflettente.

Frontiera trasmissiva

Nelle situazioni pratiche, il dominio di calcolo è finito e fisicamente può essere necessario ipotizzare che una certa grandezza semplicemente *passi attraverso* la frontiera. Immaginiamo, per esempio, il dominio di forma parallelepipeda di un modello di *PBL* ad area limitata ed in particolare la frontiera costituita dal piano verticale perpendicolare all'asse *x*. Se la velocità del vento è concorde con l'asse *x*, è ragionevole supporre che il flusso di calore passi indisturbato attraverso questa superficie. Ciò si può realizzare facilmente ipotizzando un gradiente nullo per la variabile ξ (che nell'esempio è la temperatura potenziale dell'aria), quindi imponendo una condizione di von Neumann. In questo caso, si può legare il nodo reale (N,1) col nodo fantasma (N+1,1) ipotizzando che nel nodo reale il gradiente di ξ sia nullo, cioè che:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \qquad [7.34a]$$

Questa condizione può essere approssimata con uno schema *forward in space* come:

$$\frac{\xi^n_{N+1,1} - \xi^n_{N,1}}{\Delta x} = 0 \qquad [7.34b]$$

cioè:

$$\xi^n_{N+1,1} = \xi^n_{N,1} \qquad [7.34c]$$

Questo è un modo estremamente semplice di trattare una frontiera trasmissiva e nelle implementazioni dei differenti modelli meteorologici spesso sono state adottate strategie più complesse volte ad assicurare che lo schema con cui era stato discretizzato il flusso nullo alla frontiera possedesse un'accuratezza dello stesso ordine dell'accuratezza con cui erano state discretizzate le equazioni prognostiche del modello.

Frontiera riflettente

Una frontiera di questo genere è una frontiera solida e ciò implica che il flusso normale ad essa sia nullo. Se, per esempio, consideriamo una delle componenti del moto, questa condizione può essere realizzata *copiando* nella *cella fantasma* la componente del moto normale alla frontiera col segno cambiato relativa al nodo immediatamente adiacente al nodo collocato sulla frontiera. In questo modo si è realizzata una condizione di Dirichlet. Consideriamo per esempio la griglia di **Fig. 7.9** ed ipotizziamo che il nodo (3,1) stia su una frontiera riflettente. Supponiamo, inoltre, che le componenti orizzontali al nodo interno (3,2) siano rispettivamente v_x e v_y. La componente normale alla frontiera è v_y, e quindi il *nodo fantasma* (3,0) avrà componenti v_x e $-v_y$. Per le variabili diverse dalle componenti del moto, normalmente si impone un gradiente nullo alla frontiera.

7.1.3.9 Le condizioni iniziali

Il problema

Oltre alle condizioni al contorno, un modello differenziale alle derivate parziali richiede la conoscenza delle condizioni iniziali che consistono nella conoscenza del valore di tutte le variabili considerate dal modello in ogni nodo della griglia spaziale all'istante iniziale. In effetti, il senso di un'equazione differenziale è proprio quello di prevedere l'evoluzione temporale di una generica variabile *a partire da* una situazione iniziale nota, rispettando nel contempo tutta una serie di vincoli costituiti tra l'altro dal comportamento atteso della variabile ai bordi esterni del dominio. Ciò comporta che più vicine alla realtà sono le condizioni iniziali, più realistica sarà la previsione del modello di *PBL*. Tra l'altro, come abbiamo visto al Cap. 2, l'atmosfera turbolenta è un sistema caotico e per questo, a fronte di piccole variazioni nelle condizioni iniziali, presenta vistose variazioni nelle previsioni realizzate.

Le condizioni iniziali necessarie ad un modello di *PBL* sono costituite dalla conoscenza completa ed esatta del valore dei campi di tutte le variabili presenti nel modello in ogni nodo della griglia spaziale tridimensionale all'istante $t = 0$. Inoltre, questi campi iniziali debbono essi stessi rispettare le leggi della Fluidodinamica che governano lo stato e l'evoluzione del *PBL*, quindi, per esempio, è necessario che venga conservata la massa e che, distante dal suolo, esista un sostanziale equilibrio geostrofico. Nel caso ciò non avvenisse, il modello verrebbe perturbato profondamente e potrebbe divergere dalla realtà.

Ma di cosa disponiamo per poter determinare le condizioni iniziali di un modello di *PBL*? La risposta dipende fondamentalmente dal tipo di modello meteorologico che si sta considerando e da chi lo utilizza. Se prendiamo come esempio iniziale il modello a scala globale gestito dall'*European Centre for Medium-Range Weather Forecast* (*Ecmwf*) creato in Europa nel 1975 ed operativo a Reading (UK), esso può disporre di un insieme di osservazioni da terra, da radiosondaggi, da misure da satellite, da navi, da aerei, da radar meteorologici, da Gps, ecc. distribuiti in tutto il mondo e la maggior parte di queste osservazioni strumentali è disponibile ad ore prefissate. A

titolo di esempio, nella **Fig. 7.10** viene mostrata la distribuzione delle osservazioni a terra, mentre nella **Fig. 7.11** viene mostrata la distribuzione dei siti in cui vengono realizzati i radiosondaggi. Come si può vedere, la distribuzione delle varie osservazioni è spazialmente molto disomogenea e la loro presenza nelle zone del globo occupate dagli oceani è molto scarsa, garantita solo da alcune boe strumentate.

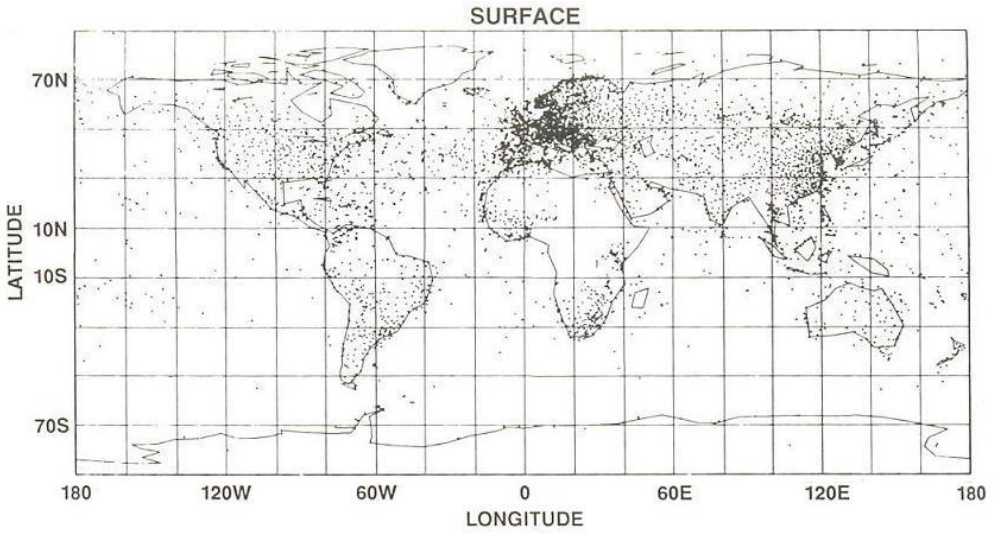


Fig. 7.10: distribuzione delle misure meteorologiche al suolo nel mondo (Daley, 1991)

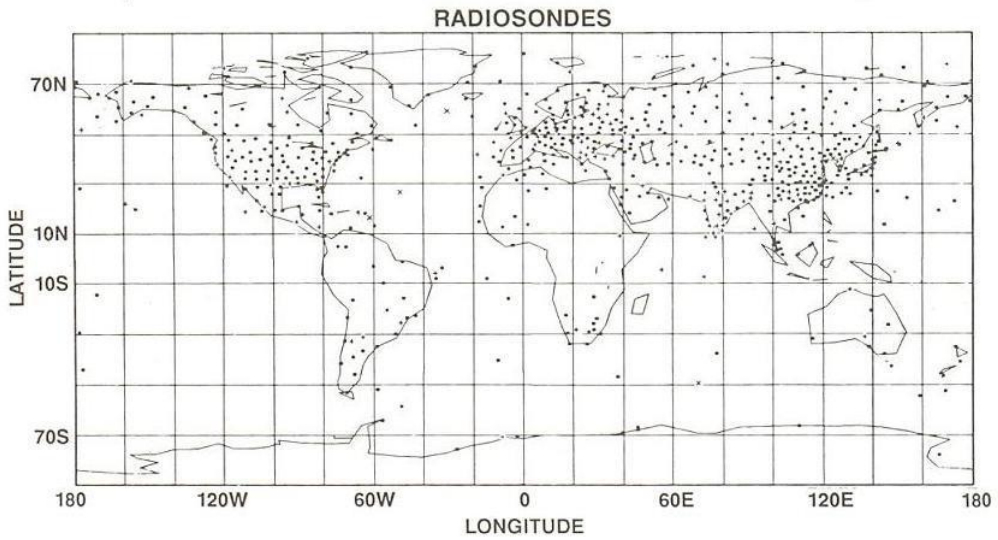


Fig. 7.11: distribuzione dei radiosondaggi nel mondo (Daley, 1991)

Alla disomogeneità spaziale delle misure si deve aggiungere anche la loro disomogeneità in termini di *qualità del dato*. Non tutte le osservazioni possiedono la stessa qualità e ciò dipende soprattutto dal tipo di sensore impiegato, dallo stato di manutenzione dello stesso e dalla sua calibrazione. Quindi ognuna delle osservazioni disponibili è caratterizzata da una propria incertezza intrinseca, generalmente non nota a priori, soprattutto al Centro che riceve questa massa di osservazioni. Inoltre, tra le varie misure si annidano anche inevitabilmente misure erronee dovute al malfunzionamento dello strumento di misura che si mischiano con le misure corrette. Nonostante la cura posta nella localizzazione delle varie postazioni di misura, è inevitabile che alcune misure abbiano una rappresentatività eccessivamente locale e quindi mostrino aspetti e fenomeni locali a scapito di una visione meteorologica a mesoscala. Ma questa è la sola base informativa

strumentale disponibile e già ciò costituisce un grande miracolo organizzativo internazionale. Riassumendo, l'*ECMWF* dispone di una massa enorme di informazioni strumentali ad ore prefissate ogni giorno a cui deve dare un senso e da cui deve dedurre una condizione iniziale per il modello meteorologico globale. È evidente l'impegno costante nell'effettuare un accurato *Quality Control* delle misure ricevute e le misure ritenute valide contribuiscono ad accurate valutazioni climatologiche che rappresentano, per ciascun punto di misura, una sorta di *andamento medio caratteristico* delle diverse grandezze meteorologiche utili per individuare le discrepanze (*anomalie*) tra le misure ad un dato istante ed il valore più probabile che esse dovrebbero avere.

Nel caso in cui, invece, si consideri un modello ad area limitata, la porzione di territorio considerato è di minore estensione e di conseguenza minori saranno le misure disponibili nel circuito internazionale meteorologico cui far riferimento e a cui, però, si possono aggiungere ulteriori misure locali anch'esse soggette ad errori e malfunzionamenti. Inoltre, il modello, pur non *risolvendo* fenomeni meteorologici a scala superiore alle proprie dimensioni, comunque di questi fenomeni deve pur tenere conto ed in qualche misura si deve trovare il modo perché sia in grado di fare ciò. Dalle sole misure disponibili entro il proprio dominio di calcolo non è pensabile che ciò si possa fare realisticamente.

Istintivamente si potrebbe pensare di adottare una qualche tecnica di interpolazione ed ottenere i campi tridimensionali iniziali interpolando semplicemente le misure disponibili, in modo da attribuire ad ogni cella del dominio di calcolo un valore per ogni variabile presente nel modello. Ciò potrebbe essere pensabile nel caso di un modello globale, anche se quello che si otterrebbe difficilmente potrebbe possedere la necessaria congruenza fisica richiesta dalla Fluidodinamica. Sicuramente questa strategia non è ragionevolmente applicabile per la costruzione delle condizioni iniziali di un modello ad area limitata perché sarebbe impossibile introdurre in esso le informazioni riguardanti fenomeni meteorologici a grande scala.

Un Centro Meteorologico come l'*ECMWF* (o altri centri meteorologici simili) attiva più volte ogni giorno il modello meteorologico globale che produce, a tempi prefissati, la previsione dei campi di tutte le variabili meteorologiche presenti nel modello e, dato che il dominio di calcolo su cui opera racchiude tutto il globo, le condizioni al contorno necessarie sono periodiche e non necessitano quindi di un calcolo preliminare. Ipotizziamo che l'attivazione del modello sia avvenuta ad un generico $t = t_0$. Al tempo $t = t_0 + \Delta t$ sarà quindi disponibile una previsione per tutto il globo. Se Δt è ragionevolmente piccolo (per es. Δt = 3 ore), queste *previsioni a breve termine* ragionevolmente rappresentano lo stato dell'atmosfera, almeno alla risoluzione del modello globale, ed risultano *bilanciate*, cioè rispettano le leggi della Fluidodinamica. Esse possono costituire ciò che ragionevolmente possiamo conoscere sul fenomeno in atto senza tener conto delle misure sperimentali, ma impiegando tutte le conoscenze fisiche disponibili, e costituiscono ciò che viene chiamata la *situazione di background* al tempo $t = t_0+\Delta t$.

Per un modello ad area limitata la situazione di *background* è costituita dai campi di *background* previsti dal modello globale al tempo $t_0+\Delta t$ relativamente al dominio di calcolo coperto dal modello, interpolati nella griglia di calcolo propria. Quindi la previsione modellistica a grande scala e a breve termine di un modello globale fornisce i campi di *background* direttamente a se stesso ed indirettamente ad ogni modello ad area limitata e, per entrambi, tali campi costituiscono un'*informazione a priori* da utilizzare come ingrediente essenziale per la costruzione delle condizioni iniziali qualora essi debbano essere nuovamente attivati a partire da $t = t_0+\Delta t$. Ma quali sono state le previsioni a breve termine che hanno consentito a *ECMWF* (e ad altri centri) di realizzare per la prima volta i campi di *background*? Una possibile risposta potrebbe essere una previsione a breve termine di un altro centro meteorologico o semplicemente tali campi sono stati ottenuti dagli andamenti climatologici rilevati nelle diverse postazioni distribuite sul globo.

A questo punto, per ottenere l'analisi, cioè per definire le condizioni iniziali di un modello meteorologico, disponiamo di due tipi di informazioni con caratteristiche e provenienza molto differenti:

- i *campi di background* che, essendo previsioni a breve termine, hanno il pregio di essere

fisicamente congruenti (essendo stati generati da un modello meteorologico, essi garantiscono il rispetto delle leggi di conservazione della Fluidodinamica), ma il difetto di non tener conto di tutti i possibili fenomeni meteorologici possibili (la fisica che si può inserire entro un modello è necessariamente semplificata e limitata) e del fatto che il sistema di equazioni del modello è un sistema caotico che, essendo estremamente sensibile alle condizioni iniziali ed al contorno, può presentare divergenze profonde rispetto alla realtà col procedere della simulazione;

- un *insieme enorme di misure* che rappresentano sì la realtà strumentale, ma che sono distribuite in maniera spazialmente disomogenea e sono caratterizzate da errori ed incertezze intrinseche.

L'istinto suggerisce che solo mettendo insieme in qualche modo queste due informazioni è possibile ricostruire al meglio i campi iniziali per i vari tipi di modelli meteorologici. Da questa sensazione è nata una disciplina nuova nell'ambito della Meteorologia nota come *Data Assimilation* che si prefigge come obiettivo primario quello di individuare teorie, tecniche ed algoritmi numerici con cui assimilare all'interno dei campi di *background* (fondamentalmente costituiti da previsioni modellistiche a breve termine) tutte le misure sperimentali disponibili (affette da incertezza) in modo tale che il risultato ottenuto ottimizzi nel suo complesso l'insieme delle informazioni disponibili. Il risultato ottenuto prende il nome di *Analisi* e costituisce finalmente la condizione iniziale da cui parte una previsione meteorologica.

La disciplina della *Data Assimilation* adotta costrutti matematici (soprattutto matriciali) complessi e per questo non è di semplice comprensione. Inoltre, la matematica connessa agli sviluppi attuali della *Data Assimilation* è ancora più complessa e difficilmente avvicinabile. Il celebre libro di Roger Daley (1991) costituisce il primo e fondamentale riferimento per le tecniche di *Data Assimilation* ed in esso le varie tecniche note al momento della sua scrittura sono descritte nei minimi dettagli (e ciò non ne facilita certo lo studio). Tuttavia, per un approccio più didattico in cui l'intero argomento delle previsioni sia comprensibile in tutti i suoi aspetti, conviene riferirsi al libro di Eugenia Kalnay (2003) che, oltre ad una maggior comprensibilità, sintetizza oltre un decennio di attività professionale dall'Autrice come direttore dell'*Environmental Modeling Center* (US National Weather Service). Oltre a questi due libri fondamentali, val la pena ricordare il libro di Andrew Bennett (2002) che introduce il lettore nelle più moderne tecniche di assimilazione caratterizzate da una matematica che fa davvero impressione. Il lavoro nel settore è in continua evoluzione, come lo è il lavoro di chi studia i metodi numerici di risoluzione delle equazioni presenti nei modelli meteorologici e un'intera rivista dell'*American Meteorological Society*, il *Monthly Weather Review*, è dedicata quasi esclusivamente a questi due argomenti di primaria importanza e tuttora in forte sviluppo scientifico. In questa sede non pretendiamo di fornire un'esauriente esposizione di queste teorie, ma ci limiteremo solo ad alcune brevi note introduttive, rimandando ai libri citati ed ai lavori scientifici presentati in Letteratura coloro che fossero interessati all'argomento.

Un metodo semplice: il Metodo di Cressman

Il metodo più semplice possibile per predisporre un'*analisi*, cioè un insieme di campi con cui ottenere le condizioni iniziali per un modello meteorologico, è quello di combinare il campo di *background* direttamente con le misure, senza impiegare esplicitamente alcun tipo di considerazioni statistiche. Per semplicità, consideriamo un modello ad area limitata ed una generica variabile scalare *f*, anche se i ragionamenti che faremo possono facilmente essere estesi a tutte le variabili meteorologiche di interesse e ad un modello globale.

Per prima cosa, consideriamo un certo istante *t* per cui vogliamo ottenere l'analisi ed ipotizziamo di possedere per questo istante un campo di *background* che indichiamo come $\mathbf{f}^b$. Tale campo potrà essere visto matematicamente come una matrice tridimensionale oppure, aggregando opportunamente gli indici dei nodi del dominio, come un unico vettore per cui ogni singolo nodo del dominio di calcolo può essere univocamente determinato dall'unico indice *i*. In

sostanza, l'informazione a priori disponibile è costituita dai valori di *background* f_i^b, uno per ciascun nodo. Immaginiamo, inoltre, di poter stimare l'incertezza intrinseca dei campi di *background*. Operativamente, potrebbe essere pensabile realizzare svariate simulazioni della situazione al tempo *t* con lo stesso modello o con modelli differenti, partendo da condizioni iniziali lievemente differenti e stimare la varianza σ_b^2 delle stime così ottenute nelle diverse celle del dominio di calcolo al tempo *t*.

Un'ulteriore informazione è costituita dall'insieme delle *K* misure della variabile *f* disponibili o entro il dominio di calcolo o anche al di fuori dello stesso. Alcune di queste misure rappresenteranno situazioni a grande scala (per esempio una misura realizzata al centro di un'estesa pianura), altre, invece, avranno una rappresentatività più locale (per esempio misure localizzate in una valle). Queste caratteristiche di rappresentatività dovranno essere note a priori. Inoltre, ipotizziamo che sia stimabile la varianza complessiva σ_m^2 attribuita alle misure della variabile *f*. Per comodità, definiamo $\varepsilon^2 = \sigma_m^2/\sigma_b^2$.

L'analisi relativa alla grandezza *f* in ogni nodo *i*, che indichiamo come f_i^a la si può ottenere impiegando un metodo che corregge iterativamente il campo di *background*. In pratica si opera per passi successivi:

Passo 0: l'analisi f_i^0 la si ottiene semplicemente attribuendo ad ogni nodo *i*-esimo il valore di *background*. Questo è il minimo che si possa fare, ottenendo un campo fisicamente congruente, ma ignorando tutte le misure disponibili. Quindi:

$$f_i^0 = f_i^b \qquad [7.35a]$$

Passo 1: finalmente si introducono le misure. Inizialmente si ipotizza un *raggio di influenza* R_1 che individua le *K* postazioni di misura disponibili e che sarà piuttosto ampio (per es. pari alla diagonale orizzontale del dominio di calcolo) in modo da far prevalere l'informazione a mesoscala sull'informazione locale. Col raggio di influenza si quantifica la rappresentatività spaziale che si attribuisce alle misure disponibili. Quindi, inizialmente si ipotizza che, in qualche modo, tutte le informazioni possono contribuire alla conoscenza del campo *f* spaziale. Sia f_k^0 il valore del campo di *background* nel punto sede della postazione *k-esima*, mentre sia f_k^m la misura ivi disponibile. Allora, per ogni nodo *i*, la prima stima dell'analisi è data da:

$$f_i^1 = f_i^0 + \frac{\sum_{k=1}^{K} w_{i,k}^1 \cdot (f_k^m - f_k^0)}{\sum_{k=1}^{K} w_{i,k}^1 + \varepsilon^2} \qquad [7.35b]$$

Come si vede, l'analisi del passo precedente, che coincideva col campo di *background*, viene ora corretta *pesando* opportunamente la differenza tra le misure realizzate nella posizione *k* e l'analisi ottenuta al passo precedente interpolata nel punto di misura. I pesi presenti nella relazione sono definiti come:

$$w_{i,k}^1 = \begin{cases} \dfrac{R_1^2 - r_{i,k}^2}{R_1^2 + r_{i,k}^2} & per\ r_{i,k}^2 \le R_1^2 \\ 0 & per\ r_{i,k}^2 > R_1^2 \end{cases} \qquad [7.35c]$$

dove $r_{i,k}$ è la distanza tra il nodo *i* della griglia e la postazione di misura *k*. Come si vede, le postazioni pesano in maniera inversamente proporzionale alla loro distanza dal nodo di griglia. A questo punto, il campo di *background* ha ricevuto una prima informazione sperimentale evitando il più possibile i dettagli locali.

Passo n: i passi successivi sono del tutto analoghi al Passo 1. In particolare, nota l'analisi al passo *n*-1, si procede alla nuova analisi impiegando la stessa metodologia, ma eventualmente riducendo il raggio di influenza in modo da introdurre gradualmente nell'analisi anche gli effetti locali. In pratica si avrà che:

$$f_i^n = f_i^{n-1} + \frac{\sum_{k=1}^{K} w_{i,k}^n \cdot (f_k^m - f_k^{n-1})}{\sum_{k=1}^{K} w_{i,k}^n + \varepsilon^2} \qquad [7.35d]$$

$$w_{i,k}^1 = \begin{cases} \dfrac{R_n^2 - r_{i,k}^2}{R_n^2 + r_{i,k}^2} & per\ r_{i,k}^2 \le R_n^2 \\ 0 & per\ r_{i,k}^2 > R_n^2 \end{cases} \qquad [7.35e]$$

Questa metodologia, partendo dal campo di *background* della grandezza *f*, costruisce una sequenza di campi di analisi che poco alla volta introducono, opportunamente confinati, i dettagli locali rilevati dalle diverse postazioni di misura disponibili. A titolo di esempio, per la pressione atmosferica è stata adottata nell'applicazione pratica del metodo la sequenza di raggi di influenza seguenti: R_1 = 1500 km, R_2 = 1200 km, R_3 = 750 km, R_4 = 300 km. Sebbene questo metodo sia totalmente empirico, presenta una semplicità applicativa tale da costituire nel passato lo strumento preferito per realizzare l'analisi. Se, una volta ottenuta l'analisi, la si corregge impiegando gli algoritmi presentati in Daley (1991), è possibile anche renderla congruente dal punto di vista fisico e quindi utilizzabile come condizione iniziale per il modello meteorologico.

L'Assimilazione dei Dati con il Metodo Optimal Interpolation

Il metodo di Cressman è sostanzialmente un classico metodo di interpolazione con tutti i limiti del caso. Un approccio molto differente è quello in cui si cerca di tener conto nella determinazione dell'analisi delle caratteristiche statistiche che contraddistinguono sia i campi di *background* che le misure utilizzate per la determinazione delle condizioni iniziali del modello e quindi dell'analisi stessa. In pratica, tutti i metodi moderni con cui si realizza l'analisi meteorologica e si determinano le condizioni iniziali di un modello meteorologico sono fortemente basati su considerazioni statistiche. Vista la loro complessità, anche formale, per introdurre le basi del metodo partiremo considerando un semplice esempio costituito dalla temperatura dell'aria in un istante e in un punto dello spazio seguendo puntigliosamente Kalnay (2003).

In questo punto *P* dello spazio, ad un generico tempo *t*, la temperatura dell'aria avrà un ben preciso valore T_t che, però, per noi sarà sempre incognito. Ciò che effettivamente possiamo sapere in quel punto dello spazio-tempo è, per esempio, l'*output* di due termometri posti uno accanto all'altro che misurano le temperature T_1 e T_2. Ipotizziamo, inoltre, che entrambi i termometri siano stati calibrati in modo accurato. Dalla Teoria della Misura, si ha inevitabilmente che:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_t + \varepsilon_1 \\ T_2 &= T_t + \varepsilon_2 \end{aligned} \qquad [7.36a]$$

dove ε_1 e ε_2 sono i rispettivi errori di misura. Se nelle misure realizzate dai due termometri sono assenti errori sistematici, allora:

$$[\varepsilon_1] = [\varepsilon_2] = 0 \qquad E[\varepsilon_1^2] = \sigma_1^2 \qquad E[\varepsilon_2^2] = \sigma_2^2 \qquad [7.36b]$$

Inoltre, non è ragionevole che ci sia un'interferenza reciproca tra i due termometri che sono due entità fisiche indipendenti, quindi:

$$[\varepsilon_1 \varepsilon_1] = 0 \qquad [7.36c]$$

In tutte queste relazioni con la notazione $E[x]$ si è indicato come consueto il valore atteso. Ad ogni istante *t* la vera temperatura T_t è incognita, mentre sono note T_1 e T_2. Come possiamo ottenere la stima T_a (*analisi*) della temperatura *vera* T_t impiegando in maniera ottimale le temperature T_1 e T_2 e tenendo conto delle caratteristiche statistiche che caratterizzano la loro misura?

Un modo ragionevole è supporre che la stima T_a di T_t possa essere ottenuta ad ogni istante da un'opportuna combinazione lineare delle misure prodotte dai due termometri nel medesimo istante, cioè da:

$$T_a = a_1 T_1 + a_2 T_2 \qquad [7.37a]$$

in cui a_1 e a_2 sono degli opportuni *pesi*. Abbiamo ipotizzato che le misure dei due termometri non

siano affette da errori sistematici e quindi è ragionevole supporre che:

$$E[T_a] = T_t \qquad [7.37b]$$

quindi:

$$a_1 + a_2 = 1 \qquad [7.37c]$$

Per procedere, ipotizziamo poi di considerare un numero elevato di eventi in cui siano disponibili le temperature T_1 e T_2 ed in cui si esegue l'analisi impiegando il modello lineare (7.37a), anche se per il momento non abbiamo informazioni sui pesi a_1 e a_2. La miglior stima T_a della variabile incognita T_t ad ogni istante è quella che minimizza lo scarto quadratico medio tra l'analisi T_a ed il valore *vero* T_t. Indichiamo con σ_a^2 tale scostamento quadratico medio (che è poi la varianza dell'analisi). Il valore ottimale dei pesi a_1 e a_2 lo si otterrà risolvendo il problema ai minimi quadrati in cui si minimizza la varianza dell'analisi, cioè:

$$min(\sigma_a^2) = min\{E[(T_a - T_t)^2]\} = min\left\{E\left[\left(a_1(T_1 - T_t) + a_2(T_2 - T_t)\right)^2\right]\right\} \qquad [7.38a]$$

col vincolo (7.37c) che lega tra loro a_1 e a_2. È facile dimostrare che i valori ottimali dei pesi sono legati alle varianze di T_1 e T_2 dalle relazioni:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{1/\sigma_1^2}{1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2} \\ a_2 &= \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{1/\sigma_2^2}{1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2} \end{aligned} \qquad [7.38b]$$

e che la varianza della stima è legata alle varianze delle due misure da:

$$\frac{1}{\sigma_a^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \qquad [7.38c]$$

Va rilevato poi che l'inverso della varianza di una misura (o dell'analisi) può essere vista come una sorta di *precisione* della stessa.

Nulla cambia nel ragionamento se nel punto *P* al generico tempo *t* sono disponibili, invece, una misura $T_m = T_2$ ed una stima di *background* $T_b = T_1$ ottenuta, per esempio, con un modello meteorologico. In questo caso con $\sigma_b^2 = \sigma_1^2$ indichiamo la varianza della stima di *background* e con $\sigma_m^2 = \sigma_2^2$ la varianza della stima della misura. Le relazioni (7.38) sono ancora applicabili, ma è consuetudine riscriverle con una simbologia differente. In particolare:

$$T_a = T_b + W(T_m - T_b) \qquad [7.39a]$$

dove il termine (T_m - T_b) viene indicato come <u>*observational innovation*</u> e rappresenta la nuova informazione fornita dalla misura. In sostanza questa relazione afferma che l'analisi la si ottiene aggiungendo al valore di *background* (che è quindi il valore di primo tentativo) l'innovazione, cioè la differenza tra il valore osservato ed il valore di *background*. In questa relazione è presente il valore ottimale del peso *W* con cui l'innovazione *modifica* il valore di background e che, considerando la (7.38b), risulta pari a:

$$W = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_m^2} \qquad [7.39b]$$

quindi completamente noto se sono note le *precisioni* del modello che realizza il *background* e della misura. Infine, è facile vedere che:

$$\sigma_b^2 = (1 - W) \cdot \sigma_b^2 \qquad [7.39c]$$

Quindi la varianza dell'errore nell'analisi è pari alla varianza del valore di *background* (quindi la varianza delle stime modellistiche) ridotta di un fattore pari ad uno meno il peso ottimale. Il risultato cui siamo giunti è estremamente importante, anche se limitato ad una sola variabile in un punto del dominio spazio-temporale. Se si è in grado di determinare l'errore quadratico medio intrinseco alla stima modellistica della variabile (che è il nostro *background*, quindi la nostra

informazione a priori) e l'errore quadratico medio associato ad una misura, allora possiamo ottenere un'*analisi* che rappresenta la stima più prossima nel senso dei minimi quadrati al valore vero. Questo è, di fatto, il nucleo logico su cui si basa il *Metodo di Optimal Interpolation* che è un ottimo mezzo per determinare le condizioni iniziali per un modello basandosi su una stima di *background* e sulle misure disponibili.

Nelle situazioni reali le variabili sono molte (tutte quelle considerate dal modello meteorologico) ed i punti di interesse sono tutti i punti del dominio di calcolo. Per semplicità analitica possiamo costruire un vettore **x** mettendo una dietro l'altra tutte le variabili di interesse per ogni nodo del dominio. Questo vettore avrà dimensione *n* dove *n* è il prodotto del numero di variabili considerate dal modello per il numero di nodi della griglia tridimensionale di calcolo. Avremo quindi che $\mathbf{x}_t$ è il valore *vero* (e quindi incognito) del vettore, $\mathbf{x}_b$ è il relativo vettore di *background* e $\mathbf{x}_a$ il valore relativo all'analisi e tutti questi vettori hanno dimensione *n.* La differenza tra il vettore dell'analisi $\mathbf{x}_a$ ed il vettore *vero* $\mathbf{x}_t$ è un vettore in cui sono contenuti gli errori di analisi $\boldsymbol{\varepsilon}_a$. Ogni elemento rappresenta l'errore tra analisi e valore vero di una certa variabile in un certo nodi di griglia. La matrice che si ottiene come:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_a = E[\boldsymbol{\varepsilon}_a \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_a^T] \qquad [7.40a]$$

è la *Matrice di Covarianza degli errori tra analisi e valori veri* ed ha dimensione (*n* x *n*). Anche il *background* è caratterizzato da errori che, in modo analogo, danno luogo alla *Matrice di Covarianza degli errori di background* definita come:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_b = E[\boldsymbol{\varepsilon}_b \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_b^T] \qquad [7.40b]$$

anch'essa di dimensione (*n* x *n*). Ipotizziamo, poi, di poter disporre di misure da utilizzare nella costruzione dell'analisi e condensiamo tutte queste misure in un vettore $\mathbf{y}_m$ di dimensione *p*. Ovviamente, ognuna di queste misure è caratterizzata da un errore e, perciò, complessivamente è definibile una *Matrice di Covarianza degli errori di misura* definita come:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P}_m = E[\boldsymbol{\varepsilon}_m \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_m^T] \qquad [7.40c]$$

che, a differenza delle precedenti, ha dimensione (*p* x *p*). Ovviamente, se le misure sono tra loro indipendenti, tale matrice è diagonale. Normalmente, i punti di misura non coincideranno né in numero né in posizione con i nodi di griglia e per poter attribuire ad ogni punto di misura un valore di *background* si può definire una matrice **H,** di dimensione (*p* x *n*) in maniera tale che:

$$\boldsymbol{y}_{mb} = H \cdot \boldsymbol{x}_b \qquad [7.40d]$$

dove $\mathbf{y}_{mb}$ è un vettore che contiene una stima di *background* per ogni variabile contenuta nel vettore delle misure $\mathbf{y}_m$, valutata in ciascun punto di misura.

A questo punto non è difficile verificare che l'analogo multidimensionale (che è il caso che stiamo trattando) della relazione (7.39a) che rappresenta il *Modello Optimal Interpolation* monodimensionale risulta essere la seguente relazione matriciale:

$$\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}_b = \boldsymbol{W}[\boldsymbol{y}_m - \boldsymbol{y}_{mb}] - \boldsymbol{\varepsilon}_a = \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{d} - \boldsymbol{\varepsilon}_a$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_a = \boldsymbol{x}_a - \boldsymbol{x}_t \qquad [7.41a]$$

dove la matrice **W** (*n* x *p*) è il vettore dei pesi di cui dobbiamo determinare il valore ottimale e **d** è il vettore dell'*innovazione* (di dimensione *p*). Rimandando a Kalnay (2003) per i dettagli, la matrice dei pesi **W** può essere così espressa in funzione della Matrice di Covarianza del *background* **B**, della Matrice di Covarianza delle osservazioni sperimentali **R** e dalla matrice **H**:

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}^T(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}^T)^{-1} \qquad [7.41b]$$

Al di là della presenza della matrice **H**, è immediato individuare una notevole somiglianza formale con le relazioni (7.37) ottenute nel caso monodimensionale. Lo sviluppo teorico che porta alla relazione precedente è piuttosto complesso e ci consente anche di ottenere la relazione seguente che esprime, sulla base delle matrici **W**, **H** e **B,** la Matrice di Covarianza dell'analisi e

quindi consente di quantificare la bontà della stessa:

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{H}) \cdot \boldsymbol{B} \qquad [7.41c]$$

Con **I** si è indicata la matrice identità.

Ciò che è stato presentato è solo una brevissima introduzione al problema dell'Assimilazione delle misure realizzata col *Metodo Optimal Interpolation*. In sostanza, come nel caso del metodo di Cressman, l'assimilazione consiste nell'aggiungere al campo di *back-ground* una correzione fortemente correlata con le misure disponibili nei vari punti del dominio di calcolo. La profonda differenza tra i due metodi sta nel fatto che, mentre il metodo di Cressman impiega sostanzialmente solo la distanza tra nodo di griglia e punto di misura come elemento per determinare questa correzione, il metodo *Optimal Interpolation* utilizza tutte le informazioni disponibili a priori (la conoscenza degli errori strumentali e la conoscenza dell'incertezza intrinseca al *back-ground*) e produce non solo i pesi ottimali per ottenere l'analisi, la più vicina possibile al campo vero (ma incognito), ma anche l'incertezza intrinseca all'analisi stessa. L'analisi così ottenuta costituisce quindi la condizione iniziale per il modello meteorologico, riassumendo ed utilizzando tutte le informazioni note all'istante *t*. Perché un modello, che si attiva all'istante *t* possa utilizzare questa analisi come condizione iniziale è necessario che si proceda ad un suo *bilanciamento* in maniera da rispettare la congruenza fisica richiesta dalle leggi della Fluidodinamica e, come detto, in Daley (1991) sono descritti metodi per ottenere ciò.

Per chi fosse interessato ai dettagli analitici dell'Optimal Interpolation, si rimanda a Daley(1991), a Kalnay (2003) e a Tiébaux e Pedder (1987).

L'Assimilazione dei Dati col Metodo variazionale

Consideriamo ancora una volta l'esempio monodimensionale trattato in precedenza. La miglior possibile stima del valore vero T_t della temperatura in ogni istante di interesse *t* in un punto *P* la si ottiene dal ragionamento seguente. Immaginiamo che T_1 e T_2 siano delle misure non distorte di T_t. In questo caso, tra una stima T_a di T_t e le singole misure si potrà definire un errore quadratico medio pari alla somma dei quadrati delle *distanze* tra la stima T_a della temperatura e le due osservazioni disponibili, pesate per la relativa *precisione* (termine con cui abbiamo denominato l'inverso delle varianze di misura):

$$J(T_a) = \frac{1}{2}\left[\frac{(T_a - T_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(T_a - T_2)^2}{\sigma_2^2}\right] \qquad [7.42]$$

Tra tutti i possibili valori di T_a, il valor ottimale è quello che minimizza il funzionale $J(T_a)$. È facile dimostrare che T_a è ancora una volta data dalla relazione (7.37a) con i pesi definiti dalle (7.38b) e (7.38c).

L'applicazione al caso multidimensionale (l'unico che ci interessi davvero) non è semplice e richiede sviluppi matematici di Algebra Lineare piuttosto complessi che qui non presenteremo. Il risultato a cui comunque si giunge è che l'analisi $\mathbf{x}_a$ la si ottiene minimizzando il funzionale dato dall'espressione seguente, in cui compaiono ancora una volta la *Matrice di Correlazione degli errori di background* **B** e la *Matrice di Correlazione degli errori di misura* **R**:

$$2J(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_b)^T \boldsymbol{B}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_b) + (\boldsymbol{y}_m - \boldsymbol{y}_{mb})^T \boldsymbol{R}^{-1} (\boldsymbol{y}_m - \boldsymbol{y}_{mb}) \qquad [7.43a]$$

In pratica è necessario individuare il vettore $\mathbf{x}_a$ tale per cui:

$$\nabla J(\boldsymbol{x_a}) = 0 \qquad [7.43b]$$

Le tecniche utilizzate per la minimizzazione del funzionale *J* sono le più varie e le più complesse ed in questa sede non è possibile darne neppure una presentazione didattica. Si rimanda, quindi, per i dettagli a Kalnay (2003) ed alla Bibliografia ivi citata.

Va sottolineato che, pur essendo strettamente parente dell'*Optimal Interpolation*, la struttura matematica del Metodo Variazionale presenta maggiori opportunità di sviluppo e ciò ha consentito di mettere a punto i più moderni algoritmi di *Data Assimilation* attualmente impiegati per

preparare le condizioni iniziali dei modelli meteorologici, oltre che essere la base per ulteriori sviluppi teorici come, per esempio, il metodo di assimilazione che impiega il Filtro di Kalman.

7.1.4 LE PARAMETRIZZAZIONI

Fin qui abbiamo focalizzato tutta l'attenzione nel trasformare le equazioni differenziali alle derivate parziali del modello meteorologico prognostico in un sistema di equazioni algebriche risolubili con i normali metodi dell'Analisi Numerica, badando soprattutto alla stabilità ed alla coerenza degli schemi numerici utilizzati per trasformare gli operatori differenziali ivi presenti. Abbiamo, inoltre, studiato i problemi legati alle condizioni iniziali e a quelle al contorno necessarie perché il sistema di equazioni (differenziali ed algebriche) ammetta una soluzione. Ci sono, però, altri aspetti di fondamentale importanza che cercheremo di sintetizzare brevemente qui di seguito e che condizionano pesantemente il comportamento predittivo e ricostruttivo del modello.

Se consideriamo tutte le equazioni differenziali alle derivate parziali prognostiche, vediamo che in ognuna di esse è presente almeno un termine di sorgente (positivo o negativo a seconda dei casi). Nella discussione precedente, tali termini venivano implicitamente ritenuti *noti*. Consideriamo, in particolare, l'equazione differenziale per la temperatura potenziale virtuale e le equazioni differenziali prognostiche per il contenuto di acqua in fase solida, liquida e gassosa. In queste quattro equazioni differenziali sono presenti *termini di sorgente* che rappresentano, da un lato, l'interazione della radiazione ad onda lunga e ad onda corta con alcuni dei componenti dell'atmosfera e, dall'altro, la dispersione e la trasformazione dell'acqua presente in aria nei vari stati di aggregazione con la presenza e l'evoluzione dei vari tipi di nubi e di precipitazioni che ne sono la manifestazione macroscopica. Di fatto, a fianco del modello fluidodinamico dell'atmosfera si pone, almeno concettualmente, anche un modello termodinamico dell'atmosfera non meno complesso del precedente.

Oltre a ciò, bisogna ricordare che la frontiera inferiore di un modello meteorologico è la superficie terrestre che divide l'atmosfera dal suolo (o dal mare) e sappiamo bene che tra i due sistemi esiste uno scambio di proprietà che, di fatto, determina lo stato e l'evoluzione dell'atmosfera (ed anche del mare). Quindi è ragionevole che ci sia un modello di suolo che si va ad affiancare al modello meteorologico vero e proprio e, per poter descrivere realisticamente i diversi tipi di suolo, non potrà essere semplice! Tale modello dovrà tener conto del tipo di suolo presente in un dato punto della superficie terrestre, della presenza o meno della vegetazione e del tipo della stessa, della presenza o meno di zone urbanizzate, dalla presenza o meno di specchi d'acqua ecc. Ricordiamoci, poi, che la vegetazione è un *elemento attivo* del sistema ed evolve profondamente col tempo, spesso in maniera periodica, e questa evoluzione è inevitabilmente sentita dall'intera atmosfera. L'interfaccia atmosfera-superficie terrestre è sicuramente il punto in cui, almeno logicamente, hanno origine tutti i termini di sorgente e il suo studio e la sua modellizzazione sono l'elemento che più condiziona il comportamento di un modello meteorologico perché è lì che si decide come ripartire ed utilizzare l'energia radiativa fornita dal sole. Fatta questa scelta, l'atmosfera utilizza l'energia a lei attribuita ed il modello meteorologico *semplicemente* descrive ciò che avviene ed avverrà a seguito di questo *input* energetico. Ma come abbiamo visto, l'effetto dell'interazione tra atmosfera e superficie terrestre non può essere localizzato esattamente in corrispondenza di una superficie geometrica, ma piuttosto in uno strato di atmosfera molto poco esteso in verticale ma in cui i flussi turbolenti possono essere ritenuti circa costanti. Questo strato d'aria altro non è che il *Surface Layer* che può essere visto come la *zona di transizione* tra il suolo, qualunque esso sia, e l'atmosfera vera e propria. Spesso è conveniente che i modelli meteorologici trattino questa zona di transizione in maniera appropriata e distinta dall'atmosfera sovrastante.

A questo punto dovrebbe essere chiaro che, per funzionare, il modello di atmosfera che conosciamo, costituito dal sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che descrive complessivamente le varie leggi di conservazione della Fisica, ha bisogno di poter disporre di modelli aggiuntivi che descrivono i vari termini di sorgente in esse presenti e che questi modelli aggiuntivi spesso creano un *feedback* col modello meteorologico vero e proprio. Essi possono

essere più o meno complessi a seconda del tipo di modello considerato e degli scopi che ci si prefigge col suo utilizzo. Per esempio, se il modello meteorologico è di tipo globale, allora il modello di suolo e la trattazione del *SL* può essere piuttosto semplice, viceversa se il modello meteorologico è un modello ad area limitata dedicato alla descrizione dello stato e dell'evoluzione del *PBL*, il modello di suolo non potrà che essere complesso e particolareggiato vista la scala spaziale richiesta.

È invalso l'uso di indicare tutti questi modelli *paralleli* al modello meteorologico vero e proprio col termine *parametrizzazioni* e nelle realizzazioni pratiche dei vari modelli meteorologici esse possono essere le più varie: da vere e proprie parametrizzazioni algebriche a complessi modelli differenziali. Proprio per questo, ogni modello meteorologico è una realtà a sé, derivata dalle scelte fatte dal gruppo che lo ha sviluppato, gruppo che, come dovrebbe essere ormai chiaro, non può che essere un gruppo multidisciplinare visto che ogni aspetto del problema (la scelta delle equazioni fluidodinamiche da considerare, il tipo di chiusura da adottare, gli schemi numerici di discretizzazione, la scelta del modello radiativo, la scelta del modello di suolo, la scelta del tipo di descrizione della microfisica delle nubi e la scelta di come trattare il *SL* e gli scambi turbolenti ivi presenti) richiede inevitabilmente una profonda conoscenza delle singole tematiche. La realizzazione di un modello meteorologico non è un'impresa individuale ma uno sforzo collettivo!

Visto tutto ciò, tentare di descrivere le parametrizzazioni da adottare è un'impresa assai ardua e il libro di Stensrud (2007) è un prezioso aiuto a chi volesse avere una visione del problema e volesse individuare i riferimenti bibliografici più appropriati per approfondire i vari temi. Esempi concreti delle scelte di parametrizzazione operate in alcuni modelli meteorologici esistenti ed operativi possono essere trovati per esempio in Anthens e Warner (1978), Chang e al. (1999), Chen e Dudhia (2001), Hurley (2004). Qui di seguito ci limiteremo solo ad alcuni brevi cenni sui vari tipi di parametrizzazioni.

7.1.4.1 La parametrizzazione degli scambi radiativi

La radiazione solare ad onda corta attraversa tutta l'atmosfera, interagendo con i principali costituenti gassosi e particellari presenti in essa. In questa interazione tra radiazione elettromagnetica e materia si ha che una parte della radiazione viene assorbita ed una parte viene dispersa in ogni direzione (*scattering*) e questo processo continua fino a quando la radiazione raggiunge la superficie terrestre. Qui, in parte la radiazione solare viene assorbita dal suolo e la parte riflessa nuovamente ripercorre l'atmosfera in senso contrario, subendo un ulteriore assorbimento e *scattering*. D'altro canto, la superficie terrestre è un corpo grigio e irradia verso l'alto radiazione elettromagnetica ad onda lunga (l'*infrarosso terrestre*), proporzionale alla propria temperatura, che percorre l'atmosfera subendo *scattering* ed assorbimento. Ma anche l'atmosfera stessa emette radiazione ad onda lunga (l'*infrarosso atmosferico*) che in modo analogo interagisce con l'atmosfera.

L'intero Cap. 6 l'abbiamo dedicato a questo difficile argomento, cercando di presentare l'essenziale della complessa teoria degli scambi radiativi in atmosfera, ma soprattutto abbiamo presentato ai Paragrafi 6.5 e 6.6 le principali parametrizzazioni che possono essere adottate per descrivere quantitativamente i termini di sorgente, cioè la divergenza dei flussi radiativi, presenti nell'equazione prognostica della temperatura potenziale. I vari modelli meteorologici richiedono una descrizione degli scambi radiativi ad onda corta e ad onda lunga che hanno luogo alle varie quote ed adottano modelli radiativi più o meno complessi a seconda delle esigenze. Dato che l'integrazione (in genere numerica) del modello radiativo richiede un notevole sforzo computazionale, spesso nei modelli operativi l'utente può scegliere, a seconda delle proprie esigenze, tra vari schemi di diversa complessità e quindi di diverso peso computazionale. Comunque va detto che una parte rilevante del tempo computazionale richiesto da un modello meteorologico è totalmente dedicata all'integrazione del modello che descrive gli scambi radiativi ad onda lunga e ad onda corta e quindi al calcolo della divergenza dei flussi radiativi che sono poi il termine di sorgente per l'equazione prognostica della temperatura potenziale e, indirettamente, influiscono sui termini di sorgente delle equazioni per il contenuto d'acqua nei diversi stati di aggregazione.

7.1.4.2 La parametrizzazione dell'acqua in atmosfera

La presenza dell'acqua nell'atmosfera è descritta analiticamente dalle tre equazioni prognostiche per la concentrazione di acqua in fase solida (particelle di ghiaccio), liquida (aerosol e gocce d'acqua liquida) e gassosa. In ciascuna di esse sono presenti dei termini di sorgente che rappresentano sinteticamente la complessa termodinamica che sovraintende al passaggio dell'acqua da una fase all'altra in funzione della temperatura, della divergenza dei flussi radiativi e della pressione atmosferica locale. In pratica, è attraverso queste equazioni che nel modello meteorologico si tiene conto della formazione delle nubi, del loro movimento in atmosfera, della loro evoluzione nel tempo, del tipo di idrometeore in esse presenti e della formazione della pioggia, della neve e della grandine. Nei Capitoli precedenti abbiamo considerato sempre, salvo pochissime eccezioni, la sola presenza del vapor d'acqua nell'aria e ne abbiamo condensato l'effetto nel concetto di temperatura potenziale virtuale. Nulla però abbiamo detto sul tipo di nubi, sulla loro formazione ed evoluzione, sull'aerosol presente in aria, sulla relativa distribuzione granulometrica. In effetti questo complesso argomento non è tradizionalmente trattato in Micrometeorologia, ma lo è in Meteorologia Generale ai cui testi si rimanda. Se nelle discussioni teoriche sul *PBL* si considerano prevalentemente delle situazioni paradigmatiche caratterizzate di fatto da cielo sereno, i modelli meteorologici che devono operare in ogni possibile condizione non possono ignorare la presenza delle nubi e tutto ciò che ne consegue, compresi i violenti moti verticali associati alla presenza di particolari tipi di formazioni nuvolose e di situazioni temporalesche.

Non è possibile trattare in questa sede tale argomento e perciò si rimanda ai normali testi di Meteorologia Generale. Tuttavia, per comodità, va ricordato che al Cap.7 del libro di Stensrud (2007) tutti questi argomenti vengono trattati in maniera abbastanza dettagliata, evidenziando i principali riferimenti bibliografici per un eventuale approfondimento e presentando operativamente le parametrizzazioni utilizzate nei modelli meteorologici per tener conto del tipo di particelle che costituiscono le idrometeore e della loro distribuzione dimensionale. Nel Cap. 6 dello stesso libro si parla invece più propriamente delle nubi, di come si possa descrivere quantitativamente nei modelli la loro formazione e la loro evoluzione e la loro influenza sulla dinamica dell'atmosfera a causa dei moti verticali, spesso violenti, associati alle formazioni temporalesche.

7.1.4.3 La parametrizzazione del suolo e dello Strato Superficiale

L'interfaccia aria-suolo è una realtà molto complessa e variabile a seconda del territorio che si sta considerando. Per gran parte la superficie terrestre è rappresentata dalla superficie del mare e dell'oceano, quindi da una superficie liquida in movimento (verticale ed orizzontale) in perenne evaporazione. Una notevole parte del globo, in particolare la zona artica e la zona Antartica presenta invece una superficie costituita da estese distese di ghiacci ed una sempre più estesa porzione della superficie terrestre è occupata da megalopoli e da estese aree edificate. Ma la situazione paradigmatica per eccellenza è quella rappresentata nella **Fig. 7.12** che mostra una superficie coperta da vegetazione sparsa ed i vari processi che determinano i flussi turbolenti di quantità di moto, di calore sensibile e di calore latente. Se consideriamo l'inviluppo di tutti gli elementi mostrati nella figura, possiamo considerare questo volume, relativamente poco esteso in verticale, come l'interfaccia aria-suolo in corrispondenza della quale si ha il bilancio radiativo ed il bilancio energetico superficiale. Un modello meteorologico deve essere in grado di rappresentare questa situazione in maniera corretta perché l'interfaccia aria-suolo è il luogo fisico in cui si concentrano le principali sorgenti di energia necessarie all'evoluzione dell'intera atmosfera. Sintetizzando ciò che è mostrato nella **Fig. 7.12**, possiamo considerare tre ambienti distinti ed interagenti: il suolo e la *canopy* vegetale, l'interfaccia aria-suolo vera e propria (che in generale non è una superficie in senso geometrico) e lo Strato Superficiale sovrastante.

Il modello di suolo

Sperimentalmente (ed anche teoricamente) si è visto che a grandi profondità (cioè a profondità superiori al metro) la temperatura del suolo è sostanzialmente costante nel tempo, mentre il sottile

strato di suolo più vicino alla superficie presenta un riscaldamento ed un raffreddamento circa periodico con periodo giornaliero in risposta alla radiazione solare incidente. Questo processo è stato studiato estesamente al Paragrafo 6.8 cui si rimanda per i dettagli.

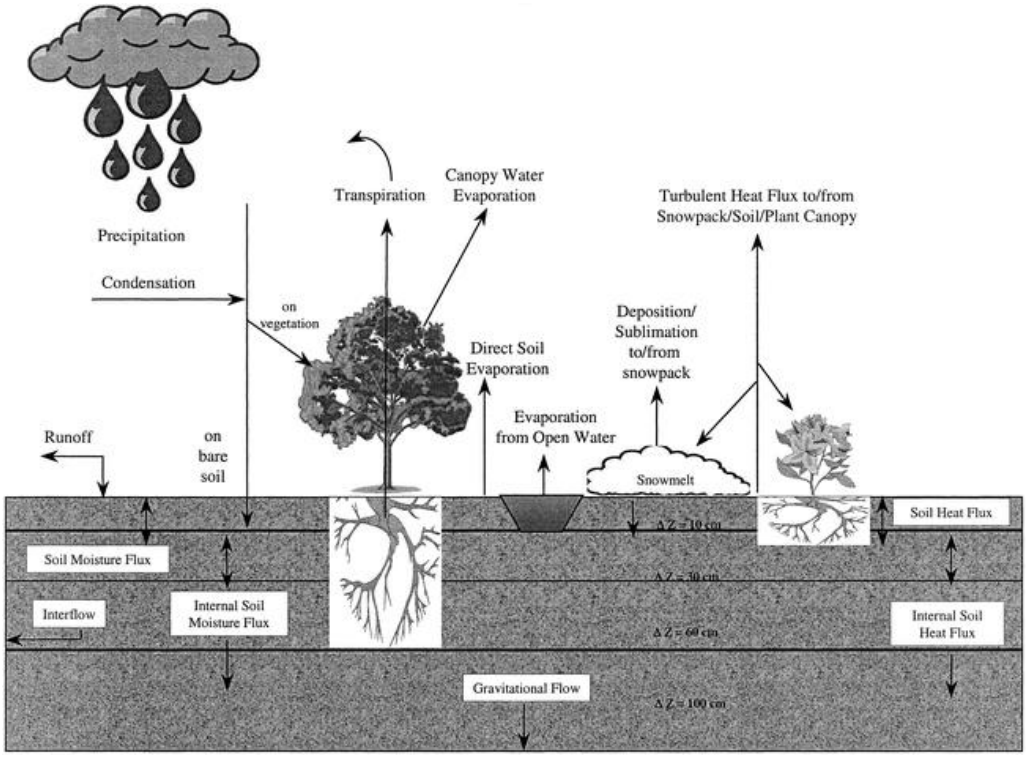


Fig. 7. 12: rappresentazione schematica dell'interfaccia aria-suolo (Chen e Dudhia 2001)

In sostanza si nota che, ipotizzando per semplicità che le caratteristiche termiche del suolo siano costanti spazialmente, la variazione della temperatura T con la profondità z (considerata positiva se diretta verso il basso, quindi con una convenzione contraria a quella adottata per il modello meteorologico) ubbidisce alla *Legge di Fourier della conduzione del calore*:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\lambda}{C}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \qquad [7.44a]$$

dove λ e C sono rispettivamente la conducibilità e la capacità termica del suolo. Le due condizioni al contorno per questa equazione monodimensionale sono molto diverse tra loro. Per z tendente all'infinito (in pratica a profondità superiori al metro) la temperatura del suolo è sostanzialmente una costante (facilmente misurabile), mentre all'interfaccia aria-suolo, cioè per $z = 0$, il flusso di calore G_0 che per conduzione entra (o esce) dal suolo deve essere tale da soddisfare il bilancio energetico superficiale. Questa equazione dovrebbe a rigore far parte delle equazioni del modello meteorologico perché determina la temperatura T_{sfc} a $z = 0$, cioè all'interfaccia suolo-atmosfera che è la condizione al contorno inferiore per l'equazione prognostica della temperatura potenziale presente nel modello meteorologico. Inoltre, per la legge di Stefan-Boltzmann, la temperatura T_{sfc} determina l'ammontare di radiazione infrarossa emessa dal suolo all'atmosfera, elemento essenziale nel bilancio radiativo superficiale. Per quanto abbiamo detto, alle equazioni differenziali alle derivate parziali che costituiscono di diritto il modello meteorologico si dovrebbero aggiungere sia l'equazione differenziale della conduzione del calore nel suolo (7.44a) che le equazioni algebrica che rappresentano rispettivamente il Bilancio Radiativo Superficiale:

$$R_N = R_g(1-\alpha) + L^{\downarrow} - \varepsilon\sigma_B T_{sfc}^4 \qquad [7.44b]$$

ed il Bilancio energetico Superficiale:

$$R_N - G_0 = H_0 + H_E \qquad [7.44c]$$

dove α è il coefficiente d'albedo integrale, $L^{\downarrow}$ è la radiazione infrarossa atmosferica, ε è l'emissività della superficie terrestre, σ_B è la costante di Stefan Boltzmann, R_N è la radiazione netta, H_0 è il flusso turbolento di calore sensibile e H_E è il flusso turbolento di calore latente. Prima di procedere con altre considerazioni, riprendiamo in considerazione la **Fig. 7.12** in cui notiamo che alla superficie è presente della vegetazione. Anche se è possibile tenerne conto in maniera piuttosto complessa (Mihailovic e al., 2000), è più comodo considerarne la presenza globale (Pleim e Gilliam, 2009) definendo la variabile x_{veg} che rappresenta la frazione di una cella occupata dalla vegetazione. In questo modo la capacità e la conducibilità termica utilizzate nell'equazione della diffusione del calore nel suolo possono essere modificate proprio in funzione di x_{veg}.

Ci sono due questioni che sono passate inosservate finora. In primo luogo, le caratteristiche termiche del terreno (ed anche della vegetazione) dipendono dal contenuto di umidità del suolo η. Inoltre, l'equazione prognostica del modello meteorologico dedicata al vapor d'acqua, richiede la conoscenza dell'umidità specifica all'interfaccia atmosfera–suolo. Sarebbe quindi necessario aggiungere alle equazioni da tenere in considerazione in un modello meteorologico anche l'equazione prognostica per il contenuto d'acqua nel suolo data da (Chen e Dudhia, 2001):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D_\eta \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) + \frac{\partial K}{\partial z} + F_\eta \qquad [7.44d]$$

dove D_η è la diffusività dell'acqua nel suolo, K è la conducibilità idraulica (funzione di η) e F_η rappresenta l'insieme delle varie sorgenti (positive e negative) quali le precipitazioni, la traspirazione, l'evaporazione ed il *runoff*. Questa equazione, opportunamente risolta, può consentire di ottenere non solo le caratteristiche termiche corrette da utilizzare nell'equazione prognostica per la temperatura nel suolo, ma anche l'umidità specifica q_{sfc} all'interfaccia aria-suolo.

Queste due equazioni prognostiche per la temperatura ed il contenuto di umidità del suolo dovranno essere risolte assieme alle equazioni prognostiche che costituiscono il vero e proprio modello meteorologico, aumentandone i tempi di calcolo. Ad entrambe le equazioni esiste una valida alternativa nota come ***Metodo Force–Restore*** proposto inizialmente da Bhumralkar (1975) e sviluppato tra gli altri da Deardorff (1977, 1978), Dickinson (1988), Noilhan e Planton (1989), Ren e Xue (2004), Gao e al. (2008). Questo metodo semplifica drasticamente la struttura verticale del suolo considerandone solo due strati:

- uno strato di suolo di spessore molto piccolo δ (per esempio dell'ordine di 1 cm) la cui temperatura T_g è sostanzialmente coincidente con quella dell'interfaccia aria-suolo. Tale strato evolve durante la giornata sulla base del valore assunto dal flusso di calore nel suolo G_0 che, per il bilancio energetico superficiale è pari a:

$$R_N - G_0 = H_0 + H_E \qquad [7.45a]$$

- uno strato piuttosto profondo d (diciamo dell'ordine del metro) sottostante al precedente in cui la temperatura T_m varia molto lentamente nel tempo.

È stato mostrato che è possibile ottenere la semplice equazione prognostica seguente per la temperatura T_g (e quindi anche per la temperatura superficiale):

$$\frac{\partial T_g}{\partial t} = C_1(R_N - H_0 - H_E) - C_2(T_g - T_m) \qquad [7.45b]$$

In pratica, questa equazione asserisce che la variazione nel tempo della temperatura superficiale viene *forzata* dalla disponibilità energetica rappresentata dal primo termine a destra, anche se l'azione del secondo termine di destra evidenzia come questa *forzante* venga contrastata dall'azione di inerzia derivante dallo strato profondo di suolo. Indicando con c la capacità termica volumetrica del suolo e con ω la frequenza giornaliera (pari cioè a $\omega = 2\pi/\tau$, con τ = 1 giorno), i coefficienti C_1 e C_2 presenti nella (7.45b) possono essere stimati, in assenza di vegetazione, come:

$$C_1 = \frac{2}{c \cdot d \cdot \omega} \qquad C_2 = \frac{\omega}{\alpha} \qquad d = \sqrt{\frac{2\lambda}{c \cdot \omega}} \qquad [7.45c]$$

Il coefficiente α può essere ritenuto pari a $\alpha = 1 + \delta/d$. Nel caso in cui sia presente della vegetazione e se x_{veg} è la frazione di superficie della cella con vegetazione rispetto alla superficie totale della stessa, allora il coefficiente C_1 dovrà essere sostituito da (Pleim e Gilliam, 2009):

$$C'_1 = \frac{1 - x_{veg}}{C_1} + \frac{x_{veg}}{C_{1v}} \qquad [7.45d]$$

dove C_{iv} può essere quantificato in $8 \cdot 10^{-6}$ K m^{2}J^{-1}. Resta da stabilire se e come varia la temperatura T_m dello strato inferiore del modello. Anche se spesso essa viene considerata una costante, Noilhan e Planton (1989) hanno proposto la seguente relazione prognostica:

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} = \frac{1}{\tau_2}\left(T_g - T_m\right) \qquad [7.45e]$$

e la costante di tempo τ_2 è stata posta a 10 giorni, su considerazioni puramente empiriche. L'introduzione del *Modello Force-Restore* sostituisce l'uso dell'equazione prognostica della temperatura del suolo con notevole beneficio nei tempi di calcolo pur senza introdurre apprezzabili errori. È stato sviluppato un *Modello Force-Restore* anche per il contenuto di umidità del suolo; si vedano in proposito i riferimenti citati in precedenza e ad essi si rimanda per i dettagli. Anche in questo caso il *Modello Force-Restore* è alternativo all'uso dell'equazione prognostica che descrive l'evoluzione spaziale e temporale del contenuto d'acqua del suolo.

Lo Strato Superficiale

Molto frequentemente, lo strato orizzontale di celle del dominio di calcolo immediatamente adiacenti al suolo rappresentano lo *Strato Superficiale* per cui, come vedremo al Cap. 8, vale la Teoria della Similarità di Monin-Obukhov. La quantificazione dei flussi turbolenti, che sono circa costanti in tutto il *SL* (e quindi in questo strato di celle), normalmente viene realizzata aggiungendo in questo strato alle equazioni del modello meteorologico anche le equazioni che legano tra loro flussi e gradienti e che tengono conto del livello di stabilità. Applicare direttamente le Relazioni di Similarità come le presenteremo al Cap. 8 comporta inevitabilmente dover utilizzare procedure iterative che, in certe situazioni, possono pesare negativamente sui tempi di calcolo del modello meteorologico.

Un modo alternativo, usato frequentemente, è quello di impiegare le relazioni di Similarità scritte in un modo differente. In particolare, i flussi turbolento di quantità di moto, di calore sensibile e di calore latente sono esprimibili anche come:

$$\begin{aligned} \tau &= \rho C_p u_*^2 = \rho C_D U^2 \\ H_0 &= \rho C_p C_H U \cdot \left(\theta_{sfc} - \theta\right) \\ H_E &= \rho \lambda C_H U \cdot \left(q_{sfc} - q\right) \end{aligned} \qquad [7.46a]$$

In queste relazioni compaiono la velocità media del vento U e la temperatura potenziale media θ della cella, la temperatura e l'umidità specifica all'interfaccia aria-suolo θ_{sfc} e q_{sfc} ed i coefficienti di *drag* C_D, C_H espressi dalle relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{k^2}{(\ln(z/z_0))^2} \cdot F_m(z, z_0, Ri) \\ C_H &= \frac{k^2}{\ln(z/z_0) \cdot \ln(z/z_{0h})} \cdot F_h(z, z_0, z_{0h}, Ri) \end{aligned} \qquad [7.46b]$$

Come consueto, con k si è indicata la costante di von Karman (pari 0.4) , mentre z_0 e z_{0h} sono rispettivamente la lunghezza di rugosità per la quantità di moto e per il calore (di cui tratteremo

al Cap. 8). Le funzioni di Similarità F_m e F_h, oltre che dipendere dalla quota z (che potrebbe essere posta alla metà della dimensione verticale della cella) e dai parametri di rugosità, dipendono anche dalla stabilità che, in questo caso, invece di essere espressa da z/L (come normalmente faremo trattando la Similarità di Monin-Obukhov), viene espressa mediante il *Bulk Richardson Number* Ri definito come:

$$Ri = \frac{gz\left(\theta_{sfc} - \theta\right)}{\theta \cdot U} \qquad [7.46c]$$

In particolare, si ha che (Chang e al. 1999):

$$F_m = \begin{cases} exp(-m \cdot Ri) & Ri > 0 \\ 1 - \dfrac{2bRi}{1 + 2bc \cdot \dfrac{k^2}{(\ln(z/z_0))^2}\sqrt{(-Ri) \cdot z/z_0}} & Ri < 0 \end{cases} \qquad [7.46d]$$

$$F_m = \begin{cases} exp(-m \cdot Ri) & Ri > 0 \\ 1 - \dfrac{2bRi}{1 + 2bc \cdot \dfrac{k^2}{\ln(z/z_0) \cdot \ln(z/z_{0h})}\sqrt{(-Ri) \cdot z/z_{0h}}} & Ri < 0 \end{cases} \qquad [7.46e]$$

In queste relazioni i coefficienti b, c e m valgono rispettivamente 5.0, 7.5, 1.

7.1.5 OSSERVAZIONI STORICHE, METODOLOGICHE E CONCLUSIVE

Chiudiamo questa breve presentazione sui modelli meteorologici con alcune considerazioni. La prima è legata al fatto che l'esposizione che abbiamo fatto nei punti precedenti deve essere considerata solo come un'introduzione didattica al problema e perciò chi si accingesse a lavorare nel settore deve necessariamente far riferimento principalmente alla Bibliografia citata e all'enorme Letteratura disponibile sul tema. La quantità di lavori sull'argomento è veramente enorme e si ha un'inevitabile sensazione di impotenza di fronte ad essa. La sensazione è reale e il lavoro che aspetta chi si avvia a questa attività non è da poco. Ma, in realtà stiamo parlando di una disciplina che è veramente giovane e in rapida evoluzione la cui storia è stata brillantemente riassunta dal Paragrafo 1.2 del libro di Kalnay(2003) e nell'articolo divulgativo di Scotton e al. (2006).

Siamo negli anni tra il 1916 e il 1923 (oltre un secolo fa) ed il ricercatore inglese Lewis Fry Richardson, sulla scorta delle ricerche iniziate dallo scienziato norvegese V. F. K. Bjerknes, fu il primo a tentare di applicare le leggi della Fluidodinamica ad una porzione limitata dell'atmosfera che sovrastava l'Europa, impiegando allo scopo i metodi dell'Analisi Numerica. Egli impiegò oltre un anno per eseguire a mano tutti i calcoli necessari a prevedere l'evoluzione di alcune variabili riferite ad un solo giorno! Fu un'impresa clamorosa, ma anche un clamoroso e storico insuccesso (la ricostruzione numerica e la realtà che emergeva dalle misure disponibili avevano ben pochi punti di contatto) e con questa apparente sconfitta si apre l'era delle previsioni meteorologiche. Perché fu un insuccesso? In retrospettiva, possiamo affermare che fu proprio l'analisi numerica e la poca conoscenza degli schemi di discretizzazione delle equazioni differenziali alle derivate parziali e delle loro caratteristiche di stabilità a causare la parte più evidente dell'insuccesso. A questa si poteva rimediare con una conoscenza del tema. Ma la parte meno evidente dell'insuccesso era l'enorme tempo impiegato (oltre un anno) per realizzare l'analisi retrospettiva di un solo giorno. Stando così le cose, questa impresa poteva essere ritenuta nulla più che un bizzarro esercizio accademico. E il rimedio a questo problema poteva stare solo nella messa a punto di strumenti di calcolo non umani.

Anche lo sviluppo durante la Seconda guerra mondiale della bomba atomica ha evidenziato come fossero necessari apparati che sostituissero l'uomo nel calcolo. Visti i limiti degli apparati meccanici, si optò per quelli elettronici che solo allora iniziavano ad essere concepiti. Il Progetto Manhattan aggregò le migliori menti dell'epoca e una massa quasi illimitata di risorse e, sotto la guida attenta di John von Neumann, una delle più brillanti menti matematiche di tutti i

tempi, nacque il primo calcolatore della storia, l'*ENIAC* (*Electronic Numerical Integrator and Calculator*). Si trattava di un autentico *mostro* (**Fig. 7.13**) composto da 18.000 valvole termoioniche e 1500 relais per un totale di 30 tonnellate di materiale su 180 m^2 e richiedeva una potenza elettrica di 140 kW. Oggi la sua potenza di calcolo ci sembra ridicola, ma allora era una meraviglia della tecnica. Finalmente una macchina si è sostituita al calcolo manuale e uno dei due problemi del fallimento di Richardson ha avuto finalmente soluzione.

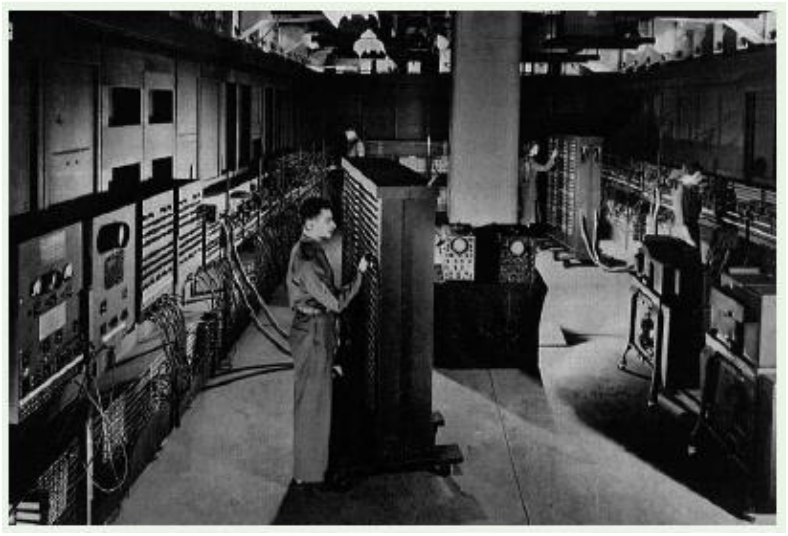


Fig. 7.13: veduta dell'ENIAC, operativo dal 1946 al 1955 (Scotton e al. 2006)

L'altra ragione del clamoroso insuccesso di Richardson, quella legata alla scarsa conoscenza dei limiti dei metodi numerici necessari per integrare le equazioni differenziali alle derivate parziali della Fluidodinamica applicata all'atmosfera veniva progressivamente superata grazie ai continui progressi registrati dall'Analisi Numerica che finalmente poteva contare su uno strumento applicativo valido.

Che si fosse interessati alle leggi fisiche che governano l'atmosfera è abbastanza naturale perché rientra nel normale interesse umano per la conoscenza della natura, ma l'interesse pratico del prevedere la sua evoluzione nacque nel 1800 per esigenze belliche. Durante la guerra di Crimea una tempesta provocò la distruzione del vascello Henri IV e di 38 navi mercantili, causando 400 morti. Per questo Napoleone III diede incarico all'astronomo Urbain Le Verrier di verificare la possibilità di prevedere simili catastrofi naturali. Ovviamente Le Verrier poté fare utili considerazioni sulla base delle misure meteorologiche disponibili, ma non poté andare molto oltre per mancanza delle conoscenze fisiche che Richardson però aveva. Comunque, questo episodio è significativo perché il prevedere il tempo per limitare i problemi alla vita umana di tutti i giorni e prevederlo con congruo anticipo per poter correre ai ripari è stata una delle esigenze più sentite dall'uomo, spesso in balia degli eventi meteorologici.

Se uniamo questa voglia spasmodica dell'uomo di conoscere *che tempo farà domani*, le conoscenze fisiche finalmente disponibili delle leggi che governano l'atmosfera e la disponibilità di un potente (per l'epoca) strumento di calcolo, non sorprende che l'impresa di Richardson venisse ritentata, questa volta con maggior determinazione, e il 4 aprile 1950 l'equipe di ricercatori capitanati da Jule Gregory Charney (**Fig. 7.14**) realizzava con l'*ENIAC* la prima previsione del tempo. Possiamo segnare questa data come l'inizio dell'era della meteorologia moderna. Da allora, l'evoluzione della previsione numerica delle caratteristiche dell'atmosfera a varie scale spaziali e temporali non si è più arrestata, anzi si è fatta sempre più rapida e complessa con l'aumentare vertiginoso delle conoscenze teoriche e sperimentali e con la disponibilità di risorse di calcolo sempre più potenti e diffuse. Ma alcune caratteristiche non sono mai cambiate. Riguardiamo la fotografia (**Fig. 7.14**) del gruppo che ha realizzato la prima previsione meteorologica della storia e notiamo subito che non ritrae una sola persona, ma ben 8 persone, non solo fisici ma anche

almeno un matematico John von Nuemann e che matematico! Non è stata un'impresa individuale, ma un'impresa collettiva e di fatto questa situazione non è mai mutata. La costruzione di un modello meteorologico è sempre un'impresa collettiva in cui confluiscono non solo le competenze fluidodinamiche teoriche e sperimentali, ma anche tante competenze informatiche e matematiche. Rivedendo i punti dell'esposizione che abbiamo fatto in questo capitolo, il fatto che si debbano mettere in campo competenze diverse, competenze matematiche, informatiche, fluidodinamiche, meteorologiche a grande scala, meteorologiche sperimentali, competenze relative alla turbolenza dei fluidi viscosi, ecc. dovrebbe essere ormai evidente.

Fig. 7.14: 4 aprile 1950, l'équipe di ricercatori che ha realizzato la prima previsione numerica del tempo posa davanti al supercomputer ENIAC. Da sinistra: H. Wexler, J. Von Neumann, M.H. Frankel, J. Namias, J.C. Freeman, R. Fjortoft, F.W. Reichelderfer e J.G. Charney (Scotton e al. 2006)

Si potrebbe dire che abbiamo fatto ben poca distinzione nella trattazione fatta tra modello meteorologico a grande scala e modello di *PBL*, ma dovrebbe essere chiaro che se non disponessimo delle previsioni di un modello a grande scala, un modello dedicato esclusivamente al *PBL* non potrebbe mai operare. Oltre a tutto, lo scheletro fisico, matematico ed informatico dell'uno è identico allo scheletro dell'altro.

Fin dove ci si potrà spingere nel futuro? Dal punto di vista spaziale l'aumento della potenza di calcolo e di memoria di massa degli elaboratori elettronici consentirà di aumentare sempre di più le dimensioni del dominio di calcolo dei modelli meteorologici, di aumentarne la risoluzione spaziale, di implementare in essi parametrizzazioni ancora più raffinate per la turbolenza del *PBL*, per gli scambi radiativi, per la descrizione dello stato e dell'evoluzione delle nuvole e della convettività e consentirà una descrizione sempre più accurata del suolo e del sottosuolo. Inoltre, sarà sempre più realistico accoppiare tra loro i modelli meteorologici ed i modelli oceanografici in modo da descrivere con meno parametrizzazioni ed in maniera più diretta il *feedback* che esiste tra il mondo atmosferico, la terraferma e l'atmosfera. Si potrà poi sicuramente estendere l'impiego dei modelli *LES* e forse dei modelli *full resolution* che oggi costituiscono poco più che laboratori numerici per lo studio della turbolenza del *PBL*. Essi potranno diventare strumenti operativi veri e propri, almeno per domini di calcolo spaziali.

Ma il problema vero sta nell'orizzonte temporale a cui si può estendere una previsione sia a grande scala che alla scala del *PBL*, cioè capire quanto possa essere l'estensione temporale di una previsione perché essa sia ragionevolmente realistica, cioè accurata. E il problema sta

proprio qui, visto che è ben difficile domare un sistema altamente caotico come l'atmosfera. L'accuratezza di una previsione meteorologica, cioè la sua rispondenza realistica con ciò che effettivamente si riscontrerà, non dipende solo ed esclusivamente dall'evoluzione tecnologica dell'informatica, della modellistica meteorologica e dell'analisi numerica (evoluzioni in continua accelerazione), ma anche, cosa meno nota, intrinsecamente dal tipo di fenomeno o regime meteorologico che si vuole prevedere. Qualitativamente, più piccolo è il fenomeno e breve è la sua durata, più difficile risulta la sua previsione anche con i modelli più accurati. La previsione, quindi, per essere il più possibile realistica dovrebbe sempre contenere, in relazione al tipo di fenomeno che si cerca di prevedere, un'importantissima proprietà: la sua incertezza.

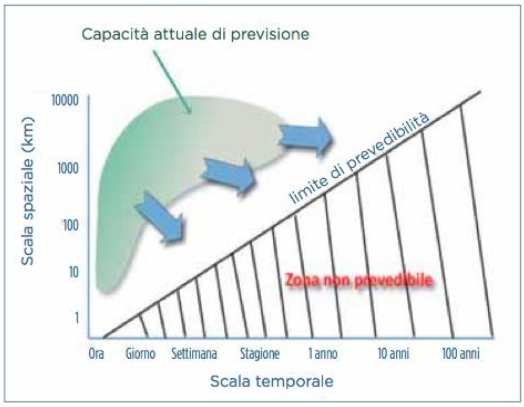


Fig. 7.15: l'attuale accuratezza previsionale è migliore (zone verde scuro) per fenomeni atmosferici con una grande estensione spaziale e durata temporale crescenti. Oltre le due settimane di tempo la capacità previsionale diminuisce drasticamente. Tuttavia la capacità attuale di previsione potrebbe ancora espandersi con l'avanzare della conoscenza scientifica e della ricerca, fino ad avvicinarsi al limite intrinseco di prevedibilità (Grazzini, 2012)

In una pionieristica pubblicazione del 1963 lo scienziato statunitense Edward Lorenz, studiando un modello molto semplificato del moto dei fluidi, scoprì che alcune configurazioni meteorologiche erano più prevedibili di altre. In un secondo, e non meno fondamentale lavoro del 1969, Lorenz rafforzò ulteriormente questo concetto mostrando come l'incertezza della previsione meteorologica prodotta con un modello numerico di tipo differenziale dipendeva non solo da un'imperfetta conoscenza delle sue condizioni iniziali, ma anche dall'interazione reciproca delle diverse scale di moto tipiche di un sistema caotico quale è l'atmosfera. Questo affascinante concetto, noto come *effetto farfalla*, implica quindi un potenziale limite di prevedibilità (*predictability*) dovuto alla crescita non lineare di errori infinitesimi, limite di prevedibilità che Lorenz in via teorica fissava in 15 giorni. In realtà non esiste un limite di prevedibilità unico, ma come abbiamo visto, dipende dalla particolare situazione atmosferica e dalla scala temporale e spaziale del fenomeno che si vuole prevedere, come schematicamente è mostrato nella **Fig. 7.15**.

7.2 I MODELLI DIAGNOSTICI DEL PBL

Per *modello diagnostico di PBL* s'intende una classe eterogenea di modelli (numerici ed analitici) che non pretendono di descrivere l'evoluzione temporale delle variabili meteorologiche, ma prevedono solo la loro distribuzione spaziale ad ogni istante di interesse sulla base di un numero ridotto di leggi fisiche e, *soprattutto*, sulla base di un insieme sufficientemente ricco di misure sperimentali. Va però chiarito subito il significato del concetto di *istante di interesse*. Con questa notazione un po' scorretta non intendiamo un istante in senso stretto, indicato da *t* nelle equazioni prognostiche che governano lo stato e l'evoluzione del *PBL*, ma un *periodo temporale*, in generale

dell'ordine dell'ora, per cui si considera il valor medio delle variabili d'interesse e che costituisce l'intervallo di mediazione per le misure utilizzate dai vari modelli di questo tipo.

A prima vista un modello diagnostico potrebbe sembrare un puro e semplice sistema di interpolazione spaziale, anche se, come vedremo, questa visione risulta decisamente riduttiva. La sua applicazione principale (attualmente molto estesa) è la preparazione dei campi meteorologici per i modelli di simulazione della dispersione degli inquinanti in atmosfera di media ed alta complessità, come per esempio i modelli Lagrangiani a Particelle di tipo Monte Carlo ed i modelli fotochimici di tipo Euleriano, nonché l'inizializzazione del campo di vento per i modelli prognostici di *PBL*. La preferenza che viene data (quando possibile) a modelli di questo tipo deriva dal fatto che essi sono molto più semplici e computazionalmente più veloci rispetto ai modelli meteorologici di tipo prognostico. In pratica, una volta disponibili delle misure meteorologiche di vario genere nei pressi del suolo (normalmente entro il *SL*) e, possibilmente anche il profilo verticale delle principali variabili medie (come il vettore vento e la temperatura) in alcuni punti della zona che si intende indagare, un generico modello di tipo diagnostico si occupa di ricostruire i dettagli spaziali dei vari campi di interesse relativi all'istante t considerato. La metodologia seguita dai differenti modelli diagnostici non è generale e neppure consolidata e spesso si deve adattare alla tipologia di dati meteorologici disponibili. Qui di seguito presenteremo i dettagli normalmente seguiti per la ricostruzione:

- del campo tridimensionale del vento,
- del campo di temperatura e di umidità,
- del campo delle principali caratteristiche che definiscono la turbolenza atmosferica,

Anche se nella presentazione che segue non si tiene conto di fenomeni avvettivi, tuttavia non è impossibile tenerne conto in maniera soddisfacente.

7.2.1 IL MODELLO DIAGNOSTICO DI CAMPO DI VENTO

Il primo campo che prendiamo in considerazione è il campo di vento. In una situazione stazionaria ed orizzontalmente omogenea la Teoria della Similarità di Monin-Obukhov (Cap. 8) ci fornisce, tra l'altro, una relazione analitica che rappresenta il profilo verticale del vento medio in funzione della rugosità superficiale z_0 e delle variabili che descrivono la turbolenza del *SL* (la friction velocity u_* e la lunghezza di Monin-Obukhov L). Dato che la situazione considerata è stazionaria e orizzontalmente omogenea, nel periodo di osservazione il profilo sarà identico in ogni punto del dominio di interesse. Questo vale strettamente entro il *SL* (cioè fino a quote dell'ordine di poche centinaia di metri). Tuttavia, anche se con notevoli difficoltà ed incertezze, la teoria della Similarità può anche essere estesa all'intero *PBL*.

Se, però, non c'è omogeneità orizzontale, per esempio per la presenza di orografia, a rigore l'approccio basato sulla Similarità risulta impossibile o eccessivamente semplificato ed è quindi necessario procedere in maniera differente. Un modo adottato, formalmente molto accattivante, è quello di prendere in considerazione direttamente le equazioni fluidodinamiche del moto medio e *trattarle* in maniera analiticamente conveniente. Per prima cosa tali modelli prendono in considerazione gli elementi orografici presenti e li semplificano fino a ridursi a studiarne alcuni tipici, come una collina bidimensionale (assimilabile ad una dorsale montuosa che delimita un versante di una vallata) o una collina tridimensionale (più o meno simmetrica, ma descrivibile analiticamente) o un insieme di elementi orografici regolarizzati descrivibile analiticamente attraverso uno sviluppo di serie di Fourier. A questo punto, i modelli vengono *linearizzati* e le equazioni vengono risolte impiegando la tecnica delle Trasformate di Fourier. Questa è una semplice descrizione di base della metodologia impiegata da tali modelli che può essere meglio compresa leggendo, per esempio, i lavori di Walmsley e al. (1982, 1986, 1990). I risultati ottenuti da questi modelli, computazionalmente molto efficienti, sono risultati accurati quando gli elementi orografici non erano esasperati, ma in situazioni di orografia complessa i loro limiti sono risultati

evidenti (Finardi e al. 1993).

Il metodo di ricostruzione del campo tridimensionale del moto medio più generale e ora più utilizzato si basa, invece, completamente sulle misure di vento disponibili in un dato dominio e ricerca un campo tridimensionale che le rappresenti il più fedelmente possibile e che rispetti alcune leggi fisiche di conservazione come, per esempio l'equazione di continuità e la conservazione della vorticità (Mathur e Peters 1990). Quando, come è in generale, le leggi fisiche che vincolano il campo tridimensionale cercato si riducono alla sola *legge di continuità*, allora questi modelli diagnostici prendono il nome di *modelli a divergenza nulla* o *modelli mass-consistent*. Molto si è lavorato per realizzare modelli diagnostici di questo tipo e Homicz (2002) ha prodotto una bellissima rassegna in proposito rispettando, tra l'altro, l'evoluzione storica di questa tipologia di modelli. In esso, cosa estremamente importante, sono stati sviluppati tutti i calcoli e le considerazioni teoriche che per brevità spesso vengono tralasciate nelle esposizioni didattiche e che rischiano di andare perse col tempo. Ad esso faremo riferimento frequentemente nell'esposizione che segue.

7.2.1.1 Le basi teoriche del metodo

Una parte importante di un modello diagnostico del *PBL* è la ricostruzione del campo tridimensionale del vento medio ad un dato istante temporale sulla base delle informazioni strumentali del vettore vento (misure al suolo, profili da radiosondaggi, profili da *remote sensing*) realizzate all'istante considerato in alcuni punti della regione di interesse. Ciò si potrebbe realizzare semplicemente interpolando i dati sperimentali nell'intero dominio di calcolo. Tuttavia, è abbastanza facile rendersi conto che, quando il numero di misure disponibili è limitato, il risultato che si potrà ottenere dal processo interpolativo è ben lontano dalla realtà. Tra le altre cose, il processo interpolativo ignora di fatto qualsiasi tipo di legge fisica e quindi il campo ottenuto per interpolazione non rispetterà necessariamente le varie relazioni di conservazione. L'idea fondamentale su cui si basano praticamente tutti i modelli di campo di vento a divergenza nulla è la seguente:

- si consideri un dato istante *t* (nel senso di ora o di periodo di mediazione) ed un dominio di calcolo spaziale in cui si è interessati a determinare il campo di vento. Tale dominio Ω, a priori qualsiasi, nelle applicazioni pratiche viene normalmente definito come un parallelepipedo avente gli spigoli orientati secondo il sistema di assi cartesiani usato in meteorologia, con base inferiore posta alla quota del terreno (che per il momento possiamo considerare completamente piatto) e con la base superiore posta ad una altezza *H*, solitamente superiore alla massima estensione verticale del *PBL*;
- siano disponibili nel periodo *N misure* del vettore vento medio (di componenti *u*, *v* e *w*) all'interno di un dominio di calcolo Ω (nella pratica è difficile disporre di valori per la componente verticale, che comunque nei pressi del suolo dovrà essere prossima a zero);
- sia possibile ricostruire in ogni punto del dominio Ω, mediante un metodo interpolativo (di cui si parlerà più avanti), un campo tridimensionale *preliminare* del vento (*campo di vento iniziale* o *first guess*) in modo tale che in ogni punto del dominio sia noto il valore interpolato del campo (u_0, v_0, w_0);
- si cerchi quindi un nuovo campo di vento (u,v,w) che minimizza la propria *distanza* dai valori interpolati e che *rispetti la legge della conservazione della massa*.

Si può dimostrare che il problema così formulato ammette un'unica soluzione, una volta definito l'algoritmo di interpolazione con cui si ottiene il campo iniziale.

Come si ricorda, il Calcolo delle Variazioni è quella parte dell'Analisi Matematica che si incarica di individuare una *funzione*, anche a più dimensioni, che minimizza un opportuno funzionale, cioè un'espressione analitica complessa, spesso di tipo integrale, nel contempo rispettando uno a più vincoli. Questa teoria sembra applicarsi naturalmente al problema sopra

formulato: la funzione cercata è il campo vettoriale del moto tridimensionale ed il funzionale da minimizzare è la *combinazione* tra una sorta di *discrepanza media* tra il campo cercato e le misure disponibili e la bontà con cui il campo cercato rispetta l'equazione di continuità. In effetti Sasaki (1970) ha introdotto questi concetti di Calcolo delle Variazioni nel generale contesto meteorologico, mentre nei lavori di Sherman (1978), Endlich e al. (1982), Barnard e al. (1987), Ross e al. (1988), Ratto e al. (1994), Ishikawa (1994) e, soprattutto Homicz (2002) si possono trovare i dettagli che consentono a questa tecnica di essere applicata all'individuazione diagnostica del campo tridimensionale del vento medio. I diversi lavori citati spesso differiscono tra loro e qui di seguito si presenterà la teoria che attualmente è risultata la più adatta ad essere implementata in un modello operativo di uso generale.

Si consideri un dominio tridimensionale Ω avente come limite inferiore il suolo e che si estende in senso orizzontale e verticale in modo da includere completamente l'area in cui si vuole ottenere il campo di vento. Una volta individuato un opportuno metodo interpolativo, dalle informazioni strumentali del vettore vento disponibili nel periodo *t* (misure al suolo e/o misure in quota ottenute con radiosondaggi o con sistemi *remote sensing*) è possibile ottenere virtualmente in ogni punto *P* del dominio il campo di moto tridimensionale (u_0,v_0,w_0) interpolato che, per comodità indichiamo col termine *first guess*. Sia, invece, (u,v,w) il campo che si richiede al metodo variazionale: esso dovrebbe essere molto prossimo al campo *vero* sempre che le misure disponibili siano state in grado di evidenziare, almeno a livello puntuale, le caratteristiche fluidodinamiche della zona. In quanto tale il campo (u,v,w) è inizialmente ignoto e spetta all'Analisi Variazionale individuarlo. Comunque sia, un generico campo (u,v,w) individuato (anche quello non ottimale) non coinciderà col *first guess* e quindi la *distanza* tra i due campi nell'intero dominio di indagine può essere quantificata dal *funzionale*:

$$E(x,y,z) = \iiint_{\Omega} [\alpha_1^2(u-u_0)^2 + \alpha_1^2(u-u_0)^2 + \alpha_1^2(u-u_0)^2]\, dx \cdot dy \cdot dz \qquad [7.47]$$

In questa relazione i coefficienti α_1, α_2 e α_3 sono i pesi relativi alle varie componenti cartesiane del campo; tali coefficienti sono i *moduli di precisione di Gauss* e da essi dipendono gli aggiustamenti che l'algoritmo ricostruttivo del campo di vento realizzerà. Come si vedrà, tali coefficienti saranno strettamente legati allo stato di stabilità che si incontra nel punto considerato del dominio di calcolo e quindi, in generale, sono dei campi tridimensionali che, però, si suppongono noti. Come vedremo, per semplificare, spesso si può ipotizzare una loro costanza spaziale nell'intero dominio di interesse.

Il campo (u,v,w) cui siamo interessati, non solo dovrà minimizzare il funzionale (7.47) ma dovrà anche rispettare la *legge di conservazione della massa* che, in generale, è data dalla relazione prognostica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \qquad [7.48a]$$

Se però si assume che la densità dell'aria ρ sia costante col tempo, la (7.48a) perde le proprie caratteristiche prognostiche e si riduce alla forma diagnostica (*forma anelastica dell'equazione di continuità*):

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \qquad [7.48b]$$

Spesso, tuttavia, per semplicità, si tende ad ignorare la variabilità spaziale della densità dell'aria e ciò comporta un'ulteriore semplificazione, ottenendo in definitiva la *forma incompressibile* dell'equazione di continuità, data da:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad [7.48c]$$

cioè la *divergenza del campo di vento risulta nulla* nell'ipotesi in cui la densità dell'aria non vari

apprezzabilmente nel tempo e nello spazio. Nelle applicazioni pratiche viene impiegata prevalentemente la forma incomprimibile dell'equazione di continuità.

Seguendo la logica del Calcolo delle Variazioni (si faccia riferimento, per esempio a Smirnov 1975 e a Elsgolts 1981), in definitiva il funzionale da minimizzare deve tener conto sia della minimizzazione della distanza tra il campo di *first guess* ed il campo (*u*,*v*,*w*) ma dovrà anche consentire di verificare il rispetto dell'equazione di continuità. Per questo, introducendo il moltiplicatore di Lagrange $\lambda(x,y,z)$, che ovviamente è un campo tridimensionale, il funzionale da minimizzare potrà essere formulato nella maniera seguente:

$$J = \iiint_{\Omega} \left[\alpha_1^2(u-u_0)^2 + \alpha_1^2(u-u_0)^2 + \alpha_1^2(u-u_0)^2 + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] dxdydz \qquad [7.49]$$

Rimandando per tutti i dettagli analitici a Homicz (2002), il Calcolo della Variazioni ci fornisce il risultato di questo problema di minimizzazione che è costituito dal campo (*u*,*v*,*w*) che rispetta le *equazioni di Eulero-Lagrange*:

$$\begin{aligned} 2\alpha_1^2(u-u_0) - \frac{\partial \lambda}{\partial x} &= 0 \\ 2\alpha_2^2(v-v_0) - \frac{\partial \lambda}{\partial y} &= 0 \\ 2\alpha_3^2(w-w_0) - \frac{\partial \lambda}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \qquad [7.50a]$$

cioè:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \frac{1}{2\alpha_1^2}\frac{\partial \lambda}{\partial x} \\ v &= v + \frac{1}{2\alpha_2^2}\frac{\partial \lambda}{\partial y} \\ w &= w_0 + \frac{1}{2\alpha_3^2}\frac{\partial \lambda}{\partial z} \end{aligned} \qquad [7.50b]$$

che deve essere completato dalla relazione differenziale che descrive il rispetto della legge di conservazione della massa, cioè da:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad [7.50c]$$

Inoltre sia il campo (*u*,*v*,*w*) che il moltiplicatore di Lagrange dovranno soddisfare anche alcune condizioni al contorno che chiariremo nel seguito. In tutte queste relazioni sono presenti i moduli di Gauss α_1, α_2, α_3 che sono il peso dato alle differenze tra le diverse componenti cartesiane del campo che si cerca e quelle del rispettivo *first guess*. A priori non è semplice quantificarli (di ciò ci occuperemo successivamente), ma ciò che è certo è che non c'è ragione per differenziare i pesi relativi alle componenti orizzontali del moto. Perciò assumiamo per semplicità che $\alpha_1 = \alpha_2$ e poniamo $\alpha = \alpha_1/\alpha_3$. Inoltre, senza perdere di generalità (Ross e al. 1988) possiamo porre $\alpha_1 = 1$.

Differenziando le (7.50a) e sostituendo le relazioni così ottenute nella equazione di continuità nella forma incomprimibile, si ottiene la seguente relazione differenziale per il moltiplicatore di Lagrange λ (che rappresenta fisicamente un potenziale):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\alpha_1^2}\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2\alpha_1^2}\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2\alpha_3^2}\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right) = -2\alpha_1^2\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} \qquad [7.51a]$$

Questa relazione tiene conto del fatto che $\alpha_1 = \alpha_2$ e che in generale i due moduli di Gauss dipendono dalla posizione considerata nel dominio di calcolo. Se, però, si introduce $\alpha = \alpha_1/\alpha_3$ e $\alpha_1 = 1$, oltre che ritenere che α non muti nello spazio, la relazione precedente si semplifica enormemente giungendo alla forma finale:

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+\alpha^2\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}=-2\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial z} \qquad [7.51b]$$

cioè un'*equazione di Poisson*, ben nota nella Fisica Matematica. Definite opportune condizioni al contorno, la (7.51b) può essere risolta (non necessariamente analiticamente) ottenendo il campo scalare λ cercato. Da esso, ed impiegando le (7.50a), si potrà individuare completamente il campo di vento desiderato *correggendo* il campo di *first guess* (u_0, v_0, w_0).

Tutto ciò è valido in generale, tuttavia se consideriamo una situazione reale, il dominio di calcolo sarà costituito da un parallelepipedo avente come base inferiore il suolo. Dato che la superficie terrestre può essere caratterizzata dalla presenza di un'orografia più o meno accentuata, può essere estremamente scomodo formulare il problema in termini di coordinate cartesiane ortogonali. In alternativa a questo modo di procedere è possibile operare un cambio di coordinate e riferirsi ad un sistema non ortogonale di coordinate *terrain-following*. Di tutto ciò già si è discusso al punto 5.7. Qui di seguito si tratterà nel dettaglio l'applicazione di una particolare scelta di coordinate *terrain-following* applicata alla ricostruzione diagnostica del campo di vento.

Sia *H* la quota massima del dominio di calcolo e *h*(*x*,y) la quota che il generico punto del suolo (*x*,*y*) ha rispetto ad una quota di riferimento (*quota orografica*). Si può definire un nuovo sistema *di assi non ortogonali* in cui a *z* si sostituisce una *nuova variabile* σ, definita come:

$$\sigma(x,y,z)=\frac{H-z}{H-h(x,y)}=\frac{H-z}{\pi(x,y)} \qquad [7.52a]$$

Come sappiamo, questa trasformazione non è l'unica possibile ed in Ratto e al. (1994) sono elencate altre definizioni impiegate in Letteratura. Come si vede, la coordinata *verticale* σ è nulla alla sommità del dominio, mentre vale 1 al suolo. Inoltre è evidente che le superfici corrispondenti a valori a σ costante non sono superfici piane, ma curve che tanto più ricalcano la forma dell'orografia quanto più si riferiscono a valori di σ prossimi ad 1. L'introduzione di questo nuovo sistema di coordinate non ortogonali comporta inevitabilmente una nuova definizione delle componenti del vento. Dato che le coordinate orizzontali sono rimaste inalterate, lo saranno anche le due componenti orizzontali del vettore vento. La componente verticale del vento, invece, viene completamente rivoluzionata dall'introduzione della nuova variabile σ. In particolare, differenziando la (7.52a) si ottiene (Barnard e al. 1987) che la componente del vettore vento relativa a tale coordinata è pari a:

$$\widetilde{w}=\frac{1}{\pi(x,y)}\cdot\left[\sigma u\frac{\partial h}{\partial x}+\sigma v\frac{\partial h}{\partial y}-w\right] \qquad [7.52b]$$

in cui compaiono i gradienti orografici presenti nelle varie parti del dominio di interesse. L'equazione di continuità in questo nuovo sistema di coordinate si trasforma nella semplice forma:

$$\frac{\partial\pi u}{\partial x}+\frac{\partial\pi v}{\partial y}+\frac{\partial\pi\widetilde{w}}{\partial x}=0 \qquad [7.52c]$$

Applicando l'approccio variazionale con questa nuova scelta di coordinate, le equazioni di Eulero-Lagrange risultano ora espresse come (Traci e al., 1978):

$$\begin{aligned} u &= u_0+\frac{1}{2\alpha_1^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\sigma}{\pi}\cdot\frac{\partial h}{\partial x}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\right)\\ v &= v_0+\frac{1}{2\alpha_1^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{\sigma}{\pi}\cdot\frac{\partial h}{\partial y}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\right)\\ w &= w_0+\frac{1}{2\alpha_3^2}\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\right)\end{aligned} \qquad [7.52d]$$

Differenziandole ed inserendole nella (7.52c) si giunge alla complessa relazione seguente che è l'analogo della relazione di Poisson (7.51b) in questo nuovo sistema di coordinate:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\pi\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\sigma\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\pi\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\sigma\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left\{\left[\alpha^2+\sigma^2\left(\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right)\right]\cdot\frac{1}{\pi}\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}+\sigma\cdot\left[\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right]\right\} \qquad [7.53]$$
$$=-2\left[\frac{\partial\pi u_0}{\partial x}+\frac{\partial\pi v_0}{\partial y}+\frac{\partial\pi\tilde{w}_0}{\partial\sigma}\right]$$

Come si vede, la forma funzionale dell'equazione differenziale per il moltiplicatore di Lagrange λ si è complicata di molto essendo comparsi in essa molti elementi differenziali totalmente dipendenti dall'orografia che deve essere nota a livello numerico.

Esercizio 7.3

L'altimetria sulla superficie terrestre è ormai ben nota e i *DEM* (*Digital Elevation Model*) sovrappongono una griglia regolare alla superifcie terrestre, attribuendo ad ogni suo nodo una quota orografica $z(x,y)$ dove x e y sono le coordinate geografiche orizzontali. Questa è la base informativa con cui stimare le *derivate orografiche* presenti nella relazione (7.52d) quando esse vengono espresse in coordinate *terrain-following*.
Per semplificare la notazione, indichiamo con h la distanza tra i nodi della griglia utilizzata dal *DEM* e con z_i la quota orografica di ogni punto i della griglia. Nella figura seguente viene considerato un nodo, indicato con $i = 9$ ed i suoi otto nodi adiacenti a cui è stato attribuito un indice i che va da 1 a 8 a partire dal nodo *NE* rispetto al nodo per cui si vogliono stimare le derivate orografiche.

	7	8	1
	6	9	2
	5	4	3

Seguendo questa convenzione, la stima delle derivate orografiche può essere ottenuta utilizzando uno schema numerico centrato (Gallant e Wilson, 1996), ottenendo le relazioni:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cong\frac{z_2-z_6}{2h} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\cong\frac{z_8-z_4}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cong\frac{z_2-2z_9+z_6}{h^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cong\frac{z_8-2z_9+z_4}{h^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cong\frac{z_7-z_1-z_5+z_3}{4h^2}$$

Per integrare (analiticamente o, più realisticamente, in maniera numerica) la (7.51b) se si considerano coordinate cartesiane ortogonali o la (7.53) se si considerano *coordinate terrain-following*, è necessario specificare le opportune condizioni al contorno. Se, per semplicità e senza perdita di generalità, si considera un dominio costituito da un parallelepipedo con la superficie inferiore costituita da una superficie piana (cosa che sta a significare un suolo completamente pianeggiante), è immediato verificare che ci sono due tipi distinti di frontiere: tutte le superfici del parallelepipedo, ad esclusione della superficie di base, saranno *frontiere aperte*, mentre la superficie di base costituisce una *frontiera chiusa* visto che lì deve valere la *no-slip condition*.

Nel caso di una *frontiera chiusa*, come è necessariamente il suolo, è evidente che essa risulterà impenetrabile al flusso di quantità di moto e quindi è necessario che in corrispondenza di essa sia imposta una condizione "*no-flow-through*" (*condizione di von Neumann*). In pratica, se n è la direzione perpendicolare alla frontiera, essa risulta espressa dalla relazione seguente:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial n}=0 \qquad [7.54a]$$

Nel caso, invece, di una *frontiera aperta*, cosa fare non è così ovvio. Non c'è ragione che non ci sia flusso di quantità di moto attraverso di essa, anzi è del tutto naturale che ci sia. In questo caso la condizione da porre sarebbe una condizione "*flow-through*" che, in termini matematici, semplicemente afferma che in corrispondenza ad una tale superficie deve valere la relazione:

$$\lambda = 0 \qquad [7.54b]$$

Viceversa, Ishikawa (1994) ha mostrato numericamente che l'imposizione di *condizioni "flow-through*" alle frontiere aperte comportava l'insorgere di irregolarità agli estremi del dominio di calcolo nella soluzione numerica ottenuta, cosa che scompariva completamente se anche in corrispondenza di tali frontiere si imponeva la meno ovvia condizione di von Neumann.

7.2.1.2 Metodo numerico di risoluzione

Molte sono le implementazioni del modello diagnostico del campo di vento che sono state realizzate e documentate, sia impiegando le normali coordinate cartesiane (Rodriguez e al. 1982; Chino 1992), che adottando le coordinate *terrain-following* (Ishikawa, 1994), e nei riferimenti citati sono riportati i dettagli dei metodi risolutivi impiegati. Per evitare eccessive complicazioni formali, è opportuno riferirsi nel seguito al solo caso in cui viene utilizzato il sistema di assi cartesiani ortogonali e quindi in cui il modello *mass-consistent* sia rappresentato dalla relazione (7.51b).

Inizialmente conviene ipotizzare, per semplicità, che sia assente ogni forma di orografia e che quindi il lato inferiore del dominio sia una superficie piana. L'orografia verrà introdotta indirettamente mediante le condizioni al contorno che verranno imposte alle diverse celle del dominio). Il dominio di calcolo entro cui verrà ricostruito numericamente il campo di vento tridimensionale normalmente è costituito da un parallelepipedo con lati orientati rispettivamente nella direzione W-E (direzione *x*), nella direzione S-N (direzione *y*) e direzione verticale (direzione *z*). Le superfici laterali del dominio saranno tutte piane (anche quella inferiore come si è detto) e indichiamo con L_x, L_y e L_z rispettivamente la dimensione del dominio lungo l'asse *x, y* e *z*. Di norma le lunghezze L_x e L_y saranno tipicamente dell'ordine delle decine o centinaia di chilometri, mentre la lunghezza L_z dovrà essere superiore alla massima estensione del *PBL* (quindi dell'ordine di 1÷3 chilometri). Ciò è indispensabile se si è interessati alla ricostruzione numerica del campo di vento dell'intero *PBL* e quindi a ricostruire non solo le condizioni anemologiche del *SL* e del *ML*, ma anche quelle dello *Strato di Entrainment*.

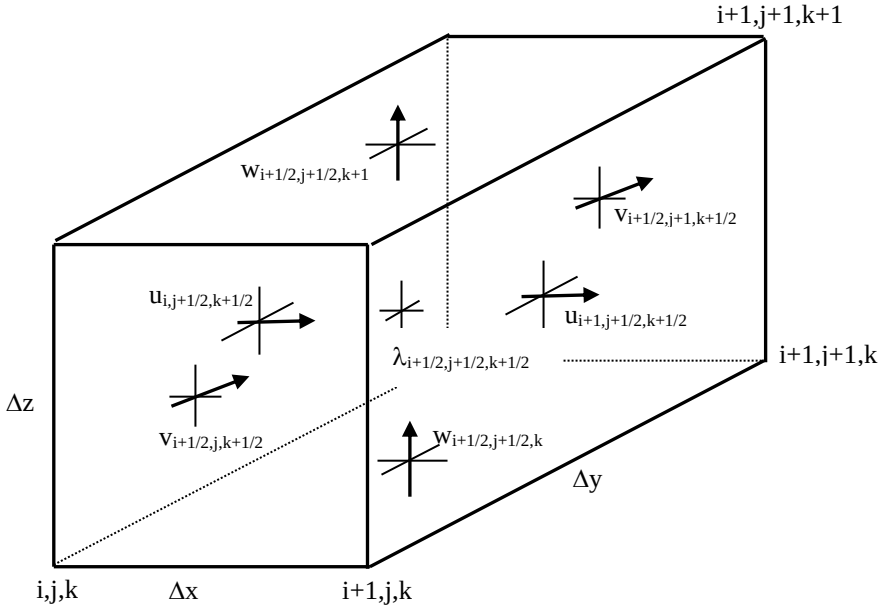


Fig. 7.16: tipica cella di calcolo per un modello diagnostico di campo di vento.

L'intero dominio così definito, verrà inoltre suddiviso in $N_x \cdot N_y \cdot N_z$ celle regolari aventi dimensioni Δx, Δy e Δz tali che $\Delta x = L_x/N_x$, $\Delta y = L_y/N_y$ e $\Delta z = L_z/N_z$. In pratica, l'intero dominio di calcolo risulta suddiviso in un *reticolo* regolare avente N_x+1 *nodi* in direzione x, N_y+1 nodi in direzione y e N_z+1 nodi in direzione z e quindi avrà complessivamente $(N_x+1)\cdot(N_y+1)\cdot(N_z+1)$ nodi. Ad ogni nodo P di coordinate (X,Y,Z) rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali localizzato nello spigolo SW del reticolo, viene attribuita una *terna di indici* (i,j,k) in modo tale che $i = X/\Delta x$, $j = Y/\Delta x$, $k = Z/\Delta z$. È facile verificare che $i = 0, 1,..,N_x$,, $j = 0, 1,..,N_y$ e $k = 0, 1,..,N_z$. Se, come vedremo, è necessario indicare il centro di una generica cella, useremo degli indici frazionari. Consideriamo in particolare una cella elementare interna al dominio di calcolo rappresentata nella **Fig. 7.16**.

Seguendo Rodriguez e al. (1982), sulle superfici della cella rivolta verso Sud e Nord e quindi entrambe parallele al piano (x,z) vengono definite le componenti v del vettore vento entranti e uscenti dalla cella. È naturale collocare tali componenti al centro di queste facce e quindi potremo indicarle come: $v_{i+1,j,k+1/2}$ (faccia Sud) e $v_{i+1/2,j+1,k+1/2}$ (faccia Nord). In modo analogo si opererà nell'indicare le componenti u e w del vento. La variabile λ sarà, invece, calcolata al centro di ogni cella e quindi, nel caso che stiamo considerando, verrà indicata come $\lambda_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}$.

Una volta definito il dominio di calcolo, il problema ora si concentra nella risoluzione della equazione differenziale alle derivate parziali (7.51b) che è la classica equazione di Poisson. Dovendo essere risolta numericamente, questa equazione dovrà essere trasformata in un'equazione alle differenze finite e per questo è ragionevole adottare uno *schema centrato* per approssimare le derivate parziali seconde presenti. Per esempio, la derivata parziale seconda rispetto ad x verrà approssimata come:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} \cong \frac{\lambda_{x-\Delta x} - 2\lambda_x + \lambda_{x+\Delta z}}{(\Delta x)^2} \qquad [7.55a]$$

e in modo del tutto analogo verranno approssimate le altre due derivate seconde.

Per quanto riguarda, invece, le derivate prime presenti nel membro di destra dell'equazione (che rappresenta la divergenza del campo originario di *first guess*), conviene adottare uno *schema forward*. In pratica, se $u^0_{i,j,k}$ è il valore del *first guess* al nodo di griglia (i,j,k), la derivata rispetto a x del *first guess* può essere approssimata come:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} \cong \frac{u^0_{i+1,j,k} - u^0_{i,j,k}}{\Delta x} \qquad [7.55b]$$

Le altre derivate parziali prime verranno discretizzate col medesimo metodo numerico.

Introducendo tutte queste approssimazioni numeriche delle derivate parziali prime (per il vento di *first* guess) e seconde (per il moltiplicatore di Lagrange) nell'equazione di Poisson (7.51b) e considerando una delle *celle interne* al dominio di calcolo rappresentata nella **Fig. 7.16**, si ottiene l'approssimazione algebrica seguente, piuttosto complessa almeno dal punto di vista formale:

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda_{(i+3/2,j+1/2,k+1/2)} - 2\lambda_{(i+1/2,j+1/2,k+1/2)} + \lambda_{(i-1/2,j+1/2,k+1/2)}}{\Delta x^2} \\ &+ \frac{\lambda_{(i+1/2,j+3/2,k+1/2)} - 2\lambda_{(i+1/2,j+1/2,k+1/2)} + \lambda_{(i+1/2,j-1/2,k+1/2)}}{\Delta y^2} \\ &+ \alpha^2 \frac{\lambda_{(i+1/2,j+1/2,k+3/2)} - 2\lambda_{(i+1/2,j+1/2,k+1/2)} + \lambda_{(i+1/2,j+1/2,k-1/2)}}{\Delta z^2} \\ &= -2\alpha_1^2 \left[\frac{u^0_{i+1} - u^0_i}{\Delta x} + \frac{v^0_{j+1} - v^0_j}{\Delta y} + \frac{w^0_{k+1} - w^0_k}{\Delta z}\right] \end{aligned} \qquad [7.56a]$$

Nonostante l'apparente complessità della relazione (7.56a), si nota come λ nella cella di **Fig. 7.16** sia legata da una relazione algebrica lineare al valore di λ nelle celle adiacenti. Riorganizzando i vari termini presenti nella relazione, si ottiene alla fine l'espressione seguente:

$$
\begin{aligned}
-\left[B_x+\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 B_y+\alpha^2\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 B_z\right]\lambda_{(i+1/2,j+1/2,k+1/2)}+A_x\lambda_{(i+3/2,j+1/2,k+1/2)}\\
+C_x\lambda_{(i-1/2,j+1/2,k+1/2)}+A_y\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2\lambda_{(i+1/2,j+3/2,k+1/2)}\\
+C_y\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2\lambda_{(i+1/2,j-1/2,k+1/2)}+A_z\alpha^2\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2\lambda_{(i+1/2,j+3/2,k+3/2)}\\
+C_z\alpha^2\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2\lambda_{(i+1/2,j+3/2,k-1/2)}\\
=-2\alpha_1^2(\Delta x)^2\varepsilon^0_{(i+1/2,j+1/2,k+1/2)}(i+1/2+j+1/2,k+1/2)
\end{aligned}
\qquad [7.56b]
$$

in cui, per una cella interna al dominio di calcolo, i coefficienti A_x, A_y, A_z, C_x, C_y e C_z valgono 1 ed i coefficienti B_x, B_y e B_z valgono 2. Il termine ε^0 è la divergenza del campo di *first guess* relativa alla cella considerata, che può essere approssimata come:

$$
\varepsilon^0_{(i+1/2,j+1/2,k+1/2)}=\frac{u^0_{i+1}-u^0_i}{\Delta x}+\frac{v^0_{i+1}-v^0_i}{\Delta y}+\frac{w^0_{i+1}-w^0_i}{\Delta z} \qquad [7.56c]
$$

Se la cella considerata ha una o più superfici in corrispondenza di una delle frontiere del dominio, i valori dei coefficienti *A*, *B* e *C* risultano differenti da quelli indicati. Se, in particolare, si considera l'asse *x* ed un generico nodo *i*, a seconda del tipo dei due nodi adiacenti *i* - 1 ed *i* + 1 (nessuna frontiera, frontiera con $\lambda = 0$, frontiera con $\partial\lambda\partial x = 0$) i coefficienti *A*, *B*, *C* assumeranno i valori proposti da Rodriguez e al. (1982) e da Chino (1992) e riassunti nella **Tab. 7.1.**

Condizione al nodo i-1	*A*	*B*	*C*	*Condizione al nodo i+1*
Nessuna frontiera	1	2	1	Nessuna frontiera
$\partial\lambda/\partial x = 0$	0	1	1	Nessuna frontiera
Nessuna frontiera	1	1	0	$\partial\lambda/\partial x = 0$
$\partial\lambda/\partial x = 0$	0	0	0	$\partial\lambda/\partial x = 0$
$\lambda=0$	0	4	4/3	Nessuna frontiera
Nessuna frontiera	4/3	4	0	$\lambda=0$
$\lambda=0$	0	8/3	0	$\partial\lambda/\partial x = 0$
$\partial\lambda/\partial x = 0$	0	8/3	0	$\lambda=0$

Tab. 7.1: valore dei coefficienti A, B e C per differenti condizioni al contorno.

Lo schema numerico (7.56b), al di là della sua complessità formale, asserisce che il valore della grandezza λ in un generico nodo dipende dai valori, opportunamente pesati, che λ assume nei nodi immediatamente a monte e a valle nelle tre direzioni cardinali, che sono complessivamente sei. Tale schema numerico applicato a tutti i nodi della griglia di calcolo con gli opportuni valori per i coefficienti *A*, *B* e *C* conduce ad un sistema di equazioni algebriche di grandi dimensioni che è necessario risolvere numericamente. Vari sono i metodi risolutivi possibili, tuttavia viste le caratteristiche e le dimensioni della matrice dei coefficienti del sistema un metodo risolutivo diretto risulta non opportuno. La scelta del metodo di risoluzione del sistema di equazioni lineari normalmente cade tra i diversi metodi iterativi proposti dall'Analisi Numerica ed uno dei più impiegati è il metodo chiamato *SOR* (*Successive Overrelaxation*). Per chiarire come opera tale metodo è opportuno (Press e al., 1992) considerare il seguente esempio bidimensionale (che molto assomiglia al nostro problema):

$$
\alpha\xi_{i+1,j}+b\xi_{i-1,j}+c\xi_{i,j+1}+d+e\xi_{i,j}=f \qquad [7.57a]
$$

e applicare ad esso il metodo *SOR* che è un procedimento *iterativo* in cui, ad un generico passo *n*, si opera nel modo seguente:

- si conosca il valore di ξ al passo *n-1* in tutti i nodi della griglia di calcolo. Alla prima iterazione, l'unico modo di procedere è quello di considerare ξ = 0 in ogni nodo della griglia interno al dominio, mentre i valori della variabile al contorno del dominio devono essere noti;
- si determini al generico nodo (*i, j*) una prima approssimazione di ξ nel modo seguente:

$$\xi^{*}_{i,j} = \frac{1}{e}\left[f - \left(\alpha\xi_{i+1,j} + b\xi_{i-1,j} + c\xi_{i,j+1} + d\xi_{i,j-1}\right)\right] \qquad [7.57b]$$

- l'approssimazione di $\xi_{i,j}$ all'iterazione *n-esima* sarà data da:

$$\xi^{n}_{i,j} = \omega\xi^{*}_{i,j} + (1-\omega)\xi^{n-1}_{i,j} = \xi^{n-1}_{i,j} - \omega\,\frac{\alpha\xi_{i+1,j} + b\xi_{i-1,j} + c\xi_{i,j+1} + d\xi_{i,j-1} + e\xi_{ij} - f}{e} \qquad [7.57c]$$

Il coefficiente ω è il *overrelaxation parameter* che dovrà avere valori compresi tra 1.7 e 1.8. Sherman (1978), sulla base di una estesa sperimentazione numerica, consiglia il valore 1.78.

Ritornando alla risoluzione del sistema di equazioni lineari generato dallo schema (7.56b), l'applicazione del metodo *SOR* comporta che alla iterazione *n*+1 si abbia:

$$\lambda^{n+1}_{(i+1/2,j+1/2,k+1/2)} = \lambda^{n}_{(i+1/2,j+1/2,k+1/2)} + \omega R_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} \qquad [7.58a]$$

dove:

$$\begin{aligned} R_{(i+1/2,j+1/2,k+1/2)} &= \left\{B_x + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 B_y + \alpha^2\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 B_z\right\}^{-1} \cdot \left[A_x\lambda^{n}_{(i+3/2,j+1/2,k+1/2)}\right. \\ &+ C_x\lambda^{n}_{(i-1/2,j+1/2,k+1/2)} + A_y\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2\lambda^{n}_{(i+1/2,j+3/2,k+1/2)} \\ &+ C_y\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2\lambda^{n}_{(i+1/2,j-1/2,k+1/2)} + A_z\alpha^2\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2\lambda^{n}_{(i+1/2,j+1/2,k+3/2)} \\ &+ C_z\alpha^2\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2\lambda^{n}_{(i+1/2,j+1/2,k-1/2)} + 2\alpha_1^2\varepsilon^0 \\ &\left.- \left\{B_x + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 B_y + \alpha^2\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 B_z\right\}\cdot\lambda^{n}_{(i+1/2,j+1/2,k+1/2)}\right] \end{aligned} \qquad [7.58b]$$

Le iterazioni terminano quando il residuo *R* risulta inferiore ad un valore predefinito. Per quanto riguarda il valore da attribuire a ω, nonostante la teoria assicuri la possibilità di individuarne *un valore ottimale*, conviene usare una strategia che si è rivelata appropriata nelle applicazioni pratiche: alla prima iterazione, ω è posto pari a 1, mentre alle iterazioni successive il valore di ω viene dato da:

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \|\Delta\lambda^{n}\|/\|\Delta\lambda^{n-1}\|}} \qquad [7.59a]$$

dove:

$$\|\Delta\lambda^{n}\| \sum_{i,j,k}\left(\lambda^{n}_{i,j,k} - \lambda^{n-1}_{i,j,k}\right)^2 \qquad [7.59b]$$

Più semplicemente, quando Δ*x* è comparabile con Δ*y*, il valore ottimale per ω è 1.7÷1.8.

A questo punto, noto il campo di λ, è possibile ottenere il valore delle componenti del vento al centro delle facce laterali della cella di calcolo, approssimando le equazioni (7.50a) nel modo seguente:

$$u_{(i,j+1/2,k+1/2)} = u^{0}_{(i,j+1/2,k+1/2)} + \left(\frac{1}{2\alpha_1^2}\right)\frac{\lambda_{(i+1/2,j+1/2,k+1/2)} - \lambda_{(i-1/2,j+1/2,k+1/2)}}{\Delta x} \qquad [7.60]$$

$$v_{(i+1/2,j,k+1/2)} = u^0_{(i+1/2,j,k+1/2)} + \left(\frac{1}{2\alpha_1^2}\right)\frac{\lambda_{(i+1/2,j+1/2,k+1/2)} - \lambda_{(i+1/2,j-1/2,k+1/2)}}{\Delta y}$$

$$w_{(i+1/2,j+1/2,k)} = u^0_{(i+1/2,j+1/2,k)} + \left(\frac{1}{2\alpha_1^2}\right)\frac{\lambda_{(i+1/2,j+1/2,k+1/2)} - \lambda_{(i+1/2,j+1/2,k-1/2)}}{\Delta z}$$

Dato che le componenti del vento così individuate sono definite al centro delle facce della cella, il loro valore finale sarà pari al valor medio individuato sulle facce opposte della cella considerata. Il metodo numerico *SOR* sommariamente illustrato è uno dei più utilizzati nelle implementazioni numeriche del modello *mass-consistent*, anche se non è certo il più efficiente. Altri metodi numerici sono stati impiegati con successo e il lavoro di Moussiopoulos e Flassak (1986) ne è un esempio interessante. Wang e al. (2005) hanno utilizzato il *metodo multigrid*, un metodo ancora più efficiente per risolvere l'equazione di Poisson per i cui dettagli si rimanda al riferimento citato.

Fin qui abbiamo considerato il caso in cui era assente qualsiasi forma di orografia. Se, viceversa, essa fosse presente e non trascurabile, si potrebbe operare in due modi distinti. Nel primo caso (Rodriguez e al., 1982; Chino, 1992) si potrebbe *discretizzare* l'orografia come nell'esempio presentato nella **Fig. 7.17**, in cui si mostra (in un dominio bidimensionale) l'andamento reale dell'orografia (linea continua) e l'approssimazione a *celle* con cui se ne realizza la discretizzazione. Fatto ciò, si analizzerà ogni singola cella del dominio di calcolo e si definiranno i coefficienti *A*, *B* e *C* appropriati alle condizioni al contorno presenti alle varie facce della cella, utilizzando i valori riportati nella **Tab. 7.1.**

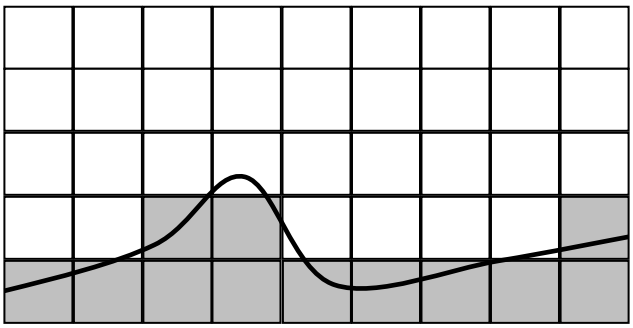


Fig. 7.17: esempio bidimensionale di semplificazione dell'orografia.

L'altra alternativa è costituita dalla approssimazione alle differenze finite delle equazioni (7.53), cosa che inevitabilmente porta a relazioni ben più complesse di quelle fin qui presentate. In Ishikawa (1994) possono essere trovati maggiori dettagli in proposito.

13.2.1.3 Determinazione dei moduli di precisione di Gauss

Nell'esprimere il funzionale (7.49) sono stati introdotti tre *pesi* indicati come α_1, α_2 e α_3, un peso cioè per ciascuna delle componenti del vento. Dato che non esiste a priori una ragione fisica per cui le due componenti orizzontali del vento vengano trattate in maniera differente, è normale porre $\alpha_1 = \alpha_2$. È stato poi introdotto il rapporto α, dato da $\alpha = \alpha_1/\alpha_3$. Come è prevedibile, la scelta dei valori da attribuire a questi parametri condiziona pesantemente il risultato ottenuto e perciò, al di là del significato puramente matematico che essi hanno, è indispensabile attribuire ad essi anche un significato fisico. Ciò che si vede è che se α è molto maggiore di 1, il campo di vento determinato con l'algoritmo *mass-consistent*, di fronte ad una barriera posta sul terreno (una montagna per esempio) farà in modo da prediligere uno *scavalcamento dell'ostacolo stesso*, piuttosto che un suo aggiramento. Questo, come noto, è un tipico comportamento in situazioni convettive. Viceversa, se α è molto minore di 1, si ha che gli eventuali ostacoli presenti lungo il fluire del vento verranno prevalentemente *aggirati*, cosa piuttosto frequente in condizioni stabili. Alla luce di tutto

ciò, i moduli di Gauss rappresentano sostanzialmente come l'orografia e la turbolenza locale perturbano un campo di moto uniforme sopravvento all'orografia. Risulta dunque evidente come il valore attribuito ai moduli di precisione di Gauss risulti determinante nella ricostruzione del campo di vento *mass-consistent* e dipenda dal livello di turbolenza presente nel *PBL*. Il numero di lavori realizzati sull'argomento è curiosamente molto limitato.

Chino (1992) ha proposto valori costanti in tutto il dominio di calcolo, dipendenti però dal livello di turbolenza presente. Utilizzando come indicatore della stabilità atmosferica la Categoria di Stabilità (di cui si tratterà al punto 7.3), per $\alpha = \alpha_1/\alpha_3$ sono proposti i valori riportati in **Tab. 7.2**.

Stabilità	α	
A	1.0	Condizioni molto convettive
B	1.0	Condizioni convettive
C	0.8	Condizioni poco convettive
D	0.5	Condizioni adiabatiche
E	0.1	Condizioni stabili
F	0.05	Condizioni molto stabili

Tab. 7.2: valori del parametro α in funzione dalla Categoria di Stabilità Atmosferica.

La semplicità applicativa di questo metodo non sempre è in accordo con la complessità delle situazioni reali che vorrebbero che in ogni punto della griglia di calcolo i valori assunti dai moduli di precisione di Gauss fossero differenti e sicuramente legati allo stato di stabilità (livello di turbolenza) presente nella cella considerata. Questo difficile, ma cruciale problema, ad oggi non si può dire completamente risolto e poche sono le strategie operative messe a punto, applicabili in una situazione di orografia reale. Ross e al. (1988), basandosi sul concetto di *critical dividing streamline* (si veda per esempio Ludwig e al. 1991), hanno proposto che nelle situazioni convettive α possa essere considerato pari ad 1, mentre nelle situazioni stabili α dipenda dal *Numero di Froude* definito come:

$$Fr = \frac{U}{N \cdot H} \qquad [7.61]$$

dove *U* è una opportuna velocità di scala, *H* è una altezza caratteristica e *N* è la frequenza di Brunt-Vaisala. Tuttavia, le indicazioni date nel riferimento citato non sembrano sufficienti per mettere a punto un algoritmo operativo con cui attribuire α alle diverse celle del dominio. Moussiopoulos e al. (1988), partendo dal lavoro di Ross e al. (1988), hanno elaborato ed utilizzato una metodologia operativamente applicabile per stimare nelle celle del dominio di calcolo il valore di α congruente con le caratteristiche orografiche della zona e con il livello di turbolenza in esse presente. Il metodo presuppone di conoscere il profilo verticale della velocità del vento e della temperatura potenziale immediatamente sopravvento al dominio di indagine e non perturbato dall'orografia locale e si basa sul *Numero di Strouhal*, che, nelle situazioni stabili, è definito come:

$$Str = \frac{1}{Fr} \qquad [7.62a]$$

mentre, nelle situazioni convettive, la sua definizione diventa:

$$Str = -\frac{H}{U \cdot t} \qquad \frac{1}{t} = \sqrt{-\frac{g}{T}\frac{d\theta}{dz}} \qquad [7.62b]$$

Se ora consideriamo le sole *situazioni stabili* ($Str \geq 0$), si ha che una buona parametrizzazione per α è data dalla relazione seguente:

$$\alpha^2 = 1 - \frac{Str^4}{2}\left(\sqrt{1 + 4Str^{-4}} - 1\right) \qquad [7.62c]$$

Per quanto riguarda, invece, le *situazioni convettive*, se si inserisce nella relazione (7.62c) al posto di *Str* la variabile *S* = -*Str*, essa fornirà un valore *A*. In queste situazioni, gli Autori asseriscono che il valore di α dovrà stare all'interno dell'intervallo $1 < \alpha < A^{-1}$. Nelle applicazioni reali in situazioni convettive, gli Autori hanno mostrato come il modello *mass-consistent* non sia molto sensibile al valore scelto per α, purché resti entro l'intervallo definito dalla disequazione precedente. Dal punto di vista operativo si può procedere nel modo seguente:

- si consideri una generica cella del dominio caratterizzata dagli indici orizzontali (*k*,*l*) e da una quota caratteristica *z*. Si calcoli il gradiente verticale della temperatura potenziale caratteristica della cella impiegando il relativo profilo imperturbato noto sopravvento al dominio d'interesse oppure i valori ottenuti da un'interpolazione delle misure disponibili e da ciò è immediato ottenere la *frequenza N*. Inoltre, dal profilo imperturbato della velocità media del vento si stimi la velocità caratteristica della cella che, comunque, non potrà essere inferiore a 0.2 ms^{-1};
- si evidenzi una colonna verticale di celle aventi tutte gli indici orizzontali (*k*,*l*);
- si calcoli per la verticale selezionata l'altezza caratteristica $H_{(k,l)}$ nel modo seguente:

$$H_{k,l} = \frac{\sum_{i,j \neq k,l} |\Delta h_{i,j}| / r_{i,j}^2}{\sum_{i,j \neq k,l} 1/r_{i,j}^2} \qquad [7.62d]$$

  dove $\Delta h_{i,j}$ e $r_{i,j}$ sono rispettivamente le differenze di altezza orografica e le distanze orizzontali tra le verticali di tutte le celle con indici (*i*,*j*) e la cella con indici (*k*,*l*).
- a questo punto è possibile per tutte le celle della colonna verticale selezionata calcolare il numero di *Strouhal* locale in base al valore locale di *N* e della velocità del vento caratteristica delle celle;
- si calcoli con le relazioni presentate il valore di α, verificando che non sia minore di $1/\sqrt{30}$ e non sia maggiore di $\sqrt{30}$;
- si ripeta il procedimento per tutte le colonne di celle che compongono il dominio di calcolo.

7.2.1.4 Determinazione del campo iniziale interpolato

Il metodo con cui ricostruire il campo di vento iniziale, necessario per l'applicazione dei metodi *mass-consistent*, non può essere del tutto generale e dipende fortemente dal tipo di territorio che si sta considerando e dal numero e dal tipo di dati disponibili.

Consideriamo inizialmente il problema della ricostruzione del campo bidimensionale delle componenti *u* e *v* nelle immediate vicinanze del suolo. Si immagini di avere a disposizione *M* misure in altrettante stazioni meteorologiche S_k, poste in prossimità del suolo (diciamo a 10 metri dal suolo, come normalmente capita) nelle posizioni (x_k, y_k). Il problema da risolvere è la determinazione delle due componenti orizzontali del vento in un generico punto del territorio *P(x,y)*. Il metodo più semplice, impiegabile con successo in situazioni piane e con uso del suolo sostanzialmente uniforme in tutta la regione di interesse, è il metodo di Cressman nella versione data da Goodin e al. (1979). In pratica:

$$(u,v)_P = \frac{\sum_{k=1}^{M} (u,v)_{S_k} W\left(r_{P,S_k}\right)}{\sum_{k=1}^{M} W\left(r_{P,S_k}\right)} \qquad [7.63a]$$

in cui i pesi *W* dipendono dalla distanza *r* tra il punto in cui si desidera l'interpolazione ed il punto in cui è collocata la generica stazione di misura e sono dati dalla relazione seguente:

$$W(r_{P,S_k}) = \frac{R^2 - r_{P,S_k}^2}{R^2 + r_{P,S_k}^2} \qquad r_{P,S_k} = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} \qquad [7.63b]$$

dove *R* è il *raggio di influenza della stazione* scelto in modo da far sì che la stazione *pesi* solo in zone aventi caratteristiche superficiali simili a quelle presenti nella stazione di misura stessa. Questa tecnica è di semplice applicazione, ma poco adatta a tener conto di situazioni geograficamente molto complesse.

In Chino (1992) è stata presentata un'interessante metodologia alternativa secondo cui, in un punto del territorio, le componenti orizzontali del vento possono ancora essere viste come una *combinazione pesata delle misure fatte nelle stazioni meteorologiche,* come affermato dalla (7.63a), tuttavia la forma assunta dai pesi è decisamente più complessa ed articolata. In particolare, è possibile definire i pesi seguenti:

- un peso è dipendente dalla distanza tra la stazione di misura ed il punto analizzato in cui si desidera l'interpolazione. Per eliminare la dominanza di una stazione posta nelle vicinanze di un nodo di griglia, il peso *W(r)* relativo è dato dalla formula Gaussiana seguente:

  $$W(r) = exp(-\alpha r^2) \qquad [7.64]$$

  dove *r* è espressa in *km* ed α è pari a 0.1.

- per tener conto della differenza di quota tra la stazione di misura ed il punto in cui si realizza l'interpolazione, viene introdotto il peso *W(h)* che presenta due forme distinte a seconda che la quota della stazione (h_{staz}) sia superiore o meno alla quota del punto interpolato. Nel caso in cui la stazione di misura si trovi ad una quota superiore al punto, indicando con *h* la distanza verticale tra la stazione ed il nodo di griglia e con h_{ground} la quota al suolo a cui si trova la stazione si ha che:

  $$W(h) = exp\left[-\beta \cdot \left(\frac{h}{h_{staz} - h_{ground}}\right)^4\right] \qquad [7.65a]$$

  dove β vale 2.3. Nel caso in cui la stazione sia ad una quota inferiore al punto di interpolazione, vale la relazione:

  $$W(h) = exp[-\gamma \cdot h^2] \qquad [7.65b]$$

  dove γ vale $5.75 \cdot 10^{-5}$.

- in presenza di forte orografia bisogna tener conto degli effetti di eventuali barriere interposte tra stazione di misura e punto di interpolazione. Se h_b è il dislivello tra la sommità della barriera e la stazione di misura, il peso relativo a questo fenomeno sarà dato da:

  $$W(h_b) = exp[-\eta \cdot h_b^2] \qquad [7.66]$$

  dove η vale $1.15 \cdot 10^{-4}$.

- questi pesi parziali tengono conto, ognuno, di differenti aspetti dell'interpolazione e concorrono alla stima, in ogni punto della griglia di calcolo, del peso complessivo *W* da utilizzare nella relazione interpolativa (7.63):

  $$W_{P.S_k} = W(r) \cdot W(h) \cdot W(h_b) \qquad [7.67]$$

Una volta determinato il campo delle componenti *u e v* nei pressi del suolo, il problema ora si trasferisce alla determinazione della componente verticale del vento, sempre nei pressi del suolo. Se si impiegano coordinate *terrain-following,* il problema è immediatamente risolto, visto che la velocità rispetto alla coordinata σ non potrà che essere nulla nei pressi del suolo. Se, invece, si opera in coordinate cartesiane la scelta potrebbe essere differente, anche se in pratica si preferisce comunque considerare la componente *w* nulla nei pressi del suolo.

A questo punto, il problema da risolvere è l'interpolazione dei valori delle componenti del vento nei nodi di griglia lontani dal suolo. Se si dispone di un numero sufficiente di sondaggi, la tecnica preferita è quella di interpolare tali dati su tutti i nodi di griglia non al suolo, impiegando la (7.63). Se il numero di radiosondaggi è limitato o addirittura nullo, è indispensabile operare in maniera differente. In particolare (Ratto e al., 1994), noto in ogni nodo di griglia $(i, j, 0)$ corrispondente alla superficie inferiore del dominio di calcolo il valore delle componenti del vento (a tali nodi si attribuisce di fatto una quota pari alla quota di misura delle stazioni di misura presenti nella regione) ed eventualmente noti i parametri del *PBL* (u_*, H_0 e z_i,), l'impiego delle relazioni di Similarità valide per tutto il *PBL* (che incontreremo al Cap. 8) consentirà di ottenere un valore delle componenti orizzontali del vento in tutti i nodi (i, j, k) per ogni $k = 1,2,..,N_z$.

7.2.1.5 Applicazioni alla microscala

Un modello diagnostico di campo di vento viene tradizionalmente applicato nelle ricostruzioni a mesoscala del campo di moto soprattutto a supporto degli studi della dispersione degli inquinanti in aria. Tuttavia, la presenza delle grandi strutture urbane ed i problemi di inquinamento atmosferico che esse presentano hanno indotto, negli ultimi decenni, un'intensa attività di ricerca volta ad individuare la struttura a microscala del campo di moto e le modalità di dispersione degli inquinanti nella complessa geometria urbana. Nonostante la disponibilità di una serie di complesse simulazioni modellistiche realizzate in situazioni altamente idealizzate e di numerosi esperimenti in galleria del vento, non era immediato individuare una metodologia relativamente semplice ed operativa per definire i campi di moto a microscala. Per ovviare a ciò, Kaplan e Dinar (1996) hanno proposto una singolare e semplice metodologia che utilizza i concetti che stanno alla base del modello *mass-consistent* assieme alle evidenze sperimentali (opportunamente parametrizzate) delle perturbazioni indotte dagli ostacoli ad un campo di flusso omogeneo. In sostanza, in assenza di un ostacolo e quando si è in completa omogeneità orizzontale, il campo di moto medio è regolare o orizzontalmente omogeneo. Se, però, si pone su questa superficie regolare un ostacolo, esso induce delle perturbazioni. Il metodo proposto, in un primo momento stima dove hanno luogo queste perturbazioni e ne definisce grossolanamente le caratteristiche quantitative, successivamente perturba il campo di moto originariamente omogeneo sulla base delle perturbazioni stimate e infine *bilancia* il campo di moto così ottenuto, imponendone la divergenza nulla. A titolo di esempio, consideriamo la situazione illustrata nella **Fig. 7.18** in cui è presente un solo ostacolo impenetrabile a forma di parallelepipedo posto lungo la direzione di provenienza del vento.

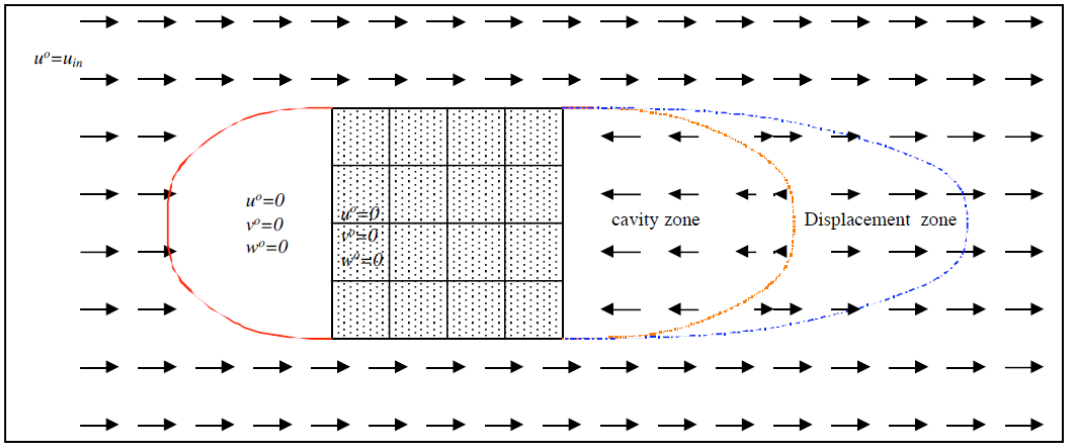


Fig. 7.18: perturbazione indotta da un ostacolo posto lungo la direzione di provenienza del vento (Perdjyak e Brown, 2007)

Facendo riferimento alla figura, ipotizziamo che il vento spiri da sinistra verso destra e che la dimensione trasversale dell'ostacolo sia *W*, la sua altezza *H* e la sua dimensione longitudinale *L*.

Le evidenze ottenute dalle sperimentazioni nella galleria del vento mostrano come la presenza dell'ostacolo isolato determini sul flusso d'aria delle chiare perturbazioni localizzate in tre zone principali:

- la *frontal zone*, che è posta immediatamente a monte dell'ostacolo. In essa l'aria viene rallentata e deviata in tre flussi distinti. Due di essi, simmetrici in questa geometria, aggirano l'ostacolo, mentre il terzo lo scavalca;
- la *cavity zone*, che è posta immediatamente a valle dell'ostacolo ed in cui si stabilisce il classico vortice sottovento;
- la *wake zone* (o *displacement zone*) che è posta sottovento alla *cavity zone* e in cui il flusso d'aria gradualmente si riporta nella situazione imperturbata.

Sperimentalmente l'estensione spaziale di queste tre zone è stata determinata in funzione delle caratteristiche geometriche dell'ostacolo. In particolare:

- la *frontal zone* si estende a monte dell'ostacolo per un ammontare L_F pari a:

$$\frac{L_F}{H} = \frac{2(W/H)}{1 + 0.8 \cdot (W/H)} \qquad [7.68a]$$

  e può essere vista come un volume la cui superficie esterna è descritta dalla relazione:

$$\frac{(x - x_L)^2}{L_F^2(1 - (z/0.6H)^2)} + \frac{\left(y - y_{L,C}\right)^2}{(W/2)^2} = 1 \qquad [7.68b]$$

  dove x_L è la coordinata x della parete più a sinistra dell'ostacolo e $y_{L,C}$ è la coordinata y del centro di tale parete.

- l'estensione della *cavity zone* L_C, immediatamente sottovento l'ostacolo, può essere stimata, invece, come:

$$\frac{L_C}{H} = \frac{1.8(W/H)}{(L/H)^{0.3}\left(1 + 0.24 \cdot (W/H)\right)} \qquad [7.68c]$$

  e può essere vista come un volume la cui superficie esterna è data da:

$$\frac{(x - x_R)^2}{L_C^2(1 - (z/H)^2)} + \frac{\left(y - y_{R,C}\right)^2}{(W/2)^2} = 1 \qquad [7.68d]$$

  dove x_R è la coordinata x della parete di destra dell'ostacolo e $y_{R,C}$ è la coordinata y del centro della stessa;

- infine, la lunghezza della *wake zone* L_W risulta pari a:

$$L_W = 3L_C \qquad [7.68e]$$

  ed è un volume con superficie esterna

$$\frac{(x - x_R)^2}{L_W^2(1 - (z/H)^2)} + \frac{\left(y - y_{R,C}\right)^2}{(W/2)^2} = 1 \qquad [7.68f]$$

Sulla base di queste considerazioni possiamo ipotizzare che la presenza di un ostacolo induca profonde perturbazioni ad un flusso d'aria che sarebbe stato completamente omogeneo orizzontalmente in assenza dello stesso. Kaplar e Dinar (1996) hanno quantificato queste perturbazioni individuando delle relazioni per esprimere le tre componenti del moto nei punti appartenenti al volume caratteristico di ciascuna zona. In particolare:

- nella ***frontal zone***, si può ipotizzare che, almeno in prima approssimazione, ci sia una pressoché completa stagnazione e quindi è realistico ritenere che, come valutazione iniziale, le tre componenti del moto siano ovunque identicamente nulle;

- nella ***cavity zone***, è presente il classico vortice sottovento. Per questo, in prima approssimazione, in ogni punto del volume che definisce la zona le tre componenti del vento possono essere descritte dalle relazioni seguenti:

$$U = -U_{ref}\left(\frac{z}{z_{ref}}\right)^{\gamma}\left(1-\frac{x-x_R}{d_N}\right)$$
$$V = V_{ref}\left(\frac{z}{z_{ref}}\right)^{\gamma} \qquad [7.69a]$$
$$W = -0.5U_{ref}\left(\frac{z}{z_{ref}}\right)^{\gamma}\left(1-\frac{d_N-(x-x_R)}{0.5d_N}\right)$$

  in cui z_{ref} è una quota in corrispondenza della quale si ha una misura o una stima del vento, γ è un'opportuna costante dipendente dalla stabilità (Hanna e al., 1982) e d_N è la distanza sottovento della zona vista dal punto considerato e pari a:

$$d_N = L_C\sqrt{\left(1-\left(\frac{z}{H}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{y-y_{R,C}}{W/2}\right)^2\right)} \qquad [7.69b]$$

- nella *wake zone* le tre componenti del moto possono essere poste a:

$$U = -U_{ref}\left(\frac{z}{z_{ref}}\right)^{\gamma}\left(1-\frac{d_N}{x-x_R}\right)^{1.5}$$
$$V = V_{ref}\left(\frac{z}{z_{ref}}\right)^{\gamma} \qquad [7.69c]$$
$$W = 0$$

Il campo di moto in presenza dell'ostacolo può essere stimato *in prima approssimazione* pari a quello che si avrebbe in assenza dell'ostacolo, salvo nelle tre zone evidenziate e nel volume occupato dall'ostacolo stesso. In particolare, nella *frontal zone* il vento è sostanzialmente nullo, nella *cavity zone* le tre componenti del vento sono date dalla (7.69a) e nelle *wake zone* dalla (7.69c). Ovviamente in corrispondenza del volume occupato dall'ostacolo il campo è identicamente nullo. Nei restanti punti del dominio di calcolo le tre componenti del vento sono esattamente quelle che caratterizzavano il campo omogeneo privo di ostacoli. Questo campo di prima approssimazione, però, non è a divergenza nulla e Kaplan e Dinar (1996) hanno semplicemente ipotizzato che esso potesse costituire il *first guess* di un modello diagnostico *mass-consistent* il cui *output* rappresentava il campo definitivo in presenza dell'ostacolo. I risultati ottenuti con questa metodologia, confrontati con le misure disponibili, sono stati decisamente buoni e ciò ha indotto a cercare di generalizzare il più possibile questa metodologia.

La prima forma di generalizzazione è stata quella di considerare un ostacolo isolato orientato in una direzione che formava un generico angolo α con la direzione di provenienza del vento (Kaplan e Dinar 1996). In questo caso, la cosa più rilevante mostrata dagli esperimenti era la presenza di due zone frontali distinte come evidenziato nella **Fig. 7.19**. Questa generalizzazione ha consentito di trattare un ostacolo isolato in ogni situazione meteorologica.

Oltre a ciò, sono stati studiati ostacoli isolati di forma non parallelepipeda (per esempio edifici a U), ma soprattutto si è studiata la situazione costituita da un insieme di ostacoli vicini, posti in maniera regolare o anche irregolare, che rappresentavano schematicamente le strutture edilizie cittadine e la presenza di canyon urbani. Ciò ha consentito di ottenere modelli *mass-consistent* operativi in ambiente urbano (Singh e al. 2008; Moussafir e al. 2004) e quindi a microscala, ideali per poter stimare in maniera realistica la dispersione degli inquinanti entro le strutture di una città come è evidente dalla **Fig. 7.20**.

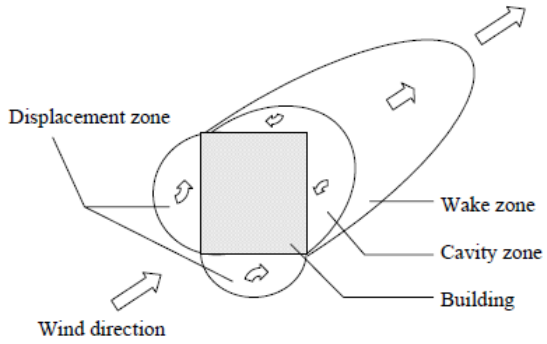


Fig. 7.19: ostacolo isolato non nella direzione del vento

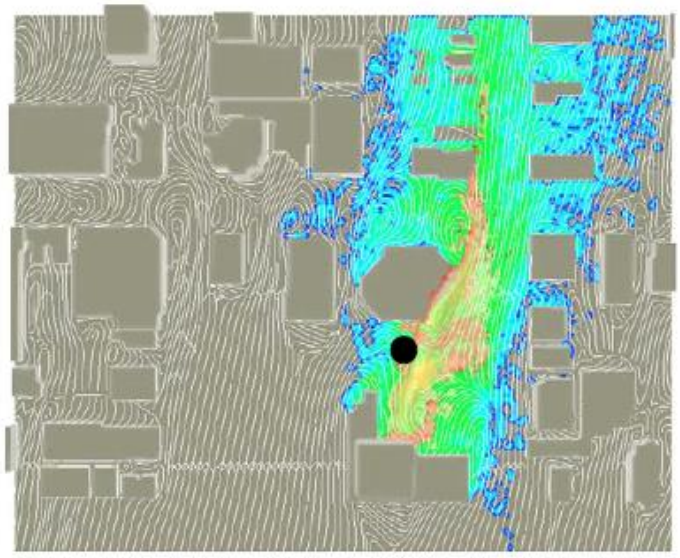


Fig. 7.20: linee di flusso e distribuzione al suolo della concentrazione di inquinanti in ambiente urbano (Moussafir e al. 2004)

7.2.2 IL MODELLO DIAGNOSTICO DEI PARAMETRI DELLA TURBOLENZA

Un elemento essenziale di un modello diagnostico è la sua capacità di ricostruire in corrispondenza di tutti i nodi della griglia di calcolo prossimi alla superficie terrestre i parametri che quantificano il livello di turbolenza del *PBL*, cioè u_*, H_0 e z_i. Per poter ricostruire u_* ed H_0 in tutti i nodi $(i, j, 0)$ è opportuno operare nella maniera seguente.

Dato che il campo di vento *mass-consistent* richiede il campo di temperatura per poter definire in maniera corretta i moduli di precisione di Gauss, la stima di questi parametri avverrà prima della ricostruzione diagnostica del campo di vento e quindi ci si dovrà accontentare di stimare in ogni nodo della frontiera inferiore del dominio di calcolo la velocità del vento e la temperatura dell'aria utilizzando un'interpolazione delle misure disponibili, impiegando un meccanismo analogo a quello utilizzato per ottenere il *first guess* per il modello *mass-consistent*. A queste stime attribuiremo una *quota di misura* pari a quella caratteristica delle postazioni impiegate nell'interpolazione. Consideriamo poi le misure di Radiazione Solare Globale R_g e, sempre nei nodi della frontiera inferiore del dominio di calcolo, interpoliamo questa grandezza, che dovrà essere poi corretta per tener conto adeguatamente della pendenza del suolo riscontrata in questi nodi, come si è visto al Cap. 6. A questo punto, impiegando il metodo di *Priestley-Taylor* modificato (si veda Cap. 8) e le relazioni di Similarità di Monin-Obukhov (si veda Cap. 8) sarà

possibile ottenere in ogni nodo $(i, j, 0)$ il valore corretto per u_* e H_0. Per fare ciò, è pero necessario conoscere in corrispondenza di tali nodi un valore caratteristico di rugosità superficiale z_0 che dovrà essere definito dall'utente del modello.

È poi necessario ricostruire l'altezza del *PBL* z_i. Se le situazioni considerate sono quelle notturne, nel Cap. 8 verranno presentate semplici relazioni diagnostiche che ne consentono la determinazione a partire da valori noti di *friction velocity* e di flusso turbolento di calore sensibile. Pertanto, in corrispondenza di ogni nodo $(i, j, 0)$ sarà individuato un valore per z_i. Sfortunatamente per le situazioni convettive non sono disponibili relazioni diagnostiche per il calcolo di z_i, ma solo relazioni prognostiche. Va comunque rilevato che un modello diagnostico di *PBL* normalmente opererà per un periodo di simulazione ragionevolmente lungo (parecchi giorni), soprattutto se suo compito è la fornitura di dati meteorologici a modelli di simulazione della dispersione degli inquinanti in aria di media complessità. In tal caso non sarà un problema innestare un calcolo prognostico di z_i nelle situazioni convettive, impiegando uno dei modelli presentati al Cap. 8, come per esempio il modello termodinamico o il modello di Gryning-Batchvarova. Entrambi sono formalmente rappresentati da un'equazione differenziale ordinaria che può essere facilmente integrata con metodi numerici standard (come uno dei metodi Runge-Kutta). Alla fine di questa procedura si disporrà per ogni nodo $(i, j, 0)$ di un valore di z_i. Dato che si potrebbe riscontrare una notevole variabilità del valore di z_i per colonne di nodi adiacenti, può spesso essere opportuno realizzare uno *smoothing* impiegando una relazione del tipo:

$$(z_i)_{i,j} = a \cdot (z_i)_{i,j} + b\left[(z_i)_{i+1,j} + (z_i)_{i-1,j} + (z_i)_{i,j+1} + (z_i)_{i,j-1}\right] \qquad [7.70]$$

Ai coefficienti a e b dovranno essere attribuiti valori opportuni. Una possibile scelta può essere per esempio 0.6 e 0.1 rispettivamente.

7.2.3 IL RICOSTRUZIONE DIAGNOSTICA DEI CAMPI SCALARI

I campi di interesse per un modello diagnostico di *PBL* dipendono dal suo impiego. Se, per esempio, l'interesse è volto alla dispersione degli inquinanti in atmosfera, i possibili campi di interesse sono legati alle necessità del modello di dispersione impiegato. Se si prendesse in considerazione un modello di tipo Lagrangiano a particelle (Cap. 22), i possibili campi di interesse potrebbero essere la temperatura potenziale θ, le deviazioni standard delle tre componenti del vento e della temperatura (σ_u, σ_v, σ_w, σ_T), le covarianze $\overline{u'w'}$, $\overline{v'w'}$ e $\overline{w'\theta'}$ e la dissipazione di energia cinetica turbolenta ε. Nel Cap. 8 verranno discusse le relazioni di Similarità adeguate a descrivere realisticamente tali variabili entro tutto il *PBL*. In pratica si potrà operare nel modo seguente:

1. si consideri un generico nodo $(i, j, 0)$. Per tale nodo è noto il valore di u_*, H_0 e z_i;
2. per ogni nodo (i, j, k), con $k = 0,1,..,N_z$ si determini la quota $z_k = k \cdot \Delta z$. In corrispondenza del nodo alla superficie ($k = 0$), si adotti come $z_{k=0}$ un valore opportuno (2 o 10 metri, per esempio). Impiegando le relazioni di Similarità relative alle variabili di interesse, se ne calcoli il valore alle varie quote z_k: in questo modo risultano determinate le variabili meteorologiche di interesse per tutti i nodi della colonna verticale di nodi con indici (i, j);
3. si ripetano i passi 1 e 2 per tutti le coppie di indici (i,j).
4. si regolarizzino i campi tridimensionali così ottenuti impiegando uno *smoothing orizzontale* come quello descritto dalla relazione (7.70).

7.2.4 OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

Il risultato ottenuto da un modello diagnostico è rappresentato dal campo tridimensionale del vento (a divergenza minima), dal campo di temperatura e dal campo di tutte quelle variabili meteorologiche e micrometeorologiche necessarie, per esempio, ai modelli di simulazione della

dispersione degli inquinanti in atmosfera. Attualmente questo tipo di modello è molto impiegato, soprattutto in tutte quelle situazioni in cui il territorio da studiare non è esageratamente complesso. Con la definizione di un numero sempre maggiore di Relazioni di Similarità tale classe di modelli potrà arricchirsi ulteriormente ed è prevedibile che ciò consentirà di sviluppare modelli di simulazione della dispersione degli inquinanti in aria che tengano conto di sempre maggiori aspetti della turbolenza atmosferica. Ovviamente a tale risultato si può giungere anche con l'impiego di modelli prognostici; tuttavia, la loro complessità e la loro pesantezza di calcolo ne scoraggiano spesso l'impiego. Un esempio significativo di modello diagnostico di *PBL* è rappresentato dal modello CALMET dell'US-EPA, utilizzato prevalentemente per la fornitura di tutti questi campi meteorologici al modello di simulazione della dispersione degli inquinanti CALPUFF, uno strumento estremamente utile nello studio dell'inquinamento non fotochimico a mesoscala.

7.3 METEOROLOGIA PER I MODELLI STAZIONARI DI DISPERSIONE IN ATMOSFERA

Nella pratica corrente sono frequentemente impiegati modelli di tipo stazionario per la stima del trasporto e della dispersione degli inquinanti in atmosfera. Il loro impiego normalmente è limitato alla determinazione di prima approssimazione dell'impatto che le varie sorgenti inquinanti attive hanno su un territorio di estensione limitata e di caratteristiche estremamente regolari. Di essi tratteremo al Cap. 19. Le ipotesi su cui si basano tutti questi modelli sono:

- le situazioni meteorologiche devono essere *lentamente variabili nel tempo* in modo tale che si possa immaginare di trattare una sequenza di situazioni di fatto stazionarie;
- il campo di vento e delle altre variabili meteorologiche che determinano il trasporto e la dispersione degli inquinanti in aria è orizzontalmente omogeneo;
- per tutte le variabili meteorologiche si ipotizza un profilo verticale noto;
- la turbolenza atmosferica deve essere descritta nella maniera più semplice e più compatta possibile.

In pratica, per soddisfare le necessità meteorologiche e micrometeorologiche di tali modelli è sufficiente considerare un solo punto del dominio di calcolo da essi considerato, che, per quel che si è detto, risulta orizzontalmente omogeneo: le informazioni micrometeorologiche e meteorologiche relative a tale punto saranno dunque rappresentative dell'intero dominio di calcolo. Quindi, si può dire che questa classe di modelli richiede un modello monodimensionale e stazionario di *PBL*, dato che questi modelli di dispersione ipotizzano che in ogni intervallo temporale considerato il *PBL* resti stazionario. Qui di seguito vengono presentati gli elementi essenziali di un tale modello di *PBL*, tenendo conto sia dei modelli di dispersione di vecchia generazione, come per esempio il modello ISC3 dell'US-EPA, sia i modelli di nuova generazione, come per esempio il modello AERMOD dell'US-EPA.

7.3.1 LA TURBOLENZA ATMOSFERICA PER I MODELLI STAZIONARI

È questo uno degli aspetti che più differenziano i modelli di dispersione stazionari di vecchia e nuova generazione.

Per quanto riguarda i modelli di nuova generazione (es. AERMOD), la turbolenza del *PBL* è completamente descritta una volta noti nel punto di riferimento del dominio di calcolo:

- la *lunghezza di rugosità* z_0, caratteristica dell'intero dominio di calcolo stesso;
- la *turbolenza meccanica*, completamente rappresentata dalla velocità di frizione u_*;

- la *turbolenza di tipo convettivo*, completamente caratterizzata dal flusso turbolento di calore sensibile H_0;
- l'*estensione verticale del PBL* convettivo z_i (normalmente indicata col termine di altezza di rimescolamento), sia nelle ore convettive che nelle ore stabili.

Come è immediatamente evidente, i modelli dispersivi stazionari di nuova generazione richiedono correttamente tutti gli elementi identificativi di un *PBL* monodimensionale. Il problema che nasce con il loro utilizzo è che non sempre le variabili sopra indicate sono realmente disponibili in pratica. Più frequentemente sono realmente disponibili solo misure meteorologiche tradizionali come:

- la velocità e la direzione del vento ad una quota di riferimento (normalmente a 10 metri rispetto al suolo);
- la temperatura e l'umidità relativa nei pressi del suolo;
- la radiazione globale;
- la radiazione netta, anche se quest'ultima variabile frequentemente è assente nelle stazioni meteorologiche tradizionali.

Si presenta quindi il problema di realizzare una stima dei parametri che caratterizzano la turbolenza atmosfera a partire da queste semplici e limitate misure meteorologiche. Come si vedrà nel Cap. 15, attualmente questo problema non risulta particolarmente complesso, essendo disponibili metodi di stima abbastanza accurati, per lo meno in situazioni non patologiche.

Per quanto riguarda, invece, i modelli dispersivi stazionari di vecchia generazione, di cui ISC3 è un esempio tipico, la situazione è molto diversa. Tutti questi modelli, per descrivere lo stato di turbolenza del *PBL*, usano un *parametro sintetico*, noto col nome di *Categoria di Stabilità Atmosferica*, che *pretende* di classificare in 6 classi tipiche tutte le possibili configurazioni del *PBL*, sia esso convettivo che stabile. Questa classificazione non deriva da considerazioni di natura micrometeorologica, ma solo dall'osservazione della forma dei pennacchi di fumo emessi da ciminiere elevate. In effetti negli anni '60 e '70 sono state realizzate numerose campagne sperimentali negli USA volte a classificare le varie forme dei pennacchi emessi da ciminiere elevate (prevalentemente da centrali termoelettriche) e dall'analisi della forma di questi pennacchi di fumo si è tentata una correlazione con le principali variabili meteorologiche (ma non micrometeorologiche) disponibili. Curiosamente tutto questo lavoro, tedioso e complesso, non ha in alcun modo tenuto conto degli enormi progressi sulla conoscenza della turbolenza atmosferica che proprio in quegli anni risultavano disponibili. Tradizionalmente, le 6 Categorie di Stabilità Atmosferica sono le seguenti:

- sono previste tre Categorie, denominate A, B, C (o dai numeri 1, 2, 3), che rappresentano le situazioni convettive. La **Categoria A** rappresenta situazioni molto convettive, con velocità del vento bassa e forte insolazione. La **Categoria B** è una situazione che si presenta quando o la radiazione solare è relativamente poco elevata o la velocità del vento (e quindi la turbolenza di origine meccanica) è elevata. La **Categoria C** la si ha quando la velocità del vento è elevata e la radiazione solare è ridotta;
- è stata prevista una situazione che rappresenta tutte quelle situazioni (stabili o convettive) prossime all'adiabaticità, denominata **Categoria D** (o 4) che quindi rappresenta situazioni diurne o notturne con cielo coperto e vento teso;
- infine, sono state previste due situazioni stabili (relative esclusivamente a situazioni notturne) indicate come **Categoria E** e **Categoria F**, la prima relativa a situazioni con vento abbastanza elevato e cielo poco nuvoloso, mentre l'ultima relativa a situazioni con cielo sereno e velocità del vento bassa.

È abbastanza evidente come una classificazione così rigida e così limitata difficilmente possa

essere in grado di dar conto della estrema complessità e variabilità del *PBL*. Sono stati proposti numerosissimi schemi per determinare le Categorie di Stabilità Atmosferica a partire dalle principali variabili meteorologiche e quanto riportato in (US - Environmental Protection Agency 1987) ne è un esempio significativo. La cosa demoralizzante è che frequentemente, dato un insieme di variabili meteorologiche tradizionali, l'applicazione dei vari schemi proposti può fornire stime differenti di Categorie di Stabilità Atmosferica. Tra l'altro, spesso sono stati proposti schemi mal posti dal punto di vista strumentale. Un esempio per tutti è un celebre schema che pretende di stimare la Categoria di Stabilità Atmosferica a partire dalla deviazione standard della direzione del vento. Come risulterà evidente nel Cap. 11, tale parametro risulta più o meno realistico a seconda delle caratteristiche dinamiche del sensore impiegato per la determinazione di tale parametro. La pretesa che anemometri del tutto tradizionali siano in grado di fornire realisticamente tale variabile porta a stime completamente irrealistiche della Categoria di Stabilità Atmosferica.

Alla luce dell'esperienza, l'unico metodo di stima della Categoria di Stabilità Atmosferica che ci sentiamo di segnalare è quello basato sulla velocità del vento e sulla Radiazione Solare Globale (per le ore diurne) e sulla Radiazione Netta (per le ore notturne). Tra tutti i metodi proposti, questo è sicuramente il più fisico, dato che prende in considerazione come indicatore surrogato della turbolenza meccanica la velocità del vento (decisamente correlata con u_*) e come surrogato della turbolenza convettiva le radiazioni (solare globale e netta). In pratica questo schema risulta fortemente correlato col *Flux Richardson Number* che, come si è visto, è un ottimo indicatore della turbolenza complessiva del *PBL*. In pratica, il metodo di determinazione della Categoria di Stabilità Atmosferica opera nel modo seguente:

- per un generico periodo considerato (generalmente un'ora) si consideri la velocità del vento e la Radiazione Solare Globale (se il periodo è diurno) o la Radiazione Netta (se il periodo è notturno);
- *per tutte le situazioni diurne* la Categoria di Stabilità Atmosferica verrà determinata mediante la tabella a doppia entrata riportata in **Tab. 7.3**;
- *per tutte le situazioni notturne* la Categoria di Stabilità Atmosferica verrà determinata mediante la tabella a doppia entrata riportata in **Tab. 7.4**.

Vento	**Radiazione Solare Globale (W/m^2)**					
(m/s)	>700	700÷540	540÷400	400÷270	270÷140	<140
<2	A	A	B	B	C	D
2 ÷ 3	A	B	B	B	C	D
3 ÷ 4	B	B	B	C	C	D
4 ÷ 5	B	B	C	C	D	D
5 ÷ 6	C	C	C	C	D	D
>6	C	C	D	D	D	D

Tab. 7.3: schema per determinare la Categoria di Stabilità Atmosferica nelle ore diurne.

Vento	**Radiazione Netta (W/m^2)**		
(m/s)	> -20	-20 ÷ -40	< -40
< 2	D	F	F
2 ÷ 3	D	E	F
3 ÷ 5	D	D	E
5 ÷ 6	D	D	D
> 6	D	D	D

Tab. 7.4: schema per determinare la Categoria di Stabilità Atmosferica nelle ore notturne.

Molti sono stati i tentativi fatti per mettere in relazione la Categoria di Stabilità

Atmosferica con i parametri caratteristici della turbolenza del *PBL*. I risultati più celebri sono quelli prodotti da Golder (1972) e riassunti in **Fig. 7.22**. Da essa si nota come sia possibile stabilire una sorta di relazione tra la Categoria di Stabilità Atmosferica, la rugosità superficiale (rappresentata da z_0) e la lunghezza di Monin-Obukhov (L), anche se tale relazione non è certamente biunivoca.

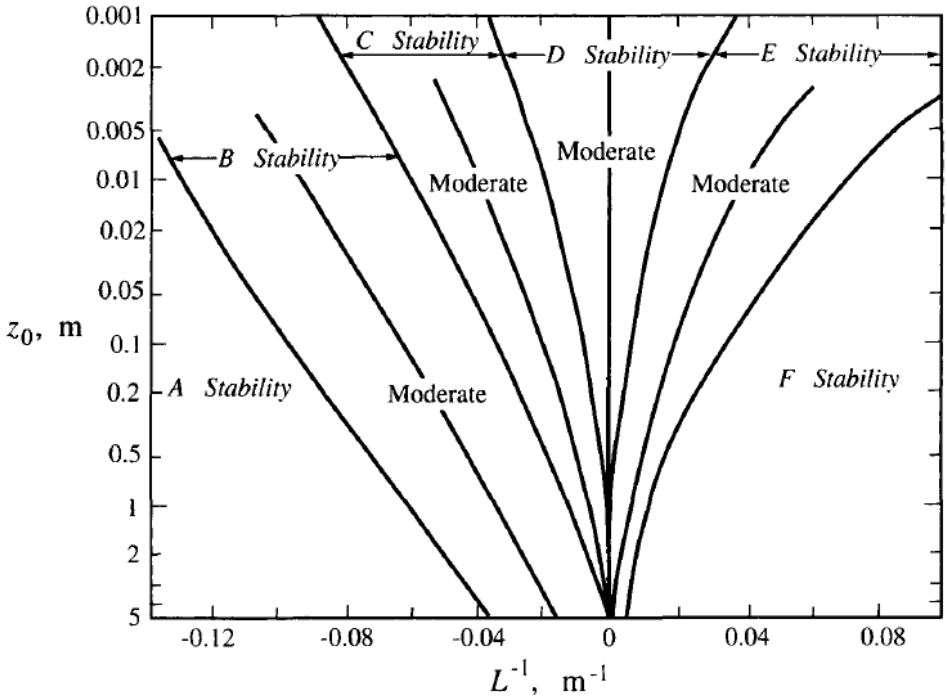


Fig. 7.21: relazione tra Categoria di Stabilità Atmosferica, lunghezza di Monin-Obukhov (L) e rugosità superficiale z_0. (Seinfeld e Pandis, 1998)

Categoria di stabilità Atmosferica	a	b
A	-0.096	0.029
B	-0.037	0.029
C	-0.002	0.018
D	0.	0
E	0.004	-0.018
F	0.035	-0.036

Ta. 7.5: coefficienti per la relazione tra lunghezza di Moni-Obukhov e Categoria di Stabilità.

Golder (1972) ha inoltre tentato di ottenere una relazione che consentisse una stima di L a partire dalla conoscenza della Categoria di Stabilità Atmosferica. La relazione ottenuta è la seguente:

$$1/L = a + b \cdot \ln(z_0) \qquad [7.71]$$

dove a e b dipendono dalla Categoria di Stabilità Atmosferica come indicato nella **Tab. 7.5**.

L'ultimo aspetto relativo alla descrizione della turbolenza del *PBL* è la sua estensione verticale. Tutti i modelli di dispersione stazionari (di vecchia e nuova generazione) richiedono la conoscenza di z_i. La determinazione di tale parametro nelle ore diurne si può realizzare senza particolari problemi nel modo seguente:

- con uno dei metodi presentati al Cap. 15 si stima l'evoluzione oraria di u_* e H_0,
- riferendoci a quanto riportato nel Cap. 8, si può stimare z_i o col metodo termodinamico o con il metodo di Gryning-Batchvarova.

Per quanto riguarda l'altezza del *PBL* stabile, sempre nel Cap. 8 sono state riportate correlazioni utili per una sua stima, una volta noto u_* e H_0.

A conclusione, va detto che la realisticità delle simulazioni operate da un modello di dispersione degli inquinanti in aria (anche se di tipo stazionario) è fortemente legata alla realisticità della descrizione della turbolenza del *PBL*. Non è quindi sorprendente che quando in un modello stazionario si eliminano le Categorie di Stabilità Atmosferica e si introduce una descrizione della turbolenza del *PBL* basata su u_* e H_0 la realisticità della simulazione aumenti drasticamente.

7.3.2 IL PROFILO VERTICALE DEL VENTO E DELLA TEMPERATURA

Tutti i modelli stazionari di nuova e vecchia generazione hanno bisogno di un profilo verticale di velocità media del vento. In particolare, nei vecchi modelli stazionari era consuetudine adottare un profilo verticale della velocità media del vento descritto da una relazione del tipo:

$$u(z) = u_r \cdot \left(\frac{z}{z_r}\right)^p \qquad [7.72]$$

dove z_r è la quota di misura normalmente pari a 10 metri ed il coefficiente *p* dipendeva dalla categoria di Stabilità Atmosferica e dal tipo di suolo (classificato solo come rurale o urbano), come indicato nella **Tab. 7.6** (Hanna e al., 1982).

Categoria di Stabilità Atmosferica	**p**	
	zone rurali	*zone urbane*
A	0.07	0.15
B	0.07	0.15
C	0.10	0.20
D	0.15	0.25
E	0.35	0.40
F	0.55	0.60

Tab. 7.6: parametro della relazione di potenza per il profilo verticale della velocità del vento

In Irwin (1979) è presentato un tentativo per tener conto in maniera un poco più realistica dell'effetto operato dalla rugosità superficiale. Tuttavia, ai lettori non sarà certamente sfuggito quanto sia anacronistico l'impiego di questa relazione di potenza, quando il principale risultato della Teoria di Similarità di Monin-Obukhov è proprio la determinazione del profilo verticale della velocità del vento in funzione del livello di turbolenza del *PBL* e della rugosità superficiale, per la cui formulazione si rimanda al Cap. 8.

Nei modelli stazionari di nuova generazione sono impiegate a questo proposito due tipi differenti di strategie. La prima consiste nell'impiegare direttamente la Relazione di Similarità per il *SL*, con l'ovvia controindicazione che il modello potrebbe estrapolarla anche a quote superiori all'estensione massima del *SL*. La seconda invece richiede all'utente ad ogni periodo di mediazione il profilo verticale della velocità del vento. In questo caso l'utente, a seconda dell'altezza delle sorgenti considerate nella simulazione, potrà decidere se impiegare la relazione di Similarità valida per il *SL* (caso con sorgenti basse) o quella valida per l'intero *PBL* (sorgenti alte).

Per quanto riguarda la direzione del vento, tutti i modelli di nuova e vecchia generazione concordano nel considerare come direzione di provenienza caratteristica per la simulazione, quella misurata dalla stazione meteorologica (normalmente a 10 metri) senza apporre correzioni funzione della quota.

Per quanto riguarda la temperatura dell'aria, tutti i modelli concordano nel considerare come rappresentativa la sola misura realizzata nei pressi del suolo.

PROBLEMI

P07.01 Si ipotizzi che tra il sistema di riferimento cartesiano ortogonale (x,y,z) ed un nuovo sistema di riferimento (ξ,η,ζ) sussistano le relazioni (H è costante ed è l'estensione superiore del dominio di calcolo):

$$\xi = x$$
$$\eta = y$$
$$\zeta = H \cdot \frac{z - h(x,y)}{H - h(x,y)}$$

Mostrare come le derivate seguenti:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}$$

si trasformano nel sistema di coordinate (ξ,η,ζ).

P07.02 Consideriamo la funzione $f(x) = x^3+2x^2$. Calcolare la derivata prima analiticamente e valutare quanto vale nel punto $x = 2$. Approssimare poi questa derivata con schemi *upward*, *forward* e *centrato* ed utilizzare $\Delta x = 0.1$, 0.05 e 0.025. Verificare l'ordine di approssimazione.

P07.03 Scrivere un programma di calcolo per risolvere un problema di avvezione pura impiegando il metodo *donor-cell.*

P07.04 Scrivere un programma di calcolo per risolvere un problema di avvezione pura impiegando il metodo implicito di Crank-Nicolson.

P07.05 Scrivere un programma di calcolo per risolvere un problema di avvezione e di diffusione impiegando lo schema esplicito *donor-cell* per l'avvezione, lo schema semi-implicito di Crank-Nicolson per la diffusione e l'operatore di time splitting.

P07.06: Dimostrare la validità della relazione (7.37c).

P07.07: Dimostrare la validità della relazione (7.38b).

P07.08 Si consideri un volume di controllo di forma cubica con spigoli paralleli agli assi coordinati e lunghi 20 m. Sulla faccia W l'aria possiede una temperatura di 20°C e il vento sia $u_W = 10$ m s^{-1}. Sulla faccia E la temperatura è 18°C e $u_E = 10$ m s^{-1}. Calcolare il termine avvettivo.

P07.09 Consideriamo una strada rettilinea larga 25 metri ed orientata nella direzione W-E. A metà di essa si apre una diramazione ad angolo retto rivolta verso S, larga 8 metri. Tutti i tratti stradali siano fiancheggiati da edifici molto alti in modo da confinare l'aria all'interno della strada. Se l'aria fluisce lungo la strada da W a E e la sua velocità è di 20 ms^{-1} prima della diramazione e 19 ms^{-1} dopo, che velocità ha l'aria entro la diramazione? (Suggerimento: assumere che il moto dell'aria sia bidimensionale).

P07.10 Si consideri una situazione in cui la velocità media del vento è pari a 2.5 m/s, la radiazione solare globale è pari a 690. W/m^2 e la Radiazione netta è pari a 300 W/m^2. Con quale Classe di Stabilità Atmosferica può essere classificata questa situazione?

P07.11 Si consideri un sito caratterizzato da una lunghezza di rugosità z_0 pari a 0.5 m. Se la categoria di stabilità atmosferica è B, calcolare con la relazione di Golder la lunghezza di Monin-Obukhov. Rifare lo stesso calcolo se la classe di stabilità è F.

P07.12 Si consideri un sito caratterizzato da una lunghezza di rugosità $z_0 = 0.3$ m ed una situazione meteorologica in cui la velocità media del vento è di 3 m/s e la Classe di stabilità è B. Dalla Teoria della Similarità si ha che il vento alla quota z (es. $z = 10$ m) è dato dalla relazione:

$$U(z) = \frac{u_*}{k}\left[\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) - \Psi_m\left(\frac{z}{L}\right)\right]$$

Se la costante di von Karman k vale 0.4 e la Funzione di Similarità è data dalla relazione:

$$\Psi_m = \left(1 - 15\frac{z}{L}\right)^{1/4} - 1$$

Quanto vale la *friction velocity* u_*?

P07.13 Se si riscontra un gradiente di pressione di 10 mbar in direzione Est lungo una distanza di 500 km, determinare il vento geostrofico posto che la densità dell'aria sia pari a 1.2 $kg \cdot m^{-3}$ e f = 10^{-4} s^{-1}.

P07.14 Se si utilizza la coordinata *terrain-following* espressa dalla (7.52a) dimostrare che le equazioni di Eulero-Lagrange sono effettivamente date dalle relazioni (7.52d) e l'equazione di Poisson per il moltiplicatore λ è data dalla (7.53).

P07.15 Se la coordinata *terrain-following* è pari a $\sigma = z - h(x, y)$ dove h è la quota orografica, mostrare come si trasformano le equazioni di Eulero-Lagrange e la relativa equazione di Poisson per λ.

8. IL PBL IN CONDIZIONI ORIZZONTALI OMOGENEE

Abbiamo introdotto e sviluppato il modello fluidodinamico dell'atmosfera per le variabili meteorologiche istantanee senza fare particolari ipotesi sulle caratteristiche specifiche del *PBL* e questo modello è quindi del tutto generale e si applica ad ogni sistema fisico gassoso che presenti le stesse caratteristiche geometriche e termodinamiche dell'atmosfera. Tuttavia, pur essendo uno strumento del tutto generale, come si è visto è praticamente inutilizzabile a causa della turbolenza che caratterizza il moto dell'aria nella parte bassa della Troposfera. Questo modello non richiederebbe particolari dati sperimentali per la sua applicazione (se fosse applicabile): in pratica richiederebbe solo la conoscenza dell'accelerazione di gravità e delle caratteristiche del fluido (densità, viscosità dinamica, diffusività termica, ecc.). Quindi, le misure (in campo o in laboratorio) potrebbero essere impiegate solo per verificare la bontà del modello quando ricostruisce le situazioni reali. L'introduzione dell'ipotesi di Reynolds ha condotto, invece, ad un nuovo modello fluidodinamico, questa volta basato sui principali momenti statistici delle variabili meteorologiche (valori medi, varianze, covarianze, ecc.) e qui le cose sono profondamente cambiate. Infatti, questo modello (ancora costituito da un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali e formalmente molto simile al precedente) non è più chiuso e per la sua chiusura è necessario *parametrizzare* i momenti che non vengono trattati esplicitamente. Questo processo di parametrizzazione implica necessariamente il dover introdurre *relazioni semiempiriche* basate prevalentemente sulle osservazioni sperimentali. Quindi ora le misure non giocano più il ruolo di semplice verifica della bontà del modello ipotizzato per il sistema fisico *PBL*, ma rivestono anche il ruolo di fonte di conoscenza privilegiata per ottenere leggi empiriche necessarie alla modellizzazione del *PBL*. E questa è la storia dell'ultimo secolo di ricerca meteorologica!

La realizzazione di misure (sia in laboratorio che in campo) ha posto vari problemi e ha evidenziato particolari del *PBL* non facilmente apprezzabili analizzando solo *aride* equazioni differenziali alle derivate parziali ed una sintesi di tutto ciò è stata presentata al Cap. 1, dove abbiamo introdotto la fenomenologia tipica di questa parte bassa della Troposfera. Innanzitutto, la realizzazione di misure ha mostrato come misurare la turbolenza sia un'impresa piuttosto difficile e delicata, soprattutto perché ciò richiede una strumentazione decisamente sofisticata, caratterizzata non solo da elevata accuratezza ma anche da elevatissima velocità di risposta. Oltre a ciò, si è dovuto fare i conti con il concetto stesso di misura e con il significato che le misure hanno. Tratteremo estesamente questo affascinante tema nei Capitoli 10÷15; basti solo ricordare ora che ciò che misuriamo non è necessariamente la variabile che vorremmo misurare, ma piuttosto la risposta dinamica che un apparato fisico (l'analizzatore) presenta quando interagisce con la variabile in questione. È un tema affascinante che, *mutatis mutandis*, ci fa ricordare il problema della misura nella Meccanica Quantistica ed in particolare il Principio di Indeterminazione di Heisenberg. Agli apparati di misura, al concetto di misura ed alle elaborazioni delle misure dedicheremo vasto spazio nel seguito. Qui ipotizzeremo solo che le misure siano sempre possibili e che siano adeguate a determinare i vari momenti di interesse (valori medi, varianze, momenti di ordine superiore, funzioni di struttura e spettri). Va ricordato poi che il tempo di mediazione che si adotta per la stima dei momenti di interesse è fondamentale e la sua scelta non è semplice. Infatti, vedremo come l'incertezza nella sua determinazione sia proprio la causa principale delle difficoltà che si incontrano nel descrivere le situazioni stabili.

Se, come abbiamo ipotizzato, misurare in atmosfera è possibile, il problema ora è dove misurare e cosa fare della massa enorme di misure che sono state raccolte. Questo non è un

problema banale! In primo luogo, dove misurare. A priori non ci sono limitazioni, visto che siamo interessati a tutti gli aspetti del *PBL*; tuttavia, una misura indiscriminata senza obiettivi può condurre ad un insieme di informazioni del tutto inutilizzabile. Storicamente, nelle campagne sperimentali che hanno accompagnato l'intero sviluppo della Micrometeorologia, si è seguito un percorso logico ben preciso. In primo luogo, ci si è dedicati allo studio del *PBL* in situazioni poco complesse e solo successivamente, forti delle conoscenze acquisite, ci si è spinti ad indagare situazioni sempre più complesse. In pratica, il punto di partenza storico (ed anche logico) dello studio sperimentale del *PBL* ha avuto come scenario di riferimento la parte bassa dell'atmosfera sovrastante un suolo regolare e piatto. Solo successivamente ci si è spinti allo studio del *PBL* sopra un suolo su cui era presente la vegetazione (colture di tipi diversi, alberi, foreste, ecc.), sopra le superfici marine, sopra un terreno ad orografia complessa e sopra le città. In questo Capitolo studieremo la prima delle situazioni elencate che costituisce una sorta di *paradigma* cui si farà sempre riferimento, mentre le situazioni di maggior complessità le tratteremo sinteticamente nel Capitolo successivo.

Per essere più precisi, il sistema fisico di riferimento, che consideriamo come *situazione ideale paradigmatica*, è quello di un *PBL* che evolve sopra un terreno:

- che è totalmente piatto,
- che non è coperto da vegetazione elevata (soprattutto arborea),
- che è strettamente continentale (è quindi lontano dall'influenza del mare o di altri specchi d'acqua di dimensioni significative),
- che è estremamente omogeneo (la copertura vegetale, se esiste, e la sua struttura morfologica sono sostanzialmente costanti per grandi estensioni orizzontali).

Ciò semplifica di molto le equazioni che descrivono le tre componenti medie del moto ed il valor medio della temperatura e dell'umidità che in questo caso si riducono alla forma seguente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= -f\left(V_g - V\right) - \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z}\\ \frac{\partial V}{\partial t} &= +f\left(U_g - U\right) - \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z}\\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= -\frac{\partial \overline{w\theta}}{\partial z} + S_\Theta\\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= -\frac{\partial \overline{wq}}{\partial z} + S_Q\end{aligned} \qquad [8.1]$$

in cui, per semplicità di scrittura, le variabili meteorologiche medie sono state indicate con lettere maiuscole mentre le relative fluttuazioni con le rispettive lettere minuscole. Inoltre, quando parliamo di temperatura potenziale (valor medio o fluttuazione), in realtà intendiamo la temperatura potenziale virtuale e perciò il flusso di calore sensibile H_0 sarà sempre la covarianza tra la componente verticale del vento e la temperatura potenziale virtuale, moltiplicata per il prodotto del calore specifico e della densità dell'aria. Questa convenzione verrà utilizzata nell'intero Capitolo. Con un'opportuna chiusura, il sistema precedente può essere integrato (in generale numericamente) ottenendo i profili verticali delle diverse variabili medie. Quanto sarebbe, però, più comodo avere a disposizione relazioni analitiche che descrivano tali profili! Le situazioni paradigmatiche che studieremo, oltre ad essere caratterizzate da una sostanziale omogeneità orizzontale, sono anche quelle in cui le condizioni meteorologiche non risultano perturbate: in pratica considereremo situazioni di cielo non molto nuvoloso in cui siano assenti fenomeni meteorologici violenti e rapidi, come temporali, tempeste, piogge, ecc. *Sic rebus stantibus*, l'evoluzione del *PBL* è prevalentemente pilotata, nelle ore diurne, dal ciclo solare e nelle ore notturne dal raffreddamento radiativo della superficie terrestre ed è quindi *abbastanza lenta* da poter essere considerata come

una *successione di situazioni quasi-stazionarie*. Tutte queste limitazioni, a prima vista, parrebbero eccessive, ma se ci si pensa bene, esse altro non sono che la descrizione di vaste zone continentali pianeggianti (come le vaste praterie americane o le zone desertiche australiane o il vasto *plateau* antartico) analizzate in condizioni meteorologiche non perturbate. In realtà, le zone con caratteristiche simili sono molto più numerose di quanto si possa pensare. Questo è l'ambito fisico in cui ci muoveremo in questo Capitolo.

Va poi sottolineato che ipotizzare sempre possibili le misure in atmosfera è vero solo a metà. È certamente possibile misurare nei pressi del suolo, ma è ancora molto complicato o difficile misurare in quota (almeno con la tecnologia attualmente disponibile) e praticamente tutte le misure sono di tipo Euleriano. Quando non è possibile misurare o quando si vuole capire come e dove misurare, risultano preziose altre tecniche. La prima è il ricorso ad esperimenti di laboratorio in cui si simulano con accuratezza le condizioni del *PBL* nelle situazioni desiderate e la seconda è il ricorso a modellizzazioni numeriche ad altissima risoluzione, in pratica i modelli *DNS* e *LES* che ad oggi costituiscono una sorta di laboratorio numerico cui spesso si ricorre, soprattutto quando si è interessati alle caratteristiche Lagrangiane del *PBL*.

Una volta stabilito quale debba essere l'ambito spaziale cui far riferimento, è importante affrontare il problema di come *organizzare* la massa (spesso enorme) di dati sperimentali che si ottengono da una campagna sperimentale. Ribadiamo che ciò non è una banalità se si vuole giungere a relazioni semiempiriche di uso pratico. Fortunatamente, per questo è disponibile un potente (e semplice) strumento matematico noto come *Analisi di Similarità* ampiamente impiegato in Termodinamica ed in Idraulica, che è stato usato come strumento di lavoro privilegiato nell'osservazione del *PBL*. Presi dall'entusiasmo dovuto ai successi conseguiti da questo semplice strumento operativo, ad un certo punto ci si è illusi che tutta la complessità del *PBL* potesse essere descritta da un ridotto insieme di equazioni puramente algebriche relative al profilo verticale dei principali momenti delle variabili meteorologiche di interesse e che il modello fluidodinamico del *PBL* potesse essere messo allegramente in soffitta. Illusione pericolosa! Non ci è voluto molto a rendersi conto che le cose non stavano proprio così: il modello fluidodinamico è e resta sempre lo strumento principe di analisi della parte bassa dell'atmosfera, anche se le relazioni di Similarità ne costituiscono un utile complemento, soprattutto per far emergere dall'aridità delle relazioni differenziali le peculiarità della complessa struttura del *PBL* convettivo e del *PBL* stabile (soprattutto notturno). Seguendo questa strada, poi, le varie equazioni della fluidodinamica sono state *specializzate* per questi tipi di regimi del *PBL* e per i vari strati che in esso sono stati individuati.

Lo sviluppo di questo Capitolo (che è piuttosto lungo, abbiate pazienza!) vuol essere lineare ed omnicomprensivo. Dopo aver sintetizzato nuovamente le principali caratteristiche fenomenologiche del *PBL* nelle condizioni paradigmatiche di riferimento in modo da avere presente sin da subito le peculiarità delle situazioni convettive e delle situazioni stabili, inizieremo introducendo lo strumento operativo principe per l'analisi delle caratteristiche del *PBL*, cioè l'Analisi di Similarità, evidenziandone la definizione matematica e le regole applicative.

Subito dopo tratteremo il *PBL* nelle situazioni convettive e stabili evidenziandone le peculiarità. Come sappiamo, il *PBL* non è un'entità monolitica, ma in esso coesistono strati a caratteristiche differenti e per questo dedicheremo molta attenzione alle peculiarità di ciascuno di essi. L'obiettivo principale è quello di evidenziare la maggior parte delle caratteristiche salienti di ciascuna stratificazione atmosferica cercando, quando possibile, di giungere a delle relazioni diagnostiche (e possibilmente algebriche) che descrivano quantitativamente i profili verticali delle principali grandezze di interesse. L'attenzione ai profili verticali nasce dall'omogeneità orizzontale che caratterizza la situazione paradigmatica considerata. Nello sviluppare tutti questi temi, cercheremo quando possibile di *specializzare* le varie equazioni della Fluidodinamica non solo alla situazione paradigmatica che stiamo considerando (quasi-stazionarietà, omogeneità orizzontale, ecc.), ma anche ai diversi regimi di turbolenza (convettività, stabilità) ed alle diverse stratificazioni atmosferiche, cercando anche di evidenziarne le potenzialità applicative.

8.1 LA FENOMENOLOGIA DELLA SITUAZIONE PARADIGMATICA

La struttura tipica del *PBL*, come già mostrato al Cap. 1, è complessa e muta continuamente nello spazio e nel tempo. Il suo moto è governato dalla rotazione terrestre, dai gradienti orizzontali di pressione e dalla loro variabilità con la quota (*baroclinicità*), dalla struttura termica spaziale (descritta dalla distribuzione verticale della temperatura potenziale virtuale), dall'intensità della turbolenza a piccola scala, dalla presenza delle nuvole, dalle influenze topografiche, dalla rugosità e dall'eterogeneità della superficie terrestre. Se, però, ci limitiamo a considerare la situazione paradigmatica che costituisce una sorta di riferimento anche per le situazioni più complesse, possiamo eliminare (almeno per il momento) molte di queste complessità, considerando un moto idealizzato, sostanzialmente stazionario, stratificato in maniera adiabatica ed orizzontalmente omogeneo sopra una superficie uniformemente rugosa. Inoltre, possiamo anche ipotizzare che i gradienti orizzontali di pressione siano uniformi con la quota (in sostanza un moto barotropico) e che le nuvole siano assenti. Per semplicità, possiamo anche restringere la nostra discussione alle sole zone non equatoriali (con latitudine, in modulo, superiore ai 5°) dove l'accelerazione di Coriolis risulta significativa. La stratificazione adiabatica in tutto il *PBL* implica l'assenza al livello del suolo del flusso turbolento di calore sensibile H_0 (che è quindi nullo) e perciò l'assenza di ogni fenomeno convettivo. In queste situazioni si ha che le forze di Coriolis e le forze originate dai gradienti orizzontali di pressione tendono a bilanciarsi reciprocamente anche se l'attrito alla superficie che si propaga verticalmente tende ad alterare questo bilancio. Inoltre, l'attrito alla superficie, sempre presente in un fluido Newtoniano in moto sopra una superficie rugosa, è la fonte della turbolenza meccanica strutturata in vortici di piccole dimensioni che domina il moto del *PBL*. Per quanto abbiamo visto in precedenza, in una situazione di questo tipo (situazione adiabatica) $H_0 = 0$, $u_* > 0$ e la lunghezza di Monin-Obukhov L tende all'infinito.

Una situazione adiabatica come quella idealizzata è rara in atmosfera, soprattutto se quasi stazionaria. Nella realtà assistiamo ad un ciclo giornaliero che altera progressivamente e sistematicamente questa situazione ideale e che porta all'instaurarsi, durante le ore diurne, di situazioni *convettive* e, durante le ore notturne, di situazioni *stabili*. La variabile che ci guida a distinguere queste due situazioni caratteristiche, che rappresentano altrettante *perturbazioni* rispetto alla situazione adiabatica, è proprio il flusso turbolento di calore sensibile H_0 e, di conseguenza, la lunghezza di Monin-Obukhov L. Qui di seguito riassumiamo le caratteristiche salienti di un *PBL* convettivo e di un *PBL* stabile in modo da poter tenere queste due descrizioni fenomenologiche sempre ben presenti durante lo sviluppo degli argomenti che presenteremo.

8.1.1 LE SITUAZIONI CONVETTIVE

La prima classe di situazioni tipiche è quella delle situazioni convettive che si hanno quando, durante le ore diurne, la radiazione solare, giunta al suolo, viene restituita all'aria del *PBL* dall'interfaccia aria-suolo sotto forma di flusso turbolento di calore sensibile H_0 positivo. In queste situazioni si formano in corrispondenza del suolo degli elementi convettivi (i *thermals*, sostanzialmente delle bolle d'aria calda) alcuni dei quali restano legati alla superficie terrestre, mentre altri se ne distaccano crescendo di dimensione con l'allontanarsi dal suolo. Nella loro ascesa, i *thermals* si fondono tra loro inglobando strutture coerenti di dimensioni inferiori e percorrono l'intera estensione verticale del *PBL*. Questo moto verticale dei *thermals*, traslato orizzontalmente dal moto medio delle masse d'aria, fa sì che nel cuore del *PBL* venga a stabilirsi una circolazione di grandi vortici turbolenti ben descritta dalla **Fig. 8.1**. A causa della presenza e dell'evoluzione di queste strutture coerenti, viene ad instaurarsi nel *PBL* convettivo una stratificazione termica caratteristica (**Fig. 8.2**) dove risulta evidente la presenza di tre distinti strati verticali sovrapposti: lo strato superficiale *SL*, lo strato rimescolato *ML* e lo strato di entrainment *EL* (detto anche Interfacial Layer). A queste tre stratificazioni ne va aggiunta un'altra, immediatamente a contatto col

suolo, che, in assenza di vegetazione elevata, ha uno spessore normalmente inferiore al metro. In essa la struttura del moto è estremamente complessa e totalmente dipendente dalla natura e dalla geometria degli *ostacoli* presenti sul suolo, ma in essa ha luogo effettivamente il trasferimento per conduzione di energia termica tra suolo ed atmosfera. Di questo strato tratteremo nel seguito e per il momento lo ignoriamo.

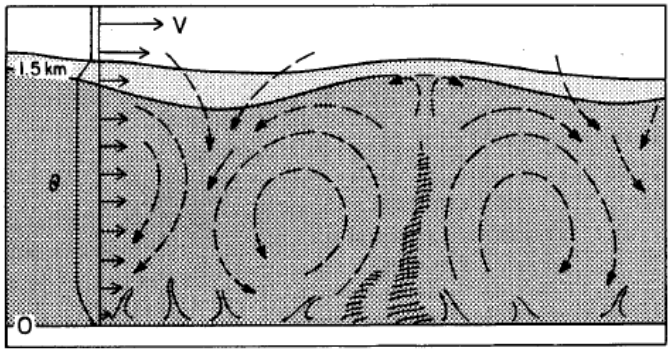


Fig. 8.1: le strutture coerenti entro un PBL convettivo (Wyngaard 1990)

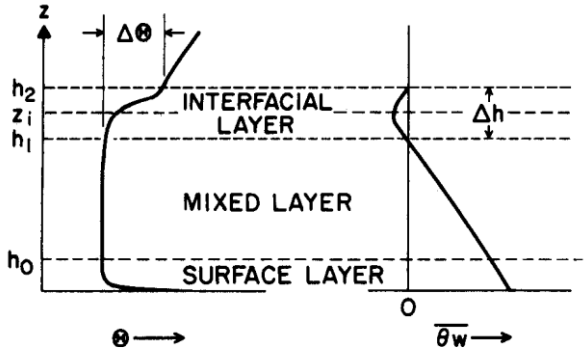


Fig. 8.2: le stratificazioni termiche in un PBL convettivo (Wyngaard 1988)

Lo *strato superficiale SL* è la stratificazione termica più vicina al suolo. Anche se di limitata estensione (dell'ordine del 10% dell'intera estensione verticale del *PBL*), nel *SL* sono concentrati i gradienti verticali delle principali variabili medie (le componenti orizzontali del moto *U* e *V*, la temperatura potenziale virtuale Θ e l'umidità *Q*) causati dalla presenza all'interfaccia aria-suolo di un flusso di calore turbolento H_0 positivo, di un flusso turbolento di calore latente H_E e di un flusso di quantità di moto quantificato dal valore della *friction velocity* u_*, flussi che possiamo considerare sostanzialmente invarianti con la quota. Questi flussi turbolenti si propagano verso l'alto entro lo *strato rimescolato ML* in maniera sostanzialmente lineare, annullandosi alla sommità del *PBL*, e le strutture coerenti di grandi dimensioni che spazzano tutto il *ML* fanno sì che il profilo verticale delle principali variabili meteorologiche medie (le componenti orizzontali del moto e la temperatura potenziale virtuale) sia sostanzialmente a gradiente nullo. Alla sommità del *PBL* è localizzato lo *strato di entrainment EL* caratterizzato da un marcato gradiente positivo di temperatura potenziale media e da un evidente ed elevato *shear* del vento. È proprio in questo strato, che confina con l'atmosfera libera, che si esaurisce la spinta ascensionale dei *thermals.* Essi, infatti, giunti in prossimità della base di questo strato, abbandonano il proprio moto verticale che li caratterizzava nel *ML* per convertirlo in fluttuazioni orizzontali di velocità. Si ha quindi che due strati d'aria a diversa densità scorrono uno sull'altro e ciò induce un'inevitabile instabilità del moto. Inizialmente si sovrapporrà al moto di traslazione originario un'onda che si propaga nella direzione del moto e che cresce in ampiezza fino ad *arrotolarsi* su sé stessa formando tipiche strutture ad *occhi di gatto*. Queste, in breve, sono le onde di Kelvin-Helmholtz. Nella **Fig. 8.3a** viene schematicamente illustrato il loro meccanismo di formazione che spesso le nuvole rendono visibili, come si vede nella **Fig. 8.3b**. Proprio a causa delle onde di Kelvin- Helmholtz, l'aria

dell'atmosfera libera immediatamente a contatto con la sommità di questo strato si mischia con l'aria della parte superiore del *ML*. Questo processo prende il nome di *entrainment* ed è la causa della crescita verticale del *PBL* convettivo durante le ore diurne. Sopra troviamo l'atmosfera libera in sostanziale equilibrio geostrofico.

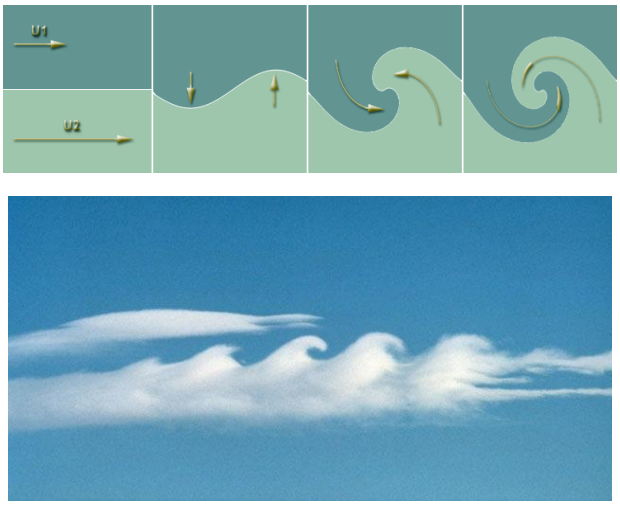


Fig. 8.3: le onde di Kelvin- Helmholtz. Nella parte (a) (superiore) viene schematizzato il meccanismo della loro formazione (www.brockmann-consult.de) e nella parte (b) (inferiore) la loro visualizzazione nelle nubi (www. ap.smu.ca)

Riassumendo, un *PBL* convettivo possiede una struttura a grandi vortici simile a quanto riportato nella **Fig. 8.1** ed una stratificazione termica a tre strati come indicato nella **Fig. 8.2**. I parametri caratteristici principali sono la *friction velocity* u_* (sempre positiva) che quantifica la turbolenza di origine meccanica prodotta dal movimento medio delle masse d'aria, il flusso turbolento di calore sensibile H_0 (non negativo) che causa la circolazione dei grandi vortici turbolenti e quindi la turbolenza convettiva e z_i che rappresenta l'estensione verticale della struttura a tre strati. La lunghezza di Monin-Obukhov *L*, vista la sua definizione, non potrà che assumere valori negativi e a questi parametri, per tener conto della circolazione dei grandi vortici convettivi, viene ad aggiungersi la *velocità convettiva di scala* w_* la cui definizione, come detto, è:

$$w_* = \left(\frac{g}{\Theta}\overline{w'\theta_v'}z_i\right)^{1/3} \qquad [8.2]$$

e che rappresenta sostanzialmente la velocità media ascensionale dei *thermals* entro il *ML*.

8.1.2 LE SITUAZIONI STABILI

Durante le ore notturne o comunque in tutte quelle situazioni in cui H_0 è negativo, la superficie terrestre si raffredda irradiando calore e ciò determina un flusso di calore turbolento verso la superficie più fredda proveniente dall'aria sovrastante. Anche in questo caso il flusso effettivo di calore avviene per conduzione termica entro un piccolo strato di aria a diretto contatto col suolo e di spessore, normalmente, dell'ordine di pochi millimetri. Il fatto che il flusso di calore turbolento sia diretto verso il basso comporta che sia necessario avere a disposizione dell'energia per spingere dell'aria calda verso il basso e per sollevare dell'aria fredda verso l'alto e ciò avviene a spese dell'energia cinetica turbolenta che si converte in energia potenziale. Tutto ciò, di fatto, distrugge la turbolenza presente nel *PBL*. Inevitabilmente, quindi, la turbolenza sarà caratterizzata da vortici di piccole dimensioni, di origine totalmente meccanica come evidenziato nella **Fig. 8.4**. Inoltre, il profilo verticale di temperatura potenziale non potrà che avere un gradiente fortemente positivo in progressiva diminuzione con la quota. Il fatto che l'atmosfera possieda un gradiente

di temperatura positivo costituisce una condizione ideale perché in essa si instaurino dei fenomeni ondosi che possono coinvolgere l'intero *PBL*, come abbiamo visto al Cap. 1.

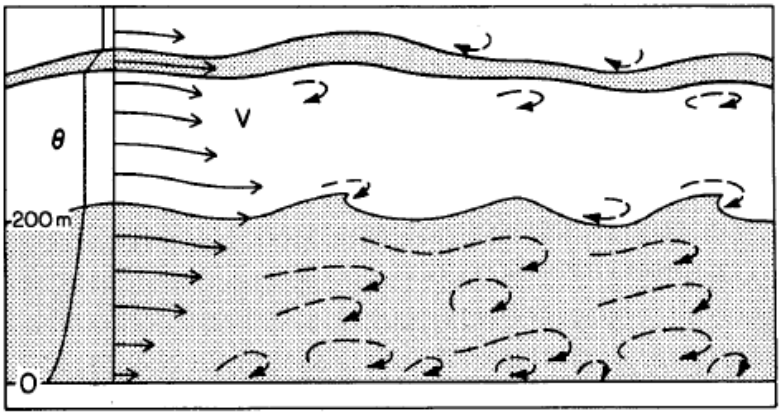


Fig. 8.4: la turbolenza in un PBL stabile (Wyngaard 1990)

Nel *PBL* stabile, così come nel *PBL* convettivo, si possono individuare alcune stratificazioni tipiche, anche se esse risultano ora molto meno evidenti. Al di là dello straterello d'aria di pochi millimetri immediatamente adiacente al suolo in cui dominano gli effetti derivanti dagli scambi molecolari e dall'interferenza della geometria degli ostacoli posti al suolo, anche in questo caso è individuabile uno strato superficiale *SL* ed uno strato *esterno*, che comprende la parte restante del *PBL* ed in cui l'aria del *PBL* velocemente si adatta allo stato dell'atmosfera libera. Inoltre, mentre l'estensione massima verticale di un *PBL* convettivo è dell'ordine 10^3 metri, un tipico *PBL* stabile ha un'estensione verticale massima dell'ordine delle decine di metri.

Il principale parametro che caratterizza la turbolenza di un *PBL* stabile è ancora una volta il flusso turbolento di calore sensibile H_0, sempre negativo. Dato che la *friction velocity* u_* è sempre positiva, anche la lunghezza di Monin-Obukhov L non potrà che restare sempre positiva. I numeri di Richardson (flusso e gradiente), almeno matematicamente, altro non sono che una combinazione opportuna di flussi e di gradienti presenti entro il *PBL* ed entrambi, come si può facilmente dimostrare, sono sempre positivi. Questo fatto evidenzia ancora una volta come la turbolenza nel *PBL* stabile venga distrutta sistematicamente dalle forze di galleggiamento.

Le recenti misure realizzate nel *PBL* stabile evidenziano una complessità ben più elevata di quanto ci si potrebbe attendere da queste semplici considerazioni e recentemente è risultato evidente come le situazioni stabili possano essere classificate almeno in due grandi classi differenti: quelle *debolmente stabili* e quelle *fortemente stabili*. La difficoltà in questa classificazione sta nel fatto che essa non può essere condotta impiegando come indicatore solo H_0 o L. Infatti, ciò che sembra emergere dall'evidenza sperimentale è che all'aumentare del rapporto di stabilità z/L inizialmente il modulo di H_0 aumenta fino a raggiungere un valore massimo. Questa è la zona di stabilità debole. Al di là di *questo valore di soglia* (ben poco identificabile) la struttura turbolenta del *PBL* cambia drasticamente, diventando locale, spesso intermittente e slegata da ciò che avviene al suolo. Queste sono le situazioni di stabilità elevata ancora oggetto di studio.

Quando siamo in condizioni di stabilità debole, la turbolenza è continua nello spazio e nel tempo e la sua intensità decresce con la quota scomparendo alla sommità del *PBL*. Queste condizioni capitano spesso nelle ore notturne con velocità del vento medio-alta e/o con elevata copertura del cielo. In queste condizioni risulta ancora definibile uno strato superficiale *SL* dove i flussi (di quantità di moto, di calore e di umidità) possono essere considerati sostanzialmente costanti con la quota. Nello strato *esterno* del *PBL* tali flussi diminuiscono velocemente con la quota fin quasi ad annullarsi e le principali variabili medie presentano un profilo verticale con gradiente positivo che le porta al valore tipico dell'atmosfera libera sovrastante. Ciò che emerge analizzando lo stato di un *PBL* debolmente stabile è la continuità e la regolarità degli andamenti delle principali variabili, anche se spesso si nota che a tale continuità e regolarità si vengono a

sovrapporre fenomeni di tipo ondoso indotti dalla stratificazione stabile.

Quando, invece, ci si trova in situazioni di forte stabilità, cosa che accade nelle ore notturne con nuvolosità bassa o assente (quindi con elevatissimo irraggiamento della superficie terrestre) e con vento debole, ciò che emerge chiaramente è l'assenza di un significativo rimescolamento ed un effetto di ciò è il ristagnare presso il suolo dei fumi emessi in prossimità dello stesso. In queste situazioni, un'altra evidenza sperimentale è che la turbolenza è intermittente, cioè si alternano momenti in cui le variabili meteorologiche fluttuano in maniera quasi stocastica (che poi è l'impronta della turbolenza) con momenti in cui tali fluttuazioni scompaiono o diventano non misurabili. Le condizioni di forte stabilità (e quindi di elevato gradiente termico) inducono inevitabilmente significativi fenomeni ondosi ulteriormente amplificati dalla presenza di irregolarità orografiche e l'estensione verticale del *PBL*, in presenza di tanti fenomeni diversi, non risulta facilmente definibile ed individuabile. Un'altra evidenza sorprendente che è emersa dalle misure realizzate in situazioni fortemente stabili è che il *PBL* presenterebbe spesso una struttura *capovolta* (*upside-down*) in aperta contraddizione con ciò che si riscontra nel *PBL* convettivo ed adiabatico. In una struttura capovolta, infatti, la sorgente principale di turbolenza è *staccata* dalla superficie ed è posta in quota. Un suo possibile modello concettuale potrebbe essere il seguente. Nei pressi dell'interfaccia aria-suolo la turbolenza nelle situazioni altamente stabili collassa fin quasi a scomparire, mentre sopravvive decadendo a quote superiori. Si ha quindi che la turbolenza risulta *staccata* dal suolo, almeno temporaneamente. Alle quote superiori (che comunque sono dell'ordine della decina di metri) il moto disaccoppiato dagli *stress turbolenti* accelera generando un *low-level jet*. Ma lo *shear* ad esso associato può indurre della turbolenza che *esplode* (*burst-downward*) verso la superficie ricostituendo l'accoppiamento tra strati superiori del *PBL* e la superficie e costituendo, quindi, un'ulteriore causa dell'intermittenza della turbolenza osservata al suolo. Così, i concetti di *PBL* capovolto e di trasporto verso il basso di energia cinetica turbolenta potrebbero tutti essere collegati tra loro. Tuttavia, ad oggi, non è ancora emerso un quadro teorico convincente in grado di spiegare tutta la complessità di un *PBL* stabile, anche per le difficoltà incontrate nel realizzare misure affidabili in tali situazioni.

8.2 L'ANALISI DI SIMILARITÀ

Le osservazioni sperimentali delle grandezze meteorologiche che descrivono il *PBL* mostrano spesso caratteristiche ripetibili, cosa che suggerisce la possibilità di sviluppare relazioni semiempiriche, sostanzialmente di tipo diagnostico. Questa possibilità è ovviamente preziosa, vista la necessità di individuare relazioni semiempiriche per i differenti tipi di chiusura delle equazioni differenziali che costituiscono il modello matematico del *PBL*. Inoltre, se effettivamente fosse possibile individuare delle relazioni diagnostiche di profilo, anche se con limiti di applicabilità abbastanza ristretti rappresentati dal considerare una situazione stazionaria ed omogenea in orizzontale, sarebbe addirittura pensabile definire un modello alternativo per la descrizione della turbolenza del *PBL*, totalmente diagnostico o addirittura totalmente algebrico. Come si vedrà presto, questa ipotesi di lavoro ha avuto un successo insperato, portando alla possibilità di individuare un modello di *PBL* totalmente semiempirico, ma comunque valido, almeno in prima approssimazione, in un grande numero di casi reali. Va subito sottolineato che tutto ciò è vero solo in prima approssimazione, onde evitare inutili e pericolose illusioni, come ha sottolineato con forza J.D. Wilson (2008).

In teoria, l'individuazione di relazioni semiempiriche di tipo diagnostico, relazioni cioè che non descrivono l'evoluzione temporale delle differenti variabili coinvolte ma solo la loro evoluzione spaziale o meglio verticale, vista l'omogeneità della situazione paradigmatica, è realizzabile in infiniti modi e con una grossa dose di soggettività; tuttavia è stata messa a punto una metodologia di indagine rigorosa ed oggettiva, basata sull'*Analisi Dimensionale*, nota come *Teoria della Similarità*. Tale teoria, che si fonda sul *Teorema* Π *(o Teorema di Buckingham)*, consente di organizzare in maniera logica le differenti variabili di interesse e permette anche di definire

procedure sperimentali di verifica. Prima di descrivere i fondamenti teorici di questa tecnica di analisi, è opportuno evidenziarne i *limiti*. Innanzitutto, è necessario sottolineare che l'impiego in questo tipo di analisi del solo *Principio di Congruenza Dimensionale* (che è un principio basilare della Fisica) non ci *garantisce* ovviamente di poter ottenere modelli di Similarità per ogni tipo di variabile che s'intende analizzare. Non è detto quindi che un'Analisi di Similarità conduca sempre a risultati positivi, cioè all'individuazione di una relazione semiempirica, e perciò nell'Analisi di Similarità è sempre insita una buona dose *d'incertezza*. Il metro del suo successo sta nella dispersione dei dati sperimentali attorno alla relazione di Similarità: più essa è contenuta, maggiore è la validità della relazione stessa. Oltre a ciò, visto che le relazioni semiempiriche che si ottengono sono di tipo diagnostico, è abbastanza naturale aspettarsi che questo tipo di analisi sia più adatta ad essere applicata in *situazioni di equilibrio* o al massimo in situazioni *quasi-stazionarie* che è poi l'oggetto della nostra discussione. In sintesi, l'Analisi di Similarità consta di quattro passi operativi successivi:

1. la selezione delle *variabili* che si ritengono rilevanti nella descrizione della situazione di interesse;
2. l'organizzazione di queste variabili in *gruppi adimensionali*;
3. l'esecuzione di esperimenti, o l'analisi dei dati ottenuti in esperimenti già eseguiti, per determinare il valore dei gruppi adimensionali;
4. la determinazione delle relazioni analitiche (mediante i normali metodi di regressione) per descrivere quantitativamente le relazioni tra i diversi gruppi adimensionali.

Tutto l'edificio teorico (che è estremamente ridotto) si basa sul concetto di *Similarità Dinamica*. In breve, due fluidi o due strutture di flusso sono dinamicamente simili se è possibile predire il comportamento di uno dei due conoscendo sperimentalmente le caratteristiche dell'altro. Anche se tutto il costrutto teorico può sembrare a prima vista molto poco fisico, va sottolineato come esso sia nato proprio a supporto degli studi teorici della Fluidodinamica e della turbolenza dei fluidi viscosi ed è stato sviluppato dagli stessi fluidodinamici (Reynolds, Prandtl, ecc.) che hanno contribuito a definirne gli aspetti teorici. In pratica, la procedura sinteticamente descritta tende a far *collassare situazioni ritenute simili in un'unica situazione generalizzata* (quindi *universale*), individuando quali gruppi adimensionali di variabili la definiscono. I dati sperimentali, espressi in termini di gruppi adimensionali, collassano quindi attorno ad una funzione e la loro dispersione residua ne quantifica il grado di Similarità Dinamica. Se fossero state selezionate più variabili del necessario, la procedura di Similarità indicherebbe le variabili irrilevanti nella descrizione del fenomeno, mentre se venissero trascurate delle variabili importanti, la dispersione dei dati sperimentali sarebbe molto elevata.

La chiave teorica ed applicativa dell'Analisi di Similarità è il Teorema di Buckingham introdotto da Edgar Buckingham nel 1914. Va detto che stiamo parlando di un Teorema e non di una regoletta empirica, e come tale possiede una propria dimostrazione che gli interessati possono facilmente trovare (per esempio in `https://arxiv.org/pdf/1912.08744`). In questo paragrafo per prima cosa introduciamo formalmente questo teorema, descrivendo nel dettaglio le sue modalità operative, e successivamente discutiamo un esempio didattico della sua applicazione nell'analisi del profilo verticale della deviazione standard della temperatura potenziale virtuale nel *SL* che assumiamo come paradigma dell'individuazione dei vari profili verticali delle variabili micrometeorologiche.

8.2.1 IL TEOREMA DI BUCKINGHAM (O DEL Π)

Prima di tutto è bene ricordare che ogni variabile fisica può essere sempre espressa in termini dimensionali. Per esempio, se si considera una forza *F* (cioè una massa per un'accelerazione), le sue *dimensioni* (che indichiamo come [F]) sono:

$$[F] = [massa] \cdot [accelerazione] = [massa] \cdot \frac{[Lunghezza]}{[tempo]^2} = M \cdot L \cdot T^{-2}$$

dove con *M* è stata indicata sinteticamente la dimensione *massa*, con *L* la dimensione *lunghezza* e con *T* la dimensione *tempo*.

La condizione necessaria (ma non sufficiente) perché una relazione tra variabili abbia senso fisico è che in essa esista una congruenza dimensionale, cioè che le dimensioni del membro di sinistra siano le stesse del membro di destra. Per sfruttare questa legge di base della Fisica, nel 1914 Buckingham formulò l'omonimo Teorema che può essere espresso formalmente nel modo seguente.

> Si consideri un'equazione fisicamente significativa (cioè che, almeno in teoria, rappresenti matematicamente un processo fisico) e tale equazione sia del tipo:
>
> $$f(q_1, q_2, .., q_n) = 0 \qquad [8.3a]$$
>
> dove con q_i sono indicate *n* generiche variabili fisiche. Si ipotizzi, poi, che tali variabili siano espresse in termini di *k* unità dimensionali (lunghezza, tempo, temperatura, ecc.). È possibile, allora, formare $p = n - k$ parametri (gruppi) adimensionali π_j, $j = 1,\ldots, p$ definiti come:
>
> $$\pi_i = q_1^{m_1} \cdot q_2^{m_2} \cdots q_n^{m_n} \qquad [8.3b]$$
>
> dove gli esponenti m_i sono numeri razionali. Allora la relazione originaria (8.3a) è del tutto equivalente alla relazione seguente:
>
> $$f(\pi_1, \pi_2, .., \pi_p) = 0 \qquad [8.3c]$$
>
> indipendente dalle *n* variabili originarie e dipendente solo dai *p* gruppi adimensionali individuati.

L'enunciato del Teorema non suggerisce immediatamente le sue implicazioni pratiche. Seguendo però Stull (1988) e Brown (1991), riproponiamo il Teorema di Buckingham nella forma a *passi operativi* applicandolo al classico problema del moto di fluidi in condotti

Passo 1

Individuazione delle variabili ritenute rilevanti nella descrizione del fenomeno in esame.

Questo passo, che condiziona l'intera analisi successiva, è il più delicato e richiede un'attenta analisi teorico-sperimentale della situazione esaminata. Un possibile metodo per procedere è, per esempio, l'analisi delle relazioni proposte dalla Fluidodinamica ed attinenti al caso in esame per ottenere da esse l'indicazione di quali variabili siano rilevanti e quali non lo siano. Per esempio, se si considera il problema ingegneristico del moto di fluidi in condotti, le grandezze fisiche da ritenersi rilevanti potrebbero essere:

- lo stress τ esistente nel fluido viscoso
- la densità del fluido ρ
- la viscosità dinamica μ
- la velocità media del fluido *U*
- il diametro della tubazione *D*
- la rugosità della tubazione z_0 (definita come l'altezza media caratteristica delle irregolarità presenti sulla superficie della tubazione).

Passo 2

Individuazione delle dimensioni di ciascuna variabile in termini di dimensioni fondamentali.

Le principali dimensioni coinvolte nei processi fluidodinamici sono la lunghezza (*L*), la massa (*M*), il tempo (*T*) e la temperatura (*K*). La dimensione di una qualsiasi variabile fluidodinamica

considerata deve essere esprimibile in termini di tali dimensioni fondamentali. Nell'esempio del moto dei fluidi in condotti, si ha che:

- ρ densità del fluido $[ML^{-3}]$
- μ viscosità dinamica $[ML^{-1}T^{-1}]$
- U velocità del fluido $[LT^{-1}]$
- τ sforzo di taglio $[ML^{-1}T^{-2}]$
- D diametro della tubazione [L]
- z_0 rugosità della tubazione [L]

Le prime due variabili descrivono le caratteristiche del fluido, le due successive fanno riferimento alle caratteristiche del moto del fluido ed infine le ultime due si riferiscono alle caratteristiche geometriche della tubazione in cui ha luogo il moto del fluido.

Passo 3

***Si contino quante sono le dimensioni fondamentali presenti nelle variabili che descrivono la situazione in esame*.**

Nell'esempio considerato, le dimensioni fondamentali coinvolte sono 3: massa, lunghezza e tempo.

Passo 4

Si individui un sottoinsieme delle variabili presenti che sarà il sottoinsieme delle variabili chiave. Tale sottoinsieme dovrà rispettare le seguenti restrizioni:

1. ***il numero complessivo di variabili chiave deve essere pari al numero di dimensioni fondamentali presenti nel problema;***
2. ***nelle variabili chiave devono essere presenti tutte le dimensioni fondamentali;***
3. ***non deve essere possibile formare gruppi adimensionali combinando tra loro le variabili chiave.***

Nell'esempio, il numero di variabili chiave deve essere 3, visto che tre sono le dimensioni fondamentali coinvolte. Scegliamo ρ, D e U, anche se altre possibilità sono le combinazioni ρ, z_0 e U oppure τ, μ e D. Un insieme non valido è invece la combinazione U, D e z_0, perché il rapporto D/z_0 è un gruppo adimensionale e perché la dimensione fondamentale massa M non risulta più presente. Un altro insieme non valido è τ, ρ e U, perché $\tau/(\rho U^2)$ è un gruppo adimensionale.

Passo 5

Si formino delle equazioni dimensionali per le variabili non chiave, esprimendole in funzione delle variabili chiave. La loro forma funzionale è il prodotto di potenze delle variabili chiave.

Nell'esempio considerato le variabili non chiave sono lo stress τ, la viscosità dinamica μ e la rugosità superficiale z_0. Le equazioni dimensionali che le coinvolgono sono:

$$[\tau] = [\rho]^a\ [D]^b\ [U]^c$$
$$[\mu] = [\rho]^d\ [D]^e\ [U]^f$$
$$[z_0] = [\rho]^g\ [D]^h\ [U]^i$$

Passo 6

***Individuazione del valore degli esponenti incogniti delle equazioni dimensionali*.**

Nell'esempio, se consideriamo la relazione per lo stress τ scritta sopra, vediamo che, esplicitando le varie dimensioni coinvolte, essa si trasforma in:

$$\begin{array}{cccc} [\tau] & [\rho]^a & [D]^b & [U]^c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ML^{-1}T^{-2} = & M^aL^{-3a} & \cdot\ L^b & \cdot\ L^cT^{-c} \end{array}$$

cioè in:

$$ML^{-1}T^{-2} = M^a \cdot L^{-3a+b+c} \cdot T^{-c}$$

da cui risulta immediatamente che:

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 2$$

Analogamente si opera per le relazioni relative a $[\mu]$ e $[z_0]$, ottenendo:

$$d = 1, \quad e = 1, \quad f = 1$$
$$g = 0, \quad h = 1, \quad i = 0$$

Ciò comporta che:

$$[\tau] = [\rho]\ [U]^2$$
$$[\mu] = [\rho]\ [D]\ [U]$$
$$[z_0] = [D]$$

Passo 7

Per ciascuna equazione si divida il membro di sinistra per il membro di destra, ottenendo dei gruppi adimensionali (Π). Il numero di gruppi adimensionali sarà sempre uguale al numero totale di variabili meno il numero di variabili chiave individuate.

Nell'esempio, il numero complessivo di variabili era 6, il numero di variabili chiave era 3 e quindi il numero di gruppi adimensionali sarà 3 ed in particolare:

$$\pi_1 = \frac{\tau}{\rho U^2}, \qquad \pi_2 = \frac{\mu}{\rho U D}, \qquad \pi_3 = \frac{z_0}{D}$$

È interessante notare che nell'esempio siamo partiti con 6 variabili e dopo questi passi di analisi dimensionale abbiamo ridotto i gradi di libertà del problema a solo 3.

Passo 8

Se si desidera, possono essere individuati gruppi adimensionali alternativi a partire da quelli individuati precedentemente ed in loro sostituzione, rispettando però le regole seguenti:

1. ***il numero complessivo di gruppi adimensionali deve rimanere inalterato***
2. ***tutte le variabili chiave devono essere presenti,***
3. ***tutti i nuovi gruppi adimensionali devono essere tra loro indipendenti.***

Nell'esempio considerato, si può sostituire a π_2 e π_3 i gruppi $\pi_4 = \pi_2/\pi_3$ e $\pi_5 = 1/\pi_3$, ottenendo:

$$\pi_1 = \frac{\tau}{\rho U^2}, \qquad \pi_4 = \frac{\mu}{\rho U z_0}, \qquad \pi_5 = \frac{D}{z_0}$$

Questa scelta viene fatta per avere tra i gruppi adimensionali alcuni gruppi *storicamente celebri*; in particolare π_1 altro non è che *il coefficiente di resistenza aerodinamica* (*drag coefficient*) C_D, π_4 è l'inverso del *numero di Reynolds Re* per le tubazioni scabre e π_5 è la *rugosità relativa*.

La procedura di Buckingham termina qui, con l'individuazione dei gruppi adimensionali descrittori. Va però fatta qualche osservazione per comprendere meglio il risultato ottenuto. Se, come nel caso esempio considerato, alla fine dell'Analisi di Similarità sono stati individuati 3 gruppi

adimensionali, il vero risultato è che ci si deve aspettare che esistano delle relazioni semiempiriche che legano tra loro questi gruppi adimensionali e l'indagine sperimentale dovrà effettivamente individuarle in modo semiempirico.

Interessante è comprendere che significa quando si ottiene *un solo rapporto adimensionale* (caso che incontreremo spesso nella Teoria della Similarità di Moni-Obukhov). In questo caso la situazione considerata è *totalmente rappresentata* da questo rapporto adimensionale che si comporterà in pratica come l'unico elemento caratterizzante dello stato fisico del sistema.

L'Analisi di Similarità procede, poi, con un'indagine sperimentale volta ad individuare quantitativamente le relazioni tra i gruppi adimensionali individuati. I risultati di questa indagine, inizialmente espressi in termini grafici, conducono all'individuazione di relazioni analitiche mediante *tecniche di regressione (best fitting)*. Le funzioni matematiche impiegate per il *best fitting* dei dati sperimentali possono essere scelte in base a considerazioni di praticità oppure rispettando forme funzionali suggerite da eventuali relazioni teoriche note per il problema in esame. L'operazione di *best fitting* (si veda Bard (1974) per una introduzione ai metodi numerici di *fitting*) porta, oltre che all'individuazione dei coefficienti presenti nelle relazioni analitiche, anche alla valutazione del *coefficiente di correlazione* che può essere considerato un indice significativo della dispersione dei dati e quindi della significatività della procedura adottata. Infatti, una gran dispersione dei dati sperimentali spesso è un chiaro indice di una scelta non corretta delle variabili rilevanti.

8.2.2 ESEMPIO DIDATTICO DI ANALISI DIMENSIONALE NEL PBL

Prima di presentare i risultati ottenuti impiegando l'Analisi di Similarità alla realtà del *PBL*, conviene descrivere nel dettaglio un esempio realistico di indagine sperimentale, direttamente applicato alla realtà del *PBL* e facilmente realizzabile in pratica. Immaginiamo di essere interessati alla determinazione di una relazione semiempirica che descriva *il profilo verticale della deviazione standard della temperatura potenziale nello Strato Superficiale SL* e *nelle situazioni convettive*. Questo perché la relazione fluidodinamica sviluppata per tale variabile non ha certamente un aspetto benevolo. Ottenere un tale profilo partendo dalle relazioni di base della Fluidodinamica è sinceramente sconfortante, anche perché l'intuizione ci suggerisce che *dovrebbe* esistere una relazione ragionevolmente semplice nel caso in cui si stia considerando un sito con un'elevata omogeneità superficiale, piano ed in situazioni meteorologiche non perturbate e quasi stazionarie.

Prima di realizzare un vero esperimento, vediamo di applicare l'Analisi di Similarità. La prima domanda che ci poniamo è: quali potrebbero essere le variabili rilevanti per il fenomeno che stiamo considerando? La risposta viene direttamente da quanto abbiamo appreso nel Capitolo 1. Sicuramente, visto che siamo interessati alla deviazione standard della temperatura potenziale, σ_T sarà una variabile rilevante e, dato che siamo interessati al suo profilo verticale, la quota di misura z rispetto al suolo lo sarà anch'essa. Inoltre, siamo interessati alle sole situazioni convettive in cui è presente:

- la turbolenza di origine meccanica, ben descritta dalla velocità di frizione u_*,
- la turbolenza di origine convettiva, ben rappresentata dal flusso turbolento di calore sensibile H_0 o meglio dalla covarianza $\overline{w\theta_v}$ che è il flusso turbolento di calore sensibile in forma cinematica,
- il galleggiamento (*buoyancy*), ben rappresentato dal flusso di galleggiamento $\beta = g/T$

Proviamo quindi, con questi elementi, ad applicare la metodologia appena descritta. Le variabili rilevanti sono in tutto 5 e le unità di misura coinvolte sono in totale 3 (lunghezza, tempo e temperatura). Scegliamo come variabili chiave z, β e u_* che rispettano i vincoli imposti dal Passo 4 dell'Analisi di Similarità ed esprimiamo le variabili restanti in funzione di queste, ottenendo, come è facile verificare, che:

$[\overline{w'\theta'}] = [z]^{-1}\,[\beta]^{-1}\,[u^*]^3$

$[\sigma_T] = [z]^{-1}\,[\beta]^{-1}\,[u^*]^2$

cosa che porta a definire i due rapporti adimensionali seguenti:

$$\pi_1 = \beta z \frac{\overline{w'\theta'}}{u_*^3} \qquad \pi_2 = \beta z \frac{\sigma_T}{u_*^2} \qquad [8.4a]$$

che, a prima vista, appaiono abbastanza misteriosi. Tuttavia, possiamo sempre impiegare il Passo 8, dopo però aver riletto l'ultimo paragrafo del Cap. 1. In particolare, vediamo immediatamente che π_1 altro non è che il rapporto di stabilità z/L, a meno del segno e della moltiplicazione per la costante di von Karman k. Quindi il primo rapporto adimensionale che otteniamo è:

$$\pi_3 = -k\pi_1 = z/L \qquad [8.4b]$$

Per quanto riguarda il secondo rapporto adimensionale, possiamo per esempio sostituire a π_2 il rapporto $\pi_3 = \pi_2/\pi_1$ ed è immediatamente visibile che:

$$\pi_4 = \frac{\pi_2}{\pi_1} = -\frac{\sigma_T}{T_*} \qquad [8.4c]$$

In pratica l'Analisi di Similarità afferma che è pensabile *sperare* di ottenere una relazione per il profilo verticale di σ_T del tipo:

$$\frac{\sigma_T}{|T_*|} = F(z/L) \qquad [8.4d]$$

tuttavia, non ci dice *quale forma dovrebbe assumere la Funzione Universale F*. Per prima cosa è immediato verificare che la (8.4d) è una relazione di tipo *diagnostico* (non fa alcuna menzione di come evolverà nel tempo il profilo di σ_T), è un *profilo* (lega tra loro σ_T e z) ed è anche *universale* perché è potenzialmente in grado di descrivere tutte le possibili situazioni convettive che possono capitare.

A questo punto, abbiamo *la possibilità* di ottenere veramente questa Relazione di Similarità e quindi prepariamo la campagna sperimentale volta ad individuare la funzione universale *F*. Per prima cosa cerchiamo un sito congruente con le ipotesi fatte all'inizio della ricerca, cioè un sito piano, senza ostacoli e omogeneo in senso orizzontale. In questo sito collochiamo un palo meteorologico non troppo elevato (dobbiamo stare entro il *SL*), per esempio di 16 metri, e lo attrezziamo in modo da poter fare misure di temperatura a 1, 2, 4, 8 e 16 metri dal suolo. Inoltre, dopo un'attenta lettura dei Capitoli 10 e 11 che tratteranno le tecniche e gli strumenti di misura, selezioniamo delle termocoppie sottili (e quindi a risposta rapida per essere in grado di misurare realmente la deviazione standard della temperatura) e le connettiamo ad un sistema di acquisizione dati adeguato. E fin qui ci siamo attrezzati per misurare σ_T. Per poter poi caratterizzare la turbolenza ci serve un apparato in grado di misurare u_* e la covarianza tra la temperatura potenziale virtuale e la componente verticale del moto e sempre nel Capitolo 11 realizziamo che l'anemometro ultrasonico triassiale è lo strumento ideale. Lo collochiamo ad una appropriata distanza dal suolo (per es. a 3 m dal suolo) e gli affianchiamo un normale termometro per poter misurare la temperatura dell'aria T_0 ed un barometro che ci consente di trasformare le temperature in temperature potenziali. A questo punto la campagna sperimentale può avere inizio.

Manteniamo l'apparato sperimentale attivo per un periodo di tempo sufficientemente lungo, in modo da essere sicuri di aver *catturato* un numero significativo di eventi convettivi e raccogliamo tutte le misure ottenute dopo aver, però, eliminato tutte quelle situazioni in cui il tempo è risultato perturbato (con presenza di pioggia, temporali, tempeste, ecc.) in modo da selezionare solo situazioni quasi stazionarie. Le misure raccolte durante la campagna saranno *misure grezze* (*raw*), di fatto misure quasi istantanee raccolte con una frequenza di campionamento prestabilita. Dato che dobbiamo misurare la varianza della temperatura, è opportuno raccogliere le misure delle termocoppie con una frequenza elevata, per esempio a 10 Hz, cioè un campione ogni decimo di secondo. Anche l'anemometro ultrasonico triassiale funzionerà ad una tale frequenza

di campionamento per assicurare una stima accurata della *friction velocity* e del flusso turbolento di calore sensibile. A questo punto, dobbiamo stabile un tempo di mediazione appropriato per il calcolo di medie, varianze e covarianze e, da quanto abbiamo appreso in precedenza, questo tempo di mediazione deve essere compreso tra 15' e 60'. Scegliamo 60'. Raccogliamo, ora, tutte le misure elementari prodotte dall'anemometro ultrasonico triassiale e le elaboriamo (vedremo nel Capitolo 13 come fare ciò nel modo più corretto), ottenendo per ogni ora della campagna le variabili (o meglio le loro migliori stime campionarie) u_*, $\overline{w\theta}$ e $T_* = -\overline{w\theta}/u_*$. Raccogliamo, poi, le misure elementari della temperatura rilevata dal termoigrometro posto vicino al suolo e, per ogni ora, calcoliamo la temperatura media dell'aria e la *buoyancy* g/T_0. Infine, calcoliamo i valori orari di σ_T dai valori elementari delle termocoppie poste alle varie quote di misura. A questo punto *sincronizziamo* tutte le misure ottenute, giungendo ad una *tabella* (che poi sarà un *file* in un PC) in cui ogni riga corrisponde ad un'ora della campagna ed ogni colonna ad una variabile delle seguenti:

- data
- ora
- buoyancy g/T_0
- friction velocity u_*
- flusso turbolento di calore sensibile H_0
- rapporto $z/L = -\frac{kgz}{T_0} \cdot \frac{\overline{w\theta}}{u_*^3}$
- la σ_T alle varie quote di misura.

Eliminiamo tutte le ore (cioè le righe della tabella) con $z/L \geq 0$ (non sono ore convettive) e ciò che resta è l'insieme delle misure cui siamo interessati e che analizziamo ora in cerca di una possibile Relazione di Similarità. Un risultato verosimile di questa ipotetica ma molto realistica campagna sperimentale potrebbe essere quello mostrato in **Fig. 8.5** (nella cui Legenda sono indicati i valori di u_* ed H_0 relativi a ciascun profilo). Come si vede, i profili ottenuti presentano una certa regolarità, ma non aiutano certo a determinare la relazione cercata. L'unica cosa che evidenziano è una quasi generale diminuzione di σ_T con la quota.

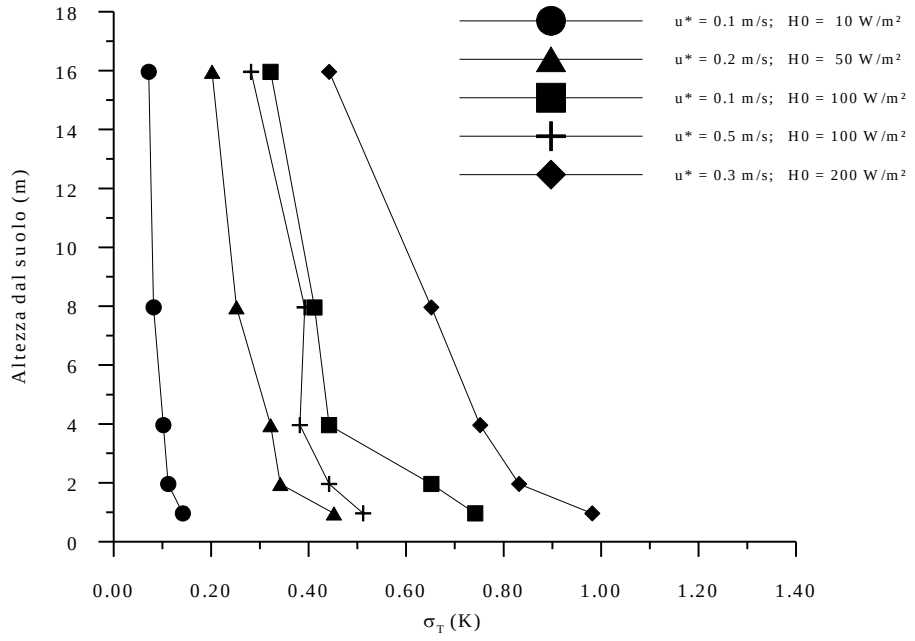


Fig. 8.5: possibili risultati ottenuti in una campagna per la determinazione di una relazione tra σ_T e la quota nello Strato Superficiale.

Dato che, per ogni profilo, conosciamo il valore corrispondente di u_* e H_0 e dato che è semplice da quest'ultimo ottenere la covarianza $\overline{w\theta_v}$ una volta nota la temperatura T_0, possiamo prendere tutte le misure di tutti i profili e calcolare per ogni coppia (σ_T, z) il valore dei due rapporti adimensionali $-\sigma_T/T_*$ e $-z/L$, ottenendo quanto rappresentato nella **Fig.8.6**. Il risultato che otteniamo è che tutti i profili *collassano* attorno ad una curva *unica* (*universale*) che rappresenta globalmente *tutte* le situazioni convettive che abbiamo selezionato.

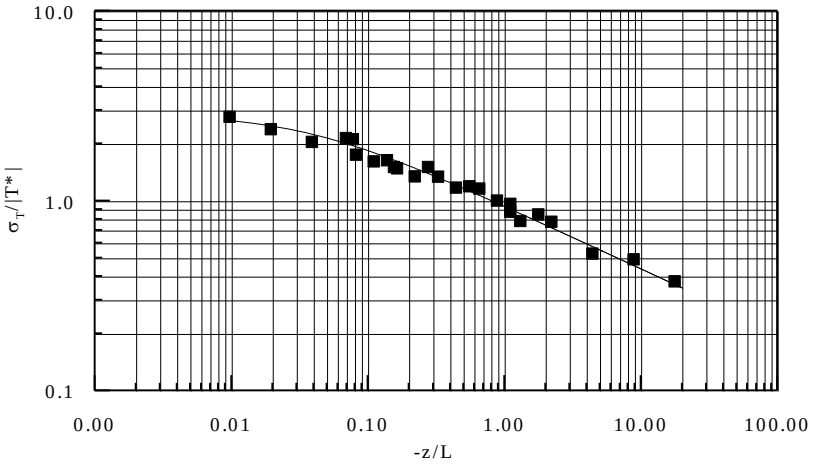


Fig. 8.6: applicazione dell'analisi di Similarità ai dati raccolti nella campagna ideale.

Ci resta solo un problema ancora da risolvere: determinare la forma funzionale della curva universale disegnata nella **Fig. 8.6** che rappresenta i punti sperimentali ottenuti. Non possiamo invocare alcuna regola specifica. Ci si deve qui affidare all'intuizione e, per esempio, possiamo provare a considerare una relazione funzionale di potenza del tipo:

$$\frac{\sigma_T}{|T_*|} = a \cdot \left(1 - b\frac{z}{L}\right)^c \qquad [8.5a]$$

Utilizzando metodi di *best fitting non lineare* otteniamo per le costanti *a*, *b* e *c* rispettivamente i valori 2.9, 28.4 e –1/3. La nostra indagine è finita, ma osserviamo con attenzione cosa abbiamo ottenuto. Il nostro risultato finale è la relazione:

$$\frac{\sigma_T}{|T_*|} = 2.9 \cdot \left(1 - 28.4\frac{z}{L}\right)^{-1/3} \qquad [8.5b]$$

in grado di *prevedere in ogni situazione convettiva* il valore di σ_T ad una quota z purché entro lo Strato Superficiale, se si conoscono le forzanti della turbolenza a livello del suolo (cioè u_* e H_0) e la temperatura media del *SL*. Ecco, quindi, un *modello prognostico universale*, alternativo al modello fluidodinamico, ma molto meno generale rispetto a quest'ultimo; infatti, per come è stato individuato, *può essere applicato solo alla determinazione del profilo verticale di σ_T in situazioni convettive quasi stazionarie, entro il SL, in siti pianeggianti ed omogenei ed in condizioni meteorologiche non perturbate*. Inoltre, dato che durante la campagna non abbiamo raccolto informazioni meteorologiche esterne al *SL* (come, per esempio, la velocità del vento geostrofico e l'estensione verticale del *PBL* convettivo), la relazione di Similarità ottenuta non potrà tener conto dell'influenza di tali variabili sul profilo verticale della deviazione standard della temperatura.

8.2.3 PRIMI PASSI NELL'APPLICAZIONE DELLA SIMILARITÀ NEL PBL

Per prendere familiarità con le peculiarità del *PBL* e con l'Analisi Dimensionale applicata alla sua descrizione, può essere utile iniziare seguendo la Teoria della Similarità di Rossby, che è la più antica. Non aspettiamoci, però, grandi risultati applicativi, proprio perché questa teoria si poneva

l'ambizioso obiettivo di *addomesticare* l'intero *PBL* nelle sue multiformi espressioni. Tuttavia, ci conviene vedere tutto ciò come una *palestra* utile per mettere a punto gli strumenti di analisi che sono, da un lato, l'Analisi Dimensionale e, dall'altro, una continua semplificazione delle leggi fluidodinamiche dell'atmosfera. Il punto di riferimento fisico per questa Analisi di Similarità è un'atmosfera adiabatica (la temperatura potenziale è costante con la quota), barotropica (il vento geostrofico è costante con la quota), quasi stazionaria e orizzontalmente omogenea. Partiamo nella discussione esattamente come siamo partiti nel definire il modello fluidodinamico del *PBL*, cioè senza avere alcun tipo di informazioni a priori su possibili stratificazioni *fini* del *PBL*. L'unica eccezione a questa regola è costituita dalla individuazione di un sottile strato di aria a diretto contatto col suolo, dello spessore di frazioni di metro, che *avvolge* le varie irregolarità che presenta la superficie della terra. Tale strato, noto come *roughness sublayer*, lo studieremo molto presto; per ora possiamo anticipare che è uno strato di interfaccia, molto diverso dal resto dell'atmosfera sovrastante e che, ai fini pratici, può essere individuato quantitativamente da una lunghezza caratteristica z_0, la *lunghezza di rugosità*. Tutte le nostre considerazioni le faremo per l'atmosfera che sovrasta il *roughness sublayer*. Il materiale che proponiamo qui di seguito è stato tratto e rielaborato da Tennekes (1982) e da Garratt (1992).

8.2.3.1 Considerazioni iniziali

Come detto, l'elemento essenziale dell'Analisi di Similarità dell'atmosfera è il rendere adimensionali le misure ottenute dalle campagne sperimentali. In sostanza le lunghezze, le velocità e le temperature verranno rese adimensionali una volta divise rispettivamente per una lunghezza di scala, una velocità di scala ed una temperatura di scala. Ma come possiamo individuare le opportune grandezze di scala?

Consideriamo inizialmente la velocità del vento abbastanza lontano dal suolo (per esempio a 500 m dal suolo) durante una situazione adiabatica (tipicamente un'ora diurna con vento teso e cielo coperto) ed in condizioni di stazionarietà e di omogeneità orizzontale. Dalle osservazioni si vede come la velocità media del vento U a questa quota sia dello stesso ordine di grandezza del modulo del vento geostrofico $G = (U_g^2+V_g^2)^{1/2}$ (dove U_g e V_g sono le due componenti orizzontali del vento geostrofico). Quindi, U/G è dell'ordine dell'unità e G sembrerebbe essere un'appropriata velocità di scala per la velocità del vento lontano dal suolo.

Sempre dalle osservazioni emerge come la velocità del vento nei pressi del suolo dipenda, invece, da z. Infatti, la *no-slip condition* prescrive una velocità del vento nulla al suolo, velocità che dovrà inevitabilmente crescere con la quota. Quale dovrebbe essere la scala appropriata per z? Due sono le scelte possibili:

- potrebbe essere l'altezza z_0 che rappresenta, in prima approssimazione, l'estensione verticale del *roughness layer*. Tale altezza è dello stesso ordine di grandezza dell'altezza degli elementi di rugosità del suolo e quindi dell'ordine di 10^{-2} m. Questa lunghezza di scala risulta molto piccola;
- ma potrebbe anche essere G/f (f alle medie latitudini vale $1.4\cdot10^{-4}$ s^{-1}) che dimensionalmente è una lunghezza e che risulterebbe quindi legata in qualche modo al gradiente sinottico di pressione. Se si considerano condizioni in cui G è dell'ordine di 10 m·s^{-1}, G/f risulta dell'ordine di 10^5 m, quindi è una lunghezza di scala molto grande.

Ci sono quindi due possibili lunghezze di scala candidate, una piccola z_0 ed una grande G/f. Il loro rapporto è il <u>*Numero di Rossby superficiale*</u> $Ro = G/fz_0$ che è un parametro adimensionale centrale nel moto del *PBL*. Dato che stiamo considerando una quota molto prossima alla superficie, sembra ragionevole preferire z_0 come lunghezza di scala in questa parte di atmosfera.

Notiamo poi che lo *stress* superficiale τ_0 deve essere una funzione anche di *Ro* dato che rappresenta l'attrito sulle masse d'aria in moto dovuto ai gradienti sinottici di pressione, ma tale *stress* è anche rappresentato dalla *friction velocity* u_* definita in modo tale che $\tau_0 = \rho u_*^2$. Ma se

τ_0 è funzione di G/fz_0, allora così sarà anche per u_* e quindi dovrà valere la relazione:

$$u_*/G = F_g(G/fz_0) \qquad [8.6a]$$

dove $F_g(.)$ è un'opportuna funzione di *Ro*. D'altro canto, pur non essendo un *parametro indipendente*, la *friction velocity* presenta caratteristiche interessanti per poter essere un ottimo candidato come velocità di scala: in primo luogo, come abbiamo detto, risente delle situazioni sinottiche ed in secondo luogo, se ci si limita al moto dell'aria su superfici solide (non il mare, quindi), la direzione dello *stress* superficiale coincide con quella del vento nei pressi della superficie. A questo punto possiamo scrivere una relazione per il profilo verticale medio del vento nei pressi del suolo usando come scale appropriate z_0 ed u_*, cioè:

$$U/u* = f_x(z/z_0) \qquad [8.6b]$$

dove $f_x(.)$ è un'altra funzione da determinare. Graficando i profili verticale della velocità del vento nei pressi della superficie in questa forma, ci possiamo aspettare che essi non mostrino un'esplicita dipendenza dal numero di Rossby. Mentre la relazione (8.6a) lega il parametro interno u_* alle condizioni sinottiche riassunte dal numero di Rossby, la relazione (8.6b) lega la velocità del vento allo stress superficiale e quindi ad u_*. La piena conoscenza del fenomeno la si ha solo quando entrambe le relazioni sono completamente note e quindi quando sono note le funzioni F_g e f_x.

8.2.3.2 La Similarità di Rossby in condizioni adiabatiche

Consideriamo una situazione adiabatica, stazionaria ed orizzontalmente omogenea. Trascurando gli *stress* viscosi, le equazioni del moto si riducono alle sole relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} +f(V - V_g) &= \frac{d\overline{uw}}{dz} \\ -f(U - U_g) &= \frac{d\overline{vw}}{dz} \end{aligned} \qquad [8.7a]$$

Fermiamoci un attimo su queste relazioni. Le equazioni del moto originarie, piuttosto complesse, a fronte della quasi stazionarietà che caratterizza il *PBL* perdono i termini prognostici; il risultato è che le *deviazioni* delle componenti orizzontali del vento dalle rispettive componenti geostrofiche (il vento ageostrofico, quindi) variano solo con la quota in funzione della variazione con la quota delle componenti dello stress di Reynolds. Per semplicità, conviene allineare l'asse *x* lungo la direzione dello stress superficiale τ_0 che, su superfici solide, risulta allineato col vettore vento medio. Pertanto, a $z = z_0$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \tau_x &= -\rho\overline{uw} = \tau_0 = \rho u_*^2 \\ \tau_y &= -\rho\overline{vw} = 0 \end{aligned} \qquad [8.7b]$$

Prima di procedere, conviene fare due osservazioni. Innanzitutto, è decisamente ragionevole adottare come velocità di scala per le componenti ageostrofiche del vento (U-U_g) e (V-V_g) la friction velocity u_* che è strettamente legata all'energia cinetica turbolenta e che caratterizza la turbolenza meccanica tipica di una situazione adiabatica, proprietà intrinseca al *PBL*. Inoltre, è utile cercare un'altezza adimensionale che coinvolga u_* ed il parametro di Coriolis *f*: tale parametro adimensionale altro non è che zf/u_*. A questo punto possiamo rendere adimensionale le relazioni (8.7a) ottenendo:

$$\begin{aligned} \frac{(V - V_g)}{u_*} &= \frac{d[\overline{uw}/u_*^2]}{d[zf/u_*]} \\ \frac{(U - U_g)}{u_*} &= -\frac{d[\overline{vw}/u_*^2]}{d[zf/u_*]} \end{aligned} \qquad [8.7c]$$

Queste equazioni non dipendono esplicitamente dal numero di Rossby ed alla sommità del *PBL* sia le componenti dello *stress* che le componenti ageostrofiche del vento sono nulle, ottenendo

un'omogeneità nelle condizioni al contorno superiori. Alla superficie, la normalizzazione degli *stress* non richiede alcuna informazione aggiuntiva, mentre la divergenza superficiale del moto ha componenti V_g/u_* e U_g/u_*, che dipendono da *Ro*. Poiché G/u_* cresce con G/fz_0, abbiamo una singolarità nella condizione limite in cui G/fz_0 tende all'infinito. Se il sistema (8.7c) non ha bisogno di soddisfare condizioni al contorno alla superficie e le condizioni al contorno alla sommità sono libere da parametri esterni, ci aspettiamo che la sua soluzione sia del tipo:

$$\frac{(U-U_g)}{u_*} = F_x(zf/u_*)$$
$$\frac{(V-V_g)}{u_*} = F_y(zf/u_*) \qquad [8.7d]$$

cioè che le componenti ageostrofiche del vento, rese adimensionali dalla *friction velocity*, siano *funzioni universali* dell'altezza adimensionale zf/u_*. Graficati secondo queste relazioni, i profili verticali del vento ageostrofico in un Boundary Layer barotropico, stazionario ed adiabatico non dipendono dal numero di Rossby. Questa è la Similarità di Rossby. Anche se questa teoria si applica a situazioni decisamente rare come lo sono le situazioni veramente adiabatiche e barotropiche, essa fornisce comunque un riferimento concettuale che porta ad approssimazioni decisamente utili che vedremo immediatamente.

8.2.3.3 Lo Strato Superficiale

Concentriamoci ora sullo strato di atmosfera più vicino al suolo e riconsideriamo le relazioni del moto (8.7a). Se, come abbiamo fatto finora, prendiamo in considerazione quote relativamente basse (per es. 10 ÷ 100 m), la lunghezza di scala appropriata parrebbe essere z_0, mentre manteniamo ancora u_* come velocità di scala. Così facendo, otteniamo un nuovo sistema di equazioni adimensionali del moto, diverso dalla (8.7c) ed appropriato per uno strato di atmosfera prossimo alla superficie terrestre, dato da:

$$-\frac{fz_0}{u_*}\frac{(V-V_g)}{u_*} = -\frac{d[\overline{uw}/u_*^2]}{d[z/z_0]}$$
$$+\frac{fz_0}{u_*}\frac{(U-U_g)}{u_*} = -\frac{d[\overline{vw}/u_*^2]}{d[z/z_0]} \qquad [8.8a]$$

Il membro di sinistra di entrambe le equazioni è molto piccolo: infatti se si considerano valori tipici per U_g e V_g dell'ordine rispettivamente di 10 m·s^{-1} e di 5 m·s^{-1}, un valore di u_* di 0.3 m·s^{-1}, il parametro di Coriolis $f = 10^{-4}$ s^{-1} tipico delle medie latitudini e $z_0 = 0.01$ m, i due membri di sinistra risultano dell'ordine di 10^{-5}. È plausibile ipotizzare che tali valori decresceranno ulteriormente col crescere del numero di Rossby e quindi al limite per $G/(fz_0) \to \infty$:

$$\frac{d[\overline{uw}/u_*^2]}{d[z/z_0]} = 0$$
$$\frac{d[\overline{vw}/u_*^2]}{d[z/z_0]} = 0 \qquad [8.8b]$$

che, viste le condizioni alla superficie (8.7b), portano a dire che:

$$-\overline{uw} = u_*^2 \quad -\overline{vw} = 0 \qquad [8.8c]$$

Quindi, questo Strato Superficiale (SL) dell'atmosfera è caratterizzato da uno shear stress approssimativamente costante per tutti i valori di z/z_0 e quindi approssimativamente costante con la quota. Finalmente abbiamo trovato il primo elemento oggettivo che caratterizza il *SL* introdotto in precedenza in maniera del tutto euristica. A questo punto, il modo appropriato per presentare il profilo verticale del vento è:

$$U/u_* = f_x(z/z_0), \quad V/u_* = 0 \qquad [8.9]$$

Visto che lo *stress* superficiale è allineato con la direzione del vento medio nei pressi della superficie e che in questa porzione di atmosfera è pressoché costante, la direzione media del vento non varierà entro tale strato. Questa situazione, ottenuta in situazioni adiabatiche e barotropiche, è molto vicina a ciò si riscontra in realtà anche parecchio differenti, ma comunque relative al *SL*.

8.2.3.4 Il processo di matching

Nel *SL* si è visto come il profilo verticale della velocità media del vento sia dato dalla relazione (8.9), che però non può essere utilizzata quando z/z_0 è elevato, perché è stata ottenuta ipotizzando che in questo strato (e solo in questo) lo *stress* di Reynolds sia approssimativamente costante. D'altro canto, il profilo del vento è dato anche dalla relazione (8.7d) che non può essere estesa a bassi valori di z/z_0 per la singolarità che la contraddistingue a $z \to 0$. Dobbiamo, quindi, trovare un modo per *combinare* queste due formulazioni in maniera da metterle d'accordo. In pratica, la (8.7d) continua a valere man mano si scende di quota, mentre la (8.9) continua a valere man mano si sale di quota. Esisterà quindi una quota in corrispondenza della quale entrambe le relazioni dovranno valere contemporaneamente.

Operativamente, invece di ragionare sul profilo della velocità del vento, è più conveniente considerare il suo gradiente verticale. In particolare, dalla (8.7d) si ha che:

$$\frac{dU}{dz} = f\frac{dF_x}{d\eta} \qquad (\eta = zf/u_*) \qquad [8.10a]$$

mentre dalla (8.9) si ha:

$$\frac{dU}{dz} = \frac{u_*}{z_0}\frac{df_x}{d\xi} \qquad (\xi = z/z_0) \qquad [8.10b]$$

che sono le relazioni di Similarità per il gradiente verticale della velocità media del vento rispettivamente per lo strato superiore di atmosfera e per il suo strato inferiore. In entrambe il profilo è indicato con la derivata convenzionale rispetto alla quota e non con la derivata parziale grazie all'omogeneità orizzontale del sistema fisico considerato. Esse devono poi essere identiche ad una qualche altezza dal suolo in corrispondenza della quale si ha il *matching* di entrambe. In pratica, a questa quota i due profili si devono *raccordare* e quindi devono avere lo stesso gradiente. In effetti, eguagliando le due relazioni e moltiplicando entrambe per z/u_*, otteniamo:

$$\frac{z}{u_*}\frac{dU}{dz} = \eta\frac{dF_x}{d\eta} = \xi\frac{df_x}{d\xi} \qquad [8.10c]$$

L'espressione al centro è funzione della sola η mentre l'espressione di destra dipende solo da ξ. Tuttavia, per le ipotesi fatte, η tende a zero e ξ tende all'infinito. Il solo modo per cui le due espressioni possano essere identiche senza produrre singolarità o risultati *banali* è che entrambe tendano ad un asintoto non nullo, cioè che:

$$\frac{z}{u_*}\frac{dU}{dz} = \frac{1}{k} \qquad (\eta \to 0; \xi \to \infty) \qquad [8.11a]$$

Nella relazione precedente l'asintoto è stato posto pari all'inverso della costante *k* che è nota come costante di von Karman. In pratica questa relazione afferma che in uno strato di atmosfera dove z/z_0 è così elevato che l'influenza di z_0 è trascurabile, mentre zf/u_* è così piccolo che gli effetti della rotazione terrestre, e quindi del parametro di Coriolis *f*, sono trascurabili, il gradiente della velocità del vento può dipendere solo dalla *friction velocity* e dalla quota.

L'integrazione della (8.11a) porta alla seguente relazione per il profilo della velocità media del vento:

$$U/u_* = \frac{1}{k}ln(z/z_r) \qquad [8.11b]$$

dove z_r è un'arbitraria costante di integrazione. Questo è il celebre *profilo logaritmico* della

velocità media del vento. Dato che questa relazione deve soddisfare sia la (8.7d) che la (8.9), ci sono due forme alternative:

$$U/u_* = \frac{1}{k} ln(z/z_0) \qquad (z/z_0 >> 1) \qquad [8.11c]$$

$$(U - U_g)/u_* = \frac{1}{k}[ln(fz/u_*) + A] \qquad (zf/u_* << 1) \qquad [8.11d]$$

La prima esprime il profilo verticale della velocità del vento nello strato vicino al suolo, cioè il *SL* (*Inner Layer*), mentre la seconda descrive la variazione con la quota della componente ageostrofica del vento nella parte sovrastante di *PBL* (*Outer Layer*). La costante *A* è stata ampiamente studiata ed i numerosi lavori in proposito suggeriscono un valore di circa 2.

Cerchiamo, ora, di approfondire ulteriormente la conoscenza del *SL*. Tale strato non è, nella realtà, uno strato di atmosfera a *stress* completamente costante. Per rendersi conto di ciò, visto che nello strato superficiale $V/u_* = 0$, la seconda equazione delle (8.7d) comporta che:

$$-V_g/u_* = \text{costante} = -B/k \qquad [8.12a]$$

dove *B* è un'opportuna costante che, in base delle misure disponibili, risulta essere dell'ordine di 4.5÷5. Quindi, utilizzando questa relazione nella (8.8a), si ha che nei pressi della superficie:

$$-\frac{fB}{ku_*} = -\frac{d}{dz}(\overline{uw}/u_*^2) \qquad [8.12b]$$

cioè:

$$-\frac{\overline{uw}}{u_*^2} = 1 - \frac{fBz}{ku_*} \qquad [8.12c]$$

Per $f = 10^{-4}$ s^{-1}, $B = 5$ (valore tipico riportato in Letteratura), $k = 0.4$ e $u_* = 0.3$ ms^{-1}, la componente *x* dello *stress* di Reynolds cambia del 10% del valore assunto al suolo in uno strato d'aria presso la superficie di 24 m di spessore.

La Teoria della Similarità di Rossby è stata sviluppata in condizioni adiabatiche, stazionarie e di omogeneità orizzontale. Come si è visto, ha portato ad interessanti considerazioni concettuali e pratiche, anche se non si presta molto alle applicazioni, dato che queste condizioni sono abbastanza rare in natura e dato che le costanti *A* e *B* rilevate nelle campagne sperimentali non risultano ben definite. Va rilevato, inoltre, che tale teoria è stata anche estesa alle situazioni non adiabatiche ed al profilo medio della temperatura potenziale. Comunque, il risultato maggiore fin qui ottenuto è una definizione abbastanza oggettiva del *SL*, la constatazione che in questo strato lo *stress* di Reynolds risulta relativamente costante e che il moto è influenzato dalla rugosità superficiale e dai flussi al suolo, ma non direttamente ed esplicitamente dalle forzanti sinottiche. Inoltre, il profilo verticale medio della velocità del vento nei pressi del suolo presenta una forma logaritmica, cosa che effettivamente è nelle situazioni adiabatiche.

Esercizio 8.1

Utilizzando la teoria della Similarità di Rossby, ricavare una relazione analitica che lega la *friction velocity* u_* alla velocità del vento geostrofico $G = (U_g^2 + V_g^2)$, supposto costante con la quota.

Per la teoria di Rossby esiste una quota *z* in corrispondenza della quale devono valere contemporaneamente le relazioni (8.11c) e (8.11d). Se ciò è vero, allora risulta che:

$$\frac{kU_g}{u_*} = ln\left(\frac{u_*}{|f|z_0}\right) - A$$

cioè:

$$U_g = \frac{u_*}{k}\left[ln\left(\frac{u_*}{|f|z_0}\right) - A\right]$$

Ma deve valere anche la relazione (8.12a), quindi:

$$\frac{u_*^2}{G^2} = \frac{k^2}{\left[ln\left(\frac{u_*}{|f|z_0}\right) - A\right]^2 + B^2}$$

L'aspetto interessante di questa relazione è il fatto che essa lega tra loro una grandezza *interna* del *PBL* come u_* ad una delle principali grandezze *esterne* al *PBL* come il vento geostrofico rappresentato dalla sua velocità *G*.

8.3 LO STRATO SUPERFICIALE

Qualunque sia lo stato di turbolenza del *PBL*, esiste sempre un piccolo strato d'aria nel suo interno, a diretto contatto con l'interfaccia aria-suolo, in cui hanno luogo i principali trasferimenti di energia che garantiscono la sopravvivenza e l'evoluzione della turbolenza dell'aria. In effetti, al suolo sono localizzate le sorgenti di quantità di moto, di calore, di umidità e di biossido di carbonio (prodotto dalla vegetazione) e al suolo si depositano le varie specie chimiche presenti in atmosfera, che costituiscono altrettante sorgenti negative (*sink*). A questo strato di atmosfera appartenente al *PBL* normalmente viene dato il nome di *Strato Superficiale* (*SL*). La Teoria della Similarità di Rossby ci ha consentito di iniziare a studiare il *SL* con un certo dettaglio e di definirlo come quello strato di *PBL* nelle immediate vicinanze del suolo in cui lo *stress* di Reynolds è approssimativamente costante. In realtà, a ben guardare (e già lo abbiamo anticipato brevemente) questo strato d'aria, già introdotto euristicamente al Cap. 1 e semi-quantitativamente poco sopra, è decisamente più complesso, soprattutto perché non c'è una chiara ed univoca distinzione tra il *SL* e lo strato d'aria sovrastante. Perciò la definizione di *SL* è una comoda idealizzazione per studiare con minor difficoltà l'atmosfera nelle immediate vicinanze del suolo. Scopriremo questa complessità col procedere della nostra analisi, ma va subito detto che nella sua parte inferiore, a diretto contatto col suolo, è presente uno strato d'aria ancora più sottile che circonda completamente tutti gli elementi di rugosità presenti. È in questa porzione di *SL* che agiscono con efficacia le forze viscose e la diffusività termica molecolare, aiutate dai forti gradienti verticali di velocità del vento, di temperatura e di umidità ivi presenti. Di questo straterello parleremo successivamente; per il momento ci focalizzeremo solo sulla situazione paradigmatica che finora abbiamo adottato, cioè una superficie solida piatta ma rugosa, priva di orografia, orizzontalmente omogenea e coperta da vegetazione bassa. In questo caso possiamo asserire che, a tutti gli effetti, questo strato d'aria si estende dall'interfaccia aria-suolo ad una quota z_0, dell'ordine di $10^{-3} \div 10^{-2}$m. Questo quando consideriamo gli *stress*. Quando, invece, consideriamo il calore o il flusso di sostanze passive (umidità o altre specie chimiche), possiamo definire analogamente una quota z_{0h}, sempre dello stesso ordine di grandezza di z_0, ma normalmente inferiore. Queste grandezze, z_0 e z_{0h} vengono indicate col termine *lunghezze di rugosità aerodinamica* (per la quantità di moto e per il calore, rispettivamente).

Dato che questo strato è piccolissimo, normalmente al di fuori delle zone in cui è possibile realizzare misure e irrilevante ai fini pratici, faremo come se il *SL* iniziasse dalla quota z_0 e si estendesse al di sopra fino a raggiungere lo strato di atmosfera sovrastante. È questo lo strato di *PBL* su cui ora focalizziamo la nostra attenzione, studiandolo il più dettagliatamente possibile sia nelle situazioni convettive che nelle situazioni stabili. Tra l'altro, l'estensione verticale del *SL* è limitata, come abbiamo visto, e quindi è relativamente facile realizzare misure, anche molto sofisticate, nel suo interno, cosa che è stata fatta e si continua a fare; ciò ha quindi consentito di disporre di una mole enorme di informazioni sperimentali che costituisce la base conoscitiva su cui è fondata la Teoria del *SL*, oltre naturalmente alle leggi della Fluidodinamica che lo descrivono matematicamente in termini del tutto generali.

8.3.1 LA SIMILARITÀ DI MONIN-OBUKHOV DEL SL: GENERALITÀ

Lo strumento di indagine principale adottato per lo studio quantitativo del *SL* è l'Analisi Dimensionale, cioè la Teoria della Similarità. A priori è possibile sviluppare diverse Teorie di Similarità ed un esempio è proprio la Similarità di Rossby brevemente presentata poco sopra. Tuttavia, tra le varie altre possibilità, quella che ha avuto maggior successo è la Teoria di Similarità di Monin-Obukhov (MOST) proposta da Obukhov nel 1946 e sviluppata da Monin e Obukov nel 1954. In sostanza questa fortunata teoria ha ormai più di 60 anni e Foken (2006) in un suo recente lavoro ne ha fatto un succinto ma approfondito sommario storico. Il punto suo di partenza è il fatto di:

- concentrare l'attenzione direttamente solo sui *parametri interni* al *SL*, trascurando il vento geostrofico G e l'estensione verticale del *PBL* z_i,
- ipotizzare possibile la misura diretta dello *shear stress* e del flusso turbolento di calore sensibile.

Come vedremo, il trascurare gli effetti derivanti dall'estensione verticale dell'intero *PBL* ha comportato che il MOST avesse limitazioni nel descrivere il profilo verticale di alcuni momenti; questo stato di cose ha quindi reso necessaria una sua estensione che vedremo poi.

Adottando queste ipotesi di lavoro, il MOST si riferisce, nella sua formulazione originaria, ad un *SL* in condizioni quasi stazionarie ed orizzontalmente omogenee. Da quanto sappiamo, i parametri che governano la struttura della turbolenza del *SL*, cioè i profili verticali delle grandezze medie e dei momenti, sono:

1. la quota z rispetto al suolo. Essa, ovviamente, dovrà essere superiore a z_0 e rappresenta la *lunghezza di scala* della turbolenza nel *SL*. Come abbiamo già detto, questa è la maggior debolezza del MOST;
2. la friction velocity u_*. Essa rappresenta la *velocità di scala* principale della turbolenza del *SL*. La sua scelta è del tutto naturale, visto che il suo quadrato è direttamente proporzionale allo *stress* di Reynolds e quindi al flusso turbolento di quantità di moto, che è poi la *forzante meccanica* della turbolenza;
3. il flusso turbolento di calore sensibile al suolo. Questa grandezza è definita in unità cinematiche come la covarianza tra la componente verticale del moto e la temperatura potenziale e rappresenta la *forzante convettiva* per la turbolenza del *PBL*;
4. il parametro di galleggiamento. Questo parametro $\beta = g/T_0$ è definito come il rapporto tra l'accelerazione di gravità e la temperatura potenziale media al suolo e rende conto di tutti i fenomeni di *buoyancy*;
5. il flusso turbolento di uno scalare al suolo. Questa grandezza è la covarianza tra la componente verticale del moto ed il rapporto di mescolanza dello scalare considerato (vapor d'acqua, anidride carbonica, ecc.). Ovviamente essa viene coinvolta solo quando vengono trattate sostanze passive.

Con queste 5 grandezze la Teoria descrive i profili verticali nel *SL* del valor medio e dei momenti della velocità del vento, della temperatura potenziale virtuale e del rapporto di mescolanza medio delle sostanze passive.

Anche se nella versione originaria del MOST veniva utilizzato il flusso turbolento di calore sensibile $\overline{w\theta}$, negli anni si è preferito sostituire questa grandezza, specifica dell'aria secca, con l'equivalente dell'aria umida, cioè con la covarianza tra la componente verticale del moto e la temperatura potenziale virtuale. Tra le due grandezze sussiste, come noto, la relazione (con q si è indicato il rapporto di mescolanza del vapor d'acqua):

$$\overline{w\theta} \cong \overline{w\theta} + 0.61 \cdot \overline{T} \cdot \overline{wq} \qquad [8.13]$$

Questa sostituzione, ormai universalmente accettata, deriva anche dalle implicazioni del bilancio di energia cinetica turbolenta scritta per il *SL* in forma adimensionale, come abbiamo visto al punto 5.3.3. In tutto il resto del Capitolo con $\overline{w\theta}$ indicheremo, per brevità, la covarianza tra la componente verticale del vento e la temperatura potenziale virtuale, cioè il flusso turbolento di calore sensibile in unità cinematiche.

Una volta individuati i parametri rilevanti nella descrizione del *SL* e fissate come situazioni di riferimento:

- le situazioni stazionarie,
- con completa omogeneità spaziale (situazioni piane e con rugosità omogenea),
- e con gradienti di pressione orizzontali trascurabili,

le equazioni del moto, l'equazione di conservazione del calore e dell'umidità atmosferica si semplificano in maniera considerevole. Per prima cosa, le uniche derivate che sopravvivono in tali equazioni sono quelle rispetto alla coordinata verticale *z* e quindi non è più necessario usare l'operatore derivata parziale che può essere sostituito con la derivata totale. In secondo luogo, se ci si pone in una situazione in cui l'asse *x* è diretto lungo la direzione del vento medio (o meglio secondo la *streamline*), risulta, come detto, che in prima approssimazione *lo stress di Reynolds ed il flusso turbolento di calore sensibile sono costanti* ed è immediato verificare che anche il flusso turbolento di calore latente è costante. Tuttavia, nella realtà succede che, entro lo Strato Superficiale, i flussi turbolenti siano *quasi costanti* (o meglio varino meno del 10%). In una tale situazione siamo interessati ad investigare se sia possibile individuare relazioni di Similarità in grado di descrivere *in termini universali* il profilo verticale delle principali variabili descrittrici della turbolenza. Le variabili a cui siamo maggiormente interessati sono:

- lo *shear del vento* (cioè il gradiente verticale) o meglio dU/dz (dove con U si indica la velocità media del vento),
- la stratificazione termica del *SL* o meglio $d\Theta/dz$ (dove con Θ si indica la temperatura potenziale virtuale media),
- la deviazione standard delle tre componenti del vettore vento,
- la deviazione standard della temperatura potenziale virtuale,
- le altre statistiche di interesse, anche di ordine superiore.

Se si considera una generica variabile f di cui si desidera conoscere il profilo verticale (per esempio il gradiente della velocità media del vento, il gradiente di temperatura media e delle deviazioni standard), con questa variabile e con le forzanti z, u_*, $\overline{w\theta}$, $\beta = g/T_0$ secondo il Teorema di Buckingham è possibile definire due rapporti adimensionali:

- il primo lo si ottiene da z, u_*, $\overline{w\theta}$ e β, giungendo ad una *lunghezza di scala* $\zeta = z/L$, in cui L, detta *Lunghezza di Monin-Obukhov*, è definita come:

$$L = -\frac{\overline{T}_0}{kg}\frac{u_*^3}{\overline{w\theta}} \qquad [8.14a]$$

  dove il segno meno e la presenza della costante di von Karman (pari a 0.4) derivano da una consuetudine storica. Attenzione: in alcuni lavori prodotti da Autori di origine russa (per esempio Zilitinkevich) la definizione di L è priva della costante di von Karman. Una possibile interpretazione fisica di questo parametro (Wyngaard, 2010) la si può ottenere ricordando che nell'equazione del bilancio dell'energia cinetica turbolenta (scritta con le semplificazioni proprie del *SL* e per condizioni stazionarie) il termine di produzione di *shear* ed il termine di produzione di *buoyancy* sono rispettivamente:

$$\text{Tasso di produzione di shear} \quad = -\overline{u'w'} \cdot \frac{du}{dz} \qquad [8.14b]$$

$$\text{Tasso di produzione di buoyancy} \quad = \frac{g}{\overline{T}_0} \overline{w'\theta_v'} \qquad [8.14c]$$

Dato che il tasso di produzione medio di *bouyancy* è indipendente da *z*, in prossimità del suolo (cioè entro il *SL*) potrà essere decisamente inferiore al tasso di produzione di *shear*. Se definiamo una quota z_e in corrispondenza della quale il tasso medio di produzione di *shear* eguaglia il tasso medio di produzione di *buoyancy* in condizioni circa adiabatiche (e quindi considerando un profilo logaritmico del vento medio), si avrà:

$$u_*^2 \left(\frac{u_*}{kz_e}\right) = \frac{g}{\overline{T}_0} \overline{w\theta} \qquad [8.14d]$$

cioè:

$$z_e = \frac{\overline{T}_0}{g} \frac{u_*^3}{\overline{w\theta}} = |L| \qquad [8.14a]$$

Così, in valore assoluto, la lunghezza di Monin-Obukhov *L* rappresenta la quota in corrispondenza della quale gli effetti della *buoyancy* diventano dinamicamente importanti.

- il secondo parametro adimensionale è pari a f/f_0, dove la grandezza f_0 ha le stesse dimensioni della grandezza *f* di cui si desidera il profilo verticale e viene costruito a partire da *z*, u_*, $\overline{w\theta}$ e β, come si vedrà meglio nel seguito.

Dal Teorema di Buckingham, visto il numero di dimensioni fisiche coinvolte ed il numero di variabili rilevanti, il numero di rapporti adimensionali non può che essere 2. Da queste constatazioni, la Teoria della Similarità di Monin-Obukhov afferma che, in generale, per una generica variabile *f* che descrive la turbolenza nel *SL*, esiste uno ed un solo *profilo verticale universale* espresso dalla relazione:

$$f/f_0 = F_f(\zeta) \qquad [8.15]$$

in cui F_f è la Funzione Universale di Similarità per la variabile *f* e con ζ si è indicato il parametro di stabilità *z/L*.

Va sottolineato come, nonostante le apparenze, la (8.15) definisca una relazione di profilo, visto che lega tra loro la quota *z* con la variabile di interesse *f*. Ovviamente dall'Analisi Dimensionale non è possibile determinare la forma di queste funzioni universali e le sperimentazioni condotte in questi ultimi decenni hanno consentito di determinarle sia pure con un certo grado di certezza. In teoria le variabili di interesse sono numerosissime, tuttavia nella pratica si focalizza l'attenzione su un numero limitato di esse, che qui di seguito discuteremo più in dettaglio.

Alla luce, poi, delle più recenti indagini sperimentali, si può asserire che il MOST rappresenta in maniera notevolmente accurata le situazioni sia stabili che convettive ma con maggiore difficoltà le situazioni estremamente convettive e quelle estremamente stabili (rilevate durante l'inverno artico ed antartico). In questi casi estremi non si è ancora giunti ad una conoscenza completa e convincente dei fenomeni che hanno luogo nel *PBL*.

Le campagne sperimentali dedicate allo studio del *PBL* in generale ed alla verifica del MOST in particolare sono state sempre più numerose col passare degli anni e la recente disponibilità di strumentazione sofisticata, robusta e a costi contenuti (come l'anemometro ultrasonico triassiale e gli analizzatori di gas all'Infrarosso IRGA) ha incentivato in maniera inarrestabile nuova ricerca in proposito. Comunque, la maggior parte dei risultati che esporremo qui di seguito sono stati ottenuti dai risultati conseguiti in un insieme di storiche campagne sperimentali come quella di O'Neil (Lettau, 1990), di Wangara (Garratt e Hicks, 1990), del Kansas e del Minnesota (Kaimal e Wyngaard, 1990). Non vanno poi dimenticate le campagne volte alla conoscenza delle

peculiarità dell'interazione tra *PBL* e mare (Hasse, 1990 e Panin, 1990) e le preziose informazioni ottenute da grandiose postazioni fisse, come la torre di Boulder in Colorado alta 300 metri (Kaimal e Gaynor, 1983).

Per concludere, va evidenziato un problema potenzialmente pericoloso noto come *Self-Correlation* che inevitabilmente influenza questa Teoria di Similarità soprattutto quando si considerano situazioni stabili. Questo problema lo approfondiremo nel seguito.

8.3.2 GRADIENTE E PROFILO DI VELOCITÀ DEL VENTO E TEMPERATURA MEDIA

Durante le *situazioni convettive*, il flusso turbolento di calore sensibile H_0 (che considereremo qui sempre ottenuto dalla covarianza tra le fluttuazioni verticali del moto e le fluttuazioni della temperatura potenziale virtuale) è sempre positivo. Ciò implica che $L < 0$ e quindi che $z/L < 0$. In questa situazione il suolo trasmette all'aria sovrastante una parte dell'energia termica di origine solare che ha raggiunto l'interfaccia aria-suolo e questa immissione di energia si traduce nella generazione di vortici di grandi dimensioni che si propagano in tutto il *PBL*. La continua immissione di calore prodotta dal suolo, che inizia poco dopo l'alba e continua per tutto il tempo in cui il sole invia energia radiativa, incrementa, prima, e mantiene, poi, il livello di turbolenza tipico di una situazione convettiva. In situazioni come questa, nel *SL* il profilo verticale tipico del vento medio vede una crescita monotona con la quota, mentre il profilo verticale della temperatura potenziale media e dell'umidità diminuisce con la quota, con gradienti in modulo inversamente proporzionali alla stessa. Dato che il *SL* è uno strato d'aria solo *concettualmente separato* dallo Strato Rimescolato sovrastante, è inevitabile che sia piuttosto complesso. A questo proposito, Kader e Yaglom (1990) hanno proposto un nuovo modello concettuale che vede il *SL* convettivo suddiviso in tre parti sovrapposte, ciascuna con caratteristiche ben precise:

1. il Dynamic Sublayer (*DSL*) che è la stratificazione a contatto col suolo, caratterizzata dal fatto che la produzione di energia dovuta alla *buoyancy* è del tutto trascurabile se paragonata all'analoga produzione meccanica. Quindi la turbolenza è totalmente di origine meccanica, prodotta prevalentemente lungo la direzione media del moto ed è ridistribuita in senso verticale solo dalle fluttuazioni di pressione. Nel *DSL* $-\zeta < 0.04$;

2. il Dynamic-Convective Sublayer (*DCSL*) è uno strato intermedio in cui $0.12 < -\zeta < 1.2$. In questa stratificazione l'energia meccanica è prodotta lungo la direzione del moto medio, mentre la *buoyancy* produce energia in direzione verticale;

3. il Free Convection Sublayer (*FCSL*) è una stratificazione per cui $-\zeta > 2.0$ e in cui a dominare è la *buoyancy* mentre praticamente scompare l'influenza della *friction velocity*.

Va subito posta attenzione al fatto che l'estensione verticale degli strati è *scalata* con la lunghezza di Monin-Obukhov L ($\zeta = z/L$). Se, per esempio, abbiamo $L = -20$ m, il *DSL* si estende fino a 0.8 metri, il *DCSL* fino a 24 metri ed il *FCSL* si estende da 40 metri in su. Ma se cambia L, queste quote cambiano. Come si vede, lo spessore di queste stratificazioni continua a cambiare a seconda del livello di convettività dell'aria. Se poi poniamo un palo di misura, a seconda del livello di convettività le varie misure raccolte nel tempo apparterranno ad uno strato piuttosto che ad un altro. Una delle caratteristiche peculiari del *SL* convettivo è che la turbolenza è continua, come abbiamo avuto occasione di vedere per esempio nella **Fig. 2.9**.

Poco prima del tramonto, quando viene meno questa disponibilità energetica, H_0 tende a zero, z/L tende a zero e l'atmosfera, dopo una breve fase di adiabaticità, dal punto di vista energetico viene abbandonata a sé stessa (che è poi la tipica situazione notturna) e il risultato finale di tutto ciò è che i grandi vortici convettivi scompaiono, la turbolenza decresce rapidamente diventando spesso intermittente ed è di tipo meccanico derivante solo dallo *shear*.

Quando poi H_0 è nullo (o circa nullo), il *SL* si trova in una *situazione adiabatica* (neutra) ed il profilo verticale della temperatura potenziale è praticamente costante. Anche se questa

situazione apparirebbe la più naturale, nelle normali situazioni di cielo sereno è una *situazione di transizione* che dura molto poco prima che si vengano ad instaurare le tipiche situazioni notturne. Se, però, estendiamo il concetto di situazione adiabatica anche a tutte quelle situazioni in cui H_0 è molto vicino a zero, esse sono decisamente più comuni e durature. Un tipico esempio è costituito dalle situazioni in cui il cielo è coperto (sia di giorno che di notte), il vento è forte e le manifestazioni meteorologiche violente (pioggia, temporali, ecc.) sono assenti. Inoltre, le zone polari o subpolari (artiche e antartiche) caratterizzate da una disponibilità di radiazione solare estremamente bassa sono, per lunghissimi periodi, in queste situazioni e le rilevazioni meteorologiche che vengono fatte in queste zone sono una fonte preziosa di studio (Gracev e al., 2007).

Quando viene meno l'apporto energetico di origine solare che determina, durante le ore convettive della giornata, un H_0 positivo (dal suolo all'atmosfera, quindi) che costituisce la sorgente convettiva di turbolenza, il *PBL* si trova con la sola generazione meccanica dallo *shear* del vento a dover tener viva la turbolenza. Inevitabilmente scompaiono i grandi vortici convettivi e rimangono solo vortici di piccole dimensioni localizzati in un uno strato di troposfera piuttosto piccolo, decisamente inferiore all'estensione normale di un *SL* convettivo. Siamo piombati, quindi, nelle *situazioni stabili* che sono normali nelle ore notturne. Il *PBL* stabile (prevalentemente notturno) è quindi quello strato di troposfera prossimo al suolo in cui risulta confinata la turbolenza che, come abbiamo detto, è sostanzialmente solo meccanica. Essa non risulta, come potrebbe apparire a prima vista, più semplice da descrivere, anzi è molto più complicata e, per certi versi, ancora poco nota. La principale ragione della sua complessità la si apprezza confrontando lo stato dell'atmosfera nelle situazioni convettive con quello delle situazioni stabili. Nelle situazioni convettive, lo sviluppo dei grossi vortici che coinvolgono gran parte del *PBL* è talmente violento da rendere sostanzialmente trascurabili le perturbazioni *esterne*, derivanti dai moti a mesoscala che appaiono solo nell'indirizzare nelle grandi linee i moti medi. L'assenza di queste grosse strutture coerenti nelle situazioni stabili fa sì che alla turbolenza meccanica si mischino in vario modo gli effetti derivanti dalle onde di gravità, gli effetti dovuti ai flussi di pendio, i movimenti orizzontali dell'aria a bassa frequenza (*meandering*) e gli effetti dello *shear* derivante dalla presenza dei *low-level jet*, cioè da un profilo di vento medio con un massimo a poca distanza dal suolo. Tuttavia, l'elemento più importante è ancora una volta la sorgente di calore del *PBL*. Nel *SL* convettivo era positiva (l'apporto solare) ed introduceva nel sistema energia a sostegno della turbolenza, invece nel *PBL* stabile tale sorgente è negativa ed è costituita dal progressivo raffreddamento del suolo e quindi dello strato d'aria sovrastante che determina una divergenza verticale di flusso radiativo. Diminuisce l'energia del sistema e quindi le perturbazioni locali del moto (i vortici) hanno sempre maggior difficoltà a sopravvivere. Quella del *PBL* stabile è dunque una situazione in continuo decadimento la cui caratteristica principale è quella di perdere in continuazione energia e di essere contaminata dagli effetti a mesoscala. La mancanza, poi, dei grandi vortici impedisce al *PBL* stabile (notturno) di essere individuato in modo semplice; di fatto la sua estensione verticale risulta piuttosto *sfumata*. Nonostante tutto, è ancora possibile individuare entro il *PBL* stabile un *SL*, anche se il concetto di *SL* in questo caso è anch'esso piuttosto sfumato. Quello che è certo è che la sua estensione verticale è notevolmente ridotta (dell'ordine della decina di metri e a volte del metro) e ciò fa sì che, facendo misure ai classici 10 metri dal suolo, in certe ore ci si trova entro il *SL* e nell'ora successiva al di sopra. Comunque, anche se si pecca di un eccesso di semplificazione, possiamo individuare per il *SL* stabile (ed anche per l'intero *PBL* stabile) due regimi fondamentali ed un regime di transizione:

1. regime di stabilità debole (quando $0 < \zeta < 0.06$). Questa situazione la si incontra in tutte le situazioni notturne con venti di velocità medio-elevata e con una elevata copertura del cielo che rende relativamente lento il raffreddamento del suolo. La turbolenza è ragionevolmente continua, con caratteristiche simili a quelle che si riscontrano nelle situazioni debolmente convettive e prossime all'adiabaticità. Se immaginiamo di seguire una situazione che evolve da $\zeta = 0$ a $\zeta < 0.06$, notiamo che con l'aumentare della stabilità si stabilisce all'interfaccia aria-suolo un flusso turbolento di calore sensibile H_0 negativo che va

crescendo (in modulo) con la stabilità in accordo con l'aumentare delle fluttuazioni di temperatura indotte dal gradiente verticale di temperatura potenziale.

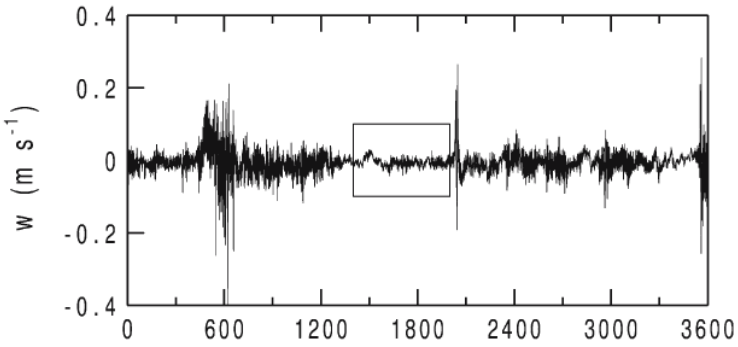


Fig. 8.7: esempio di intermittenza nel segnale della componente verticale del moto in una situazione altamente stabile (Mahrt e Vickers, 2006).

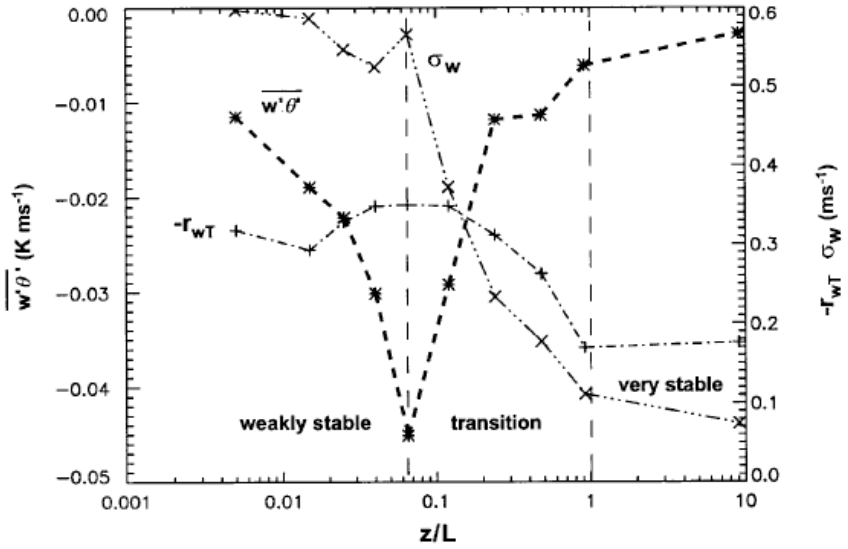


Fig. 8.8: andamento del flusso turbolento di calore sensibile $\overline{w\theta}$, di σ_w e del coefficiente di correlazione r_{wT} tra la componente verticale del vento e la temperatura potenziale nelle situazioni stabili (Mahrt et al, 1998)

2. <u>regime di forte stabilità</u> (quando $\zeta > O(1)$, cioè quando è dell'*ordine* dell'unità). Quando il parametro di stabilità ζ aumenta drasticamente oltre $O(1)$ la situazione risulta completamente diversa. Queste situazioni sono tipiche di notti con vento debole e cielo sereno, cosa che determina un forte raffreddamento radiativo del suolo. La turbolenza in questo caso è molto debole, intermittente anche nei pressi del suolo e spesso si origina nelle parti alte del *PBL* dove sono presenti *shear* del vento in concomitanza con i *low-level jet*. Questa è la situazione di *boundary layer* capovolto (*upside-down*). L'intermittenza che spesso si manifesta (costituita da brevi episodi di turbolenza anche elevata intervallati da periodi con fluttuazioni deboli o non misurabili), può essere spiegata (Mahrt, 1999) come una sequenza di eventi che iniziano con la riduzione dello *shear* medio per rimescolamento, cosa che comporta una riduzione della turbolenza sino al suo collasso. Tuttavia, senza il rimescolamento, lo *shear* medio ritorna ad operare rigenerando così turbolenza. Per questo scenario, il tempo caratteristico di scala per i periodi di quiete tra due periodi turbolenti dipende dal tempo richiesto per ristabilire lo *shear* medio. Il flusso H_0 viene

notevolmente limitato dalla forte stratificazione termica che si viene ad instaurare e che tende a sopprimere più o meno completamente i moti verticali con l'aumentare della stabilità. Nella **Fig. 8.7** viene presentato l'andamento nel tempo della componente verticale del moto in una situazione altamente stabile. Si vede immediatamente come questa situazione sia un chiaro esempio di turbolenza intermittente. Altri esempi sono presentati in Nakamura e Mahrt (2005).

3. regime di transizione (quando $0.06 < \zeta < O(1)$). In questo regime si assiste alla transizione progressiva da una situazione all'altra. In particolare, H_0, che nel regime debolmente stabile cresceva in modulo con la stabilità e nel regime fortemente stabile decresceva con essa, qui raggiunge un massimo in modulo come ben si vede nella **Fig. 8.8** (Mahrt et al, 1998) dove si nota come H_0 presenti una transizione netta nel proprio andamento con l'aumentare del valore del parametro di stabilità. Inoltre, si nota pure che nel regime a forte stabilità H_0 sostanzialmente raggiunge valori poco discosti da zero. In questa figura è anche mostrato l'andamento della σ_w (di cui parleremo estesamente poi e che in qualche modo rappresenta l'energia cinetica turbolenta) con il parametro di stabilità ed è subito evidente come σ_w nel regime di stabilità debole sia poco variabile con la stabilità, mentre muta drasticamente nel regime di transizione fino a giungere a valori sostanzialmente costanti e piccoli nel regime di forte stabilità.

Comunque, un problema che si incontra comunemente nelle situazioni stabili è come misurare in maniera corretta le variabili che quantificano la turbolenza. Se in un *PBL* convettivo strumenti ad alta precisione e a risposta rapida e tempi di mediazioni sufficientemente lunghi (dell'ordine dell'ora) consentono di ottenere stime affidabili per i valori medi ed i momenti d'interesse (principalmente varianze e covarianze), nel caso stabile la situazione non è più così semplice. I problemi principali incontrati sono:

- quando si è nel regime di elevata stabilità, la turbolenza è talmente debole che gli errori di misura risultano spesso dello stesso ordine di grandezza della risoluzione degli strumenti usati, contaminando severamente le misure stesse;
- i problemi di *self-correlation* aumentano col diminuire del valore assoluto dei momenti di interesse e ciò si riflette inevitabilmente nella stima di u_*, di T_* e delle deviazioni standard delle componenti del vento e della temperatura;
- la contaminazione, soprattutto dei segnali di velocità del vento, da parte dei moti a mesoscala crea differenze tra campagna e campagna sia oggettive (i moti a mesoscala variano da campagna a campagna) sia derivanti dai diversi tempi di mediazione adottati nelle singole campagne per la stima dei momenti. Infatti, per tentare di eliminare i moti a mesoscala (*meandering*) è naturale diminuire il periodo di mediazione impiegando per esempio periodi di 5 o 10 minuti. Tuttavia, mentre nelle situazioni convettive impiegare un qualsiasi tempo di mediazione dell'ordine dell'ora non portava significative controindicazioni, nelle situazioni stabili (soprattutto in quelle estremamente stabili) l'effetto dell'adozione di differenti tempi di mediazione, anche non molto differenti tra loro, può produrre effetti drammatici.

Al di là della complessità che presenta il *SL*, soprattutto nelle situazioni stabili, tale strato è quindi il luogo fisico di immissione di energia termica nel *PBL*, oltre che di produzione di energia meccanica derivante dal movimento medio delle masse d'aria dovute alle forzanti sinottiche. Con l'aiuto del MOST e dei risultati delle numerose campagne sperimentali ed anche del modello fluidodinamico del *PBL*, cerchiamo ora di individuare, se possibile, delle relazioni diagnostiche che descrivono il profilo verticale delle principali variabili caratteristiche.

8.3.2.1 Gradiente di velocità del vento e della temperatura media

La Similarità di Monin-Obukhov prevede che le grandezze rilevanti per descrivere il gradiente verticale delle variabili medie nel *SL* (velocità del vento, temperatura potenziale virtuale ed umidità) siano z, u_*, H_0 e β.

⇒ **Il gradiente della velocità media del vento**

Se ci concentriamo per ora sul gradiente della velocità media del vento, la variabile di interesse f della relazione (8.15) è dU/dz e la variabile f_0 con cui scalare il gradiente del vento deve essere scelta in modo tale da avere le medesime dimensioni di f (tempo^{-1}) e deve essere ottenuta da una combinazione delle 4 variabili rilevanti scelte dal MOST. È facile mostrare che:

$$f_0 = u_*/z \qquad [8.16]$$

In pratica, la (8.15) ci porta a dire che:

$$\frac{kz}{u_*}\frac{dU}{dz} = \Phi_m(\zeta) \qquad [8.17a]$$

dove con ζ abbiamo indicato il rapporto di stabilità z/L e $\Phi_m(\zeta)$ è la Funzione di Similarità per il gradiente del vento medio, funzione che è *universale* (almeno nell'ambito delle assunzioni fatte dal MOST) ma che va determinata sulla base delle misure sperimentali. Questa è la Relazione di Similarità di Monin-Obukhov per il gradiente verticale del vento medio. Ricordiamo che l'introduzione in questa relazione di Similarità della costante di von Karman k non è una conseguenza del MOST, ma deriva dalle considerazioni seguenti. Quando la convettività viene meno, la situazione tende alla neutralità ed H_0 tende ad annullarsi. In questo caso i parametri descrittori dello stato di turbolenza del *SL* si riducono ai soli z, u_* e β, cioè a soli 3 parametri. È facile verificare sulla base di quanto si è detto per il Teorema di Buckingham che:

$$\frac{dU/dz}{u_*/z} = Cost \qquad [8.17b]$$

Confrontando la (8.17a) con la (8.17b) si vede immediatamente come la costante k di von Karman sia l'inverso del valore costante che assume il gradiente verticale del vento medio normalizzato quando la convettività tende a zero. Abbiamo scoperto, quindi, che questa costante ha un significato fisico profondo.

Esercizio 7.2

Applichiamo il Teorema di Buckingham per ottenere la relazione (8.17b).
La variabile considerata è il gradiente di velocità media dU/dz che, per quanto detto, dipenderà solo da z, u_* e β. Quindi si avrà che:

$$\frac{dU}{dz} = Cost \cdot z^a u_*^b \beta^c$$

Ricordando che:

$$\left[\frac{dU}{dz}\right] = T^{-1} \qquad [z] = L$$

$$[u_*] = LT^{-1} \qquad [\beta] = LT^{-2}K^{-1}$$

dall'Analisi dimensionale si ottiene il seguente sistema lineare per i coefficienti a, b, c:

$$0 = a + +b + c$$
$$-1 = -b - 2c$$
$$0 = -c$$

cioè: a = -1, b = 1 e c = 0. Quindi, tenendo conto della relazione (7.17a), si ha che:

$$Cost = 1/k$$

La Relazione di Similarità per il profilo verticale della velocità media del vento permette di definire in maniera più precisa il *Coefficiente di Diffusività Turbolenta* K_m almeno entro il *SL*. In effetti, impiegando una chiusura del primo ordine ed un sistema di coordinate con l'asse *x* diretto lungo la direzione media del vento, la relazione tra l'unica componente non nulla dello *stress* superficiale ed il gradiente verticale della velocità del vento è:

$$\overline{u'w'} = -K_m \frac{dU}{dz} \qquad [8.17c]$$

Tuttavia, per definizione:

$$-\overline{uw} = u_*^2 \qquad [8.17d]$$

e quindi si ha che:

$$K_m = \frac{kzu_*}{\Phi_m(\zeta)} \qquad [8.17e]$$

Quindi il Coefficiente di Diffusività Turbolenta è direttamente proporzionale a u_* ed alla quota *z*, mentre è inversamente proporzionale alla Funzione universale $\Phi_m(\zeta)$.

⇒Il gradiente della temperatura potenziale media e di uno scalare

La Similarità di Monin-Obukhov si applica allo stesso modo anche al gradiente verticale della temperatura potenziale virtuale media. In questo caso la variabile di interesse *f* è dΘ/dz e la variabile f_0 con cui scalare il gradiente di temperatura potenziale virtuale media deve essere scelta in modo tale avere le medesime dimensioni di *f* (cioè Temperatura · Lunghezza^{-1}) e deve derivare da una combinazione delle 4 variabili rilevanti scelte dal MOST. Ricordando che $\overline{w\theta} = -u_* T_*$, è facile mostrare che:

$$f_0 = T_*/z \qquad [8.18]$$

In pratica, la relazione (8.15) ci porta a dire che:

$$\frac{kz}{T_*}\frac{d\Theta}{dz} = \Phi_h(\zeta) \qquad [8.19a]$$

dove $\Phi_h(\zeta)$ è la Funzione di Similarità per il gradiente della temperatura potenziale, funzione che è *universale* (almeno nell'ambito delle assunzioni fatte dal MOST), ma che deve essere determinata dalle misure sperimentali. Questa è la Relazione di Similarità di Monin-Obukhov per il gradiente verticale della temperatura potenziale media.

Anche in questo caso la Relazione di Similarità per il profilo verticale della temperatura potenziale virtuale media permette di definire in maniera più precisa il *Coefficiente di Diffusività Turbolenta* K_h. In effetti, impiegando una chiusura del primo ordine ed un sistema di coordinate con l'asse *x* diretto lungo la direzione media del vento, si ha che:

$$\overline{w'\theta_v'} = -K_h \frac{d\Theta}{dz} \qquad [8.19b]$$

Tuttavia, per definizione:

$$\overline{w'\theta_v'} = -u_* T_* \qquad [8.19c]$$

e quindi si ha che:

$$K_h = \frac{kzu_*}{\Phi_h(\zeta)} \qquad [8.19d]$$

Anche per l'umidità specifica è possibile impiegare i concetti di Analisi Dimensionale e quindi proporre una Relazione di Similarità per il suo gradiente verticale. Se la situazione che si considera è quella paradigmatica introdotta e se è garantita l'omogeneità orizzontale (De Bruin et al., 1999), allora è possibile impiegare il MOST ottenendo la relazione:

$$\frac{kz}{q_*}\frac{dQ}{dz} = \Phi_q(\zeta) \qquad [8.20a]$$

dove $q_* = -\overline{wq}/u_*$ è il parametro di scala caratteristico dell'umidità e $\Phi_q(\zeta)$ è la funzione universale di Similarità per l'umidità che, normalmente si considera identica all'analoga funzione universale per la temperatura. Questa è la Relazione di Similarità di Monin-Obukhov per il gradiente verticale dell'umidità specifica.

Estendendo i concetti che hanno portato alla relazione di Similarità per l'umidità specifica, è possibile definire anche una Relazione di Similarità per il gradiente del rapporto di mescolanza di uno scalare qualsiasi, anche se con alcune cautele (Hill, 1989). Se il valor medio del rapporto di mescolanza dello scalare è *C* ed il parametro di scala è la grandezza $c_* = -\overline{wc}/u_*$, la Relazione di Similarità di Monin-Obukhov per il gradiente verticale di uno scalare è:

$$\frac{kz}{c_*}\frac{dC}{dz} = \Phi_c(\zeta) \qquad [8.20b]$$

dove $\Phi_q(\zeta)$ è la funzione universale di Similarità per lo scalare che, normalmente si considera identica all'analoga funzione universale per la temperatura.

⇒ Considerazioni sulle Funzioni Universali di Similarità per i gradienti

Le funzioni $\Phi_m(\zeta)$, $\Phi_h(\zeta)$, $\Phi_q(\zeta)$ e $\Phi_c(\zeta)$ non possono essere dedotte da considerazioni di Similarità, ma possiamo comunque ottenere informazioni preziose sulla loro forma funzionale considerando il loro comportamento nelle tre possibili situazioni asintotiche:

- il limite neutrale che si ha quando $\zeta \to 0$;
- il limite della *local free-convection* che si ha quando la convettività aumenta drasticamente facendo sì che $\zeta \to -\infty$;
- il limite della elevata stabilità che si ha quando $\zeta \to \infty$.

a) *Limite neutrale*

In questo caso, confrontando nuovamente le due relazioni (8.17a) e (8.17b), si ha che:

$$\lim_{\zeta \to 0} \Phi_m(\zeta) = 1 \qquad [8.21a]$$

che è un ben preciso vincolo asintotico per la funzione di Similarità $\Phi_m(\zeta)$. Va notato che quando ζ tende a zero da valori negativi, il *PBL* cessa di essere convettivo per diventare adiabatico e quindi stabile. È questa una situazione di transizione ed in questa situazione effettivamente sussiste il vincolo asintotico (8.21a). Tale vincolo deve sussistere anche quando ζ tende a zero da valori positivi, cioè quando dalla stabilità si passa ad una situazione convettiva. Quindi $\Phi_m(\zeta)$ deve essere una funzione continua, ma non necessariamente derivabile.

Se facciamo considerazioni analoghe per il gradiente di temperatura potenziale media, vediamo che:

$$\lim_{\zeta \to 0} \Phi_h(\zeta) = C_h \qquad [8.21b]$$

Anche in questo caso il limite per $\zeta \to 0$ di $\Phi_h(\zeta)$ è un valore costante non necessariamente unitario. È facile capire che significato abbia C_h. Infatti, se ipotizziamo che nel *SL* sia definibile una diffusività turbolenta K_m per la quantità di moto, definita dalla (8.17e), ed una diffusività K_h per il calore, data dalla (8.19d), si definisce Numero Turbolento di Prandtl $Pr = K_m/K_h$ il rapporto tra le due diffusività. È facile mostrare che nel *SL* e quando $\zeta \to 0$:

$$Pr = \Phi_h(0)/\Phi_m(0) \qquad [8.21c]$$

Se fosse completamente vera la Teoria della *mixing lenght*, *Pr* dovrebbe valere 1, visto che non c'è una motivazione logica in quella teoria per affermare che la quantità di moto venga diffusa

meglio o peggio del calore. Tuttavia, le evidenze sperimentali hanno condotto (Högström, 1996) a ritenere che $Pr = 0.95$. Ciò comporta che:

$$\lim_{\zeta \to 0} \Phi_h(\zeta) = C_h = Pr \cdot \lim_{\zeta \to 0} \Phi_m(\zeta) \qquad [8.21d]$$

b) *Limite della local free convection*

Quando, invece, la convettività sale a valori elevatissimi (e quindi $\zeta \to -\infty$), la *friction velocity* diventa sempre più piccola e la turbolenza di origine meccanica risulta irrilevante se confrontata con quella di origine convettiva. In questo caso, detto *local free convection,* la turbolenza del *PBL* non acquista più energia dal moto medio delle masse d'aria, ma la riceve quasi esclusivamente dalle instabilità termiche generate dal flusso di calore proveniente dall'interfaccia aria-suolo. La *friction velocity* cessa, quindi, di essere un parametro di scala rilevante e la velocità media del vento tende ad annullarsi. Questo problema è stato trattato in dettaglio da Monin e Yaglom (2007a, pag.433-436) e da Wingaard et al (1971). Seguendo i ragionamenti di Monin e Yaglom, nei casi di fortissima convettività, l'Analisi Dimensionale applicata al gradiente di temperatura potenziale media ignora u_* e ciò comporta che:

$$\lim_{\zeta \to -\infty} \Phi_h(\zeta) = C_h \cdot \zeta^{-1/3} \qquad [8.22a]$$

dove C_h è una costante. A questo risultato si giunge facilmente applicando le consuete tecniche di Analisi Dimensionale. Un po' più complicato è definire il limite nelle situazioni di *local free convection* per Φ_m visto che in queste condizioni il profilo del vento è circa costante con la quota e quindi il gradiente è prossimo allo zero. Comunque, seguendo il complicato ragionamento di Monin e Yaglom, alla fine si ottiene che:

$$\lim_{\zeta \to -\infty} \Phi_m(\zeta) = C_m \cdot \zeta^{-1/3} \qquad [8.22b]$$

dove C_m è un'altra costante. In realtà, questo limite asintotico non è universalmente condiviso: in particolare, per esempio, Kader e Yaglom (1990) e Gracev et al. (1997) sono giunti a risultati differenti. Su questo punto ritorneremo nel seguito.

c) *Limite della elevata stabilità*

Consideriamo ora la situazione asintotica per cui $\zeta \to \infty$, cosa che può avvenire o perché $L \to 0$ a parità di quota o perché z aumenta a parità di L. In ogni caso, in questa situazione di elevata stabilità la stratificazione termica presenta un gradiente elevatissimo ed inibisce pesantemente la diffusione turbolenta verticale, distruggendo progressivamente i vortici di dimensioni maggiori. Ad un certo punto, i vortici presenti hanno dimensioni inferiori a z e ciò determina che le proprietà statistiche della turbolenza siano del tutto indipendenti dalla quota. Questa situazione è detta *local z-less scaling*. Se si applica l'Analisi Dimensionale e si ammette che i parametri rilevanti per la descrizione della turbolenza in queste situazioni siano u_*, T_* ed L, è immediato rendersi conto che:

$$\frac{dU}{dz} = c_m \frac{u_*}{L} \qquad \frac{d\Theta}{dz} = c_h \frac{T_*}{L} \qquad [8.23a]$$

cioè:

$$\Phi_m \approx z/L = \zeta \qquad \Phi_h \approx z/L = \zeta \qquad [8.23b]$$

⇒ **Numeri di Richardson**

Come abbiamo visto, per quantificare il livello di turbolenza in atmosfera, oltre al parametro adimensionale ζ (ovviamente usato solo entro il *SL*) sono stati utilizzati altri due parametri: il *Numero di Richardson Flusso* R_f ed il *Numero di Richardson Gradiente Ri* che sono parametri locali e che

possono essere usati anche al di fuori del *SL*. Questi due ultimi indicatori di stabilità nel *SL* possono essere facilmente posti in relazione alle Funzioni Universali di Similarità relative al gradiente verticale del vento medio e della temperatura potenziale virtuale. Riesaminiamoli ora alla luce della Teoria della Similarità di Monin-Obukhov. La definizione del *Numero di Richardson* Gradiente *Ri* entro il *SL* è la seguente:

$$Ri = \frac{g}{T}\frac{d\Theta/dz}{(dU/dz)^2} \qquad [8.26a]$$

Utilizzando le Relazioni di Similarità, si giunge facilmente alla conclusione che:

$$Ri = \zeta\frac{\Phi_h(\zeta)}{\left(\Phi_m(\zeta)\right)^2} \qquad [8.26b]$$

Per quanto riguarda, invece, il *Numero di Richardson Flusso* R_f, la sua definizione entro il *SL* è:

$$Rf = \frac{g}{T}\cdot\frac{\overline{w\theta}}{\overline{uw}\cdot dU/dz} \qquad [8.26c]$$

che, tenendo conto delle Relazioni di Similarità, diventa:

$$Rf = \frac{\zeta}{\Phi_m(\zeta)} \qquad [8.26d]$$

⇒ **<u>Le espressioni empiriche per Φ_m e Φ_h</u>**

Dagli anni ’70 ad oggi sono state realizzate moltissime campagne sperimentali volte a studiare le caratteristiche della turbolenza del *SL* nelle varie situazioni di convettività e stabilità che hanno prodotto un’enorme massa di misure e numerosissime correlazioni analitiche per $\Phi_m(\zeta)$ e $\Phi_h(\zeta)$. Ovviamente non possiamo elencare tutti i lavori sull’argomento; un breve elenco ed una essenziale descrizione delle principali campagne sperimentali lo si può trovare in Stull (1988) e in Sorbjan 1989. Qui citiamo solo i lavori pionieristici di Dyer e Hicks (1970), Businger et al. (1971) e Dyer (1974).

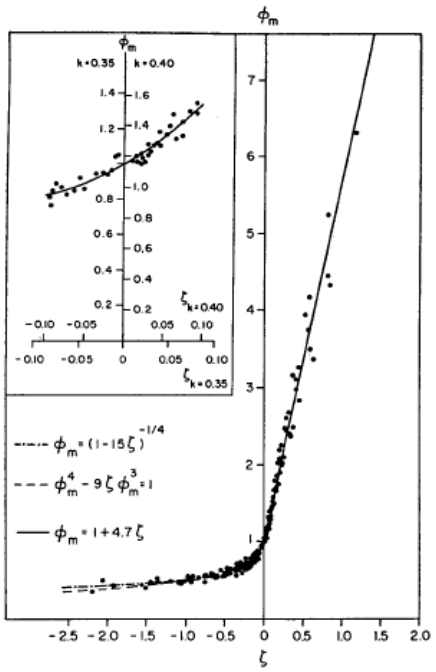


Fig. 8.9: misure di gradiente della velocità del vento in funzione di ζ (Businger et al., 1971). Si noti che in figura sono presenti le correlazioni per $\Phi_m(\zeta)$ proposte dagli Autori.

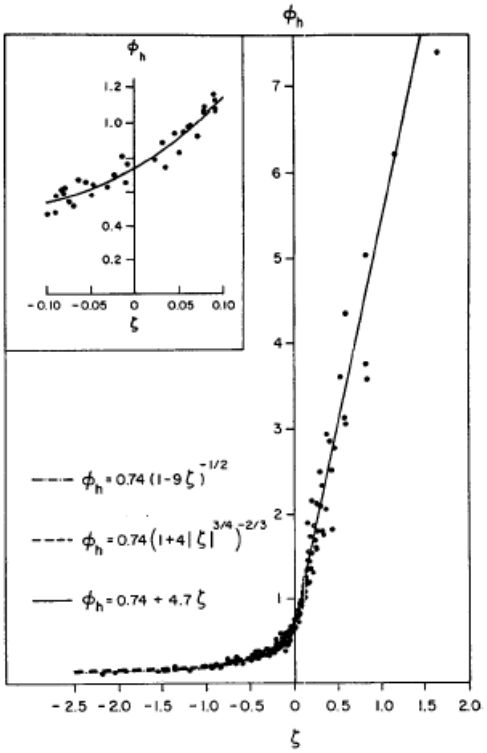


Fig. 8.10: misure di gradiente della temperatura potenziale media in funzione di ζ (Businger et al., 1971). Si noti che in figura sono presenti anche le correlazioni per $\Phi_m(\zeta)$ proposte dagli Autori.

Ciò che emerge da questa enorme massa di dati sperimentali e dalle numerose correlazioni proposte per $\Phi_m(\zeta)$ e $\Phi_h(\zeta)$ è che si riscontra una notevole variabilità dei risultati ottenuti tra le varie campagne, mentre ogni singola campagna sperimentale, se sufficientemente estesa nel tempo, presenta una limitata dispersione delle misure. Come esempio in questo senso, nelle **Fig. 8.9** e **Fig. 8.10** sono illustrati i risultati ottenuti da Businger et. al (1971), in cui la dispersione delle misure è estremamente limitata. Ci sono parecchie ragioni che possono spiegare le differenze riscontrate tra le diverse campagne sperimentali:

- le varie campagne sperimentali si sono susseguite per oltre mezzo secolo e hanno risentito inevitabilmente del progresso tecnologico che in questo lasso di tempo si è avuto sia negli analizzatori impiegati che negli strumenti di acquisizione ed elaborazione delle misure. Col tempo, gli strumenti di misura sono migliorati, in particolare l'anemometro ultrasonico triassiale indispensabile per determinare i flussi turbolenti di quantità di moto e di calore sensibile; quindi, quando si confrontano tra loro misure provenienti da campagne diverse non è raro, in realtà, confrontare livelli tecnologici diversi;

- una fonte di incertezza notevole è stata la lunga controversia sul valore da attribuire alla costante di von Karman. Su questo punto torneremo nel seguito; ad oggi ormai si è giunti con ragionevole certezza ad attribuire a questa costante il valore 0.4;

- un'altra fonte di incertezza sta nel tempo di mediazione adottato dai vari ricercatori per stimare medie e covarianze. Questo problema, come vedremo, è estremamente sottile e delicato, anche se lo è soprattutto nelle condizioni stabili. Oltre al tempo di mediazione, un altro elemento decisivo è la frequenza di campionamento utilizzata. Gli antiquati sistemi di acquisizione dati non consentivano frequenze di campionamento elevate e ciò comportava che parte della dinamica della turbolenza venisse persa a causa di questo

filtraggio involontario dei segnali meteorologici. Oggi ciò non è più un problema, come non è più un problema disporre di analizzatori a risposta rapida e con bassa distorsione;

- la Teoria di Similarità di Monin-Obukhov è stata sviluppata per la situazione paradigmatica di terreno piatto, omogeneità orizzontale e condizioni stazionarie. Le varie campagne sperimentali, pur essendo state condotte in luoghi i più simili possibili a quelli ideali, inevitabilmente risentono di disomogeneità locali e di situazioni non troppo vicine alla stazionarietà, che però costituiscono la realtà delle cose.

Nonostante ciò, il quadro che emerge è estremamente positivo, anche con i problemi segnalati, e la massa di misure disponibili costituisce la materia prima per ottenere un'espressione analitica per $\Phi_m(\zeta)$ e $\Phi_h(\zeta)$. Senza entrare nell'abbondante Letteratura in materia, è conveniente far riferimento ai lavori di Högström (1988, 1996) in cui l'Autore rivede tutta questa massa di misure e di relazioni semiempiriche, effettuandone una sintesi operativa.

a) Situazioni convettive

Se ci concentriamo su $\Phi_m(\zeta)$, questa sintesi ha prodotto per le situazioni convettive la relazione:

$$\Phi_m(\zeta) = (1 - \gamma_m \zeta)^{-1/4} \qquad [8.27a]$$

Va subito detto che questa correlazione non rispetta il limite asintotico della *free convection* e quindi il suo uso dovrebbe restare limitato a valori di $-\zeta \leq 1$. In Letteratura sono stati proposti molti valori per il coefficiente numerico γ_m, come si può vedere in Sorbjan (1989). Tuttavia, Högström (1996) consiglia l'uso di $\gamma_m = 19$ che, alla luce delle misure disponibili, sembra il più appropriato quando $-\zeta \leq 1$. Questa relazione è nota come Relazione di Businger-Dyer.

Quando la convettività è più elevata sembrerebbe più conveniente utilizzare relazioni analitiche differenti, come quella proposta da Carl e al. (1973) secondo cui:

$$\Phi_m(\zeta) = (1 - \alpha_m \zeta)^{-1/3} \qquad [8.27b]$$

dove α_m è un coefficiente numerico pari a 15. È immediato verificare che questa relazione, a differenza della precedente, rispetta il limite asintotico della *free convection*.

Una strada completamente diversa è stata percorsa da Kader e Yaglom (1990) utilizzando una nuova idealizzazione della struttura interna del *SL*. A tal proposito, come già anticipato, essi hanno proposto un nuovo modello concettuale che vede il *SL* suddiviso in tre stratificazioni sovrapposte, ciascuna con caratteristiche ben precise:

1. il Dynamic Sublayer (*DSL*) è la stratificazione a contatto col suolo dove la produzione meccanica per *buoyancy* è del tutto trascurabile rispetto all'analoga produzione meccanica, quindi la turbolenza è totalmente di origine meccanica ed è ridistribuita in senso verticale solo grazie alle fluttuazioni di pressione. Per questa ragione, il profilo medio del vento in questa stratificazione è sostanzialmente logaritmico. Nel *DSL* il parametro di stabilità risulta limitato dalla disuguaglianza $-\zeta < 0.04$;

2. il Dynamic-Convective Sublayer (*DCSL*) è uno strato intermedio dove il parametro di stabilità è confinato nell'intervallo $0.12 < -\zeta < 1.2$. In questa stratificazione l'energia meccanica è prodotta lungo la direzione del moto medio, quindi in senso orizzontale, mentre la *buoyancy* produce energia in direzione verticale. L'Analisi Dimensionale prescrive in questo strato che $\Phi_m(\zeta)$ sia proporzionale a $(-\zeta)^{-1/3}$, relazione che rispetta il limite asintotico della *free convection*;

3. il Free Convection Sublayer (*FCSL*) è una stratificazione per cui $-\zeta > 2.0$ e in cui domina la *buoyancy* e praticamente scompare l'influenza della friction velocity. Anche in questo caso, l'Analisi Dimensionale prescrive che $\Phi_m(\zeta)$ sia proporzionale a $(-\zeta)^{1/3}$, espressione che non rispetta il limite asintotico della *free convection*.

Pur avendo proposto espressioni analitiche per ognuno dei tre sub-strati, gli Autori hanno ottenuto anche una relazione analitica valida in un ampio intervallo di stabilità ($-40 < \zeta \leq 0$) così espressa:

$$\Phi_m(\zeta) = \left[\frac{1 + 0.625(-\zeta)^2}{1 + 7.5(-\zeta)}\right]^{1/3} \qquad [8.27c]$$

Anche se non è facile avere a disposizione misure che rappresentino le situazioni di *local free convection*, quelle disponibili sembrano dare ragione a queste correlazioni.

Sempre sulla base del lavoro di *review* fatto da Högström (1988), K. Wilson (2001) ha proposto una nuova relazione per $\Phi_m(\zeta)$ che tenta di coprire l'intero intervallo di stabilità esplorato dalle varie campagne sperimentali disponibili, che fosse facile da integrare e che rispettasse il limite asintotico della *free convection*. Tale relazione risulta espressa come:

$$\Phi_m(\zeta) = \left[1 + \gamma|\zeta|^{2/3}\right]^{-1/2} \qquad [8.27d]$$

in cui la costante γ vale 3.6. È facile verificare che questa relazione rispetta le condizioni di *local free convection*. Infatti, quando $-\zeta \to \infty$:

$$\lim_{|\zeta|\to\infty} \Phi_m(\zeta) = \gamma^{-1/2}|\zeta|^{-1/3} \qquad [8.27e]$$

Per apprezzare la differenza che esiste tra le diverse relazioni, nella **Fig. 8.11** sono stati mostrati i loro andamenti in un ampio intervallo di ζ. Si nota immediatamente come la relazione di Businger, con il coefficiente γ_m proposto da Hogstrom e la relazione di Wilson siano quasi coincidenti in ogni condizione di convettività, mentre la correlazione di Carl si discosta sempre in maniera apprezzabile. Diversa è la situazione per la correlazione di Kader e Yaglom. Essa, per le basse convettività ($\zeta > -0.5$) è sostanzialmente congruente con le altre correlazioni, ma quando ζ è prossimo a -1 essa presenta un minimo assoluto. A convettività crescente $\Phi_m(\zeta)$, invece, continua a crescere indefinitamente. I dati sperimentali considerati da Högström non sembrano confermare un andamento di questo genere, anche se, come detto, altre misure sperimentali sembrano farlo. Ad oggi le conferme sperimentali non sono conclusive in proposito, anche perché non è facile disporre di un insieme di misure sufficientemente numeroso per studiare con il dovuto dettaglio le situazioni di *local free convection*. A livello cautelativo è probabilmente preferibile non usare la relazione di Kader e Yaglom e nemmeno quella di Carl, optando, come fatto quasi universalmente, per la relazione di Businger o per quella di Wilson.

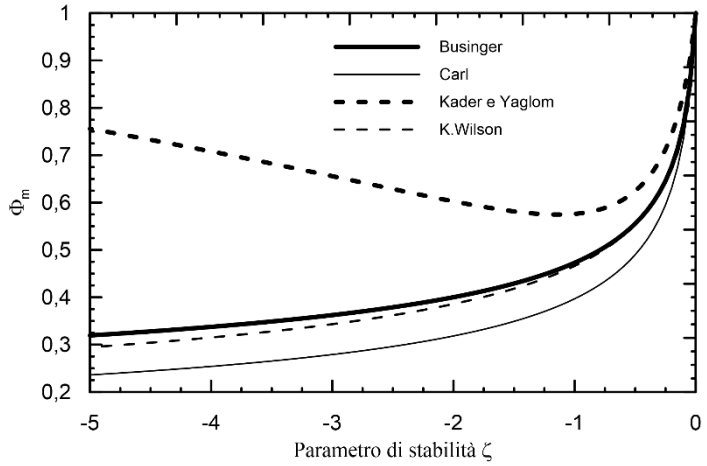


Fig. 8.11: confronto tra le diverse forme della funzione $\Phi_m(\zeta)$ in condizioni convettive

Per quanto riguarda la funzione Universale di Similarità $\Phi_h(\zeta)$, senza entrare nell'abbondante Letteratura in materia, conviene ancora una volta far riferimento ai lavori di Högström

(1988, 1996) in cui l'Autore rivede tutta la massa di misure e di relazioni semiempiriche, effettuandone una sintesi operativa. Da questa sintesi è emersa la relazione seguente:

$$\Phi_h(\zeta) = 0.95 \cdot (1 - \gamma_h \zeta)^{-1/2} \qquad [8.28a]$$

universalmente nota ed usata nelle applicazioni pratiche. Vanno subito fatte almeno due osservazioni. La prima riguarda il fatto che, quando $\zeta \rightarrow 0$, $\Phi_h(\zeta)$ non tende ad 1, ma ad un valore inferiore. Dalle misure disponibili risulta che tale valore per le situazioni neutre, che è poi il numero di Prandtl *Pr*, vale 0.95. La seconda considerazione è che questa correlazione non rispetta il limite asintotico di *free convection* e quindi il suo uso dovrebbe restare limitato a valori di $-\zeta \leq 1$. In Letteratura sono stati proposti molti valori per il parametro γ_h. Högström (1996) consiglia il valore $\gamma_h = 11.6$ che, alla luce delle misure disponibili, sembra il più appropriato quando $-\zeta \leq 1$. Quando però la convettività è più elevata, è conveniente utilizzare relazioni differenti. Una possibilità è costituita dal modello di Carl e al. (1973) secondo cui:

$$\Phi_h(\zeta) = (1 - \alpha_h \zeta)^{-1/3} \qquad [8.28b]$$

dove α_h è un coefficiente numerico pari a 15. È immediato verificare che questa relazione rispetta il limite asintotico della *free convection* e che è stato utilizzato, contrariamente a quanti si fa normalmente, *Pr* = 1. Questa relazione è stata usata molto raramente e l'abbiamo citata solo per ragioni storiche.

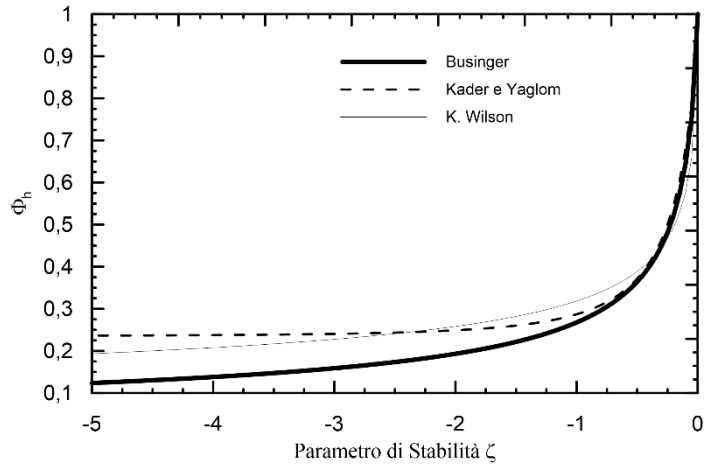


Fig. 8.12: confronto tra diverse Funzioni Universali di Similarità $\Phi_h(\zeta)$ in condizioni convettive

La seconda alternativa, il cui buon comportamento rispetto alle misure disponibili è documentato da Högström (1996), è ancora una volta il modello concettuale di Kader e Yaglom (1990) secondo cui (come già si è detto a proposito del gradiente del vento medio) il *SL* può essere ripartito in tre stratificazioni sovrapposte con caratteristiche della turbolenza profondamente differenti: il Dynamic Sublayer (*DSL*) in cui prevale la turbolenza meccanica, il Dynamic-Convective Sublayer (*DCSL*) in cui convivono sia la turbolenza meccanica che quella convettiva ed il Free Convection Sublayer (*FCSL*) in cui domina la turbolenza convettiva. Anche in questo caso gli Autori hanno ottenuto una relazione analitica valida per tutti i sottostrati del modello e in un ampio intervallo di stabilità ($-40 < \zeta \leq 0$) che risulta così espressa:

$$\Phi_h(\zeta) = 0.64 \cdot \left[\frac{3 + 2.5(-\zeta)^2}{1 + 10(-\zeta) + 50(-\zeta)^2}\right]^{1/3} \qquad [8.28c]$$

Quando $-\zeta \rightarrow 0$, il suo valore è 0.92 prossimo a 0.95 proposto da Högström e quando $\zeta \rightarrow -\infty$ essa tende al valore 0.23 e non a zero come le relazioni precedenti.

Sempre sulla base del lavoro di *review* fatto da Högström (1988), K. Wilson (2001) ha

proposto una nuova relazione per $\Phi_h(\zeta)$ che tenta di coprire l'intero intervallo di stabilità esplorato dalle campagne sperimentali e che risulta espressa come:

$$\Phi_h(\zeta) = 0.95 \cdot \left[1 + \gamma|\zeta|^{2/3}\right]^{-1/2} \qquad [8.28d]$$

dove γ questa volta vale 7.9. È immediato verificare che questa relazione rispetta le condizioni dell'Analisi Dimensionale anche in condizioni di *free convection* quando $-\zeta \to \infty$. Infatti:

$$\lim_{|\zeta|\to\infty} \Phi_h(\zeta) = 0.95 \cdot \gamma^{-1/2}|\zeta|^{-1/3} \qquad [8.28e]$$

Nella **Fig. 8.12** sono state rappresentate le varie forme della funzione $\Phi_h(\zeta)$ proposte dai vari Autori e, come si vede, per basse convettività esse sostanzialmente concordano, mentre più ci si avvicina al limite di *local free convection* più differiscono tra loro. In questo caso concettualmente sembrerebbe preferibile la relazione di Kader e Yaglom, anche se la sua forma analitica può creare difficoltà nelle applicazioni pratiche. Un buon compromesso sembrerebbe essere la relazione di K. Wilson.

b) Situazioni stabili

Molte sono state le misure nelle condizioni stabili da cui sono scaturite varie correlazioni per le relazioni di Similarità del gradiente della velocità del vento e della temperatura potenziale. Come abbiamo già detto, la situazione nelle condizioni stabili è decisamente complessa e ad oggi ancora poco nota. Ciò che emerge è che il MOST può essere applicato sicuramente nelle situazioni debolmente stabili, quando la turbolenza è sostanzialmente continua, mentre è ancora dibattuta la sua applicabilità nelle situazioni fortemente stabili.

Dalle misure realizzate in situazioni debolmente stabili e di transizione riviste da Högström (1996) si è giunti alle relazioni seguenti per le Funzioni Universali di Similarità del gradiente della velocità media del vento e della temperatura potenziale virtuale media:

$$\begin{aligned} \Phi_m(\zeta) &= (1 + \beta_m\zeta) \\ \Phi_h(\zeta) &= a_h^{-1}(1 + \beta_h\zeta) \end{aligned} \qquad [8.29a]$$

Ai coefficienti β_m, β_h e a_h sono stati attribuiti valori diversi dai diversi Autori ma, seguendo Högström (1988,1989), si può ritenere che i valori più attendibili siano i seguenti: $\beta_m = 5.3$, $\beta_h = 8.0$ e $a_h^{-1} = 0.95$. Questa forma funzionale rappresenta la realtà misurata nel regime debolmente stabile ed intermedio, cioè per $0 < \zeta < \zeta_c$ dove ζ_c è un valore di stabilità compreso tra 0.7 e 1. Nonostante l'intervallo di stabilità limitato della loro validità, queste relazioni rispettano il limite asintotico della elevata stabilità. In effetti è molto facile dimostrare che il gradiente della velocità del vento e della temperatura potenziale media risultano indipendenti dalla quota z (*z-less scaling*) quando $\zeta \to \infty$.

Beljaars e Holtslag (1991) hanno ottenuto due relazioni analitiche differenti, decisamente più complesse, che rappresentano abbastanza bene il comportamento del gradiente di velocità del vento e di temperatura potenziale nel regime di turbolenza debole e nel regime di transizione, mentre rappresentano meno bene il regime di turbolenza elevata. Esse sono così espresse:

$$\begin{aligned} \Phi_m(\zeta) &= 1 + a\zeta + b\zeta\{1 + c - d\zeta\}\,exp[-d\zeta] \\ \Phi_h(\zeta) &= a_h^{-1}\left[1 + a\zeta\left\{1 + \frac{2}{3}a\zeta\right\}^{1/2} + b\zeta\{1 + c - d\zeta\}\,exp[-d\zeta]\right] \end{aligned} \qquad [8.29b]$$

dove i valori numerici dei coefficienti sono $a = 1$, $b = 0.667$, $c = 5$ e $d = 0.35$. Rispetto alla loro versione originaria, qui la relazione per il gradiente di temperatura è stato moltiplicato per a_h^{-1} per garantirne la continuità a $\zeta = 0$. Queste relazioni coincidono sostanzialmente con le (8.29a) fino a $\zeta < 0.7$ (regime di debole stabilità), mentre si mantengono circa costanti per $0.8 < \zeta < 3$ (cioè per il regime di transizione e per una parte del regime ad alta stabilità). Oltre questo valore di stabilità, esse crescono senza limiti e questa è la loro unica nota negativa.

Cheng e Brutsaert (2005) sulla base di nuove campagne sperimentali hanno proposto la formulazione per $\Phi_m(\zeta)$ così espressa:

$$\Phi_m(\zeta) = 1 + a\left(\frac{\zeta + \zeta^b(1+\zeta^b)^{\frac{1-b}{b}}}{\zeta + (1+\zeta^b)^{1/b}}\right) \qquad [8.29c]$$

dove a = 6.1 e b = 2.5 e l'intervallo di stabilità per cui questa correlazione risulta utilizzabile si estende fino a $\zeta \leq$ 5. Il coefficiente a controlla la pendenza della zona lineare della curva del gradiente della velocità media nel regime a debole stabilità, mentre il coefficiente b controlla il limite superiore di questa zona di linearità e la curvatura nella zona di transizione. Gli Autori hanno ottenuto anche la relazione di Similarità per il gradiente della temperatura potenziale:

$$\Phi_h(\zeta) = a_h^{-1}\left[1 + c\left(\frac{\zeta + \zeta^d(1+\zeta^d)^{\frac{1-d}{d}}}{\zeta + (1+\zeta^d)^{1/d}}\right)\right] \qquad [8.29d]$$

ed anche in questo caso, per garantire che a ζ = 0 fosse assicurato il valore di 0.95, la versione originaria della relazione è stata moltiplica per a_h^{-1}. I valori dei coefficienti è c = 5.3 e d = 1.1 e la relazione è supportata dalle misure fino a $\zeta \leq 2$. Per stabilità superiori, le misure risultano decisamente disperse e non consentono di trarre conclusioni attendibili.

Il problema delle relazioni precedenti nelle situazioni ad elevata stabilità stava nel fatto che esse derivavano da campagne sperimentali *general purpose* in cui le situazioni stabili e molto stabili potevano non essere numerose. Quando è stato possibile realizzare estese campagne sperimentali nelle zone polari (soprattutto nelle basi antartiche) dominate per lunghi periodi da situazioni stabili, il numero di misure ad elevata stabilità è aumentato drasticamente. Ciò ha evidenziato la complessità insita nel realizzare effettivamente misure significative in tali situazioni, ma ha fatto emergere anche una complessità fenomenologica per molti versi ancora poco compresa e da cui non emerge chiaramente se il MOST sia realmente applicabile anche in queste situazioni estreme. Tuttavia, questa nuova disponibilità di misure ha consentito di migliorare, ipotizzando valido il MOST, le relative relazioni di similarità di gradiente. Un esempio significativo di ciò è dato da Gracev et al. (2007), secondo cui le relazioni di Similarità del gradiente verticale della velocità media del vento e della temperatura potenziale media sarebbero date dalle relazioni di Similarità seguenti:

$$\begin{aligned}\Phi_m(\zeta) &= 1 + \frac{a_m\zeta(1+\zeta)^{1/3}}{1+b_m\zeta} \\ \Phi_h(\zeta) &= a_h^{-1}\left[1 + \frac{a_h\zeta + b_h\zeta^2}{1 + c_h\zeta + \zeta^2}\right]\end{aligned} \qquad [8.29e]$$

dove a_m = 5 e b_m = 0.7692, a_h = 5, b_h = 5 e c_h = 3. Si noti che al limite per $\zeta \to \infty$ il gradiente della velocità del vento tende a $\zeta^{1/3}$ mentre l'analogo limite per il gradiente di temperatura è una costante. È facile dimostrare con l'Analisi Dimensionale che il limite asintotico per il gradiente del vento medio si ha se si ipotizza che u_* non abbia alcuna influenza. Sembrerebbe, quindi, che gli Autori abbiano individuato un regime *u_*-less scaling*. Le relazioni precedenti risultano scomode nelle applicazioni pratiche e per questo Gryanik e al. (2020) hanno rielaborato le medesime misure usate per dedurre le relazioni (8.29e) ottenendone una semplificazione analitica pur mantenendone il medesimo intervallo di validità. Il risultato ottenuto è rappresentato da:

$$\begin{aligned}\Phi_m(\zeta) &= 1 + \frac{a_m\zeta}{(1+b_m\zeta)^{2/3}} \\ \Phi_h(\zeta) &= Pr_0\cdot\left(1 + \frac{a_h\zeta}{1+b_h\zeta}\right)\end{aligned} \qquad [8.29f]$$

in cui Pr_0 = 0.98, a_m = 5.0, a_h = 5.0, b_m = 0.3 e b_h = 0.4.

Nella **Fig.8.13** sono presentati gli andamenti di $\Phi_m(\zeta)$ in un ampio intervallo di stabilità. Ciò che si nota immediatamente è che la relazione di Businger cresce linearmente con ζ senza alcuna limitazione, mentre le altre relazioni crescono decisamente più lentamente. Comunque, tranne che nell'intervallo di stabilità corrispondente al regime di stabilità debole ed in parte nel regime di transizione, le varie relazioni differiscono notevolmente ed è arduo decidere quale sia da preferire. Questa situazione di incertezza rispecchia la limitata conoscenza che ancora esiste per le situazioni stabili, soprattutto per quelle fortemente stabili e la probabile contaminazione delle misure derivante dai moti a mesoscala. Una situazione analoga si riscontra per la funzione Universale $\Phi_h(\zeta)$, come mostrato nella **Fig. 8.14**. La difficoltà legata alla misura delle variabili meteorologiche in situazioni di estrema stabilità ed in condizioni ambientali ostili può essere la causa delle diversità riscontrate nelle diverse campagne. Un esempio interessante è dato da Rodrigo e Anderson (2013) che evidenziano come le misure rilevate in una base antartica, opportunamente depurate dagli effetti a scale maggiori di quelle tipiche della turbolenza atmosferica, in realtà sembrerebbero ben rappresentate dalle semplici relazioni (8.29a).

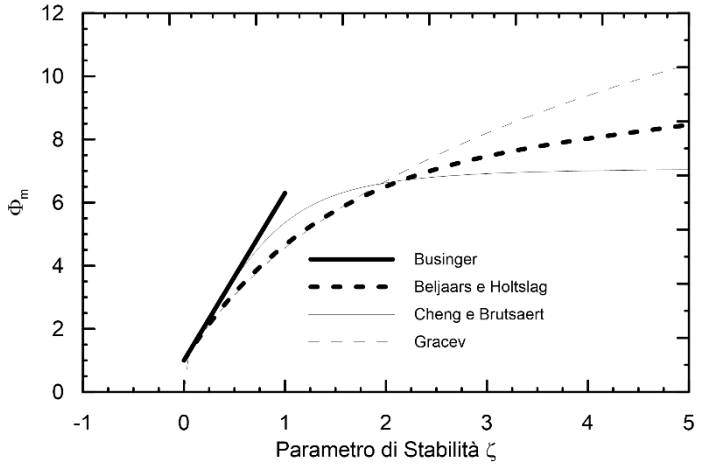


Fig. 8.13: confronto tra le diverse Funzioni Universali di Similarità $\Phi_m(\zeta)$ in condizioni stabili

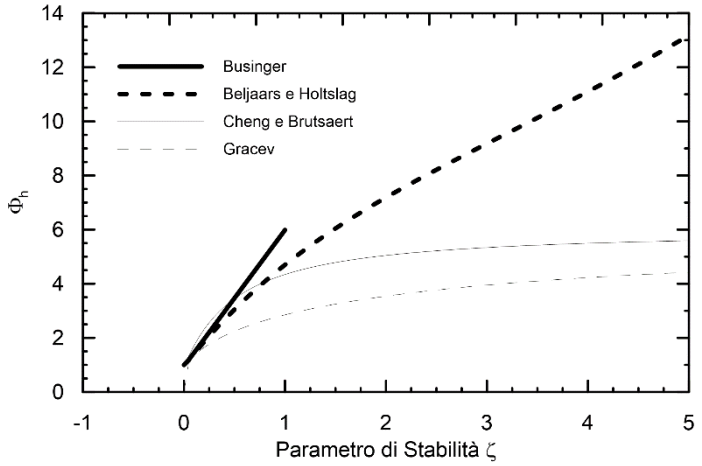


Fig. 8.14: confronto tra le diverse Funzioni Universali di Similarità $\Phi_h(\zeta)$ in condizioni stabili

Per come sono state introdotte, le Relazioni di Similarità del MOST per il gradiente di temperatura virtuale media e di velocità media del vento sembrerebbero avere una vita propria; in realtà, non è proprio così e di ciò discuteremo nel seguito. Per ora limitiamoci a queste semplici considerazioni legate agli eventi di elevata stabilità. La (8.26b) stabilisce quali relazioni ci debbano essere, in generale, tra il *Numero di Richardson Gradiente Ri* e le Funzioni di Similarità

$\Phi_m(\zeta)$ e $\Phi_h(\zeta)$, oltre al fatto che la (8.26d) stabilisce un'analoga relazione per il *Numero di Richadson Flusso* R_f. Sia R_f che *Ri*, in modo diversi, descrivono lo stato di turbolenza del *SL* ed una delle attività di ricerca attuali è proprio il loro studio alle altissime stabilità. Di tutto ciò tratteremo al termine di questo Capitolo. Ora è interessante verificare come le diverse formulazioni proposte per le due Funzioni Universali di Similarità producano *previsioni* differenti per R_f e *Ri* alle alte stabilità. In effetti è semplice verificare come:

- l'adozione delle forme di Businger e Dyer per $\Phi_m(\zeta)$ e $\Phi_h(\zeta)$ comporta che alle alte stabilità, quando $\zeta \to \infty$, R_f e *Ri* debbano tendere ad un valore finito, cosa che, come vedremo, è confermata dalla Teoria e dalle evidenze sperimentali per R_f, ma non per *Ri*;
- l'adozione delle forme di Beljaars e Holtslag per $\Phi_m(\zeta)$ e $\Phi_h(\zeta)$ comporta che il valore asintotico di R_f quando $\zeta \to \infty$ sia una costante, mentre alle alte stabilità *Ri* cresce proporzionalmente a $\zeta^{1/2}$;
- l'adozione delle forme di Cheng e Brutsaert per $\Phi_m(\zeta)$ e $\Phi_h(\zeta)$ porta come conseguenza diretta che quando $\zeta \to \infty$, sia *Ri* che R_f crescano linearmente con ζ;
- mentre l'adozione delle forme di Grachev per $\Phi_m(\zeta)$ e $\Phi_h(\zeta)$ ha come conseguenza diretta il fatto che *R*i cresca con la stabilità proporzionalmente a $\zeta^{1/3}$ e che R_f cresca proporzionalmente a $\zeta^{2/3}$.

Come si nota, ogni forma funzionale adottata per $\Phi_m(\zeta)$ e $\Phi_h(\zeta)$ ha come conseguenza un diverso comportamento di *Ri* e R_f alle stabilità estreme e quindi una diversa descrizione della realtà (Casasanta et al. 2021)

⇒ ***Il gradiente per gli scalari***

Anche se le evidenze sperimentali sono decisamente poche, ciò che da esse emerge è che il gradiente del valor medio del rapporto di mescolanza di uno scalare, in particolare dell'umidità, è descritto dalle medesime Relazioni di Similarità che descrivono il gradiente di temperatura con le medesime Funzioni Universali. Per questo, per il resto del Capitolo non parleremo più delle Relazioni di Similarità relative agli scalari, che riterremo identiche a quelle analoghe per la temperatura potenziale virtuale.

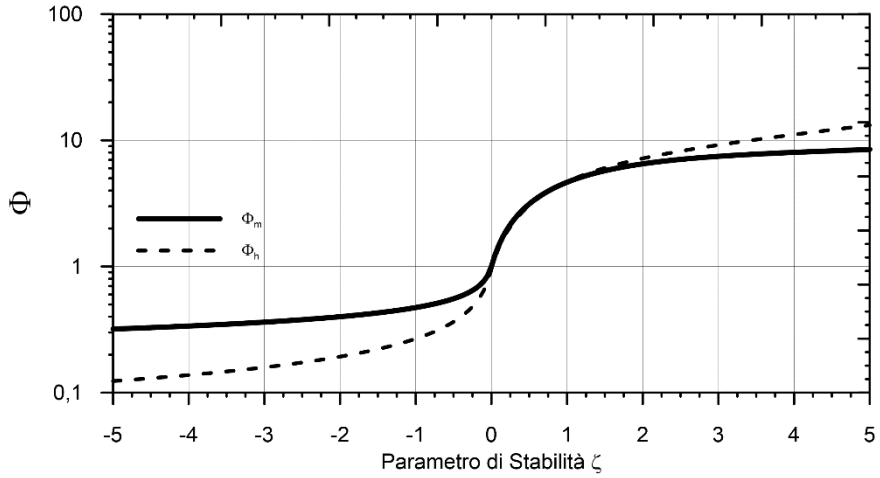


Fig. 8.15: andamento con la stabilità delle Funzioni Universali di similarità Φ_m e Φ_h

⇒ **Osservazioni operative**

In questo paragrafo abbiamo presentato le principali espressioni analitiche che sono state date alle Funzioni Universali di Similarità Φ_m e Φ_h. A questo punto sono opportuni alcuni consigli

operativi. Se è necessario impiegare queste Funzioni Universali nelle applicazioni pratiche, molte possono essere le scelte possibili, tuttavia una scelta molto condivisa è la seguente:

- nelle situazioni convettive, nonostante le limitazioni, sembrerebbe opportuno impiegare le relazioni di Businger (8.27a) e (8.28a) che si basano su una base sperimentale decisamente molto solida. Questa scelta non dovrebbe creare problemi se la convettività non è estrema;
- nelle situazioni stabili è opportuno impiegare le relazioni di Beljaars e Holtslag (8.29a). Anche se tali relazioni presentano alcuni inconvenienti alle elevate stabilità, il loro comportamento generale è decisamente buono, soprattutto alle medie e basse latitudini.

La scelta così operata è quella illustrata nella **Fig.8. 15**.

8.3.2.2 Profilo della velocità del vento e della temperatura media

Ottenuta la Relazione di Similarità per il gradiente verticale della velocità media del vento e della temperatura potenziale virtuale media, è inevitabile cercare una relazione analitica anche per il relativo profilo.

Consideriamo, inizialmente, il profilo verticale della velocità media del vento. Concettualmente si tratta *solo* di integrare in maniera opportuna la Relazione di Similarità del gradiente verticale tra due opportuni limiti di integrazione e con opportune condizioni al contorno. Il limite di integrazione superiore è la generica quota z dove vogliamo ottenere il valore della velocità media del vento e che, ovviamente, deve stare con certezza all'interno del *SL*. Il limite inferiore, a priori, dovrebbe essere $z = 0$, cioè l'interfaccia aria-suolo. Tuttavia, ricordando che a diretto contatto col suolo esiste sempre uno piccolo strato d'aria (il *roughness layer*) che avvolge tutti gli elementi di rugosità presenti alla superficie e che ha un'estensione verticale dell'ordine di z_0, poniamo come limite inferiore di integrazione proprio z_0 in cui ipotizziamo che il profilo medio del vento si annulli rispettando così la *no slip condition*. Una volta stabiliti i limiti di integrazione corretti, la procedura normalmente seguita è quella proposta da Paulson (1970) e Panofsky e Dutton (1983) che porta ad una funzione di profilo di una forma tale da risultare logaritmica quando $\zeta \to 0$. In pratica si opera nel modo seguente:

- indichiamo con S il gradiente adimensionale del vento medio, cioè:

$$S = \frac{kz}{u_*}\frac{dU}{dz} = \Phi_m(\zeta) \qquad [8.30a]$$

- aggiungiamo e togliamo 1 al membro di destra della (8.30a) ed evidenziamo il gradiente della velocità del vento, ottenendo:

$$\frac{dU}{dz} = \frac{u_*}{kz} \cdot \left[1 - \left(1 - \Phi_m(\zeta)\right)\right] \qquad [8.30b]$$

- integriamo da $z = z_0$, dove $U = 0$, ad una quota generica z ottenendo:

$$U = \frac{u_*}{k} \cdot \left[\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z} - \int_{z_0}^{z} \frac{1 - \Phi_m(\zeta)}{z} dz\right] \qquad [8.30c]$$

cioè:

$$U = \frac{u_*}{k}\left[ln\left(\frac{z}{z_0}\right) - \Psi_m(\zeta) + \Psi_m(\zeta_0)\right] \qquad [8.30d]$$

in cui la funzione:

$$\Psi_m(x) = \int_{z_0/L}^{z/L} \frac{1 - \Phi_m(x)}{x} dx \qquad [8.30e]$$

è la Funzione di Similarità del Profilo verticale del vento medio nel *SL* e $\zeta_0 = z_0/L$. È facile verificare come normalmente il termine $\Psi_m(\zeta_0)$ sia trascurabile. È facile inoltre dimostrare che tra le funzioni Ψ_m e Φ_m esiste la relazione seguente:

$$\Phi_m(\zeta) = 1 - \zeta \frac{d}{dz}\Psi_m(\zeta) \qquad [8.30f]$$

- questa procedura consente di ottenere un'espressione analitica per il profilo verticale della velocità media del vento che è sostanzialmente il ben noto profilo logaritmico (tipico delle situazioni adiabatiche) cui si somma una *correzione* dovuta alla stabilità.

L'importante risultato ottenuto è che la relazione (8.30e) è una Relazione Universale del profilo verticale del vento medio nel *SL*: infatti, essa rappresenta il profilo verticale della velocità del vento in ogni situazione di stabilità ed in presenza di ogni situazione sinottica, e per il suo utilizzo basta solo conoscere il valore della lunghezza di rugosità z_0, *della friction velocity* u_* e di *L*. Di fatto, questa relazione, totalmente diagnostica, sostituisce, nella semplice situazione paradigmatica fin qui considerata (stazionarietà ed omogeneità orizzontale), le leggi differenziali del moto. Da qui la sua universale celebrità dovuta anche alla sua potenza applicativa. Va, però, ricordato ancora una volta che essa, essendo il risultato della sola Analisi Dimensionale, costituisce solo una buona approssimazione della realtà.

Passiamo ora al profilo verticale della temperatura potenziale virtuale che, come abbiamo precedentemente affermato, può essere applicato a qualsiasi altro scalare (l'umidità, per esempio). Una volta nota la Relazione di Similarità per il gradiente verticale della temperatura, la procedura di integrazione è identica a quella utilizzata per ricostruire il profilo della velocità media del vento. Va solo ricordato che l'estremo inferiore di integrazione viene posto ora alla quota z_{0h}, che è la lunghezza di rugosità del calore, ed in corrispondenza a tale quota la temperatura potenziale virtuale deve essere esattamente quella dell'interfaccia aria-suolo, cioè Θ_0. Come abbiamo visto, la struttura tipica della $\Phi_h(\zeta)$ è il prodotto di *Pr* e di una funzione analitica più o meno complessa. È consuetudine effettuare l'integrazione di $\Phi_h(\zeta)/Pr$ e moltiplicare poi per *Pr* il risultato ottenuto. Ovviamente, se al posto della temperatura stiamo considerando il profilo di umidità, il valore a z_{0q} (lunghezza di rugosità dell'umidità che, per mancanza di informazioni specifiche riteniamo uguale a z_{0h}) sarà l'estremo inferiore di integrazione cui corrisponderà il valore all'interfaccia aria-suolo dell'umidità specifica q_0. La Relazione di Similarità per il profilo verticale della temperatura potenziale media sarà quindi data dalla relazione seguente, molto simile all'analoga per il profilo del vento:

$$\Theta = \Theta_0 + \frac{Pr \cdot T_*}{k}\left[\ln\left(\frac{z}{z_{0h}}\right) - \Psi_h(\zeta) + \Psi_h(\zeta_{0h})\right] \qquad [8.31a]$$

in cui:

$$\Psi_h(x) = \int_{z_{0h}/L}^{z/L} \frac{1 - \Phi_h(x)}{x} dx \qquad [8.31b]$$

è la Funzione Universale di Similarità del profilo verticale della temperatura potenziale virtuale media nel *SL* e $\zeta_{0h} = z_{0h}/L$. Anche in questo caso è facile verificare che normalmente il termine $\Psi_h(\zeta_{0h})$ è trascurabile. Il profilo di temperatura ottenuto è del tutto *universale* e sostituisce completamente, almeno nei limiti di validità del MOST, il modello fluidodinamico del *PBL*. Perché le Relazioni di Similarità di profilo (8.30a) e (8.31a) possano essere realmente impiegate bisogna che sia nota la forma analitica delle due Funzioni di Similarità $\Psi_m(\zeta)$ e $\Psi_h(\zeta)$.

Profilo della velocità media del vento

Occupiamoci, per prima cosa, delle situazioni convettive. Se ci limitiamo a considerare stabilità tali per cui $-\zeta \leq 1$, è possibile impiegare la relazione (8.27a) per descrivere il gradiente della velocità del vento. Applicando la procedura per ottenere la funzione di profilo, si giunge alla

celebre relazione seguente, nota come *relazione di Businger-Dyer*:

$$\Psi_m(\zeta) = \ln\left[\left(\frac{1+x^2}{2}\right)\cdot\left(\frac{1+x}{2}\right)^2\right] - 2\tan^{-1}x + \frac{\pi}{2} \qquad [8.32a]$$

dove:

$$x = (1-\gamma_m\zeta)^{1/4} = \Phi_m(\zeta)^{-1} \qquad [8.32b]$$

Questa relazione, pur molto utilizzata, risente delle limitazioni proprie della funzione $\Phi_m(\zeta)$ originaria e quindi non dovrebbe essere impiegata in situazioni prossime alla *free convection*. La sua struttura analitica è, però, piuttosto complessa e scomoda per le applicazioni pratiche e spesso si è cercato di semplificarla. Come esempio di ciò vale la pena ricordare la formula di Jensen riportata da van Ulden e Holtslag (1985) espressa dalla semplice relazione seguente:

$$\Psi_m(\zeta) = (1-\gamma_m\zeta)^{1/4} - 1 \qquad [8.32c]$$

e la relazione sviluppata da Hsu e al. (1999):

$$\Psi_m(\zeta) = a(-\zeta)^b \qquad [8.32d]$$

dove a = 1.0496 e b =0.4591.

Un'alternativa possibile è quella che si ottiene considerando la relazione di Carl (8.27b) che porta alla relazione di profilo seguente:

$$\Psi_m(\zeta) = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{y^2+y+1}{3}\right) - \sqrt{3}\,tan^{-1}\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \qquad [8.33a]$$

dove $y = \Phi_m(\zeta)^{-1}$. Questa relazione non è molto usata, anche per l'incertezza insita nel coefficiente a_m della (8.27b).

Nelle situazioni di elevata convettività probabilmente è più conveniente basarsi sulla (8.27d) che integrata porta a (K. Wilson, 2001):

$$\Psi_m(\zeta) = 3\,ln\left(\frac{1+\sqrt{1+\gamma_m|\zeta|^{2/3}}}{2}\right) \qquad [8.33b]$$

la cui applicabilità è molto più generale. Come si è detto, in questo caso γ_m vale 3.6.

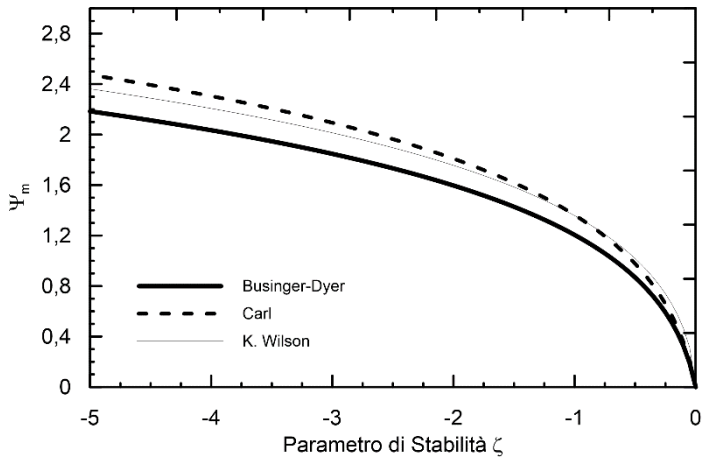


Fig. 8.16: confronto tra diverse Funzioni Universali di Similarità Ψ_m (ζ) in condizioni convettive

Nella **Fig. 8.16** sono presentati gli andamenti della Funzione Universale Ψ_m relativa alle situazioni convettive secondo i vari Autori. Come si nota, c'è una certa differenza tra le relazioni proposte, cosa comunque prevedibile. Sicuramente nelle applicazioni pratiche, la relazione più utilizzata è quella di Businger-Dyer. Essa, come si è visto, non rispetta però il limite asintotico della *free convention* e ciò, almeno dal punto di vista teorico, pone alcuni problemi. Per ovviare

a ciò, Akylas e Tombrou (2005) hanno sviluppato una nuova formulazione per $\Psi_m(\zeta)$ che alle basse convettività sostanzialmente coincide col la formula di Businger-Dyer, ma alle alte convettività rispetta il limite asintotico della free convention. Tuttavia, la complessità analitica di questa formulazione ne scoraggia l'applicazione pratica.

Consideriamo, ora, le situazioni stabili. Se ci limitiamo a considerare stabilità deboli (praticamente quando $\zeta \leq 0.5$), possiamo prendere in considerazione la Relazione di Similarità del gradiente (8.29a) che, integrata, porta alla relazione seguente:

$$\Psi_m(\zeta) = -\beta_m \zeta \qquad [8.34a]$$

nota come *relazione di Businger-Dyer per le situazioni stabili*. Il suo utilizzo richiede prudenza, visto il ristretto intervallo di stabilità per cui risulta corretta.

Una migliore alternativa quando si debbano considerare stabilità più elevate è quella di considerare la relazione (8.29b) di Beljaars e Holtslag (1990) che rappresenta abbastanza bene il comportamento del gradiente di velocità del vento nel regime di debole stabilità e nel regime di transizione, mentre rappresenta meno bene il regime di elevata stabilità. La sua integrazione porta alla Funzione Universale seguente:

$$\Psi_m(\zeta) = -a\zeta - b\left(\zeta - \frac{c}{d}\right) exp(-d\zeta) - \frac{bc}{d} \qquad [8.34b]$$

dove i coefficienti *a, b, c, d* valgono rispettivamente 1, 0.667, 5, 0.35. Van Ulden e Holtslag (1985) hanno proposto un'altra Relazione di Similarità che può essere applicata nelle stesse condizioni di stabilità e che è decisamente più semplice:

$$\Psi_m(\zeta) = -17[1 - exp(-0.29\zeta)] \qquad [8.34c]$$

Queste due relazioni sono praticamente indistinguibili ed entrambe si riconducono alla (8.34a) quando $\zeta < 1$.

Se si considera invece la Relazione di Similarità del gradiente (8.29c) proposta da Cheng e Brutsaert (2005) e valida per $\zeta \leq 5$, la Funzione Universale di profilo che si ottiene risulta espressa dalla relazione:

$$\Psi_m(\zeta) = -a\, ln\{\zeta + [1 + (\zeta)^b]^{1/b}\} \qquad [8.34d]$$

dove i coefficienti presenti sono $a = 6.1$ e $b = 2.5$.

Per concludere, se è necessario trattare stabilità veramente elevate, una possibile alternativa è quella di impiegare la relazione (8.29e) di Gracev et al (2007) la cui integrazione porta alla complicata relazione seguente:

$$\begin{aligned}\Psi_m(\zeta) = &-\frac{3a_m}{b_m}(x-1) + \frac{a_m B_m}{2b_m} \\ &\cdot\left[2\, ln\frac{x+B_m}{1+B_m} - ln\frac{x^2 - xB_m + B_m^2}{1 - B_m + B_m^2}\right. \\ &\left. + +2\sqrt{3}\left(\tan^{-1}\left(\frac{2x - B_m}{\sqrt{3}B_m}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2 - B_m}{\sqrt{3}B_m}\right)\right)\right.\end{aligned} \qquad [8.34e]$$

dove $a_m = 5$, $b_m = a_m/6.5$, $B_m = ((1\text{-}b_m) / b_m)^{1/3}$ e $x = (1 + \zeta)^{1/3}$. La sua forma semplificata da Gryanik et al. (2020) risulta data da:

$$\Psi_m(\zeta) = -3\frac{a_m}{b_m}\left[(1 + b_m\zeta)^{1/3} - 1\right] \qquad [8.34f]$$

dove $a_m = 5.0$ e $b_m = 0.3$.

In **Fig. 8.17** sono riportati gli andamenti della Funzione Universale Ψ_m secondo i vari Autori. Come si vede, sorprendentemente tutte le relazioni sono molto simili, tranne quella di Businger che si discosta decisamente dalle altre a valori di stabilità superiori a $\zeta = 0.5$, come previsto.

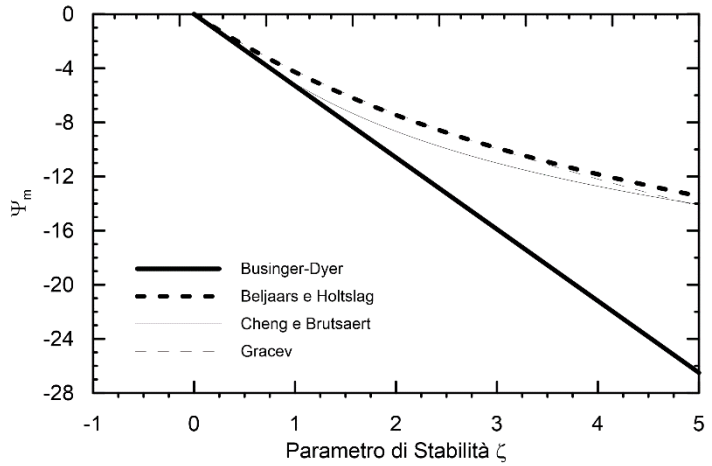


Fig. 8.17: confronto tra le diverse Funzioni Universali di Similarità Ψ_m (ζ) in condizioni stabili

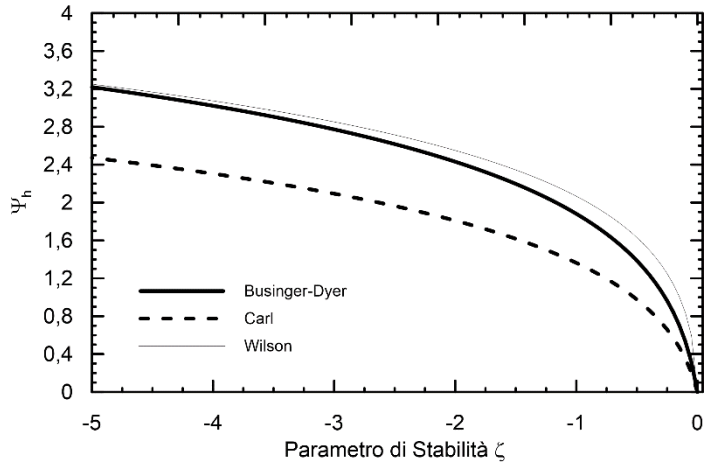


Fig. 8.18: confronto tra le diverse Funzioni Universali di Similarità Ψ_h (ζ) in condizioni convettive

Profilo della temperatura potenziale virtuale media

Iniziamo con le situazioni convettive. Se ci limitiamo a considerare stabilità tali per cui - $\zeta \leq 1$, è possibile impiegare la relazione (8.28a) ottenendo la *relazione di Businger-Dyer per il profilo verticale della temperatura potenziale virtuale media*:

$$\Psi_h(\zeta) = 2\ln\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\gamma_h\zeta}\right)\right] \qquad [8.35a]$$

che, nonostante il limitato campo di applicabilità (-$\zeta \leq 1$), è una delle relazioni più utilizzate nelle applicazioni.

Se, invece, si considerano situazioni a più elevata convettività, una delle possibilità, anche se poco utilizzata nella pratica, è quella di prendere a riferimento la Relazione di Similarità del gradiente verticale di temperatura (8.28b) di Carl, ottenendo la relazione di profilo data da:

$$\Psi_h(\zeta) = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{y^2+y+1}{3}\right) - \sqrt{3}\ln\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \qquad [8.35b]$$

dove $y = \Phi_h(\zeta)^{-1}$. Probabilmente una scelta migliore per le alte convettività è costituita dal considerare la Funzione Universale (8.28d) proposta da Wilson (2001) che conduce alla funzione di profilo così espressa:

$$\Psi_h(\zeta) = 3\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+\gamma_h|\zeta|^{2/3}}}{2}\right) \qquad [8.35c]$$

la cui applicabilità è molto più generale. In questo caso $\gamma_h = 7.9$.

Nella **Fig. 8.18** sono presentati gli andamenti con ζ delle varie relazioni riportate per Ψ_h. Come si vede, quella di Businger-Dyer e quella di Wilson sono sostanzialmente coincidenti, mentre come sempre la relazione di Carl si allontana dalle altre.

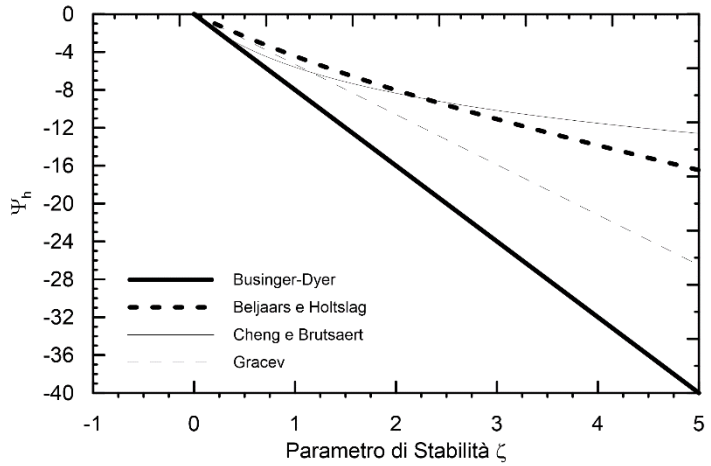


Fig. 8.19: confronto tra le diverse Funzioni Universali di Similarità Ψ_h (ζ) in condizioni stabili

Consideriamo ora le <u>situazioni stabili.</u> Nelle situazioni debolmente stabili, come nel caso del profilo della velocità media del vento, normalmente si utilizza la Funzione Universale di gradiente (8.29a) che, una volta integrata, porta alla relazione di profilo:

$$\Psi_h = -\beta_h\zeta \qquad [8.36a]$$

Se, però, si debbono trattare situazioni decisamente più stabili, le alternative possibili sono:

- usare la Funzione Universale di gradiente (8.29b) di Beljaars e Holtslag (1990), ottenendo:

$$\Psi_h = -\left(1+\frac{2}{3}a\zeta\right)^{3/2} - b\left(\zeta-\frac{c}{d}\right)exp(-d\zeta) - \frac{bc}{d} + 1 \qquad [8.36b]$$

  dove i coefficienti *a, b, c, d* valgono rispettivamente 1, 0.667, 5, 0.35. Questa relazione può essere impiegata nelle situazioni di stabilità debole e nel regime di transizione.

- utilizzare la (8.29d) proposta da Cheng e Brutsaert (2005) e valida per $\zeta \le 5$. In questo caso si giunge alla relazione:

$$\Psi_h = -c\cdot ln\{\zeta + [1+\zeta^d]^{1/d}\} \qquad [8.36c]$$

  dove le costanti *c* e *d* valgono rispettivamente 5.3 e 1.1.

- infine, quando si considerano stabilità elevatissime, probabilmente la condotta più conveniente è riferirsi alla Funzione Universale di gradiente di Gracev e al. (2007) la cui integrazione conduce alla complicata relazione seguente:

$$\Psi_h = -\frac{b_h}{2}ln(1+c_h\zeta+\zeta^2) + \left(-\frac{a_h}{B_h}+\frac{b_hc_h}{2B_h}\right)\cdot\left(ln\frac{2\zeta+c_h-B_h}{2\zeta+c_h+B_h} - ln\frac{c_h-B_h}{c_h+B_h}\right) \qquad [8.36d]$$

dove $a_h = 5$, $b_h = 5$ $c_h = 3$ e $B_h = \sqrt{c_h^2 - 4} = \sqrt{5}$. La semplificazione di questa relazione realizzata da Gryanik et al. (2020) assume la forma funzionale:

$$\Psi_h = -Pr_0 \frac{a_h}{b_h} \cdot ln(1 + b_h\zeta) \qquad [8.36e]$$

dove $Pr_0 = 0.98$, $a_h = 5.0$ e $b_h = 0.4$.

Il confronto tra le relazioni precedenti è presentato in **Fig. 8.19** da cui vediamo come la relazione di Businger cresca (in modulo) senza limite con la stabilità, mentre le altre relazioni presentano una crescita decisamente più lenta e quindi un comportamento più realistico. È degno di nota il fatto che le relazioni di Beljaars e Holtslag e quella di Cheng e Brutsaert sono molto vicine tra loro in un intervallo di stabilità piuttosto ampio ($\zeta < 3$).

Osservazioni operative

In questo paragrafo abbiamo presentato le principali espressioni analitiche che sono state date alle Funzioni Universali di Similarità Ψ_m e Ψ_h. A questo punto sono opportuni alcuni consigli operativi. Se è necessario impiegare queste Funzioni Universali nelle applicazioni pratiche, molte possono essere le scelte possibili, tuttavia una scelta molto condivisa è la seguente:

- nelle situazioni convettive, nonostante le limitazioni, sembrerebbe opportuno impiegare le relazioni di Businger (8.32a) e (8.35a) che si basano su una base sperimentale molto solida. Questa scelta non dovrebbe creare problemi se la convettività non è estrema;
- nelle situazioni stabili è opportuno impiegare le relazioni di Beljaars e Holtslag (8.34b) e la (.30b). Anche se tali relazioni presentano alcuni inconvenienti alle elevate stabilità, il loro comportamento generale è decisamente buono.

La scelta così operata è quella illustrata in **Fig.8.20**.

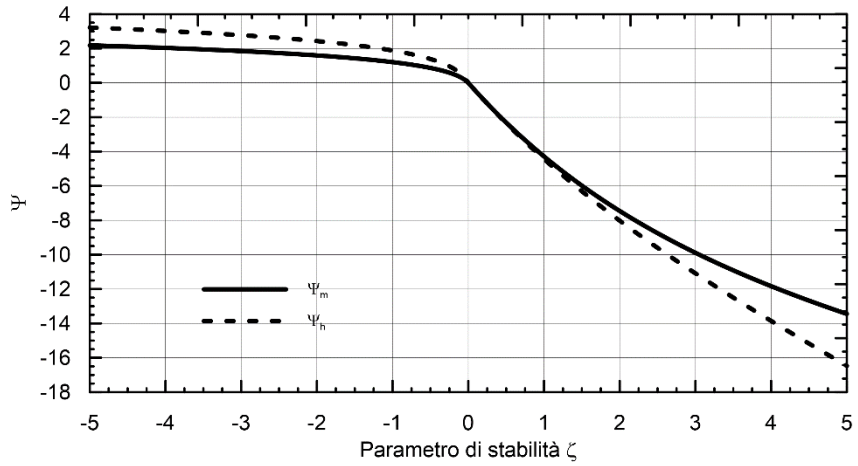


Fig. 7.20: andamento con la stabilità delle Funzioni Universali di similarità Ψ_m e Ψ_h

Per concludere, la Teoria della Similarità di Monin-Obukhov è giunta, sulla base di considerazioni fisiche estremamente ridotte, sulla base dell'Analisi Dimensionale e sfruttando la conoscenza acquisita nelle diverse campagne sperimentali, all'individuazione di due Relazione Universali che descrivono rispettivamente il profilo verticale della velocità media del vento ed il profilo verticale della temperatura potenziale media nel *SL*, oltre che il profilo verticale medio del rapporto di mescolanza di un generico scalare. La loro *universalità* sta nel fatto che, una volta noti i parametri caratteristici del *SL* (cioè z_0, u_* e L), esse forniscono *analiticamente* il profilo del

vento medio e della temperatura media nel *SL* senza bisogno di altre informazioni (vento geostrofico, estensione verticale del *PBL*, ecc.). Ricordiamo ancora una volta che tali profili sono solo un'approssimazione del profilo reale, tanto più vicina alla realtà quanto più la situazione considerata si avvicina alla situazione paradigmatica. Tuttavia, Holtslag (1984) ha sistematicamente confrontato i valori di velocità media del vento e di temperatura potenziale previsti dal MOST con le misure della torre meteorologica di Cabau in Olanda. Il risultato ottenuto è decisamente confortante: di fatto il MOST normalmente effettua stime accurate di profilo fino a quote di circa 100 metri rispetto al suolo sia nelle condizioni convettive che in quelle stabili.

8.3.2.3 La costante di von Karman

Nelle Relazioni di Similarità per i gradienti ed i profili delle variabili meteorologiche medie nel *SL* è sempre presente la costante di von Karman *k* che, come anticipato, può essere presa pari a 0.4. Su tale costante, del resto fondamentale per la stima indiretta dei parametri che caratterizzano la turbolenza del *SL*, molto è stato detto e scritto e Tennekes (1982) riassume, sulla base di quanto fino ad allora disponibile, che $k = 0.4 \pm 0.04$, ciò dopo lunghe discussioni fatte sulla base dei risultati delle campagne del Kansas (Businger et. al, 1971), in cui si era difeso per *k* il valore 0.35 e tenendo conto delle vivaci contestazioni di Wieringa (1980). Va detto che le difficoltà nello stabilire il valore corretto di *k* derivano principalmente dalla disomogeneità delle misure da cui sono stati ottenuti tali valori e dagli errori di misura legati ai sensori in essi utilizzati.

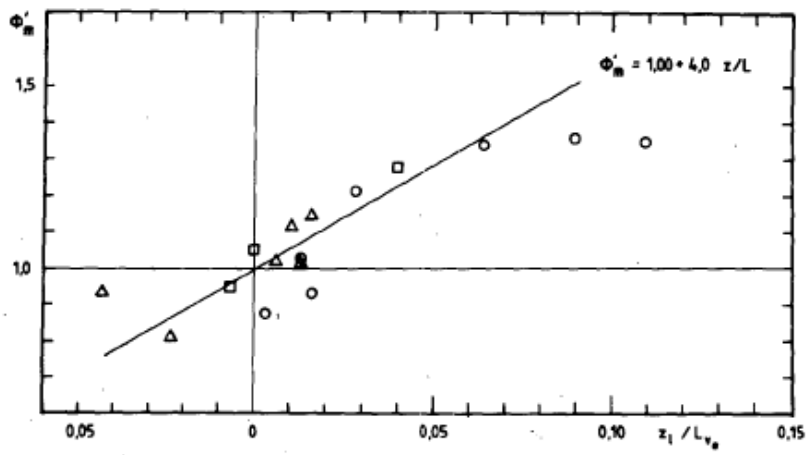


Fig. 8.21: la grandezza Φ'_m in funzione di z/L (z = 2 m) negli esperimenti di Högström (1985)

Per tentare di fare un sostanziale passo in avanti nella determinazione del valore corretto per la costante *k*, Högström (1985) ha condotto a Marsta (Svezia) una serie di campagne sperimentali dedicate esclusivamente alla determinazione di *k* impiegando una torre meteorologica a 7 livelli in cui veniva misurato il profilo verticale della velocità del vento, oltre che i parametri caratteristici della turbolenza quali u_* e H_0. La metodologia utilizzata prendeva le mosse dalla relazione di Similarità per il gradiente verticale della velocità del vento:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_*}{kz} \cdot \Phi_m(z/L) \qquad [8.37a]$$

Dato che le campagne sperimentali erano state condotte nel Nord Europa in periodo invernale, la rugosità superficiale z_0 poteva essere determinata facilmente, l'omogeneità orizzontale era ampiamente garantita e le situazioni incontrate erano sempre prossime alla adiabaticità. In questo caso, quindi, le incertezze legate all'esatta forma funzionale della Funzione di Similarità Φ_m erano sostanzialmente irrilevanti.

Una volta misurati i parametri di stabilità e calcolata *L*, Högström ha organizzato le misure ottenute in modo da evidenziare la quantità:

$$\Phi_m^{'} = \frac{0.4}{k}\Phi_m = 0.4\frac{\partial u}{\partial z}\frac{z}{u_*} \qquad [8.37b]$$

Tale quantità evidentemente varia al variare di z/L e dovrebbe tendere a 1 se k risultasse pari a 0.4. Nella **Fig. 8.21** è presentata la variazione di $\Phi^{'}_m$ in funzione di $1/L$. Come si può notare, i risultati sperimentali concordano nell'attribuire a k un valore pari a 0.4 ± 0.011.

8.3.2.4 Diffusività turbolente e Coefficienti di Drag

Concludiamo la discussione sulle Relazioni di Similarità per i gradienti ed i profili verticali di velocità e temperatura media ritornando a considerare in maggior dettaglio come variano con la stabilità i Coefficienti di Diffusività turbolenta. Oltre a ciò, introdurremo il concetto di Coefficienti di Drag e vedremo come essi possano essere espressi nel *SL* mediante le Funzioni Universali $\Phi_m(\zeta)$, $\Phi_h(\zeta)$, $\Psi_m(\zeta)$ e $\Psi_h(\zeta)$. Tutto ciò ha un interesse pratico soprattutto perché i modelli numerici di *PBL* adottano spesso questi concetti quando devono operare alle quote prossime al suolo e quindi all'interno del *SL*.

I Coefficienti di Diffusività turbolenta

Riprendendo quanto già detto, il *Coefficiente di scambio turbolento (Diffusività Turbolenta) per la quantità di moto* K_m e *per il calore sensibile* K_H *possono essere definiti come*:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = K_m\frac{dU}{dz} \qquad \frac{-H_0}{\rho C_p} = K_H\frac{d\overline{\theta}}{dz} \qquad [8.38a]$$

dove ρ è la densità dell'aria, C_p il suo calore specifico a pressione costante, τ_0 è lo *stress* superficiale e H_0 è il flusso turbolento di calore sensibile. Queste relazioni possono essere anche espresse come:

$$\overline{uw} = -K_m\frac{dU}{dz} \qquad \overline{w\theta} = -K_H\frac{d\Theta}{dz} \qquad [8.38b]$$

Dalle Relazioni di Similarità per il gradiente della velocità media del vento e della temperatura potenziale media oltre che dalla definizione di u_* e H_0 è possibile ottenere nel *SL* un'espressione analitica per i due Coefficienti di Diffusività Turbolenta. Queste due relazione dipendono dalle Funzioni Universali $\Phi_m(\zeta)$, $\Phi_h(\zeta)$ e la loro espressione funzionale è la seguente:

$$K_m = \frac{ku_*z}{\Phi_m(\zeta)} \qquad K_H = \frac{kT_*z}{\Phi_H(\zeta)} \qquad [8.39a]$$

Quindi i due coefficienti di diffusività turbolenta, attraverso la presenza delle Funzioni Universali di Similarità dei gradienti, alla fine dipendono dal parametro di stabilità ζ. Le funzioni $\Phi_m(\zeta)$, $\Phi_h(\zeta)$ sono funzioni note e quindi la loro quantificazione è immediata una volta noto u_*, H_0, la quota di misura z e quindi ζ. È poi interessante capire quale sia il peso reciproco delle due diffusività a parità di stabilità e per fare ciò conviene considerarne il rapporto. Si definisce *Numero di Prandtl Turbolento* il rapporto $Pr(\zeta) = K_m(\zeta)/K_h(\zeta)$ da cui deriva la grandezza $\alpha(\zeta) = K_h(\zeta)/K_m(\zeta) = Pr(\zeta)^{-1}$. È immediato convincersi che:

$$\frac{K_H}{K_m} = \alpha(\zeta) = Pr^{-1} = \frac{\Phi_m(\zeta)}{\Phi_H(\zeta)} \qquad [8.39b]$$

La conoscenza della forma analitica delle funzioni $\Phi_m(\zeta)$, $\Phi_h(\zeta)$ permette di ottenere una relazione più o meno complessa di $\alpha(\zeta)$ e quindi anche di $Pr(\zeta)$ a seconda delle forme funzionali che si adottano per queste due funzioni Universali. Se, per esempio, si adottano le relazioni di Businger nelle situazioni convettive e quelle di Beljaars e Holtslag per le situazioni stabili, ciò che otteniamo è quanto rappresentato in **Fig. 8.22**. Da essa si nota come nelle situazioni convettive prevalga la diffusività termica mentre nelle situazioni stabili le due si equivalgono.

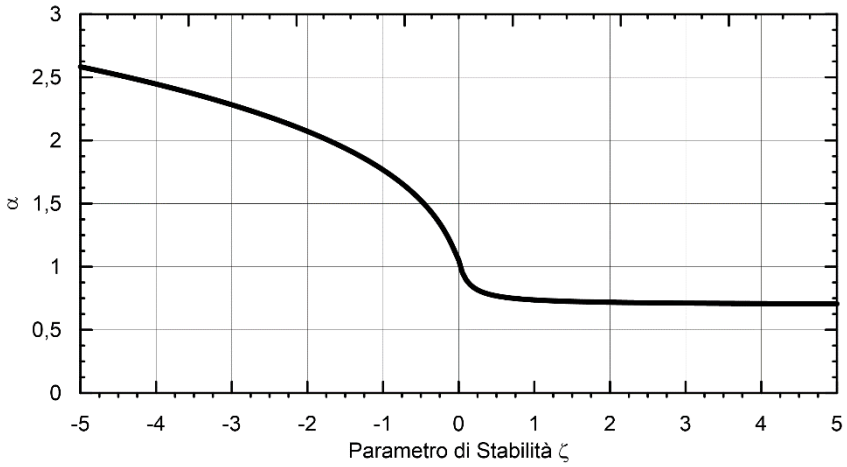


Fig. 8.22: andamento con la stabilità della Funzione universale di Similarità $\alpha(\zeta)$.

I Coefficienti di Drag e le Resistenze Aerodinamiche

Si definisce *Coefficiente di Drag per il trasporto di quantità di moto* C_D (Stull, 1988) il parametro:

$$C_D = \left(\frac{u_*}{U}\right)^2 \qquad [8.40a]$$

Ricordando la Relazione di Similarità per il profilo della velocità media del vento, è immediato constatare che:

$$C_D = \frac{k^2}{\left[ln\left(\frac{z}{z_0}\right) - \Psi_m(\zeta)\right]^2} \qquad [8.40b]$$

relazione che evidenzia la dipendenza di C_D dal livello di stabilità presente nel *SL* e dalla rugosità superficiale. Questo parametro non riveste un'importanza particolare nel contesto della Teoria della Similarità, tuttavia spesso viene usato nella pratica, soprattutto modellistica, dopo aver opportunamente semplificato la dipendenza dalla stabilità descritta dalla (8.40b).

In maniera analoga è possibile definire un *Coefficiente di Drag per il flusso di calore sensibile* C_H, come:

$$C_H = \frac{\overline{w\theta}}{\overline{U} \cdot (\Theta_0 - \Theta)} \qquad [8.41a]$$

Anche questo parametro è interessante, visto che lega tra loro il flusso di calore sensibile, il gradiente di temperatura e la velocità media del vento. Sulla base delle Relazioni di Similarità per il profilo del vento medio e della temperatura media la relazione precedente si trasforma in:

$$C_H = \frac{k^2}{\left[ln\left(\frac{z}{z_0}\right) - \Psi_m(\zeta)\right] \cdot \left[ln\left(\frac{z}{z_{0h}}\right) - \Psi_h(\zeta)\right]} \qquad [8.41b]$$

Un coefficiente del tutto analogo può essere individuato anche per il flusso di umidità dell'aria.

Oltre ai coefficienti di *drag*, vengono usate comunemente anche le cosiddette *Resistenze Aerodinamiche*, da essi derivate direttamente. In particolare, si ha la *Resistenza Aerodinamica per il trasferimento di quantità di moto* r_{aM}, definita come:

$$r_{aM} = \frac{U}{u_*^2} = (C_D U)^{-1} \qquad [8.42a]$$

e la *Resistenza Aerodinamica per il trasferimento di calore sensibile* r_{aH}:

$$r_{aH} = \frac{\Theta - \Theta_0}{u_* T_*} = (C_H U)^{-1} \qquad [8.42b]$$

8.3.3 LA DEVIAZIONE STANDARD DELLE COMPONENTI DEL VENTO

Consideriamo ora la deviazione standard delle tre componenti del vento, quella della componente lungo la direzione media σ_u, quella trasversale σ_v e quella verticale σ_w, e studiamo il loro comportamento nel *SL* al variare del parametro di stabilità $\zeta = z/L$. Queste grandezze hanno una notevole importanza nelle applicazioni pratiche: basti, infatti, pensare al fatto che la dispersione di un pennacchio di fumo emesso da una ciminiera è più o meno elevata a seconda della stabilità in cui si trova l'atmosfera e che, come vedremo, la modellizzazione di tale dispersione ha proprio le deviazioni standard delle componenti del vento come ingredienti principali. L'obiettivo che ci poniamo ora è quello di giungere a delle Relazioni di Similarità che ne descrivano il profilo verticale entro il *SL* e questo argomento lo svilupperemo nell'ambito della Teoria di Similarità di Monin-Obukhov (MOST) e di una sua evidente estensione.

8.3.3.1 Alcune osservazioni preliminari

Innanzitutto, anche se abbiamo ipotizzato che sia sempre possibile stimare dalle misure disponibili le variabili interessate al MOST, all'atto pratico questa ipotesi può rilevarsi critica. Infatti, la stima campionaria di ogni momento di una variabile meteorologica (e non solo) dipende da tre fattori: lo strumento di misura utilizzato per realizzare la misura, la frequenza di campionamento impiegata ed il tempo di mediazione selezionato. Ogni strumento di misura è caratterizzato da una propria velocità di risposta che quantifica quanto rapidamente questo apparato risponde ad un'improvvisa variazione del segnale che si sta misurando. La frequenza di campionamento adottata durante la misura rappresenta invece il numero di misure elementari che vengono realizzate al secondo, mentre il tempo di mediazione rappresenta il periodo temporale su cui si estendono le osservazioni. La combinazione di questi tre fattori determina la bontà o meno della stima campionaria dei momenti cui siamo interessati.

Se lo strumento di misura non è a risposta rapida, ma risponde con un certo ritardo alla variazione del segnale in ingresso, all'atto pratico si comporta come un filtro *passa-basso*, smorzando le irregolarità del segnale e perdendosi la porzione ad alta frequenza dello stesso. A questo punto non ci sono rimedi, perché anche una frequenza di campionamento elevata ed un tempo di mediazione lungo non potranno mai sopperire alla perdita della parte di segnale ad alta frequenza. Da qui la necessità di usare strumenti a risposta rapida e ciò è stato chiaro fin dalle prime sperimentazioni in campo. Ad oggi l'anemometro ultrasonico triassiale (per le misure nell'atmosfera reale) e l'anemometro a filo caldo (per le indagini in laboratorio) garantiscono una risposta sufficientemente rapida ed adeguata alla stima campionaria dei momenti del secondo ordine e quindi di u_* e delle deviazioni standard σ_u, σ_v, σ_w, sempre che la frequenza di campionamento ed il tempo di mediazione siano adeguati.

La frequenza di campionamento è il secondo elemento importante. Se è troppa bassa, cioè se il numero di misure elementari nell'unità di tempo è troppo basso, pur con uno strumento a risposta rapida può non essere possibile *catturare* tutte le rapide variazioni di un segnale meteorologico turbolento. Un tempo c'erano severi vincoli tecnologici che non consentivano frequenze di campionamento elevate. Oggi gli anemometri ultrasonici triassiali garantiscono frequenze di campionamento fino ad oltre 40 Hz e ciò è più che adeguato per i normali impieghi micrometeorologici e sicuramente per la stima campionaria di varianze e covarianze.

Molto più subdolo è il tempo di mediazione. Sembrerebbe naturale che la combinazione di una frequenza di campionamento elevata e di un tempo di mediazione lungo sia una soluzione vincente, visto che questa soluzione consentirebbe di avere a disposizione un numero elevato di campioni elementari e a ciò dovrebbe corrispondere una stima campionaria sempre più vicina al valore *vero*. Ma questo vale solo se siamo in condizioni stazionarie e in atmosfera ciò non è

rigorosamente vero anche se questa è una delle ipotesi su cui si fonda il MOST. E oggi è questo il vero problema! Se nelle situazioni convettive i problemi sono limitati ed un tempo di mediazione compreso tra 15 e 60 minuti è normalmente capace di catturare le principali caratteristiche del *PBL*, nelle situazioni stabili non è tutto così semplice. Abbiamo visto che in queste situazioni la turbolenza è debole, spesso intermittente e normalmente sovrapposta a oscillazioni a bassa frequenza che derivano dal *meandering* orizzontale dell'aria, dalle onde di gravità (che comportano oscillazioni a bassa frequenza anche della componente verticale del moto) e dalle non stazionarietà a mesoscala. Questi *elementi confondenti* si presentano tutti come oscillazioni a bassa frequenza dei segnali meteorologici (componenti del vento, temperatura, pressione, ecc.) che si sovrappongono alle fluttuazioni turbolente e non è facile separare ciò che è turbolenza (di cui vogliamo ottenere i momenti) da ciò che turbolenza non è. Se il tempo di mediazione è troppo lungo, nel segnale campionato si mischiano effetti a mesoscala e turbolenza, se è troppo breve è possibile che il numero di campioni raccolti sia insufficiente per una stima statisticamente significativa dei momenti che si intende determinare. In entrambi i casi i momenti stimati possono essere ben lontani da quelli reali. Il problema non ha ancora una soluzione definitiva ed il risultato è che le varie campagne sperimentali su cui si fonda il MOST non sono totalmente confrontabili. Ciò era vero anche per il valor medio delle variabili meteorologiche a cui abbiamo applicato l'Analisi Dimensionale al paragrafo precedente; tuttavia, questi effetti sono di relativo poco conto nel caso delle medie e questa è la ragione per cui parliamo di questo problema solo ora.

Un ulteriore problema che sta alla base della ricerca di un profilo di Similarità per le deviazioni standard delle componenti del vento è costituito dalla domanda se le variabili base scelte dal MOST siano adeguate o meno a rappresentare i fenomeni nelle varie condizioni di stabilità. Questo problema è stato lungamente dibattuto e sembra che ad oggi sia stato almeno parzialmente chiarito. Nelle *condizioni convettive*, sulla base delle conoscenze attuali, parrebbe evidente che l'estensione verticale dello Strato Rimescolato z_i debba far parte delle variabili descrittrici di base. Questo è vero soprattutto per le deviazioni standard orizzontali σ_u e σ_v che rappresentano in maniera compatta sia i vortici di piccola e media dimensione, soprattutto di origine meccanica, che i grandi vortici convettivi che hanno una lunghezza di scala dell'ordine di z_i. Pertanto, scopriremo che, per descrivere il profilo verticale di σ_u e σ_v nelle situazioni convettive, il MOST dovrà cambiare la propria struttura originale ed inserire tra le variabili rilevanti z_i. La σ_w, invece, almeno per quanto si è riusciti a rilevare finora, anche in situazioni convettive sembra seguire abbastanza fedelmente il MOST. Nelle *situazioni stabili*, invece, il MOST nella sua versione originaria sembra essere adeguato a descrivere i profili delle diverse deviazioni standard, purché ci si limiti alle situazioni debolmente stabili e al regime di transizione; cosa succeda nelle situazioni a stabilità estrema ancora non è completamente chiaro. Va però sempre ricordato che il MOST produce profili verticali che sono sempre e solo un'approssimazione di quelli reali.

8.3.3.2 Analisi di Similarità: generalità

Si ricordi che la Teoria della Similarità di Monin-Obukhov richiede per ogni variabile *f* che descrive la turbolenza del *SL* l'esistenza di un profilo verticale universale espresso dalla relazione:

$$\frac{f}{f_*} = \Phi_f(\zeta) \qquad [8.43a]$$

dove f_* è *il parametro di scala* di *f*, che quindi deve possedere le medesime dimensioni di *f* e deve essere costruita a partire dalle variabili *z*, β, u_* e $\overline{w\theta}$ che sono le variabili chiave che descrivono la dinamica del *SL*. Nel caso di σ_u, σ_v e σ_w, f_* non potrà che essere u_*. Quindi, il nostro obiettivo è quello di individuare, nell'ambito del MOST, le relazioni di profilo descritte genericamente come:

$$\frac{\sigma_\alpha}{u_*} = \Phi_\alpha(\zeta) \qquad [8.43b]$$

dove $\alpha = u, v, w$, ovviamente se tali relazioni esistono. Sappiamo che il MOS da solo non ci

consente di individuare la forma funzionale delle Funzioni Universali $\Phi_\alpha(\zeta)$, però sappiamo anche che possiamo comunque ottenere preziose informazioni in proposito se analizziamo, sempre nell'ambito dell'Analisi Dimensionale, le tre tipiche situazioni asintotiche: la situazione adiabatica (neutra) per cui $|\zeta| \to 0$, la situazione di *local free convection* per cui $\zeta \to -\infty$ e la situazione di stabilità estrema quando $\zeta \to +\infty$.

Limite Adiabatico

Quando $|\zeta| \to 0$, la turbolenza perde ogni contributo convettivo visto che H_0 tende a zero. In questo caso, tra le variabili rilevanti del MOST sparisce $\overline{w\theta}$. Applicando le regole del Teorema di Buckingham giungiamo facilmente al risultato seguente:

$$\lim_{|\zeta|\to 0} \frac{\sigma_\alpha}{u_*} = \Phi_\alpha(0) = C_\alpha \qquad [8.44a]$$

cioè la deviazione standard della componente α del moto resta costante con la quota. Questo valore costante C_α sarà sia il limite per $-\zeta \to 0$ (cioè il limite neutrale raggiunto dalla convettività), sia il limite $+\zeta \to 0$ (cioè il limite neutrale raggiunto dalla stabilità) e garantirà la continuità delle funzioni $\Phi_\alpha(\zeta)$ a $\zeta = 0$.

Limite di Local Free Convection

Nelle condizioni di *local free convection* o comunque ad elevatissimi valori di convettività quando $\zeta \to -\infty$, l'apporto alla turbolenza del *SL* derivante dallo *shear* del vento (cioè l'apporto meccanico) risulta del tutto trascurabile rispetto all'apporto convettivo. Questa situazione fa sì che i grandi vortici turbolenti, tipici delle situazioni convettive, assumano un ruolo importante nella generazione e nel mantenimento della turbolenza del *SL*. Tradizionalmente, il MOST tratta queste situazioni ad elevatissima convettività ipotizzando semplicemente che la friction velocity u_* sparisca dall'elenco delle variabili chiave; ciò sta a significare che l'apporto meccanico alla turbolenza è praticamente nullo, mentre tutta la turbolenza dipende dalla *buoyancy*, dal flusso turbolento di calore sensibile al suolo e dalla quota a cui ci si trova. Quindi, seguendo le regole dell'Analisi Dimensionale, dato che le variabili rilevanti sono 4 (σ_α, z, $\overline{w\theta}$ e β) e le dimensioni implicate sono 3, ci aspettiamo di individuare un solo gruppo adimensionale Π_α che non potrà che essere costante. Infatti, applicando le regole dell'Analisi Dimensionale si ottiene che:

$$\Pi_\alpha = \frac{\sigma_\alpha}{\zeta^{1/3}} \qquad [8.44b]$$

quindi possiamo concludere che, nell'ambito della validità del MOST:

$$\lim_{|\zeta|\to -\infty} \Phi_\alpha(\zeta) = \Pi_\alpha \zeta^{1/3} \qquad [8.44c]$$

Il mantenere tra le variabili chiave la quota z ha il significato di ritenere che la lunghezza di scala dei vortici responsabili delle perturbazioni delle tre componenti del moto sia dell'ordine di z che è molto più piccolo dell'estensione verticale z_i del *PBL*. Tuttavia, sappiamo che i grandi vortici turbolenti hanno una dimensione caratteristica dell'ordine di z_i. Sorge quindi il dubbio legittimo che le situazioni di *local free convection* siano malamente descritte se manteniamo come variabile rilevante z e non introduciamo z_i. Ad oggi pare confermata la Teoria proposta da Panofsky et al. (1977) secondo cui i grandi vortici turbolenti (di dimensione comparabile con z_i) non contribuiscono al trasferimento verticale di quantità di moto nei pressi del suolo (e quindi non influenzano σ_w), mentre influenzano fortemente il trasferimento orizzontale di quantità di moto e quindi σ_u e σ_v. Su questo argomento torneremo tra poco.

Limite di Estrema Stabilità

Quando la stabilità diventa elevata, la turbolenza assume un carattere prevalentemente locale ed è caratterizzata da vortici di dimensioni ben inferiori a z. L'effetto ormai noto di una forte

stratificazione stabile è quello di limitare o smorzare le fluttuazioni verticali di velocità. Ciò porta inevitabilmente ad un effettivo disaccoppiamento delle fluttuazioni verticali del moto dai flussi superficiali e quindi i vortici turbolenti non potranno più avere *z* come lunghezza di scala. Un modo per cercare di riprodurre questa situazione nell'ambito del MOST è quella di cancellare dall'insieme delle variabili rilevanti la quota *z*. Anche in questo caso l'Analisi Dimensionale si trova ad avere 3 dimensioni e 4 variabili rilevanti e quindi predice l'esistenza di un unico gruppo adimensionale Π_α che non potrà che essere costante. A conti fatti si ha che:

$$\Pi_\alpha = \frac{\sigma_\alpha}{u_*} \qquad [8.44d]$$

8.3.3.3 La deviazione standard della componente verticale del vento

La deviazione standard della componente verticale del vento σ_w è un indicatore estremamente importante della turbolenza del *SL* e della sua capacità disperdente. Per quanto detto, questa variabile segue il MOST anche nelle situazioni di *local free convection* e la Relazione di Similarità del suo profilo verticale è data dalla relazione del tipo:

$$\frac{\sigma_w}{u_*} = \Phi_{ww}(\zeta) \qquad [8.45a]$$

dove Φ_{ww} è la Funzione Universale di Similarità corrispondente. Dalle considerazioni fatte per le situazioni asintotiche, possiamo aspettarci che il suo andamento per $\zeta \to -\infty$ sia proporzionale a $\zeta^{1/3}$, andamento che tenderà ad una costante all'adiabaticità e nelle condizioni stabili. Le varie campagne sperimentali realizzate negli ultimi decenni hanno fornito un'abbondante base sperimentale che ha consentito di determinare, anche se con alcune incertezze, questa Funzione Universale di Similarità. Qui di seguito viene fatta una sintesi di tutto ciò.

Le Situazioni convettive ($\zeta<0$): in queste condizioni di stabilità è stata proposta la seguente Relazione di Similarità:

$$\frac{\sigma_w}{u_*} = a(1 - b\zeta)^{1/3} \qquad [8.45b]$$

che possiede il previsto comportamento asintotico in regime di *free convection*. Panofsky e Dutton (1983) e Kaimal e Finnigan (1994) propongono per *a* e *b* rispettivamente i valori 1.25 e 3, tuttavia in Letteratura sono stati ottenuti valori anche differenti, derivanti probabilmente da differenti situazioni sperimentali (tempo di mediazione, tipo di *detrending* dei dati sperimentali ecc.). In particolare, Andreas e al. (1998) hanno ottenuto per i due parametri rispettivamente i valori 1.07 e 4.29 sostanzialmente confermati da Moraes (2000) secondo cui a = 1.08 e b = 4.4. Come si può facilmente notare, all'adiabaticità il rapporto σ_w/u_* risulta pari a 1.25 se si adottano, come quasi universalmente viene fatto, i coefficienti proposti da Kaimal e Finnigan (1994), mentre in condizioni di *local free convection* la (8.45b) si riduce a:

$$\Phi_{ww}(\zeta) = a^{1/3}(-\zeta)^{1/3} \qquad [8.45c]$$

Teoricamente, la *free convection* avrebbe luogo per $-\zeta$ tendente ad infinito, tuttavia i dati sperimentali mostrano che si è già di fatto in tale regime quando $-\zeta > 0.4$ (Sorbjan, 1989).

La (8.45b) non è l'unica Relazione di Similarità proposta, anche se sicuramente è la più utilizzata. Panofsky e al. (1977) hanno proposto un'altra forma funzionale per Φ_{ww} del tipo:

$$\frac{\sigma_w^2}{u_*^2} = c + d(-\zeta)^{2/3} \qquad [8.46]$$

dove per i coefficienti *c* e *d* sono stati dati rispettivamente i valori 1.6 e 2.9. Questa relazione riveste un'importanza notevole visto che, a differenza della (8.45b), può essere dedotta direttamente dal modello spettrale con cui viene descritta la componente verticale del vento (Højstrup,

1981). Infatti, non va dimenticato che la varianza della componente *w* del moto altro non è che l'integrale sull'intera banda spettrale del relativo spettro monodimensionale.

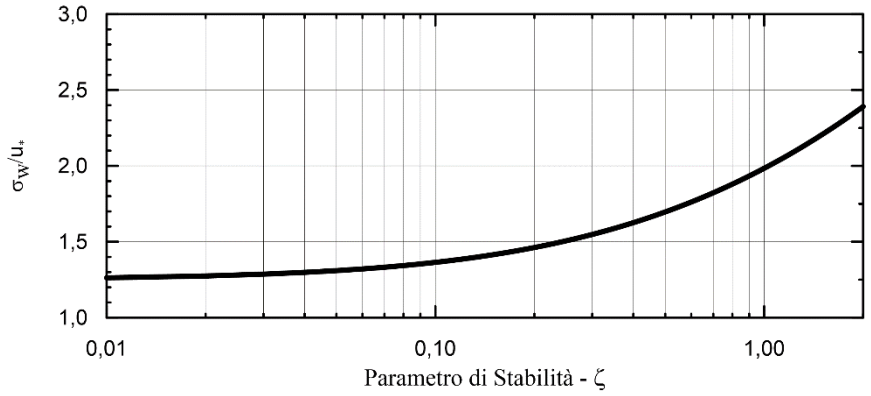


Fig.8.23: Funzione Universale di Similarità Φ_{ww} nelle situazioni convettive ($\zeta < 0$).

Dal punto di vista pratico, la (8.46) e la (8.45b) sono del tutto indistinguibili se per quest'ultima si usano i coefficienti proposti da Kaimal e Finnigan (1994). Per concludere, in **Fig.8.23** è mostrato l'andamento di Φ_{ww} col parametro di stabilità ζ nelle situazioni convettive ($\zeta < 0$).

Le Situazioni stabili ($\zeta>0$): in queste situazioni, sulla base dei ragionamenti fatti prima (Panofsky e Dutton 1983) ci dovremmo aspettare che la Relazione di Similarità sia la seguente:

$$\frac{\sigma_w^2}{u_*^2} = a \qquad [8.47a]$$

cioè che il rapporto σ_w/u_* sia costante, indipendente dalla quota (purché entro il *SL*) e dalla stabilità, dove la costante *a*, per continuità della funzione Φ_{ww} dovrà essere pari a 1.25. In realtà la situazione non è così chiara, vista la notevole dispersione dei dati sperimentali raccolti nelle differenti campagne sperimentali tipica, come abbiamo visto, delle situazioni stabili. In effetti, sulla base delle misure ottenute in condizioni debolmente stabili e in regime di transizione, sono state proposte alcune Relazioni di Similarità in cui c'è una dipendenza dal parametro di stabilità ζ. Per esempio, Kaimal e Finnigan (1994) hanno proposto una relazione lineare del tipo:

$$\frac{\sigma_w}{u_*} = a(1 - b\zeta) \qquad [8.47b]$$

dove a = 1.25 e b = 0.2. In questo concordano anche Andreas e al. (1998), proponendo gli stessi valori numerici per i coefficienti, e Moraes (2000) per cui b = 1.0. Viceversa, Pahlow et al. (2001) hanno notato come il rapporto σ_w/u_* sia circa costante per $\zeta \leq 1$, mentre, oltre tale limite, σ_w/u_* cresca con la stabilità in maniera non lineare. Tutto ciò lo si può vedere nella **Fig. 8.24**. Una relazione proposta dagli Autori, che riassume complessivamente le misure riportate nella figura, è la seguente:

$$\frac{\sigma_w}{u_*} = a + b\zeta^c \qquad [8.47c]$$

dove a = 1.1, b = 0.9 e c = 0.6. Notiamo immediatamente che le relazioni (8.47b) e (8.47c), a differenza della (8.47a), non rispettano il limite asintotico in caso di elevata stabilità che prevede per $\Phi_{ww}(\zeta)$ un valore costante.

Il fatto che nelle condizioni stabili σ_w/u_* sia o meno costante è un problema fortemente dibattuto e non ha ancora ricevuto una soluzione definitiva. Quello che è certo è che nelle situazioni altamente stabili sono sempre presenti moti a mesoscala a frequenze medio-basse (*turbolenza inattiva*) che si vanno a sovrapporre alle fluttuazioni derivanti dalla turbolenza meccanica, che vengono progressivamente smorzati dalla stratificazione stabile. Il risultato di tutto ciò è che,

a parità di misure elementari (anche realizzate con strumentazione a risposta rapida e campionate con un'elevata frequenza di campionamento), l'usare un periodo di mediazione più o meno lungo può determinare stime profondamente differenti delle varianze, come hanno sottolineato Mahrt e al. (1998) e Högstrom (1990), anche se tali Autori concordano nel ritenere che la contaminazione da parte della turbolenza inattiva sia più forte per le deviazioni standard delle componenti orizzontali del vento.

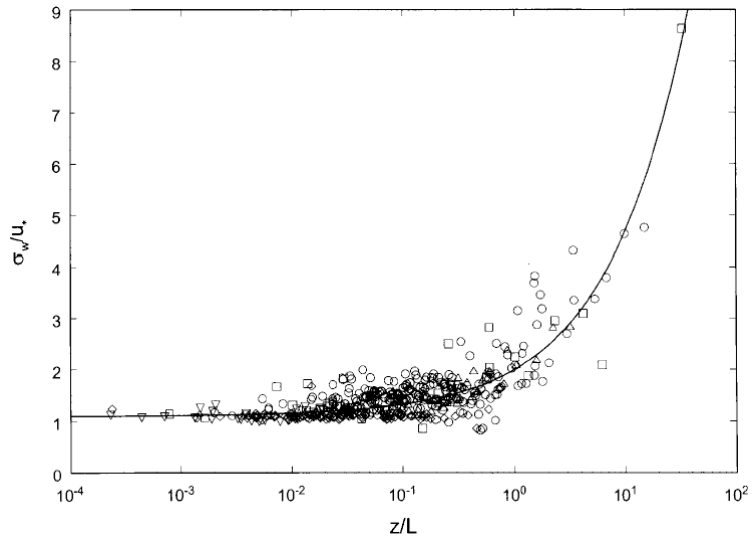


Fig. 8.24: variazione di σ_w/u_* in funzione della stabilità in situazioni stabili (Pahlow e al., 2001)

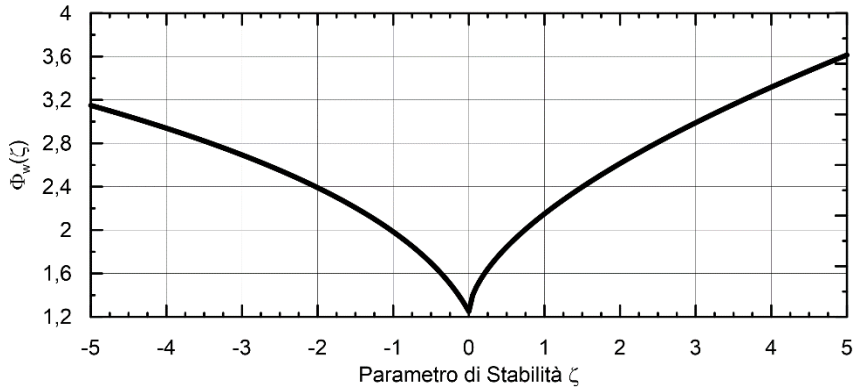


Fig. 8.25: andamento con la stabilità di $\Phi_{ww}(\zeta)$

Per concludere, nella **Fig. 8.25** presentiamo l'andamento di $\Phi_{ww}(\zeta)$ con la stabilità in un ampio intervallo del parametro ζ che copre sia le condizioni convettive che le condizioni stabili ottenuto impiegando la (8.45b) per le condizioni convettive (con i coefficienti numerici proposti da Kaimal e Finnigan (1994)) e la (8.47c) per le condizioni stabili leggermente modificata per garantire la continuità delle due formulazioni quando $\zeta = 0$. Questa potrebbe essere una scelta operativa corretta nelle normali applicazioni pratiche.

7.3.3.4 La deviazione standard delle componenti orizzontali del vento

Per quanto riguarda le componenti orizzontali del vento, la situazione risulta decisamente più complessa sia nelle situazioni convettive che nelle situazioni stabili. Secondo il MOST, dovrebbero sussistere per il profilo verticale di σ_u e σ_v delle Relazioni di Similarità del tipo:

$$\frac{\sigma_\alpha}{u_*} = \Phi_{\alpha\alpha}(\zeta) \qquad [8.48a]$$

dove $\alpha = u$ o v. La loro esistenza o meno è stata oggetto di lunghe discussioni.

Se consideriamo il limite adiabatico, ciò che si è ottenuto dalle misure in campo è che effettivamente σ_u/u_* e σ_v/u_* presentano valori costanti quando $|\zeta| \to 0$, rispettivamente indicati come C_u e C_v. Panofsky e Dutton (1983) hanno mostrato che, sulla base delle misure allora disponibili, $C_u = 2.4$ e $C_v = 1.9$. Recentemente Andreas e al. (1998) hanno trovato per C_u il valore 2.55 in buon accordo con il valore consigliato da Panofsky e Dutton. Si noti, poi, come i limiti adiabatici di u e di v siano differenti.

I problemi si hanno quando si considerano le situazioni convettive. In Panofsky e Dutton (1983) si afferma che l'andamento temporale di queste variabili nelle situazioni convettive presenta sovrapposte due componenti distinte: una ad alta frequenza, caratteristica della turbolenza atmosferica di origine prevalentemente meccanica, ed una a bassa frequenza legata ai grandi vortici convettivi a lunghezza di scala dell'ordine dell'estensione verticale z_i del *PBL*. Mentre la prima componente dipende dalla quota, la seconda non lo è ed è legata solo all'estensione verticale del *PBL*. A rigore un tale comportamento non potrebbe essere descritto dalla Teoria della Similarità di Monin-Obukhov. In effetti, Panofsky e al. (1977) hanno proposto una relazione di Similarità in cui la quota z è stata sostituita dall'altezza del *PBL* z_i. Tale relazione è, in generale, così espressa:

$$\frac{\sigma_{u,v}}{u_*} = \left(A_{u,v} + B_{u,v}(-z_i/L)\right)^{1/3} \qquad [8.48b]$$

Panofsky e Dutton (1983), sulla base di Panofsky e al. (1977), hanno proposto $A_u = A_v = 12.0$ e $B_u = B_v = 0.5$. Dato che con questa combinazione di coefficienti non vengono rispettati i limiti all'adiabaticità, potrebbe essere più corretto porre $A_u = 14.0$ e $A_v = 7.0$. Questa relazione afferma sostanzialmente che la deviazione standard delle componenti orizzontali del moto non varia con la quota entro il *SL*, affermazione fisicamente debole, visto che comunque al suolo le due deviazioni standard dovranno annullarsi. Probabilmente in realtà la (8.48b) sottolinea il fatto che, tranne in uno strato d'aria molto vicino al suolo dove il gradiente verticale delle deviazioni standard è elevato, esse appaiono pressoché costanti.

In contrasto con questa opinione, Monin e Yaglom (2007a) prevedevano invece un comportamento di queste variabili molto simile a quello mostrato dalla componente verticale del vento, cosa riaffermata anche nelle campagne sperimentali più recenti (Andreas e al., 1998) dove si è notato come per la componente u, applicando l'analisi di Similarità in cui è presente come lunghezza caratteristica la quota z e non z_i, i risultati ottenuti portassero ad una Relazione di Similarità del tipo:

$$\frac{\sigma_u}{u_*} = a(1 - b\zeta)^{1/3} \qquad [8.49a]$$

dove i valori attribuiti ai due coefficienti a e b erano 2.55 e 9.98 rispettivamente. Si noti come la relazione (8.49a) presenti il limite asintotico in *free convection* analogo a quello della componente verticale del vento, come previsto in Monin e Yaglom (1971a). In effetti, attualmente si è giunti alla conclusione che è decisamente più reale l'ipotesi fatta da Panofsky e al. (1977) che conduce alla (8.48b) secondo cui l'influenza dell'altezza del *PBL* è un fattore determinante, soprattutto ad elevata convettività. Tuttavia, tale influenza ha caratteristiche di bassa frequenza, che possono essere facilmente *filtrate* dai processi di *detrending* operate nell'elaborazione dei dati elementari raccolti e soprattutto dalla scelta del tempo di mediazione, come sarà più chiaro nel seguito. Pertanto, particolari scelte di tempo di mediazione e di filtraggio possono ridimensionare il contributo legato a z_i e far emergere il contributo legato a z.

Queste due affermazioni, apparentemente inconciliabili, lo sono molto meno se si tiene conto del fatto che la varianza di una delle componenti del moto altro non è che l'integrale su tutto l'intervallo delle frequenze del relativo spettro monodimensionale. Ciò verrà studiato più dettagliatamente nel seguito, comunque qui vale la pena anticipare alcune considerazioni in

proposito. Nelle situazioni convettive e nel *SL* è ormai accettato il modello spettrale di Højstrup (1981) secondo cui la densità spettrale alle varie frequenze è costituita da due contributi distinti:

- il primo contributo deriva dai vortici di piccola dimensione, prevalentemente di origine meccanica, la cui dimensione caratteristica è limitata dalla quota *z*. Questo contributo varia con la quota e con la convettività e quindi risulta funzione di ζ;
- il secondo contributo proviene dai grandi vortici convettivi che hanno scale caratteristiche dell'ordine di z_i. Tale contributo non dipende dalla quota, ma solo dal livello di convettività e quindi dipende dal rapporto z_i/L.

Come evidenziato da Olesen e al. (1984) e da Van den Hurk e al. (1995) l'integrale della densità spettrale per *u* e *v* porta ad una relazione che di fatto concilia le due visioni precedenti. In effetti l'integrazione del modello spettrale di Højstrup (1981) porta alla relazione seguente:

$$\frac{\sigma_\alpha}{u_*} = \left[a \left(\frac{z_i}{-L} \right)^{2/3} + b \frac{(1 - z/z_i)^2}{(1 + c\, z/z_i)^{2/3}} \right]^{1/2} \qquad [8.49b]$$

dove:

- se $x = u$, allora: $a = 0.6$; $b = 4.8$; $c = 15.0$
- se $x = v$, allora: $a = 0.7$; $b = 2.7$; $c = 2.8$

Per quanto riguarda il comportamento di σ_u/u_* e di σ_v/u_* in condizioni stabili, la situazione si presenta ancora più incerta, soprattutto dopo che sono risultate disponibili le misure ad elevatissima stabilità ottenute nelle varie campagne artiche ed antartiche. Se la quasi unanimità dei ricercatori concorda su un valore circa costante e pari a C_u e C_v, Andreas e al. (1998) hanno viceversa evidenziato la presenza di un chiaro incremento di σ_u/u_* con ζ, che hanno modellizzato con la relazione lineare:

$$\frac{\sigma_u}{u_*} = 2.55(1 + 0.8\zeta) \qquad [8.50a]$$

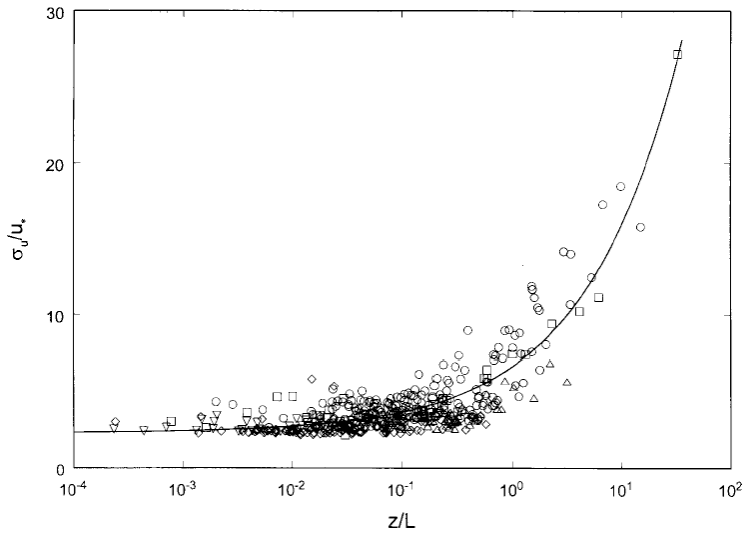


Fig. 8.26: il rapporto σ_u/u_* in condizioni stabili (Pahlow e al., 2001)

Anche Pahlow e al. (2001) hanno individuato un incremento costante con ζ delle due deviazioni standard adimensionali. Più in particolare, disponendo di misure in un vasto intervallo di stabilità, essi hanno potuto verificare come le due deviazioni standard adimensionali si mantengano circa costanti finché ζ non supera il valore di 0.1. A stabilità più elevate esse crescono rapidamente come si può vedere nella **Fig.8.26** e nella **Fig. 8.27**. Gli Autori hanno riassunto tutte le misure disponibili ottenute nel vasto intervallo di stabilità in un'unica Relazione di Similarità

che ha la forma seguente:

$$\frac{\sigma_\alpha}{u_*} = a + b\zeta^c \qquad [8.50b]$$

dove:

- quando $x = u$: $a = 2.3$; $b = 4.3$; $c = 0.5$
- quando $x = v$: $a = 2.0$; $b = 4.0$; $c = 0.6$

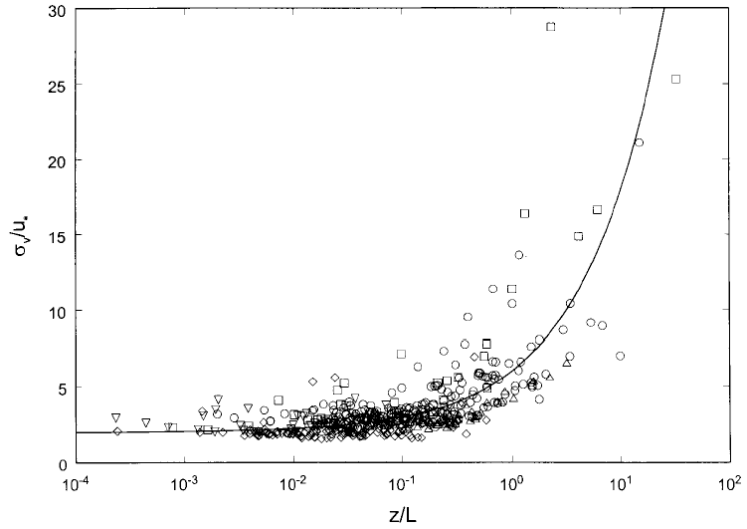


Fig. 8.27: il rapporto σ_v/u_* in condizioni stabili (Pahlow e al., 2001)

Nonostante tutto, le incertezze permangono e la certezza sull'aumentare del valore delle deviazioni standard adimensionali con ζ è ancora tutta da dimostrare. In primo luogo, va ricordato che le difficoltà di misura dei momenti del secondo ordine e dei flussi nelle situazioni altamente stabile sono elevatissime ed il pericolo della *self-correlation* è un pericolo reale che può far ritenere molto correlate variabili che in realtà lo sono molto meno. Inoltre, Högstrom (1990) e molti altri Autori affermano che la crescita delle deviazioni standard alle elevate stabilità può essere dovuto al contributo di moti a mesoscala non turbolenti (*turbolenza inattiva*). Dato che è ben difficile filtrare i segnali meteorologici misurati nelle situazioni altamente convettive dai moti a mesoscala, la scelta del tempo di mediazione diventa cruciale. Infatti, Mahrt e al. (1998) hanno mostrato (si veda **Fig. 8.28**) che mentre adottando un tempo di mediazione di 5 minuti (tipico nella stima dei flussi nelle situazioni stabili) si otteneva un andamento crescente con la stabilità per σ_v/u_* (molto simile a quello mostrato nella **Fig. 8.27**), adottando un tempo di mediazione molto più breve, 100 secondi, σ_v/u_* si manteneva pressoché costante in accordo col MOST.

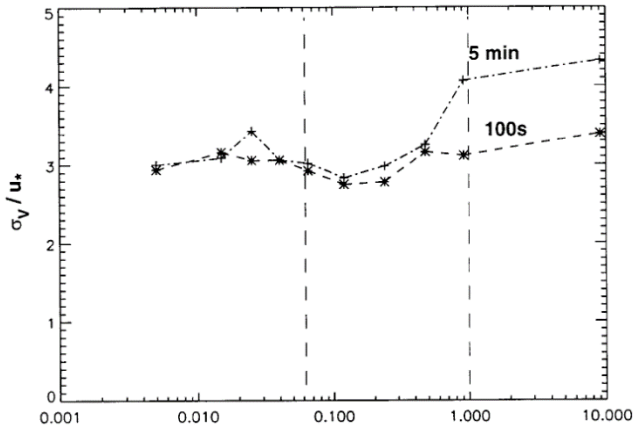


Fig. 8.28: variazione di σ_v/u_* in funzione del tempo di mediazione (Mahrt e al., 1998)

Esercizio 8.3

Che nel SL e nelle situazioni convettive valga la relazione di Similarità (8.45b) per σ_w è una realtà incontestabile, mentre è controverso che, sempre nelle situazioni convettive, valga la relazione (8.49a) per σ_u. Se ammettiamo la validità di entrambe le relazioni, cosa che comunque non sembra in contrasto con le evidenze sperimentali, mostrare come da queste relazioni di Similarità sia possibile ottenere una relazione analitica che consente, note σ_u e σ_w, di ottenere immediatamente il valore della *friction velocity* u_*.
Mettendo in evidenza dalla due relazioni di Similarità il parametro di stabilità ζ, dopo alcuni passaggi algebrici si ottiene:

$$\zeta = \frac{1}{a_u^3 b_u}\left[a_u^3 - \frac{\sigma_u^3}{u_*^3}\right] \qquad \zeta = \frac{1}{a_w^3 b_w}\left[a_w^3 - \frac{\sigma_w^3}{u_*^3}\right]$$

Eguagliando queste due relazioni ed estraendo u_* si giunge alla relazione cercata:

$$u_* = \left[\left(\frac{b_u b_w}{b_w - b_u}\right)\cdot\left(\frac{\sigma_u^3}{a_u^3 b_u} - \frac{\sigma_w^3}{a_w^3 b_w}\right)\right]^{1/3}$$

8.3.4 I MOMENTI DELLA TEMPERATURA POTENZIALE E DELL'UMIDITÀ

8.3.4.1 La Similarità per la deviazione standard della temperatura potenziale virtuale

Generalità

Lo studio del segnale di temperatura è sempre stato un tema affascinante per i ricercatori, soprattutto per la sua caratteristica *segnatura*. In effetti, nelle situazioni convettive, questo segnale mostra una serie di evidenti rampe (Tillman, 1972) dovute all'instaurarsi, in prossimità del suolo, di situazioni in cui l'aria inizia un riscaldamento progressivo (dovuto al calore proveniente dal suolo), che ha termine quando questa massa d'aria (struttura coerente) *abbandona* il suolo, innalzandosi nel *PBL* e determinando localmente un *rinnovo di aria più fredda* destinata a riscaldarsi e a riproporre questa sequenza di generazione di strutture coerenti. Uno degli indicatori più importanti di questo processo è la deviazione standard della temperatura potenziale σ_T e per essa Monin e Yaglom (2007a) hanno proposto un'Analisi di Similarità in cui i parametri rilevanti, come nel caso della componente verticale del vento, sono z, u_*,$\overline{w\theta}$ e β. La forma generale della Relazione di Similarità è quindi:

$$\frac{\sigma_T}{|T_*|} = \Phi_{\theta\theta}(\zeta) \qquad [8.51a]$$

dove $\Phi_{\theta\theta}$ è la Funzione Universale di Similarità per la Deviazione standard della temperatura potenziale virtuale. Anche in questo caso la Teoria della Similarità non è in grado di prevedere la forma matematica della Funzione Universale, anche se è possibile ottenere alcune informazioni sulla sua forma analitica analizzando il suo comportamento nelle situazioni asintotiche di elevata convettività e di elevata stabilità.

Quando ci si approssima alla *local free convection*, cioè quando $\zeta \to -\infty$, u_* cessa di essere la velocità di scala appropriata per l'Analisi Dimensionale e perciò le variabili rilevanti diventano z, $\overline{w\theta}$ e β. Applicando il Teorema di Buckingham si vede come sia possibile ottenere solo il gruppo adimensionale:

$$\pi = \frac{\sigma_T}{z^{-1/3}\beta^{-1/3}\overline{w\theta}^{2/3}} \qquad [8.51b]$$

che, con un po' di algebra e con l'introduzione della costante di von Karman, diventa:

$$\pi' = \frac{\sigma_T}{|T_*|\zeta^{-1/3}} \qquad [8.51c]$$

Come sappiamo, l'esistenza di un solo gruppo adimensionale sta a significare che tale gruppo dovrà mantenersi *costante* e quindi il comportamento asintotico in condizioni di *free convection* di $\sigma_T/|T_*|$ sarà dato da:

$$\lim_{\zeta \to -\infty} \frac{\sigma_T}{|T_*|} = C_f \zeta^{-1/3} \qquad [8.51d]$$

dove C_f è una appropriata costante.

In teoria dovremmo anche considerare il ***limite adiabatico*** in cui $|\zeta| \to 0$. In questo caso avremmo $\overline{w\theta} = 0$ e quindi le variabili chiave che restano per l'Analisi Dimensionale sono *z*, β e u_*. È facile dimostrare che, quando $|\zeta| \to 0$, $\Phi_{\theta\theta}(\zeta)$ dovrebbe tendere ad una costante C_a. C'è, però, un problema concettuale e pratico in tutto ciò. Dal punto di vista puramente formale, quando $\overline{w\theta}$ tende a zero, restando finito u_* (la turbolenza meccanica è sempre attiva se l'atmosfera non è in perfetta quiete) necessariamente bisogna che $|T_*|$ tenda a zero. Ipotizzando che σ_T non sia nulla, il rapporto $\sigma_T/|T_*|$ tenderebbe inevitabilmente all'infinito. Se invece σ_T fosse nulla, si avrebbe una forma indeterminata che lascerebbe aperta la questione se questa costante, valore limite di $\Phi_{\theta\theta}(\zeta)$ all'adiabaticità, sia finita o meno. Tentare di verificare le varie ipotesi possibili è un'impresa ardua, infatti quando $|T_*|$ è piccola, piccoli errori nella sua stima amplificano gli errori connessi con la stima di $\sigma_T/|T_*|$ rendendo difficile qualsiasi verifica sperimentale delle ipotesi. I vari Autori hanno curiosamente scelto di ignorare il problema ed hanno ipotizzato e cercato con metodi indiretti la costante C_a.

Nelle situazioni ad elevata stabilità, invece, *z* smette di rivestire un ruolo rilevante, visto il carattere locale della turbolenza, per le stesse ragioni addotte quando abbiamo parlato delle deviazioni standard delle componenti del moto. Quindi le variabili rilevanti, in questo caso, diventano u_*, $\overline{w\theta}$ e β. Impiegando ancora una volta il Teorema di Buckingham, si ha che è possibile ottenere un solo rapporto adimensionale (anche in questo caso una costante del sistema) espresso dalla relazione:

$$\pi = \frac{\sigma_T}{u_*^{-1}\overline{w'\theta'}} \qquad [8.51e]$$

cioè:

$$\pi = \frac{\sigma_T}{T_*} \qquad [8.51f]$$

Quindi, quando $\zeta \to +\infty$, cioè quando ci troviamo in condizioni a stabilità estrema, la funzione Universale per il profilo verticale della deviazione standard della temperatura potenziale virtuale, e quindi anche $\sigma_T/|T_*|$, tenderà ad una costante da determinare sperimentalmente.

La Funzione Universale di Similarità

Numerose campagne sperimentali realizzate nelle diverse parti del mondo (dalla Pampa alle zone antartiche) hanno prodotto una notevole quantità di misure che hanno consentito di determinare la Funzione Universale $\Phi_{\theta\theta}(\zeta)$. Qui di seguito riassumiamo i principali risultati raggiunti.

Situazioni Convettive

Nelle situazioni convettive, Wyngaard e al. (1971) e Tillman (1972) hanno proposto la relazione:

$$\Phi_{\theta\theta}(\zeta) = a(1 - b\zeta)^{-1/3} \qquad [8.52a]$$

dove i coefficienti *a* e *b* valgono rispettivamente 2.9 e 28.4, cosa sostanzialmente confermata anche da Andreas e al. (1998) con il coefficiente *a* pari a 3.2. Kaimal e Finnigan (1994) confermano anch'essi la forma funzionale (8.52a), ma con i due coefficienti pari a 2 e 9.5, mentre Moraes (2000) propone per i due coefficienti numerici rispettivamente i valori 3.3 e 11.0. Va rilevato, inoltre, che i dati sperimentali disponibili evidenziano un comportamento congruente con il limite di *free convection* già per valori di $-\zeta > 0.1$ (Sorbjan, 1989).

A differenza di quanto accadeva per σ_w, nel caso di $\sigma_T/|T_*|$ la dispersione delle misure è

spesso notevole, soprattutto per le situazioni prossime all'adiabaticità, come ben si può vedere nella **Fig.8.29**. Se guardiamo attentamente come si distribuiscono le misure in prossimità dell'adiabaticità, sembrerebbe più plausibile che $\Phi_{\theta\theta}(\zeta)$ presenti un asintoto verticale per $\zeta = 0$ che un limite costante. Proprio perché $\Phi_{\theta\theta}(\zeta)$ assume l'andamento asintotico tipico della *local free convection* già a $-\zeta \geq 0.1$, operativamente è più conveniente utilizzare al posto della (8.52a) la relazione monomia seguente:

$$\Phi_{\theta\theta}(\zeta) = ab^{-1/3} \cdot (-\zeta)^{-1/3} = c \cdot (-\zeta)^{-1/3} \qquad [8.52b]$$

Adottando i coefficienti proposti da Andreas e al. (1998), *c* risulterà pari a 1.05.

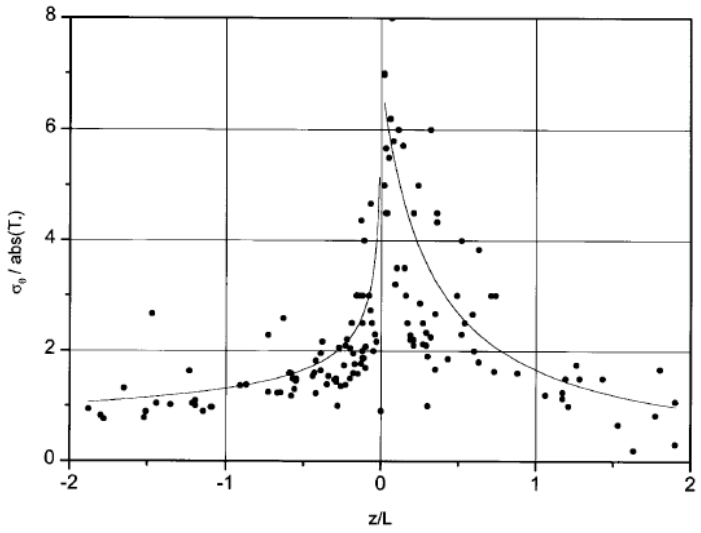


Fig. 8.29: misure di $\Phi_{\theta\theta}(\zeta)$ nella campagna sperimentale di Moraes (2000)

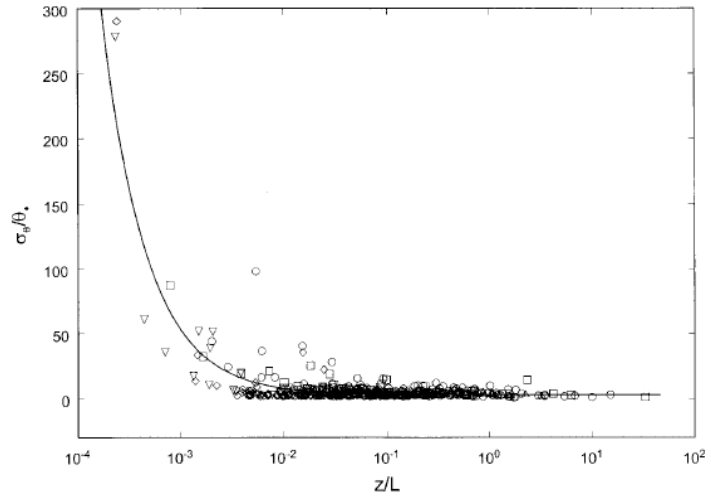


Fig.8.30: misure raccolte da Pahlow e al. (2001) nelle situazioni stabili e relazione relativa

Situazioni Stabili

Per quanto riguarda il comportamento nelle situazioni stabili, Tillman (1972) ha proposto, cosa che normalmente veniva accettata, una costanza di $\Phi_{\theta\theta}(\zeta)$ attorno al valore di 2.0 ÷ 3.2. Una valutazione differente viene fatta da Kaimal e Finnigan (1994) che propongono un andamento leggermente decrescente con ζ, in evidente disaccordo con il comportamento asintotico a stabilità elevate previsto dall'Analisi di Similarità:

$$\Phi_{\theta\theta}(\zeta) = 2 \cdot (1 + 0.5\zeta)^{-1} \qquad [8.53a]$$

Anche Andreas e al. (1998) concordano con la forma funzionale precedente, ma con costanti numeriche differenti, rispettivamente 3.3 e 3.1.

Una forma funzionale di $\Phi_{\theta\theta}(\zeta)$ profondamente diversa è quella proposta da Pahlow e al. (2001) ottenuta sulla base di misure realizzate in un ampio intervallo di stabilità. Essa risulta così espressa:

$$\Phi_{\theta\theta}(\zeta) = 2 \cdot (1 + 0.5\zeta)^{-1} \qquad [8.53b]$$

in cui le costanti numeriche valgono rispettivamente 0.05, -1 e 3. Questa relazione richiede che nelle situazioni prossime all'adiabaticità $\Phi_{\theta\theta}(\zeta)$ tenda all'infinito e decresca rapidamente ad un valore costante all'aumentare della stabilità. Nella **Fig. 8.30** vengono presentate le misure raccolte da Pahlow e al. (2001) assieme alla relazione da essi proposta.

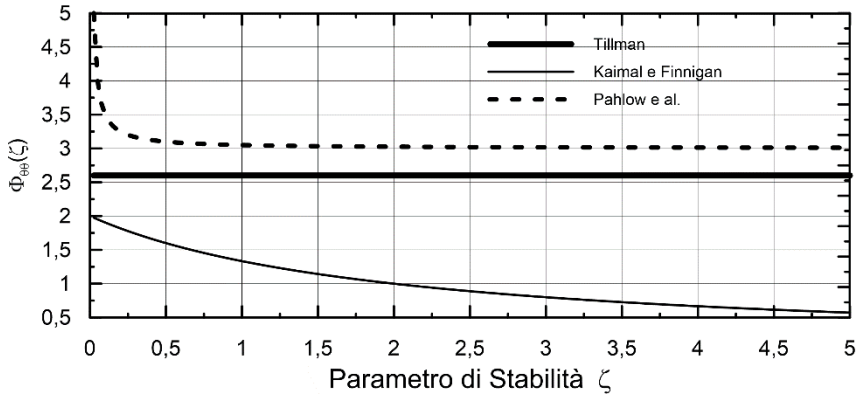


Fig.8.31: confronto tra le diverse relazioni proposte per $\Phi_{\theta\theta}$ nelle situazioni stabili

Nella **Fig.8.31** vengono confrontate tra loro le varie relazioni proposte per $\Phi_{\theta\theta}(\zeta)$ nelle situazioni stabili. Come si può vedere immediatamente, esse differiscono notevolmente l'una dall'altra e ciò probabilmente dipende dalla dispersione delle misure su cui ciascuna di esse si fonda, dispersione dovuta sia alle diverse metodologie di misura e di elaborazione dei dati adottate dai vari Autori, che dalla difficoltà nel separare dal segnale di temperatura le fluttuazioni derivanti dalla turbolenza da quelle dovute ai moti a mesoscala (*turbolenza inattiva*).

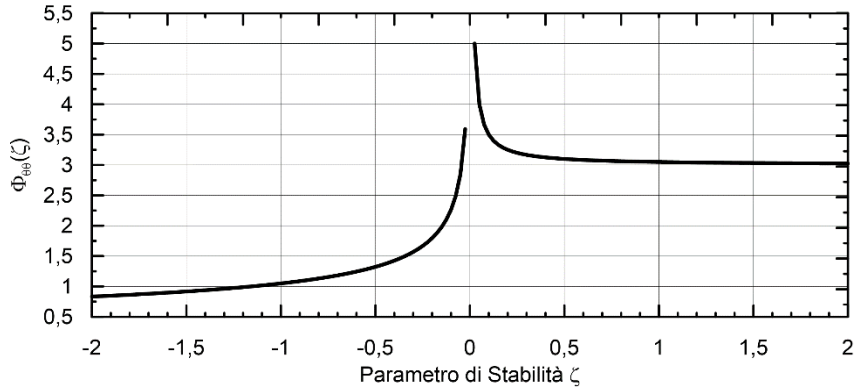


Fig.8.32: andamento di $\Phi_{\theta\theta}(\zeta)$ al variare del parametro di stabilità ζ

Per concludere, nella **Fig.8.32** viene presentato l'andamento di $\Phi_{\theta\theta}(\zeta)$ in un intervallo di ζ sufficientemente ampio che comprende sia le situazioni convettive che quelle stabili. Questo andamento è stato costruito impiegando la relazione (8.52a) per le situazioni convettive e la relazione (8.53b) per le situazioni stabili. Nelle applicazioni pratiche questa potrebbe essere la scelta da adottare per $\Phi_{\theta\theta}(\zeta)$.

Esercizio 8.4

Prendendo a riferimento la relazione di Similarità per σ_θ in situazioni convettive lontane dall'adiabaticità, ottenere una relazione analitica che esprime il flusso turbolento di calore sensibile.
La relazione di Similarità da cui si parte è la (8.52b). Utilizzando la definizione di lunghezza di Monin-Obukhov, dopo pochi passaggi algebrici si giunge alla relazione:

$$\overline{w\theta} = \frac{H_0}{\rho C_p} = \sqrt{\frac{kzg}{T_0}\frac{\sigma_\theta^3}{c^3}}$$

Come è emerso dalle misure, la relazione (8.52b) è valida per un'ampia gamma di situazioni convettive e perciò possiamo affermare che in questi casi $\overline{w\theta}$ è proporzionale alla deviazione standard della temperatura potenziale elevata a 3/2.

8.3.4.2 La Similarità per la Skewness della temperatura potenziale virtuale

Dato che entro il *SL* la temperatura potenziale virtuale presenta un caratteristico andamento a rampe, la deviazione standard non è un parametro sufficiente per la sua caratterizzazione, ma ad essa va associata almeno la *Skewness* S_T. Questo parametro, che indica se e quanto un insieme di misure di temperatura abbia una distribuzione di probabilità lontana dalla distribuzione Gaussiana, è così definito:

$$S_T = \frac{\overline{\theta^3}}{\sigma_T^3} \qquad [8.54]$$

dove $\overline{\theta^3}$ è il momento terzo centrale della temperatura potenziale virtuale. L'obiettivo che ci poniamo è quello di definire una Relazione di Similarità per tale parametro. Senza entrare nei particolari, Andreas e al. (1998) hanno dimostrato che in condizioni di estrema convettività (*local free convection*) S_T tende ad un valore costante e che ad elevate stabilità S_T tende ancora una volta ad un valore costante, diverso però dal precedente. Questa costanza di S_T la si *intuisce* dalle misure che, comunque risultano molto disperse.

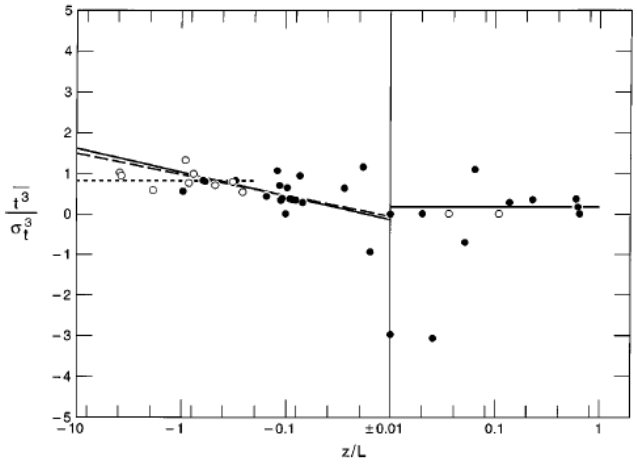


Fig. 8.33: variazione della Funzione di Similarità Φ_{TTT} *con la stabilità (Andreas e al., 1998)*

Da queste poche misure disponibili, Tillman (1972) e Andreas e al. (1998), tenendo conto di un debole trend lineare che si intuisce sia nelle condizioni stabili che in quelle convettive, affermano che è possibile definire una relazione di Similarità del tipo:

$$S_T = \Phi_{TTT}(\zeta) \qquad [8.55a]$$

dove la Funzione Universale di Similarità è data dalle relazioni:

$$\Phi_{TTT}(\zeta) = \begin{cases} a + b\,ln(-\zeta) & \text{se } \zeta < 0 \\ c & \text{se } \zeta \geq 0 \end{cases} \qquad [8.55b]$$

in cui i parametri *a*, *b* e *c* assumono rispettivamente i valori 1.044, 0.255 e 0.15. Tale Funzione di Similarità è mostrata nella **Fig.8.33**. Come si nota, la Funzione Φ_{TTT} proposta non risulta continua a $\zeta = 0$.

8.3.4.3 La Similarità per la deviazione standard dell'umidità

Come nel caso del profilo verticale, anche per la deviazione standard dell'umidità è possibile individuare una relazione di Similarità. Finora sono stati pubblicati pochissimi lavori in cui vengono presentate misure sperimentali di tale parametro e ciò deriva dal fatto che la misura veloce dell'umidità dell'aria è tuttora un problema tecnico non semplice da risolvere. I risultati ottenuti da Weaver (1990) e Andreas e al. (1998) hanno evidenziato come la forma funzionale della relazione di Similarità sia la seguente:

$$\frac{\sigma_q}{|q_*|} = \Phi_{qq}\left(\frac{z}{L}\right) \qquad [8.56a]$$

La Funzione Universale Φ_{qq} presenta, in situazioni di *free convection* e in *situazioni di elevata stabilità*, le stesse caratteristiche comportamentali della relativa funzione universale σ_T. In particolare, Andreas e al. (1998) hanno proposto *per le situazioni convettive* la relazione:

$$\frac{\sigma_q}{|q_*|} = 4.1(1 - 28.4\zeta)^{-1/3} \qquad [8.56b]$$

mentre per le *situazioni stabili*, in accordo con Weaver (1990), propongono che la Funzione Universale Φ_{qq} sia indipendente da ζ ed assuma un valore costante pari a 4.1.

8.3.5 LE RELAZIONI DI SIMILARITÀ PER I PARAMETRI DI STRUTTURA

Al Cap. 3 ed al Cap. 4 abbiamo introdotto le Funzioni di Struttura di vario ordine in maniera del tutto generale e le abbiamo impiegate per studiare dal punto di vista teorico la struttura statistica del *PBL*. Qui invece studieremo in particolare le Funzioni di Struttura del secondo ordine di cui ricordiamo la definizione. Immaginiamo di considerare una specifica grandezza meteorologica *f*, per esempio la temperatura potenziale virtuale, ed immaginiamo di poter conoscere l'evoluzione di tale grandezza in due punti distinti dello spazio, il punto P_1 localizzato nella posizione **x** ed il punto P_2 localizzato nella posizione $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}$, dove $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{r}$ sono due generici vettori. Oltre a ciò, assumiamo che *f* sia stazionaria ed omogenea, che è poi una delle ipotesi adottata dal MOST nel *SL*. Definiamo Funzione di Struttura del secondo ordine della variabile *f* la grandezza seguente:

$$D_{ff}(\boldsymbol{r}) = \overline{[f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r})]^2} \qquad [8.57a]$$

Se, invece di una sola grandezza meteorologica, ne consideriamo due contemporaneamente, allora la Funzione di Struttura del secondo ordine per le grandezze *f* e *g* è data dalla relazione:

$$D_{fg}(\boldsymbol{r}) = \overline{[f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r})][g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r})]} \qquad [8.57b]$$

A priori le Funzioni di Struttura non dipendono dalla particolare posizione **x** considerata, visto che abbiamo supposto che i campi di *f* e *g* siano omogenei, ma a priori dipenderanno dal vettore distanza $\boldsymbol{r}$ che separa i due punti e ne definisce l'orientamento reciproco. Tuttavia, se la distanza tra i due punti (cioè $|\boldsymbol{r}|$) sta all'interno dell'*inertial sub-range*, per l'ipotesi di Kolmogorov i campi di *f* e *g* oltre che stazionari ed omogenei, sono anche localmente isotropi e quindi la statistica del fluido, in questo caso le Funzioni di Struttura, dipende solo dalla distanza tra i due punti e non dal loro orientamento reciproco. Quindi le relazioni precedenti si semplificano,

diventando dipendenti solo dalla distanza r (che è uno scalare) tra i due punti considerati dalla funzione di struttura, cioè:

$$D_{ff}(r) = \overline{[f(x) - f(x+r)]^2} \quad [8.57c]$$

$$D_{fg}(r) = \overline{[f(x) - f(x+r)][g(x) - g(x+r)]} \quad [8.57d]$$

Senza entrare ora nei dettagli, possiamo affermare che quando la distanza r tra i due punti P_1 e P_2 è inferiore a $z/2$ ed è superiore ad almeno una decina di volte la lunghezza di scala di Kolmogorov η (vedi Capitolo 4) allora c'è una ragionevole certezza di operare all'interno dell'*inertial subrange*. Senza l'ipotesi di isotropia locale di Kolmogorov dovremmo distinguere tra Funzioni di Struttura longitudinali (P_1 e P_2 si trovano allineati lungo la direzione media del moto), trasversali (P_1 e P_2 si trovano su una linea perpendicolare, orizzontale o verticale, rispetto alla direzione media del vento) e oblique. Quando, però, si sta nell'ambito dell'ipotesi Kolmogorov, il comportamento di tutte le Funzioni di Struttura tra due punti separatati dalla distanza r è uguale, a prescindere dall'orientamento del segmento che li unisce rispetto alla direzione media del moto.

Comunque sia, mettere a punto un apparato sperimentale che misuri veramente la Funzione di Struttura non è poca cosa. Molto più semplice ed economico è adottare l'Ipotesi Taylor. In effetti, se al tempo t_1 si misura il valore f_1 in un punto $\boldsymbol{x}$ fisso e se nello stesso punto si misura al tempo $t_2 = t_1 + \tau$ il valore f_2, adottando l'Ipotesi di Taylor è come se misurassimo f_1 e f_2 in due punti dello spazio collocati lungo la direzione media del moto separati dalla distanza $r = U \cdot \tau$ dove U è la velocità media del vento. Quindi l'applicazione dell'Ipotesi di Taylor consente di trasformare la distanza spaziale r (se è lungo la *streamline*) in una *distanza temporale* τ, purché la turbolenza non sia eccessiva, cioè purché (Stull 1988):

$$I_u = \sigma_u / U \leq 1/3 \quad [8.58a]$$

e purché τ rispetti la condizione seguente (Kaimal e al., 1972 e Fairall e al., 1990):

$$\tau \leq 0.5\, z/U \quad [8.58b]$$

dove z è la quota di misura. In questo caso l'adozione operativa dell'Ipotesi di Taylor non comporta alcuna variazione nella definizione delle Funzioni di Struttura: esse sono sempre espresse dalla relazioni (8.57c,d) in cui si sostituisce a r il prodotto $U\tau$. Se la distanza r tra i due punti tende a zero, D_{ff} tende a zero; se viceversa r cresce, nella maggior parte dei fluidi turbolenti anche D_{ff} tende a crescere. In generale si è visto (Tatarski, 1961) che nell'*inertial subrange* (si veda il Capitolo 4) D_{ff} dipende solo da r secondo una relazione generale del tipo:

$$D_f(r) = C_f^2 r^{2/3} \quad [8.59]$$

dove C^2_f è il <u>*Parametro di Struttura*</u>, variabile molto usata nelle applicazioni pratiche e dipendente dalla stabilità atmosferica.

A priori, qualunque variabile meteorologica potrebbe essere analizzata mediante le Funzioni di Struttura del secondo ordine (o di ordini superiori), tuttavia nelle applicazioni pratiche vengono trattate prevalentemente le Funzioni di Struttura del secondo ordine relative alla componente longitudinale del moto $u(t)$, alla temperatura potenziale virtuale $\theta(t)$ e all'umidità specifica $q(t)$. Per la relazione precedente, una volta noto r, è immediato ottenere il Parametro di Struttura che indicheremo come C^2_V , se la variabile coinvolta è la velocità longitudinale del vento $u(t)$, come C^2_T se la variabile coinvolta è la temperatura potenziale virtuale $\theta(t)$ e come C^2_Q se la variabile coinvolta è l'umidità specifica $q(t)$. Di tutte questi Parametri di Struttura vogliamo ottenere una Relazione di Similarità per il rispettivo profilo verticale nel *SL*.

8.3.5.1 Relazione di Similarità per il Parametro di Struttura C^2_V

Consideriamo inizialmente C^2_V. Gli stessi argomenti di Analisi Dimensionale e di Similarità di Monin-Obukhov utilizzati a proposito di σ_w conducono ad individuare i due rapporti adimensionali caratteristici seguenti:

$$\frac{C_V^2 z^{2/3}}{u_*^2} \qquad \zeta = \frac{z}{L} \tag{8.60a}$$

da cui è immediato cercare una Relazione di Similarità del tipo:

$$\frac{C_V^2 z^{2/3}}{u_*^2} = F_{uu}(\zeta) \tag{8.60b}$$

Indicheremo col nome *Parametro di Struttura Adimensionale* il membro di sinistra della relazione precedente.

Il suo comportamento asintotico per $\zeta \to -\infty$ (cioè in *local free convection*) è individuabile con i soliti argomenti di Analisi Dimensionale, tenendo conto che in queste situazioni u_* risulta del tutto ininfluente. Pertanto, si vede immediatamente che:

$$\lim_{\zeta \to -\infty} \frac{C_V^2 z^{2/3}}{u_*^2} = C_1 |\zeta|^{2/3} \tag{8.60c}$$

dove C_1 è una appropriata costante da individuare sperimentalmente. Nel caso, invece, di *stabilità estrema* (cioè quando $\zeta \to +\infty$), risulta del tutto ininfluente la quota di misura z e quindi il comportamento asintotico previsto (e confermato in Wyngaard e Kosovic, 1994) è:

$$\lim_{\zeta \to \infty} \frac{C_V^2 z^{2/3}}{u_*^2} = C_2 \zeta^{2/3} \tag{8.60d}$$

Anche in questo caso con C_2 si è indicata un'appropriata costante.

Dalle misure ottenute da numerose campagne sperimentali si è giunti per il Parametro di Struttura Adimensionale ad una relazione analitica del tipo:

$$\frac{C_V^2 z^{2/3}}{u_*^2} = \begin{cases} a \cdot (1 + b \cdot |\zeta|)^{2/3} & \text{per } \zeta < 0 \\ a \cdot (1 + c \cdot \zeta)^{2/3} & \text{per } \zeta > 0 \end{cases} \tag{8.61}$$

Va rilevato che questa relazione rispetta i limiti asintotici previsti dall'Analisi Dimensionale. Kaimal e Finnigan (1994) hanno proposto per le costanti numeriche presenti nell'equazione precedente i valori $a = 4.0$, $b = 0.5$ e $c = 5$, mentre Fairall et al. (1990) hanno attribuito a queste costanti numeriche rispettivamente i valori 4.2, 0.5 e 2.5.

Come vedremo tra poco, le Funzioni di Struttura sono legate da un lato al tasso di dissipazione medio di energia cinetica turbolenta ε e dall'altro agli spettri monodimensionali. Dato che sia ε che gli spettri monodimensionali nel *SL* possono essere trattati secondo il MOST, è inevitabile che la Funzione Universale $F_{uu}(\zeta)$ e le analoghe Funzioni Universali per gli altri Parametri di Struttura siano a loro volta dipendenti da altre Funzioni Universali relative a ε e agli spettri monodimensionali. Per il momento ci fermiamo qui e riprenderemo l'argomento quando tratteremo la relazione di Similarità per il tasso di dissipazione media di energia cinetica turbolenta.

8.3.5.2 Relazione di Similarità per il Parametro di Struttura C^2_T

Consideriamo ora C^2_T. Applicando anche in questo caso i ragionamenti di Analisi Dimensionale fatti a proposito di σ_T, è facile vedere come siano individuabili due rapporti adimensionali rilevanti:

$$\frac{C_T^2 z^{2/3}}{T_*^2} \qquad \zeta = \frac{z}{L} \tag{8.62a}$$

da cui è immediato ipotizzare l'esistenza di una Relazione di Similarità del tipo:

$$\frac{C_T^2 z^{2/3}}{T_*^2} = F_{TT}(\zeta) \tag{8.62b}$$

Anche in questo caso conviene impiegare l'Analisi Dimensionale per individuare il comportamento asintotico di F_{TT}. Nel caso di *local free convection*, l'indipendenza da u_* porta a dire che:

$$\lim_{\zeta \to -\infty} \frac{C_T^2 z^{2/3}}{T_*^2} = C_1 |\zeta|^{-2/3} \qquad [8.62c]$$

dove C_1 è una costante. Nel caso, invece, di *forte stabilità*, il Parametro di Struttura tende ad essere indipendente dalla quota di misura z; pertanto, l'Analisi Dimensionale conduce a:

$$\lim_{\zeta \to \infty} \frac{C_T^2 z^{2/3}}{T_*^2} = C_2 |\zeta|^{2/3} \qquad [8.62d]$$

relazione confermata anche da Wyngaard e Kosovic (1994), dove C_2 è un'altra costante. È estremamente interessante notare come il comportamento asintotico a forti stabilità presenti una dipendenza da ζ opposta al limite ottenuto nel caso di *free convention.*

I dati ottenuti nelle numerose campagne sperimentali hanno portato alla Relazione di Similarità seguente (Fairall e al., 1990; Hill e al, 1992):

$$\frac{C_T^2 z^{2/3}}{T_*^2} = \begin{cases} 5 \cdot (1 + 7|\zeta|)^{-2/3} & \text{per } \zeta < 0 \\ 5 \cdot (1 + 2.5\zeta)^{2/3} & \text{per } \zeta > 0 \end{cases} \qquad [8.63a]$$

Come si nota immediatamente, questa relazione rispetta entrambi i limiti asintotici previsti.

Nelle situazioni convettive, c'è unanimità da parte dei vari Autori nella forma funzionale per la $F_{TT}(\zeta)$, anche se sono stati proposti valori differenti per i due parametri che nella (8.63a) valgono rispettivamente 5 e 7 e ciò probabilmente è causato dalla diversa metodologia di *fitting* dei dati adottata dai vari Autori (come sottolineato da Braam e al, 2014). Tra gli altri citiamo Li e al. (2012) che sostituiscono ai precedenti i valori di 6.7 e 14.9.

Nelle situazioni stabili, invece, non c'è unanimità per la forma della Funzione di Similarità $F_{TT}(\zeta)$. Tra le varie proposte conviene citare la forma proposta da Li e al. (2012) data dalla relazione:

$$\frac{C_T^2 z^{2/3}}{T_*^2} = 4.4 \cdot \left(1 + 1.3\zeta^{2/3}\right) \qquad [8.63b]$$

con cui concordano anche Hartogensis e De Bruin (2005) pur sostituendo al valore 1.3 il valore 1.6. Questa forma funzionale ovviamente rispetta il limite asintotico per le elevate stabilità. È stata proposta da De Bruin e al. (1993) e Kaimal e Finnigan (1994) anche la forma funzionale seguente in cui la dipendenza dal parametro di stabilità ζ è completamente lineare:

$$\frac{C_T^2 z^{2/3}}{T_*^2} = 5 \cdot (1 + 3\zeta) \qquad [8.63c]$$

e che quindi non rispetta il limite asintotico per $\zeta \to +\infty$.

7.3.5.3 Relazione di Similarità per il Parametro di Struttura C^2_Q

Per quanto riguarda C^2_Q analogamente a quanto detto per la deviazione standard dell'umidità specifica q, è possibile ipotizzare una Relazione di Similarità del tipo:

$$\frac{C_q^2 z^{2/3}}{q_*^2} = F_{qq}(\zeta) \qquad [8.64a]$$

con comportamenti asintotici analoghi a quelli riscontrati per F_{TT}. Sono molto scarsi i dati sperimentali che consentono di verificare tale ipotesi e di individuare la F_{qq}. Edson e Fairall (1998) propongono la relazione seguente:

$$\frac{C_q^2 z^{2/3}}{q_*^2} = \begin{cases} 5.9 \cdot (1 + 8|\zeta|)^{-2/3} & \text{per } \zeta < 0 \\ 5.9 \cdot (1 + 2.4\zeta)^{2/3} & \text{per } \zeta > 0 \end{cases} \qquad [8.64b]$$

che rispetta i limiti asintotici previsti. In alternativa, Li e al. (2012) propongono le relazioni seguenti:

$$\frac{C_q^2 z^{2/3}}{q_*^2} = \begin{cases} 3.5 \cdot (1 + 4.5|\zeta|)^{-2/3} & \text{per } \zeta < 0 \\ 3.5 \cdot \left(1 + 2.7\zeta^{2/3}\right) & \text{per } \zeta > 0 \end{cases} \qquad [8.64c]$$

7.3.5.4 Confronto tra le diverse Relazioni di Similarità per i Parametri di Struttura

Nella **Fig. 8.34** sono presentati gli andamenti delle Funzioni Universali F_{uu}, F_{TT} e F_{qq} al variare del parametro di stabilità ζ. Le osservazioni che possiamo fare sono:

- F_{TT} e F_{qq} sono molto simili tra loro, soprattutto nelle condizioni convettive,
- F_{TT} e F_{qq} presentano entrambe un andamento monotono crescente con la stabilità,
- F_{uu} presenta invece un andamento differente. Mentre nelle situazioni stabili cresce con la stabilità, nelle situazioni convettive decresce lentamente col decrescere di ζ.

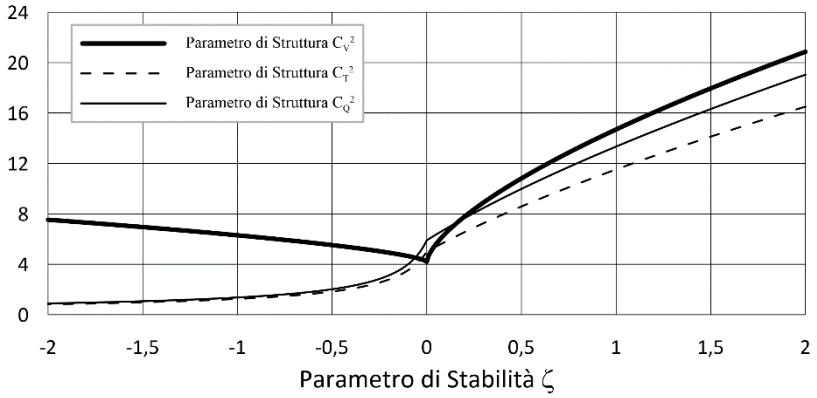


Fig. 8.34: andamento con la stabilità delle Funzioni Universali di Similarità F_{uu}, F_{TT}, F_{qq}

8.3.6 I COEFFICIENTI DI CORRELAZIONE LINEARE

I coefficienti di correlazione lineare sono il rapporto tra la covarianza di due variabili meteorologiche di interesse e il prodotto delle rispettive deviazioni standard. È estremamente interessante, dal punto di vista pratico, analizzare il loro andamento in funzione del grado di stabilità rappresentato dal valore del parametro ζ e ciò risulta più agevole se esiste una Relazione di Similarità per ciascuna delle variabili coinvolte. Sfortunatamente non per tutte le variabili di interesse sono state individuate delle Relazioni di Similarità sempre valide.

La correlazione tra *u* e *w*

Consideriamo inizialmente il coefficiente di correlazione lineare r_{uw} tra la componente longitudinale e verticale del moto, che è definita come:

$$r_{uw} = \overline{uw}/(\sigma_u \sigma_w) \qquad [8.65a]$$

Abbiamo già studiato la Relazione di Similarità per la deviazione standard della componente verticale del vento, mentre abbiamo visto che per la componente longitudinale non sembrerebbe possibile scrivere una Relazione di Similarità nell'ambito del MOST, vista la sua presunta dipendenza dall'estensione verticale del *PBL*. Comunque possiamo sempre dire che:

$$r_{uw} = -\Phi_{uu}^{-1}\Phi_{ww}^{-1} \qquad [8.65b]$$

Nelle situazioni convettive, tenendo conto della (8.45b) e della (8.48b) si ottiene in pratica una Funzione Universale di Similarità anche per il coefficiente di correlazione lineare r_{uw} data da:

$$r_{uw} = -\left[1.25(1-3\zeta)^{1/3}\left[4+0.6\left(\frac{z_i}{|L|}\right)^{1/3}\right]\right]^{-1} \qquad [8.65c]$$

relazione che presenta una dipendenza non solo dal parametro ζ, ma anche dall'estensione verticale del *PBL* z_i. Se però adottiamo la (8.49a) al posto della (8.48b) e studiamo il limite asintotico in condizioni di *local free convection*, otteniamo la relazione seguente:

$$r_{uw} = -0.2|\zeta|^{-2/3} \qquad [8.65d]$$

che evidenza una continua diminuzione della correlazione con l'aumentare della convettività, confermando ancora una volta che in *local free convection* u_* non assume un ruolo rilevante.

Nel caso delle *situazioni stabili*, considerando che σ_w/u_* e σ_u/u_* sono entrambe costanti e pari rispettivamente a 1.25 e 2.55, anche r_{uw} assume un valore costante pari a -0.31. Evidentemente, scelte differenti per le due costanti impiegate porteranno a valori un poco differenti per r_{uw} (per esempio in Kaimal e Finnigan (1994) r_{uw} = -0.35).

La correlazione tra *w* e θ

Molto più interessante è il caso della correlazione lineare $r_{w\theta}$ tra la componente verticale del moto e la temperatura potenziale virtuale, che è definita come:

$$r_{w\theta} = \overline{w\theta}/(\sigma_w\sigma_T) \qquad [8.66a]$$

e che, in base alle Relazioni di Similarità, diventa:

$$r_{w\theta} = \frac{1}{\Phi_{ww}\Phi_{\theta\theta}} \qquad [8.66b]$$

Se si considerano le *situazioni convettive* e le Relazioni di Similarità ottenute per σ_w/u_* e $\sigma_T/|T_*|$ (quest'ultima nella sua forma asintotica), si giunge facilmente ad una espressione analitica per la relazione precedente che risulta così espressa:

$$r_{w\theta} = 0.84\frac{\zeta^{1/3}}{(1-3\zeta)^{1/3}} \qquad [8.66c]$$

Quando $\zeta \rightarrow$ -∞, cioè quando si è in *local free convection*, questa relazione tende ad un valore costante, pari a 0.58 (naturalmente valori un poco differenti per i coefficienti adottati nelle Relazioni di Similarità possono portare ad un valore asintotico un poco differente).

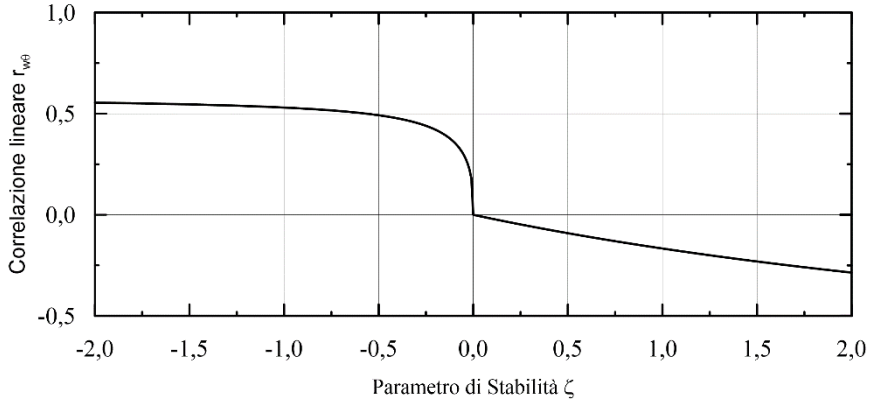


Fig. 8.35: andamento con la stabilità del coefficiente di correlazione lineare $r_{w\theta}$

Nelle *situazioni stabili*, se consideriamo costanti le funzioni di Similarità Φ_{ww} e Φ_{ww},

anche $r_{w\theta}$ tenderà ad un valore costante che, con questa scelta di coefficienti è pari a -0.28. Nella **Fig. 8.35** viene presentato l'andamento di $r_{w\theta}$ in funzione del parametro di stabilità *z/L*.

8.3.7 LA SIMILARITÀ PER LA DISSIPAZIONE DELLA *TKE* E DELLA VARIANZA DELLA TEMPERATURA

Tra le varie equazioni di bilancio incontrate al Capitolo 5, il bilancio dell'energia cinetica turbolenta ed il bilancio della varianza della temperatura potenziale virtuale (o meglio della sua metà) costituiscono il ponte naturale tra la descrizione della turbolenza nel dominio del tempo e l'analoga descrizione nel dominio delle frequenze. In entrambe queste relazioni di bilancio è presente un termine di dissipazione molecolare che sarà, poi, l'obiettivo principale della nostra indagine.

8.3.7.1 Il tasso medio di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta

Quando le condizioni superficiali sono caratterizzate da una completa omogeneità orizzontale e quando si adotta un sistema di riferimento cartesiano il cui asse *x* è orientato nella direzione del vento medio e, quindi, nella direzione dello *stress* superficiale, la legge di conservazione dell'Energia Cinetica Turbolenta (TKE) si semplifica notevolmente, perdendo sia i termini di trasporto medio che tutti i termini che implicano una variazione orizzontale. Indicando con *E* l'energia cinetica turbolenta, in questa situazione paradigmatica la relazione di bilancio si semplifica nei termini seguenti:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \underbrace{-\overline{u'w'}\frac{\partial U}{\partial z}}_{\text{Shear Production}} + \underbrace{\frac{g}{T_0}\overline{w'\theta'}}_{\text{Buoyant Production}} + \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\overline{w'p}}_{\text{Pressure Transport}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\overline{ew}}_{\text{Turbulent Transport}} - \underbrace{\varepsilon}_{\text{Viscous Dissipation}} \qquad [8.67a]$$

dove con *e* si indica la fluttuazione di *TKE*, con *p* la fluttuazione di pressione e con ε il tasso medio di dissipazione di energia cinetica turbolenta. I vari termini del membro di destra dell'equazione di bilancio rappresentano, come abbiamo già visto, differenti tipi di contributi alla variazione nel tempo della *TKE*:

- il termine di *Shear Production* rappresenta il contributo meccanico alla turbolenza dovuto all'interazione diretta tra gli Stress di Reynolds ed il gradiente verticale della velocità media del moto. Questo contributo è sempre attivo e costituisce una sorgente costante di produzione di energia cinetica turbolenta nel *SL*, questo perché nel *SL* il gradiente della velocità media del vento è sempre positivo e la covarianza tra le componenti *u* e *w* del vento è sempre negativa. Questo termine può essere misurato direttamente nel *SL*;

- il termine di *Buoyant Production* rappresenta il contributo convettivo alla turbolenza del *SL* e deriva da un lato dal galleggiamento e dall'altro dal flusso turbolento di calore sensibile. Questo termine può essere sia positivo (quando $\overline{w'\theta'}>0$ e quindi rappresenta una sorgente di turbolenza), che negativo (quando $\overline{w'\theta'}<0$ e quindi rappresenta un *pozzo* di turbolenza). Anche questo termine può essere misurato direttamente nel *SL* essendo relativamente semplice misurare il flusso turbolento di calore sensibile e la temperatura media dell'aria;

- il termine di *Pressure Transport* rappresenta il trasporto verticale di *TKE* dovuto alle fluttuazioni di pressione. Normalmente questo termine non viene misurato direttamente a causa delle inerenti difficoltà sperimentali;

- il termine di *Turbulent Transport* rappresenta il tasso a cui la *TKE* viene importata o

esportata a causa delle fluttuazioni di velocità. Questo termine può essere misurato direttamente anche se con una certa difficoltà;

- il termine *Viscous Dissipation* è il tasso medio a cui la *TKE* viene convertita in energia interna (cioè calore) a causa degli stress viscosi. Questo termine può essere misurato direttamente con molta difficoltà e, come vedremo, normalmente lo si determina indirettamente.

Se si scompone la relazione precedente nelle sue tre componenti cartesiane, si vede come nelle condizioni convettive la *TKE* viene prodotta in due direzioni distinte: nella direzione orizzontale a causa dello *shear* e in direzione verticale a causa degli effetti termici (*buoyancy*). In particolare, questa produzione verticale è derivata sia dalla temperatura in sé stessa (e quindi dal galleggiamento) che dal flusso di calore e questi due fattori agiscono in maniera combinata.

Per applicare questa relazione di bilancio alla situazione paradigmatica cui si riferisce il MOST dobbiamo anche ipotizzare di stare in una situazione quasi stazionaria: in questo caso il tasso di variazione della *TKE*, cioè il membro di sinistra della (8.67a) sarà nullo. Se poi moltiplichiamo tutti i termini dell'equazione stazionaria per il rapporto kz/u_*^3, otteniamo la relazione diagnostica seguente:

$$-\frac{kz}{u_*^3}\overline{u'w'}\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{kz}{u_*^3}\frac{g}{T_0}\overline{w'\theta'}-\frac{1}{\rho}\frac{kz}{u_*^3}\frac{\partial}{\partial z}\overline{w'p}-\frac{kz}{u_*^3}\frac{\partial}{\partial z}\overline{ew'}-\frac{kz}{u_*^3}\varepsilon=0 \qquad [8.67b]$$

Il primo termine altro non è che il gradiente adimensionale della velocità media del vento, cioè $\Phi_m(\zeta)$, mentre il secondo termine è sicuramente pari a $-\zeta$. Il terzo termine ed il quarto termine, invece, sono termini di trasporto nella versione adimensionale che possiamo indicare rispettivamente come $\Phi_p(\zeta)$ e $\Phi_t(\zeta)$. Infine, l'ultimo termine rappresenta la versione adimensionale del tasso di dissipazione media di *TKE* dovuta alle forze viscose. Questa grandezza adimensionale la indichiamo come $\Phi_\varepsilon(\zeta)$ ed è definita come:

$$\frac{kz\varepsilon}{u_*^3}=\Phi_\varepsilon(\zeta) \qquad [8.68a]$$

Tutte queste funzioni adimensionali, alcune già incontrate, altre del tutto nuove, è ragionevole che dipendano dal parametro di stabilità ζ e che seguano il MOST. Wyngaard e Coté (1971) hanno studiato nei dettagli i vari termini dell'equazione di bilancio della *TKE*, cercando di definire quantitativamente tutte le Funzioni Universali di Similarità che in essa appaiono e a questo studio pionieristico ne sono seguiti molti altri tra i quali quello di Högstrom (1990) è forse uno dei più significativi.

Di $\Phi_m(\zeta)$ e di ζ abbiamo già trattato. Se, invece, ci concentriamo sull'individuazione di una Relazione di Similarità che descriva quantitativamente il profilo verticale di ε entro il *SL*, secondo il MOST è ragionevole (Monin e Yaglom, 2007a) che le variabili rilevanti siano z, u_*, $\overline{w'\theta'}$ e β e pertanto l'Analisi Dimensionale ci suggerisce l'esistenza dei rapporti adimensionali:

$$\frac{kz\varepsilon}{u_*^3} \qquad \zeta=z/L \qquad [8.68b]$$

cosa che porta alla Relazione di Similarità (8.68a).

Prima di dedicarci allo studio di $\Phi_\varepsilon(\zeta)$, riscriviamo il bilancio di *TKE* (8.67b) nella versione adimensionale introducendo le varie Funzioni Universali:

$$\Phi_m(\zeta)-\zeta-\Phi_p(\zeta)-\Phi_t(\zeta)-\Phi_\varepsilon(\zeta)=0 \qquad [8.69a]$$

Parecchio sforzo teorico e, soprattutto, sperimentale è stato fatto per individuare le Funzioni Universali Φ_p, Φ_t e Φ_ε; per esempio Högstrom (1990) è riuscito a dare una forma funzionale ad ogni singola Funzione Universale presente nell'equazione di bilancio, anche se ad oggi non si può dire di averne una conoscenza completa.

Le caratteristiche della Funzione Universale Φ_ε

Ovviamente ci si è sempre chiesti se la relazione di bilancio di energia cinetica turbolenta, all'apparenza semplice, fosse ulteriormente semplificabile e ciò è stato il tema su cui si è focalizzata molta attività di ricerca. Un esempio di ciò è costituito dal lavoro di Wyngaard e Coté (1971) che si è dedicato a questa ricerca sia nelle situazioni convettive che nelle situazioni debolmente stabili e che si conclude nelle due affermazioni seguenti:

- le funzioni $\Phi_p(\zeta)$ e $\Phi_t(\zeta)$ individualmente è ben poco probabile che siano sistematicamente nulle e quindi contribuiscono al bilancio di *TKE*;
- tuttavia, esse contribuiscono al bilancio normalmente con segni opposti, per cui in pratica è la loro somma ad essere nulla.

Secondo questa ipotesi (che allora sembrava anche un'evidenza sperimentale), la (8.69a) si ridurrebbe alla più semplice relazione seguente:

$$\Phi_m(\zeta) - \zeta - \Phi_\varepsilon(\zeta) = 0 \qquad [8.69b]$$

secondo cui la dissipazione viscosa bilancia sempre e completamente la produzione (che è la somma della produzione meccanica e della produzione convettiva). Se ciò fosse vero si avrebbe quindi che:

$$\Phi_\varepsilon(\zeta) = \Phi_m(\zeta) - \zeta \qquad [8.69c]$$

quindi $\Phi_\varepsilon(\zeta)$ risulterebbe nota una volta nota $\Phi_m(\zeta)$. E potremmo fermarci qui, visto che di $\Phi_m(\zeta)$ abbiamo estesamente parlato. Tuttavia, pur con alterne vicende, man mano si accumulavano misure per i vari termini del bilancio di *TKE*, ci si accorgeva che, nella realtà, il termine di dissipazione viscosa non bilanciava esattamente la somma dei termini di produzione e questo sbilanciamento era, di volta in volta, più o meno grande. Va però detto che le difficoltà incontrate nel realizzare le misure su cui fondare i vari ragionamenti erano e sono talmente elevate da non poter dire con certezza se l'ipotesi di bilancio perfetto tra dissipazione e produzione sia da considerarsi non attendibile. Il dubbio resta ancora, ma per il momento ammettiamo che lo sbilanciamento riscontrato da alcuni lavori (non tutti) sia reale e non un artefatto dovuto agli errori di misura. Riassumendo sinteticamente quanto si è riscontrato (Sorbjan 1989), si può dire che:

- nelle situazioni circa adiabatiche, quando $|\zeta| \to 0$, la dissipazione viscosa è sostanzialmente pari alla produzione meccanica;
- nelle situazioni stabili i termini prevalenti del bilancio sono la *Shear Production* e la *Viscous Dissipation*, entrambi proporzionali a ζ, mentre i due termini di trasporto sono quantitativamente piccoli ed il termine di *Buoyancy Production* è piccolo e negativo;
- nelle situazioni convettive tutti i termini risultano significativi. Il valore numerico di ciascun termine cresce con l'instabilità (cioè con $-\zeta$), eccetto il termine di *Shear Production* che invece decresce.

Dal punto di vista pratico, che poi è il punto di vista del MOST, era conveniente definire e stimare operativamente la Funzione Universale $\Phi_\varepsilon(\zeta)$ in una maniera differente. È senza ombra di dubbio vero che:

$$\Phi_\varepsilon(\zeta) = \Phi_m(\zeta) - \zeta - \Phi_p(\zeta) - \Phi_t(\zeta) \qquad [8.69d]$$

ma la determinazione di questa Funzione Universale poteva essere ottenuta in maniera più diretta semplicemente applicando il MOST alle misure contemporanee di ε e di ζ. Seguendo questa strada, era conveniente per prima cosa individuare le tendenze asintotiche della Funzione Universale $\Phi_\varepsilon(\zeta)$.

Il comportamento asintotico della $\Phi_\varepsilon(\zeta)_\varepsilon$ in situazioni di *local free convection* lo si ottiene

dall'Analisi Dimensionale ricordando che u_* non riveste alcun ruolo in questo tipo di regime fluidodinamico. In questo caso si vede che:

$$\lim_{\zeta\to-\infty}\frac{kz\varepsilon}{u_*^3}=\lim_{\zeta\to-\infty}\Phi_\varepsilon(\zeta)=C_\varepsilon|\zeta| \qquad [8.69e]$$

dove $C_{\varepsilon 1}$ è una costante da determinare. Nel caso, invece, di situazioni *prossime all'adiabaticità*, è immediato ottenere dall'Analisi Dimensionale che $\Phi_\varepsilon(\zeta)$ tende ad una costante $C_{\varepsilon 2}$. Infine, nel caso di *forte stabilità* è la quota di misura *z* a rivestire un ruolo irrilevante, pertanto è facile dimostrare che il limite asintotico alle alte stabilità curiosamente resta identico a quello nel caso della *free convection*.

Determinazione della Funzione Universale $\Phi_\varepsilon(\zeta)$

Dalle misure di ε (vedremo fra qualche Capitolo come realizzarle in maniera soddisfacente) e di ζ raccolte in diverse campagne sperimentali è stato possibile ottenere diverse correlazioni per la Funzione Universale $\Phi_\varepsilon(\zeta)$. In questo caso le difficoltà riscontrate sono le solite già viste nelle situazioni stabili per la determinazione corretta di ζ, mentre unanimemente i vari Autori hanno affermato che la determinazione di ε, peraltro non semplice, sembra immune dalle contaminazioni dei moti a mesoscala.

Nelle situazioni convettive si è giunti quasi unanimemente ad una relazione del tipo:

$$\Phi_\varepsilon(\zeta)=a\cdot\left[1+b|\zeta|^{2/3}\right]^{3/2} \qquad [8.70a]$$

Wyngaard e Coté (1971) e Kaimal e Finnigan (1994) hanno proposto per il coefficiente *a* il valore 1.0 (cioè hanno ipotizzato che all'adiabaticità ci fosse un bilancio perfetto tra *shear production* e *viscous dissipation*). Per il coefficiente *b*, essi propongono il valore 0.5 che però viene portato a 0.75 da Kaimal (1978) e da Caughey e Wyngaard (1979). Anche Moraes (2000) concorda con la relazione precedente, ma con un coefficiente *b* pari a 0.53 e con un coefficiente *a* pari a 0.93. Il fatto, però, che *a* non risulti pari all'unità significa che in condizioni prossime all'adiabaticità non c'è un bilancio perfetto tra *shear production* e *viscous dissipation*. È immediatamente chiaro come questa relazione rispetti i limiti asintotici della adiabaticità e della *local free convection*.

Högstrom (1990) dipinge una situazione notevolmente differente, infatti ottiene dalle misure disponibili una forma funzionale per $\Phi_\varepsilon(\zeta)$ del tipo (8.69c) così espressa:

$$\Phi_\varepsilon(\zeta)=1.24\cdot\left[(1-19\zeta)^{-1/4}-\zeta\right] \qquad [8.70b]$$

che ha almeno una caratteristica importante: all'adiabaticità questa relazione suppone che non ci sia un bilancio perfetto tra produzione e dissipazione e che $\Phi_\varepsilon(\zeta)$ tenda ad una costante superiore a 1, a differenza di quanto proposto da Moraes (2000). Comunque, si vede piuttosto facilmente che viene rispettato il limite asintotico della *local free convection*.

Come sempre l'applicazione del modello di Kader e Yaglom (1990) che vede il *SL* suddiviso in tre distinte stratificazioni, ciascuna con proprie caratteristiche, ha portato ad una visione un po' differente del problema. Trascurando gli aspetti teorici (per cui si rimanda ai lavori originali), questa nuova visione del problema porta ad una diversa espressione di $\Phi_\varepsilon(\zeta)$ (Kader 1992, Hsieh e Katul, 1997) così formulata:

$$\Phi_\varepsilon(\zeta)=0.4\cdot\left[\frac{10+7.5(-\zeta)+6.25(-\zeta)^2}{4+2.5(-\zeta)}\right] \qquad [8.70c]$$

che è profondamente differente dalle precedenti, anche se ammette un perfetto bilancio tra produzione e dissipazione viscosa all'adiabaticità e rispetta il limite asintotico della *local free convection*. Nella **Fig. 8.36** questa funzione viene graficata assieme alle relazioni (8.70a) e (8.69c). Come si può notare, curiosamente c'è maggiore affinità tra la relazione di Kader e la (8.69c), che richiede un completo bilancio tra produzione e dissipazione, che tra la relazione di Kader e la (8.70a). D'altro canto, anche le misure disponibili non sono molto chiare nel confermare una

relazione piuttosto che un'altra; infatti, la **Fig. 8.37** tratta dal lavoro di Wyngaard e Coté (1971) in cui sono presentate le misure su cui hanno fondato il loro lavoro, e la **Fig. 8.38** tratta dal più recente lavoro di Moraes (2000), non sembrano capaci di dirimere la controversia.

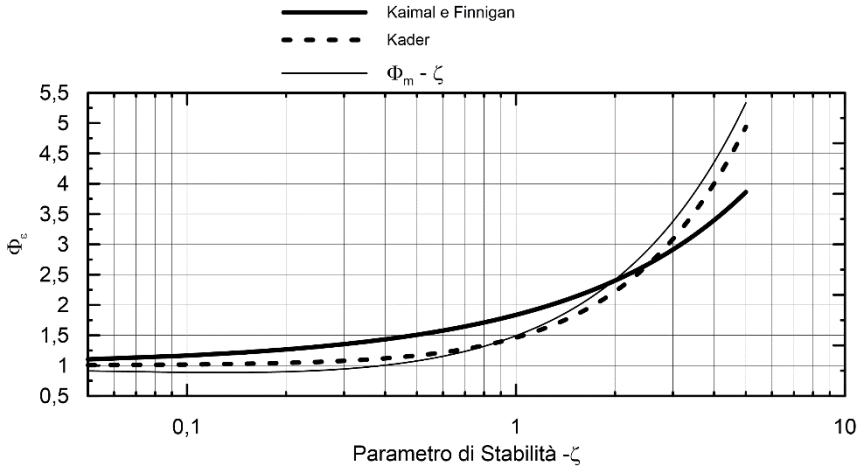


Fig.8.36: confronto tra le diverse forme proposte per $\Phi_\varepsilon(\zeta)$ nelle condizioni convettive.

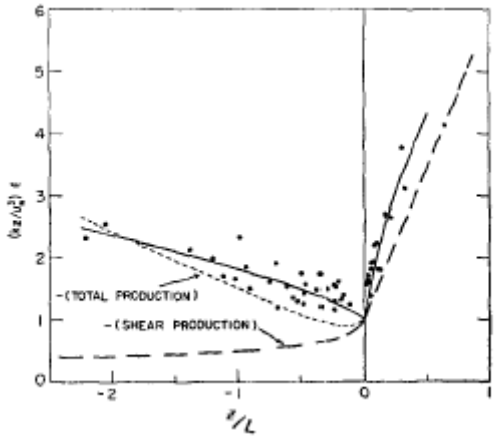


Fig.8.37: valori sperimentali e correlazioni di $\Phi_\varepsilon(\zeta)$ dal lavoro di Wyngaard e Coté (1971).

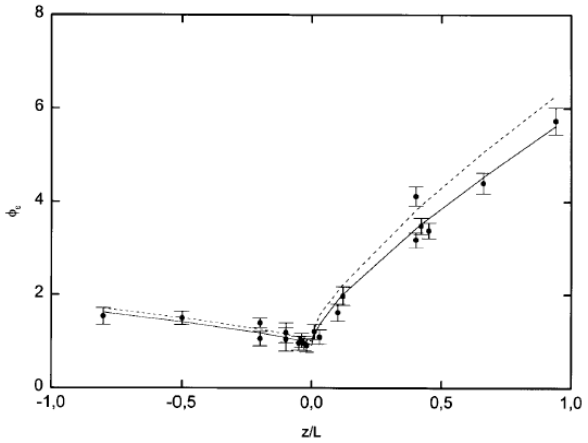


Fig.8.38: valori sperimentali e correlazioni di $\Phi_\varepsilon(\zeta)$ dal lavoro di Moraes (2000).

Nelle situazioni stabili, le misure disponibili, pur con molte incertezze, suggeriscono una relazione per $\Phi_\varepsilon(\zeta)$ del tipo:

$$\Phi_\varepsilon(\zeta) = a(1 + b\zeta) \qquad [8.71]$$

che ovviamente soddisfa il limite asintotico per le elevate stabilità. Kaimal e Finnigan (1994) propongono per *a* il valore 1.0 e per *b* il valore 5.0. C'è di fatto unanimità nella forma funzionale (8.71), anche se varie sono le proposte per i due coefficienti numerici presenti: Högstrom (1990) propone i valori 1.24 e 3.8, Pahlow e al. (2001) i valori 0.61 e 8.2 e Hartogensis e De Bruin (2005) i valori 0.8 e 3.1, Come si può vedere nella **Fig. 8.39**, la relazione (8.71) descrive particolarmente bene le misure rilevate in un ampio intervallo di stabilità, anche se esse sono troppo scarse nelle situazioni prossime all'adiabaticità per poter decidere se il limite adiabatico costante sia pari ad 1 (perfetto bilancio tra produzione e dissipazione) o diverso da 1 e, in questo caso, se maggiore o minore dell'unità.

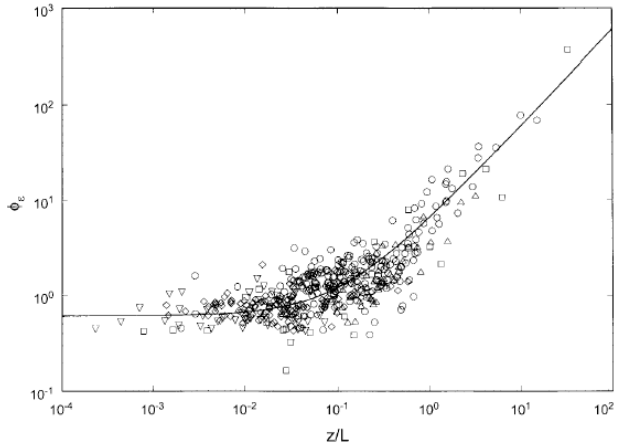


Fig.8.39: valori sperimentali e correlazioni di $\Phi_\varepsilon(\zeta)$ nelle situazioni stabili (Pahlow e al, 2001)

Nelle applicazioni pratiche, quando è necessario adottare in termini operativi una correlazione per la Funzione Universale $\Phi_\varepsilon(\zeta)$ che copra un intervallo di stabilità che va dalle situazioni convettive alle situazioni debolmente stabili e a quelle in regime di transizione, è necessario selezionare due delle relazioni precedenti, una per le situazioni convettive e l'altra per le situazioni stabili in modo tale da garantire almeno la continuità per $\zeta = 0$. Una possibile scelta è quella di adottare per $\Phi_\varepsilon(\zeta)$ la relazione (8.70a) per le situazioni convettive e la (8.71) per le situazioni stabili. Complessivamente, l'andamento di $\Phi_\varepsilon(\zeta)$ considerato è quello riportato nella **Fig. 7.40**.

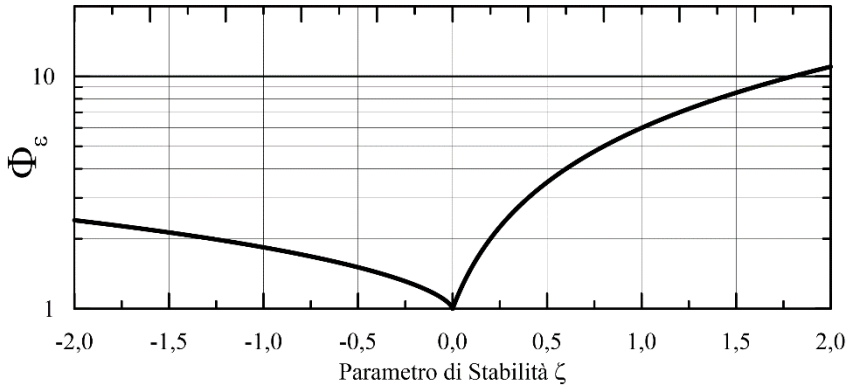


Fig. 8.40: andamento con la stabilità della Funzione Universale di Similarità Φ_ε

Le caratteristiche delle Funzioni Universali Φ_t e Φ_p

Poco si sa di queste Funzioni Universali e, per completezza, qui di seguito riportiamo le correlazioni individuate nello studio di Högstrom (1990):

$$\Phi_t(\zeta) = \begin{cases} -0.6\zeta + 0.25 & \zeta < 0 \\ 0.25 & \zeta \geq 0 \end{cases} \quad [8.72a]$$

$$\Phi_p(\zeta) = \begin{cases} -0.25 + 0.84\zeta - 0.24 \cdot (1\text{-}19\zeta)^{-1/4} & \zeta < 0 \\ -0.49 - 0.9\zeta & \zeta \geq 0 \end{cases} \quad [8.72b]$$

8.3.7.2 Il tasso medio di dissipazione della varianza della temperatura potenziale

Se consideriamo il bilancio entro il *SL* della semi-varianza della temperatura potenziale virtuale (per congruenza col bilancio di *TKE*) in condizioni di omogeneità orizzontale, vediamo che tale bilancio può essere espresso dalla relazione:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{\theta^2}}{\partial t} = -\overline{w\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\overline{w\theta^2} - N_\theta \quad [8.73a]$$

Il primo termine di destra è la produzione di varianza dovuta esclusivamente alla convettività, ma è una vera e propria produzione solo nelle situazioni convettive quando $\overline{w\theta}>0$ ed il gradiente di temperatura potenziale media è negativo. Il secondo termine descrive, invece, il trasporto turbolento di varianza e l'ultimo termine esprime la dissipazione di varianza dovuto alla diffusività molecolare. Se ipotizziamo anche di essere in situazioni stazionarie, secondo l'ipotesi che sta alla base del MOST, e rendiamo adimensionali tutti i termini dell'equazione moltiplicandoli per il rapporto $kz/(u_* T_*^2)$, allora otteniamo il bilancio in forma adimensionale:

$$\frac{kz}{T_*}\frac{\partial\Theta}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{kz}{u_* T_*^2}\frac{\partial}{\partial z}\overline{w\theta^2} - \frac{kz}{u_* T_*^2}N_\theta = 0 \quad [8.73b]$$

e nel primo termine riconosciamo immediatamente il gradiente normalizzato della temperatura potenziale virtuale. Se indichiamo poi con $\Phi_t(\zeta)$ il termine di trasporto adimensionale e con $\Phi_N(\zeta)$ la dissipazione molecolare, definita come:

$$\frac{kz}{u_* T_*^2}N_\theta = \Phi_N(\zeta) \quad [8.73c]$$

ed ipotizziamo ragionevolmente che entrambe queste entità siano funzioni della stabilità, il bilancio adimensionale in condizioni stazionarie può ora essere espresso come:

$$\Phi_h(\zeta) - \Phi_t(\zeta) - \Phi_N(\zeta) = 0 \quad [8.73d]$$

Come nel caso dell'energia cinetica turbolenta, anche questa volta siamo interessati ad ottenere una Relazione di Similarità per il tasso di dissipazione N_θ. Ancora una volta siamo in presenza di un'equazione che indica come, in situazioni stazionarie, la dissipazione molecolare eguagli la somma algebrica della produzione e del trasporto ed anche in questo caso il termine di trasporto mette a dura prova le attuali capacità di misura. Una semplificazione è data dal lavoro di Wyngaard e Cotè (1971), che, sulla base delle evidenze sperimentali, hanno ritenuto del tutto trascurabile $\Phi_t(\zeta)$. Ciò ha comportato inevitabilmente che la produzione di semi-varianza di temperatura potenziale fosse completamente bilanciata dalla dissipazione molecolare e quindi che:

$$\Phi_N(\zeta) = \Phi_h(\zeta) \quad [8.73d]$$

Questo bilancio perfetto risultava sostanzialmente verificato in ogni situazione di stabilità trovata durante la campagna sperimentale di cui erano state considerate le misure. Su questa base, quindi, ogni espressione funzionale ottenuta per $\Phi_h(\zeta)$ potrebbe essere impiegata anche per $\Phi_N(\zeta)$. D'altro canto, senza fare alcuna ipotesi sul termine di trasporto, operativamente, la maniera migliore di individuare questa Funzione Universale di Similarità è quella di realizzare campagne sperimentali

in cui vengono raccolte contemporaneamente le misure di N_θ e di ζ e con queste misure determinare direttamente $\Phi_N(\zeta)$.

Non ci sono molte relazioni che descrivano la funzione Universale $\Phi_N(\zeta)$. Se, come spesso si fa operativamente, si ipotizza che il termine di trasporto turbolento sia del tutto trascurabile, allora è sufficiente usare al posto di $\Phi_N(\zeta)$ una qualsiasi relazione per $\Phi_h(\zeta)$ come per esempio la seguente:

$$\Phi_h = \begin{cases} a \cdot (1 - b\zeta)^{-1/2} & \zeta \leq 0 \\ a + c\zeta & \zeta > 0 \end{cases} \qquad [8.74a]$$

dove per i coefficienti numerici *a*, *b* e *c* sono stati proposti rispettivamente i valori 0.74, 9 e 4.7. Moraes (2000) concorda con questa forma analitica, proponendo per i coefficienti numerici rispettivamente i valori 0.68, 5.5 e 4.2.

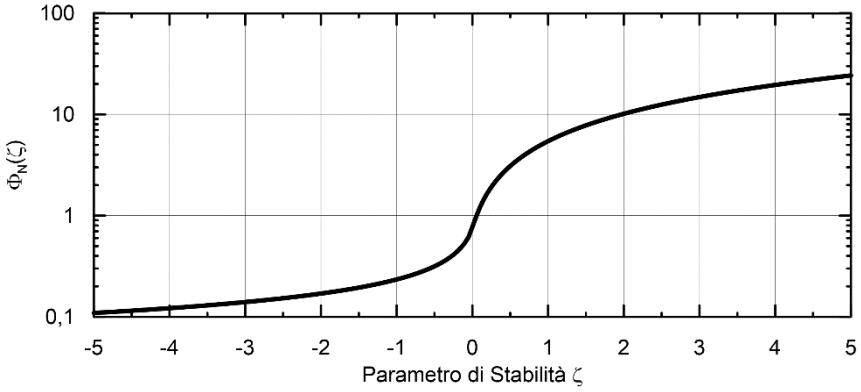


Fig. 8.41: andamento con la stabilità della Funzione Universale $\Phi_N(\zeta)$

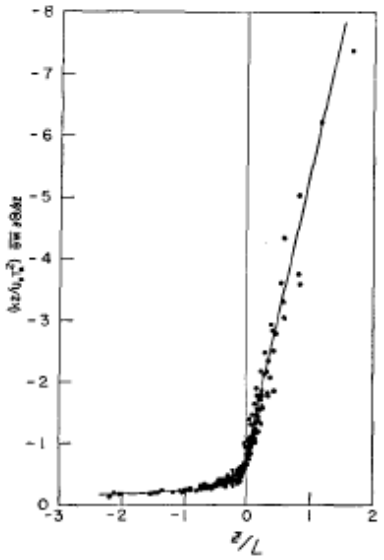


Fig. 8.42: andamento con la stabilità della Funzione Universale $\Phi_N(\zeta)$ (Wyngaard e Coté 1971)

Hsieh e Katul (1997), invece, hanno mostrato come nelle situazioni altamente convettive l'espressione riportata da Kader (1992) sia decisamente più adeguata a tener conto del non perfetto bilancio tra la produzione e la dissipazione di varianza. Essa risulta così espressa:

$$\Phi_N(\zeta) = 0.4 \cdot \left[\frac{10 + 7.5(-\zeta) + 6.25(-\zeta)^2}{1 + 125(-\zeta)^2 + 78.125(-\zeta)^3}\right]^{1/3} \qquad [8.74b]$$

Se adottiamo operativamente le relazioni (8.74a), l'andamento di $\Phi_N(\zeta)$ col parametro di stabilità ζ è quello riportato nella **Fig.8.41**. Comunque, per maggior chiarezza, nella **Fig.8.42** vengono presentati i dati sperimentali usati da Wyngaard e Coté assieme a queste relazioni, ma in un grafico completamente lineare.

8.3.7.3 Osservazioni conclusive

Le equazioni di bilancio di energia cinetica turbolenta e di varianza della temperatura potenziale esprimono nel dominio del tempo l'evoluzione, la trasformazione e la distruzione dei vortici che risiedono nel *SL*. È inevitabile che esse abbiamo come controparte nel dominio delle frequenze gli spettri monodimensionali, in particolare lo spettro della componente longitudinale della velocità del vento e lo spettro della temperatura potenziale virtuale. L'elemento che unisce questi due mondi è il tasso medio di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta ε ed il tasso di dissipazione della semi-varianza N_θ. D'altro canto (Capitolo 4) la Funzione di Struttura ha una propria controparte spettrale definibile sempre attraverso gli spettri monodimensionali. Pertanto ci deve essere una relazione tra le Funzioni Universali di Similarità $F_{uu}(\zeta)$, $F_{TT}(\zeta)$ e $\Phi_\varepsilon(\zeta)$ e $\Phi_N(\zeta)$ ed è questo ciò che ora studieremo.

Anticipando alcune conclusioni che potranno essere dimostrate quando tratteremo gli spettri monodimensionali nel *SL*, tra i Parametri di struttura ed i tassi medi di dissipazione valgono le relazioni seguenti:

$$C_V^2 \cong 2.2 \cdot \varepsilon^{2/3} \qquad C_T^2 \cong 3.2 \cdot N_\theta \varepsilon^{-1/3} \qquad [8.75a]$$

Queste due relazioni sono vere con una certa approssimazione, dato che i coefficienti numerici presenti possiedono una propria incertezza intrinseca, anche se limitata alla seconda cifra decimale. Esse mettono in diretta relazione i Parametri di Struttura relativi alla componente longitudinale del vento e della temperatura con i tassi medi di dissipazione di energia cinetica turbolenta e di varianza della temperatura potenziale virtuale. Ricordiamo, poi, che per questi Parametri di Struttura valgono le Relazioni di Similarità:

$$C_V^2 = z^{-2/3} u_*^2 \cdot F_{uu}(\zeta) \qquad C_T^2 = z^{-2/3} T_*^2 \cdot F_{TT}(\zeta) \qquad [8.75b]$$

D'altro canto, anche per i due tassi medi di dissipazione valgono le considerazioni dell'Analisi Dimensionale che conducono alle relazioni seguenti:

$$\varepsilon = \frac{u_*^3}{kz} \cdot \Phi_\varepsilon(\zeta) \qquad N_\theta = \frac{u_* T_*^2}{kz} \Phi_N(\zeta) \qquad [8.75c]$$

Usando tutte queste relazioni, dopo un po' di noiosi passaggi algebrici si giunge facilmente a dimostrare le relazioni seguenti che evidenziano come le Funzioni Universali $F_{uu}(\zeta)$ e $F_{TT}(\zeta)$ per i Parametri di Struttura e le Funzioni Universali $\Phi_\varepsilon(\zeta)$ e $\Phi_N(\zeta)$ per il tasso medio di dissipazione di *TKE* e di semi-varianza siano legate tra loro:

$$F_{uu}(\zeta) \cong 4 \cdot \Phi_\varepsilon^{2/3} \qquad [8.75d]$$

$$F_{TT}(\zeta) \cong 5.9 \cdot \Phi_N(\zeta) \cdot \Phi_\varepsilon^{-1/3} \qquad [8.75e]$$

In pratica, le Funzioni Universali $F_{uu}(\zeta)$ e $\Phi_\varepsilon(\zeta)$ sono *sostanzialmente* la stessa cosa e dal punto di vista sperimentali risulterebbe ragionevole determinarle dalle stesse misure e sfruttare la relazione (8.75d) per ottenere contemporaneamente i coefficienti numerici che esse prevedono in modo da soddisfare *a priori* questa relazione. La (8.75e), invece, suggerirebbe di determinare prima la funzione $\Phi_\varepsilon(\zeta)$ (dalle misure di velocità del vento) e poi sfruttare le misure di temperatura per determinare contemporaneamente i coefficienti numerici presenti nelle $F_{TT}(\zeta)$ e $\Phi_N(\zeta)$ in modo da soddisfare *a priori* la (8.75e).

8.3.8 LA SIMILARITÀ COME UNA FABBRICA DI PROFILI VERTICALI

Da tutto ciò che abbiamo presentato finora emerge con chiarezza la potenza applicativa della Teoria di Similarità di Monin Obukhov (MOST) per il *SL*. Infatti, se consideriamo delle situazioni vicine alla situazione paradigmatica trattata dal MOST, cioè se:

- le situazioni meteorologiche non sono perturbate da eventi meteorologici violenti e a rapida evoluzione (temporali, tempeste, ecc.),
- se il terreno è privo di orografia significativa, non sono presenti foreste o vegetazione di altezza rilevante e se si conoscono le lunghezze di rugosità z_0 e z_{0h},
- se non ci sono gradienti di pressione orizzontale significativi,

allora sappiamo che il modello fluidodinamico si semplifica notevolmente, perdendo tutti i termini di trasporto e tutti quei termini in cui è presente la derivata rispetto ad una coordinata orizzontale qualsiasi. Se, poi, siamo in grado di misurare la temperatura media dell'aria *T* entro il *SL*, il valore di temperatura Θ_0 e di umidità Q_0 all'interfaccia aria-suolo, la *friction velocity* u_*, il flusso turbolento di calore sensibile $\overline{w\theta}$ ed il flusso turbolento di calore latente $\overline{wq}$ (e quindi anche il parametro di stabilità $\zeta = z/L$ ad ogni quota di interesse), allora la Teoria della Similarità ci consente di ottenere senza altre informazioni una stima realistica, anche se semplificata, del profilo verticale entro il *SL* delle principali variabili che caratterizzano la sua turbolenza. In particolare il MOST ci fornisce relazioni puramente algebriche (e quindi diagnostiche) per:

- i profili verticali del gradiente delle variabili meteorologiche medie

$$\frac{dU}{dz} = \frac{u_*}{kz}\Phi_m(\zeta)$$
$$\frac{d\Theta}{dz} = \frac{T_*}{kz}\Phi_h(\zeta)$$
$$\frac{dQ}{dz} = \frac{q_*}{kz}\Phi_q(\zeta)$$

- i profili delle principali variabili medie

$$U(z) = \frac{u_*}{k}\left[ln\left(\frac{z}{z_0}\right) - \Psi_m(\zeta)\right]$$
$$\Theta(z) = \Theta_0 + \frac{T_*}{k}\left[ln\left(\frac{z}{z_{0h}}\right) - \Psi_h(\zeta)\right]$$
$$Q(z) = Q_0 + \frac{q_*}{k}\left[ln\left(\frac{z}{z_{0q}}\right) - \Psi_q(\zeta)\right]$$

- i profili delle grandezze che caratterizzano la turbolenza del *SL*

$$\sigma_w(z) = u_* \cdot \Phi_{ww}(\zeta)$$
$$\sigma_T(z) = u_* \cdot \Phi_{ww}(\zeta)$$
$$C_V^2(z) = u_*^2 \cdot z^{-2/3} F_{uu}(\zeta)$$
$$C_T^2(z) = T_*^2 \cdot z^{-2/3} F_{TT}(\zeta)$$
$$\varepsilon(z) = u_*^3/(kz) \cdot \Phi_\varepsilon(\zeta)$$
$$N_\theta = u_* T_*^2/(kz) \cdot \Phi_N(\zeta)$$

Come si vede, la Teoria della Similarità fornisce un modello totalmente algebrico per la descrizione della turbolenza del *SL*, preziosissimo dal punto di vista operativo. Il modello, a rigore, non

è completo visto che mancano all'appello alcune grandezze meteorologiche importanti. In primo luogo, manca all'appello la pressione, ma la situazione paradigmatica impone che questa variabile abbia il profilo verticale prescritto dall'equazione idrostatica. In secondo luogo, mancano all'appello anche le variabili relative alle componenti orizzontali del moto (per esempio le rispettive deviazioni standard). Come abbiamo visto, queste variabili pare che non possano essere descritte dal MOST e, per quanto siamo in grado di rilevare, possono essere considerate costanti entro l'intero *SL*. Da ultimo, mancano i momenti e le funzioni di struttura di ordine superiore al secondo. È abbastanza sicuro che per essi possono essere individuate delle opportune Relazioni di Similarità, anche se sarebbe comunque molto difficile ottenere espressioni quantitative per le rispettive Funzioni Universali, vista la difficoltà operativa che ancora abbiamo nello stimare in maniera affidabile i momenti (e le funzioni di struttura) di ordine superiore al secondo. Di fatto, il modello prospettato dal MOST è un modello completo.

Non dobbiamo però dimenticare mai che questo modello è una semplificazione della realtà e potrà fornire profili tanto più vicini a quelli reali quanto più la situazione considerata sarà prossima a quella paradigmatica. Insomma, non può fare miracoli!

8.3.9 IL PROBLEMA DELLA SELF-CORRELATION

Le difficoltà oggettive incontrate nello studio delle caratteristiche del *SL* e le incertezze e le contraddizioni emerse dalle diverse campagne di misura sono legate principalmente a due fattori indipendenti. Il primo è costituito dal fatto che i flussi turbolenti nelle situazioni ad elevata stabilità (e quindi di maggior interesse speculativo) sono talmente ridotti da essere seriamente influenzati dalla risoluzione propria dell'anemometro sonico e degli altri sensori a risposta veloce utilizzati per la loro determinazione (Grachev et al. 2008), rendendo oggettivamente difficile discriminare una situazione ad altissima stabilità da una situazione circa neutra basandosi sul parametro di stabilità ζ. Analoghi problemi si avrebbero anche se come parametro di stabilità si adottasse o *Ri* o R_f, visto che la stima dei gradienti (di temperatura potenziale e di velocità del vento) soffre di un analogo problema di risoluzione strumentale, oltre al fatto che, non essendo essi variabili effettivamente misurabili, la loro determinazione dipende notevolmente dal metodo usato per la stima ed è quindi piuttosto incerta. Questo problema può essere in teoria ridotto con l'aumentare della risoluzione strumentale, anche se c'è un evidente limite tecnologico insuperabile.

Il secondo problema è ben più complesso ed è legato al fatto che in un modo o nell'altro per studiare il *SL* è indispensabile studiare la variabilità di una grandezza di interesse (una deviazione standard, un gradiente, un tasso di dissipazione) con il livello di stabilità che storicamente può essere definito o dal parametro ζ o da *Ri* o da R_f. Quindi, seguendo la logica del MOST, si è interessati, per esempio, a studiare come varia la deviazione standard normalizzata σ_w/u_* col parametro di stabilità ζ. Chiaramente, in questo caso la variabile dipendente e la variabile indipendente condividono nella propria definizione u_* e ciò, come vedremo, comporta l'insorgere di correlazioni spurie che mascherano e contaminano le vere correlazioni, ovviamente se esistono. Se, invece, si considerasse in questo esempio come parametro di stabilità *Ri*, variabile dipendente ed indipendente non avrebbero nessuna variabile di scala in comune e quindi le eventuali correlazioni presenti tra le due sarebbero reali.

Questo problema, noto come *self-correlation*, presenta una storia molto curiosa. L'inizio della presa di coscienza del problema della *self-correlation* coincide col lavoro di Pearson del 1897 che lo trattava nel dettaglio e ne forniva chiare evidenze statistiche, oltre ad alcune relazioni operative. Nonostante ciò, ben poco si è fatto in proposito nella pratica come esplicitamente indicato nel lavoro di Kenney (1982) dal titolo estremamente chiaro (*Beware of spurious correlation!*) secondo cui fino alla data del lavoro (1982) si potevano contare in non più di una decina i lavori in idrologia e petrologia che tenevano conto effettivamente del problema. Aldrich (1995) ha poi ripreso il tema trattando ampiamente i suoi risvolti teorici. In termini rigorosamente matematici Kim (1999) ha poi sviluppato un teorema che determinava in termini esatti la forma del coefficiente di correlazione lineare (spuria) quando, date tre variabili *A, B, C*, si considera l'esistenza o

meno della correlazione lineare tra la variabile $X = A/B$ e $Y = C/B$ per cui Pearson (1897) aveva fornito una relazione approssimata. Non ci risulta che ad oggi sia stato sviluppato un apparato matematico/statistico del tutto generale con cui affrontare teoricamente il problema.

Il problema, come ovvio, sussiste anche in micrometeorologia e Hicks (1972) ha presentato con notevole dettaglio e puntiglio i pericoli derivanti dalla *self-correlation* nell'individuazione sperimentale delle Funzioni Universali del MOST basate sul parametro di stabilità ζ. Qui di seguito, seguendo Hicks (1978) e Andreas (2002), si svilupperanno nel dettaglio ragionamenti sulla *self-correlation* seguendo strettamente le logiche normalmente seguite dai ricercatori nella determinazione delle Funzioni Universali del MOST. In particolare, per studiare il problema della *self-correlation* conviene focalizzare l'attenzione sulle forme funzionali attribuite alle Funzioni Universali del MOST presentate sinteticamente al paragrafo precedente. Se si fa riferimento alla Letteratura apparsa negli ultimi decenni (per esempio: Fairall et al. 1990; Beljaars e Holtslag 1991; Hill 1992; Kaimal e Finnigan 1994; Högström 1996; Hsieh e Katul 1997; Andreas et al. 1998; Moraes 2000; Pahlow et al. 2001; Cheng and Brutsaert 2005; Grachev et al. 2007; Li et al. 2012), si nota come le diverse variabili di interesse (le deviazioni standard delle componenti del vento e della temperatura, i gradienti di velocità del vento e di temperatura potenziale, il tasso di dissipazione di energia cinetica turbolenta, ecc.), scalate con la variabile di scala appropriata per rendere il rapporto adimensionale, sembrerebbero dipendere dal parametro di stabilità ζ elevato ad una potenza e che tra variabile dipendente e variabile indipendente esiste sempre una sola variabile in comune (u_* o T_*). Solo nel caso della relazione MOST che descrive il tasso di dissipazione della semi-varianza della temperatura, le variabili in comune sono due (u_* e T_*).

Seguendo Hicks (1978) e Andreas (2002), ipotizziamo di considerare tre variabili stocastiche *A*, *B*, *C* non correlate tra loro e di realizzare un *esperimento ideale* costituito da *N* campionamenti in cui vengono misurate contemporaneamente le realizzazioni $(a_i, b_i, c_i), i = 1, 2, \cdots, N$ delle tre variabili con *strumenti ideali* quindi senza alcun errore di misura. Si ipotizzi, poi, che sia di interesse studiare come la variabile dipendente CB^{β} (per es. $\sigma_w u_*^{-1}$, dove β è un esponente numerico generico, in questo caso $\beta = -1$) vari col variare della variabile indipendente AB^{α} (per es. $T_* u_*^{-2}$), dove anche α è un esponente numerico generico che in questo caso è pari a -2. Se le variabili che consideriamo nell'esperimento sono tre estratte dall'insieme delle variabili micrometeorologiche di interesse $\{\tau, H, \sigma_w, \sigma_\theta, S, \Gamma, \beta, z, C_V^2, C_T^2, \varepsilon_k, \varepsilon_\theta\}$ e se ci facciamo ispirare dalle forme funzionali per le Funzioni Universali del MOST normalmente in uso, una metodologia operativa è verificare se esiste o meno una correlazione lineare tra la variabile $Y = ln(AB^{\alpha})$ e la variabile $Z = \ln\left(CB^{\beta}\right)$, cioè se è ipotizzabile l'esistenza di un modello lineare del tipo:

$$Z = \widetilde{\mu_0} + \widetilde{\mu_1} \cdot Y \qquad [8.76a]$$

dove $\widetilde{\mu_0}$ e $\widetilde{\mu_1}$ sono i due parametri del modello. Ricordiamo che le variabili stocastiche considerate *A, B* e *C* sono per definizione indipendenti tra loro. In pratica, dall'esperimento ideale sulla base dei valori campionari delle variabili stocastiche indipendenti *A, B, C* misurati senza errore si ottengono le *N* realizzazioni:

$$\begin{aligned} y_i &= ln(a_i b_i^{\alpha}) = ln(a_i) + \alpha \cdot ln(b_i) \\ z_i &= ln\left(c_i b_i^{\beta}\right) = ln(c_i) + \beta \cdot ln(b_i) \end{aligned} \qquad [8.76b]$$

da cui è immediato ottenere il loro valore medio:

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \overline{ln(a_\iota)} + \alpha \cdot \overline{ln(b_\iota)} \\ \bar{Z} &= \overline{ln(c_\iota)} + \beta \cdot \overline{ln(b_\iota)} \end{aligned} \qquad [8.76c]$$

Data la non correlazione postulata tra le variabili stocastiche *A, B, C*, le varianze per le variabili di interesse *Y* e *Z* desumibili dalle misure raccolte nell'esperimento sono:

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= \sigma_{ln(a)}^2 + \alpha^2 \cdot \sigma_{ln(b)}^2 \\ \sigma_Z^2 &= \sigma_{ln(c)}^2 + \beta^2 \cdot \sigma_{ln(b)}^2 \end{aligned} \qquad [8.76d]$$

L'esistenza di queste varianze dipende solo da come le realizzazioni delle tre variabili stocastiche sono distribuite nel relativo spazio campionario visto che le misure effettuate sono per definizione prive di errore. È piuttosto semplice calcolare la covarianza tra *Y* e *Z* tenendo conto del fatto che *A, B, C* non sono correlate tra loro ed il risultato sorprendente è che:

$$Cov(Y,Z) = \alpha\beta \cdot \sigma^2_{ln(\beta)} \qquad [8.76d]$$

Quindi, nonostante le variabili stocastiche *A, B, C* non siano correlate tra loro e le loro *N* realizzazioni siano note esattamente (senza errore strumentale), tra le variabili *Y* e *Z*, ottenute semplicemente riaggregando tra loro le variabili originarie, nasce una covarianza prodotta esclusivamente dal condividere nella propria definizione la variabile *B*. Naturalmente se *Y* e *Z* non condividessero nella propria definizione la variabile *B*, la loro covarianza sarebbe nulla. Prima di procedere va sottolineato come le conclusioni a cui arriveremo siano fortemente legate alla trasformazione logaritmica adottata per le variabili *Y* e *Z*. Se, invece, si considerassero direttamente le variabili AB^{α} e CB^{β}, il risultato che si otterrebbe (con molta minore semplicità) sarebbe diverso, visto che il coefficiente di correlazione non è invariante alla trasformazione di variabili, anche se comunque evidenzierebbe una correlazione spuria.

Quindi, il coefficiente di correlazione lineare di Pearson tra *Z* e *Y* può essere determinato sulla base dell'espressione delle varianze e della covarianza nel modo seguente:

$$\rho_{YZ} = \frac{\alpha\beta \cdot \sigma^2_{ln(\beta)}}{\sqrt{\left(\sigma^2_{ln(a)} + \alpha^2 \cdot \sigma^2_{ln(b)}\right) \cdot \left(\sigma^2_{ln(c)} + \beta^2 \cdot \sigma^2_{ln(b)}\right)}} \qquad [8.77a]$$

Perciò il valore della correlazione, sicuramente spuria, tra *Y* e *Z* dipende solo dagli esponenti α e β (quindi dalla *modalità* di condivisione della variabile *B*) e da come le realizzazioni di *A, B* e *C* sono distribuite nello spazio campionario, indipendentemente dal fatto che *A, B* e *C* non siano correlate tra loro. Inoltre, se si costruissero *M* esperimenti ideali in cui le *N* realizzazioni a_i, b_i e c_i fossero generate del tutto casualmente, garantendo però che in ogni esperimento $\sigma^2_{ln(a)}$, $\sigma^2_{ln(b)}$ e $\sigma^2_{ln(c)}$ fossero le stesse, otterremmo *M* coefficienti di correlazione lineare identici.

Quindi il fatto che ρ_{YZ} non sia nullo supporterebbe l'esistenza di un modello lineare del tipo $Z = \widetilde{\mu_0} + \widetilde{\mu_1} \cdot Y$ il cui *slope* sarebbe pari a (Draper e Smith, 1998):

$$\widetilde{\mu_1} = \sqrt{\frac{\left(\sigma^2_{ln(c)} + \beta^2 \cdot \sigma^2_{ln(b)}\right)}{\left(\sigma^2_{ln(a)} + \alpha^2 \cdot \sigma^2_{ln(b)}\right)}} \cdot \rho_{YZ} \qquad [8.77b]$$

Analoghi ragionamenti possono essere fatti se le variabili condivise sono più di una. Naturalmente questi modelli di potenza non hanno alcuna attinenza con la realtà, ma sono solo artefatti pericolosi prodotti dalla *self-correlation*.

Da tutto ciò si possono trarre alcune importanti considerazioni per comprendere la pericolosità, l'importanza e la portata del problema:

- il fenomeno ha luogo solo se la variabile indipendente *Y* e la variabile dipendente *Z*, ottenute a loro volta come prodotti di potenze di variabili *A, B, C*, condividono almeno una delle variabili originarie nella propria definizione;
- il fenomeno ha luogo anche se le realizzazioni delle variabili *A, B, C* sono note esattamente;
- la correlazione spuria (*self-correlation*) è completamente determinabile a priori una volta note le *N* realizzazioni (a_i, b_i, c_i) e deriva esclusivamente da come sono definite le variabili *Y* e *Z* e da come le realizzazioni (a_i, b_i, c_i) sono distribuiti nello spazio campionario.

Spesso in Letteratura (Hicks 1978, 1981; Andreas 2002; Mahrt et al. 1998; Andreas e Hicks 2002; Lange et al. 2004; Anderson 2009; Baas 2006; Klipp and Mahrt 2004; Grachev e al.

2007a e b; Powell et al. 2009; Liang et al. 2014) sono stati evidenziati i rischi derivanti dalla *self-correlation*, ma forse solo Grachev et al. (2007b) li hanno mostrati nella loro forma più esasperata. Infatti, essi considerano il *Numero di Prandtl Turbolento* definito come:

$$Pr_t = \frac{K_m}{K_h} = \frac{\overline{u'w'} \cdot \Gamma}{\overline{w'\theta'} \cdot S} = \frac{u_* \cdot \Gamma}{T_* \cdot S} = \frac{\Phi_h(\zeta)}{\Phi_m(\zeta)} \qquad [8.78]$$

dove con S si è indicato il gradiente verticale della velocità media del vento e con Γ il gradiente verticale della temperatura potenziale virtuale. Nella Letteratura, nonostante un notevole sforzo sperimentale, su come varia Pr_t col crescere della stabilità sussiste tuttora un'enorme incertezza e i risultati ottenuti sono apparentemente paradossali. Infatti, rimandando a Grachev et al. (2007b) per i riferimenti specifici, se come parametro di stabilità si utilizza Ri, allora Pr_t sembrerebbe crescere con la stabilità, mentre se come parametro di stabilità si considerasse o ζ o R_f, allora Pr_t sembrerebbe decrescere con la stabilità. Gli Autori, utilizzando il medesimo dataset SHEBA, hanno riprodotto esattamente la situazione sopra descritta. Tutto ciò sembrerebbe paradossale se non si facesse attenzione al fatto che tra Pr_t e Ri le variabili in comune sono S e Γ, mentre tra Pr_t e ζ le variabili comuni sono u_* e T_* e tra Pr_t e R_f le variabili comuni sono u_*, T_*, S. Quindi, da quando detto in precedenza, in ognuno di questi casi è presente la *self-correlation* che, a seconda delle variabili condivide e dell'esponente a cui esse vengono elevate, mostra una correlazione con *slope* positivo o negativo.

Quantificare il peso della *self-correlation* non è semplice visto che dipende dal *range* e dalla distribuzione dei valori assunti dalle variabili principali (A, B, C) durante l'esperimento considerato. Nel caso in cui tra la variabile dipendente e la variabile indipendente c'è un divisore comune, Kim (1999) e Klipp e Mahrt (2004) hanno mostrato come il *range* ed il grado di distribuzione assunto da una variabile durante l'esperimento considerato è definito dal coefficiente di variazione $V_X = \sigma_X/\bar{X}$, dove σ_X è la deviazione standard delle N misure della variabile X raccolte nell'esperimento e non la loro incertezza intrinseca (che era stata supposta nulla). Più elevato è il coefficiente di variazione, maggiore è il peso della *self-correlation* e questo potrebbe essere un modo semi-quantitativo per stimarne *a priori* la pericolosità.

Da queste constatazioni Anderson (2009) ha proposto poi una complessa metodologia per evitare la *self-correlation* che ha applicato proprio allo studio della dipendenza di Pr_t dalla stabilità e che potrebbe essere adottata, anche se in forme diverse, a situazioni differenti. Tuttavia, un modo naturale per eliminare *alla radice* gli effetti della *self-correlation* è quello di studiare la dipendenza di una variabile adimensionale di interesse (per esempio S reso adimensionale utilizzando u_*) dalla stabilità solo impiegando un parametro adimensionale che non condivida con la variabile di interesse alcuna variabile primaria (u_*, T_*, Γ, S). Come si è visto considerando Pr_t, è indispensabile individuare parametri di stabilità alternativi a ζ, Ri e R_f perché tra Pr_t e questi parametri di stabilità è inevitabile la *self-correlation*. Un esempio significativo in questo senso è costituito dal lavoro di Grachev et al. (2015) in cui viene presa in considerazione la lunghezza di Dougherty-Ozmidov come lunghezza caratteristica al posto della ben nota lunghezza di Monin-Obukhov. Questa non è l'unica possibile alternativa (Sorbjan 2008a e b; Sorbjan and Balsley 2008; Sorbjan 2010; Sorbjan and Grachev 2010; Grachev e al. 2015; Basu e al. 2019; Alam e al. 2019). Per studiare la dipendenza di una variabile di interesse micrometeorologico dalla stabilità è possibile anche utilizzare una metodologia ibrida che vede come primo passo l'individuazione, tra le possibili alternative, di quel parametro di stabilità che sicuramente non produce effetti di *self-correlation* e di cui si conosce la relazione col parametro di stabilità master ζ. Successivamente, si determina sperimentalmente la dipendenza da esso della variabile desiderata. Per esempio, se Ξ/Ξ_* è la variabile micrometeorologica adimensionale da studiare e ζ_* è il parametro di stabilità selezionato sulla base del fatto che non condivide alcuna variabile con Ξ/Ξ_*, allora senza il rischio della *self-correlation* sarebbe possibile ottenere la relazione di Similarità $\Xi/\Xi_* = \mathcal{F}(\zeta_*)$. Tuttavia, dato che del parametro ζ_* si è determinata la relazione che lo lega al parametro di stabilità *master* ζ, cioè:

$$\zeta_* = \mathcal{G}(\zeta) \qquad [8.79a]$$

allora la Funzione Universale MOST ricercata sarà data da:

$$\Xi/\Xi_* = \mathcal{F}(\zeta_*) = \mathcal{F}\big(\mathcal{G}(\zeta)\big) = \mathcal{H}(\zeta) \qquad [8.79b]$$

8.3.10 LA RUGOSITÀ SUPERFICIALE

Nel *SL* il profilo verticale della velocità media del vento, della temperatura potenziale media e dell'umidità specifica media è descritto in maniera estremamente realistica dalla Teoria della Similarità di Monin-Obukhov. È interessante notare, tuttavia, come, al tendere a zero del parametro *z/L*, tutti queste relazioni diventino sempre meno dipendenti dalla stabilità e si riducano a tipici profili logaritmici. Ciò avviene non solo con l'aumentare (in valore assoluto) della lunghezza di Monin-Obukhov, ma anche col diminuire della quota *z*. In effetti, se consideriamo una situazione debolmente convettiva, per esempio con H_0 = 50 Wm^{-2} e con u_* pari a 0.5 ms^{-1}, vediamo che ad una quota di 2.3 m il profilo della velocità media del vento si scosta dal profilo logaritmico (adiabatico) di meno del 1%. Se, però, u_* si riduce a 0.2 ms^{-1}, vediamo che tale quota scende a 3 cm. Come si vede, esiste sempre uno strato, più o meno esteso verticalmente, entro cui tutti i profili delle variabili medie sono esprimibili con buona approssimazione da relazioni di tipo logaritmico. Tale strato è noto col nome di *dynamical sublayer*.

Tutto ciò è però una notevole semplificazione della realtà. Infatti, nelle immediate vicinanze del suolo la viscosità dell'aria ed i singoli elementi di rugosità, caratteristici della superficie terrestre, complicano in maniera drammatica la descrizione fluidodinamica dell'aria. In effetti, l'aria avvolge i vari elementi di rugosità, descrivendo percorsi tortuosi tra di essi e stabilendo anche differenze di pressioni locali a scale molto piccole. Ne risulta un flusso d'aria molto irregolare, a bassa velocità e prossimo alla stagnazione, con caratteristiche dinamiche molto diverse da quelle del fluido sovrastante. In pratica è come se si fosse stesa una *pellicola* di aria sopra i vari elementi di rugosità (asperità, sassi, vegetazione, piccoli manufatti, ecc.) sopra cui scorre il resto del fluido che *sente* la superficie sottostante solo indirettamente. Questa complicatissima realtà è stata studiata in dettaglio da Brutsaert (1984), dalla cui trattazione emerge il fatto che i profili verticali delle principali variabili meteorologiche possono essere ancora descritti da profili di Similarità in cui però sono presenti Funzioni Universali dipendenti da una quantità talmente grande di variabili da renderle ben poco utili nelle applicazioni pratiche. Va però ricordato che lo strato d'aria caratterizzato da questa complessità è ben poca cosa rispetto a tutto il *PBL*: in effetti stiamo parlando di uno strato d'aria a ridosso del suolo dello spessore molto inferiore al metro. Per semplificare tutto ciò, conviene ragionare operativamente nel modo seguente:

- sicuramente all'interfaccia suolo-aria la velocità del vento è nulla a causa della "*no-slip condition*";
- all'interfaccia suolo-aria la temperatura e l'umidità dell'aria assumono un ben preciso valore, pari rispettivamente a θ_s e q_s;
- se ipotizziamo che in tutto il *dynamical sublayer* (e quindi anche in questo strato) il profilo della velocità segue una legge logaritmica, esisterà una quota z_{om} a cui tale profilo si annulla (cioè assume il valore proprio dell'interfaccia suolo-aria). Operativamente, quindi, si ostituisce al complesso profilo verticale reale nel *dynamical sublayer* un semplice profilo logaritmico fino a z_{om} ed un profilo nullo da z_{om} al suolo (z = 0);
- estrapolando i profili logaritmici della temperatura potenziale e dell'umidità verso il suolo, è individuabile ancora una volta una quota z_{oh} (per il profilo di temperatura) e z_{oq} (per il profilo di umidità) dove i valori previsti dalle relazioni logaritmiche eguagliano i valori riscontrati a z = 0;

In questa opera di semplificazione operativa dei profili sono stati individuati tre parametri: z_{om} (*parametro di rugosità per la quantità di moto*), z_{oh} (*parametro di rugosità per il calore*) e z_{oq}

(*parametro di rugosità per l'umidità*) con cui si *parametrizza* l'influenza della rugosità superficiale sullo stato di moto del fluido immediatamente sovrastante. Di fatto, ai nostri fini operativi, saranno questi parametri che descriveranno l'interazione delle masse d'aria con la geometria del suolo. Questi parametri di rugosità sono tra loro differenti ed in generale dipendono dal tipo di suolo, dalla sua struttura geometrica e dal regime fluidodinamico del moto dell'aria nelle sue immediate vicinanze (Brutsaert 1975). Evidentemente in questa discussione non consideriamo situazioni particolarmente complesse, come città, foreste, mare e suoli particolarmente disomogenei dal punto di vista della rugosità, a cui accenneremo al prossimo capitolo. *Le situazioni che consideriamo qui sono solo quelle rappresentative di una distesa piatta e coperta da vegetazione di moderata estensione verticale.*

Se consideriamo una superficie solida, la Fluidodinamica ci assicura che col passaggio dell'aria sopra di essa si sviluppa uno strato di piccolissime dimensioni verticali δ_1 (*interfacial sublayer*) il cui regime di moto non è completamente turbolento, in cui il flusso di calore e di massa è dominato dalla diffusività molecolare ed in cui il flusso di quantità di moto è determinato sia dalla diffusività molecolare che dai gradienti di pressione locali. L'estensione verticale di questo strato è determinabile, in prima approssimazione, con la relazione seguente:

$$\delta_1 \cong 30\,\nu/u_* \qquad [8.80a]$$

dove ν è la viscosità cinematica dell'aria. Come è facile verificare, δ_1 è sempre dell'ordine del millimetro. In questo strato avviene il trasferimento di quantità di moto, di calore e di massa (vapor d'acqua) dal suolo all'aria sovrastante; mentre il trasferimento di calore e di massa ha luogo per diffusione molecolare, il trasferimento di quantità di moto dipende anche dai gradienti locali di pressione che si riscontrano al suolo a causa della geometria di quest'ultimo e ciò spiega la differenza che si riscontra tra i tre parametri di rugosità individuati.

Per chiarire meglio tutto ciò, facciamo l'ipotesi che sia possibile definire una *lunghezza di rugosità* z_0 cioè una lunghezza caratteristica che rappresenta aerodinamicamente la rugosità della superficie su cui scorrono le masse d'aria. In linea di principio, z_0 non sarà uguale a nessuno dei parametri di rugosità individuati in precedenza e costituirà una descrizione indipendente dalla quota dell'influenza della rugosità superficiale sul regime dinamico dell'aria nei pressi della superficie. Tale parametro non dovrebbe dipendere dal regime di moto dell'aria e potrà essere funzione solo della natura della superficie, cioè della sua geometria che, in ultima analisi, sarà determinata dalla dimensione e dalla disposizione degli elementi di rugosità presenti. Quindi sarà una costante per un dato tipo di suolo. Per quantificare meglio tutto ciò è opportuno introdurre il *numero di Reynolds di rugosità* z_{0+} definito come:

$$z_{0+} = u_* z_0/\nu \qquad [8.80b]$$

Il celebre lavoro sperimentale di Nikuradse (1933) ha evidenziato che:

- se $z_{0+} > 2$, la superficie è *idrodinamicamente rugosa* ed in questo caso si ha che $z_{0m} = z_0$. Questo è quanto avviene per la maggior parte delle superfici naturali (per esempio per le superfici aride o per quelle coperte dalla vegetazione). Il risultato interessante è che praticamente sempre sulle superfici naturali z_{0m} coincide con le caratteristiche geometriche di rugosità della superficie stessa e non varia col regime di moto del fluido;

- se, invece, $z_{0+} < 2$, ed in particolare se $z_{0+} < 0.13$, la superficie è *idrodinamicamente liscia (smooth)*. Questo è approssimativamente ciò che capita sulle distese di ghiaccio artiche ed antartiche e sugli specchi di acqua ferma (del caso del mare si parlerà nel prossimo capitolo). In questo caso $z_{0m} \neq z_0$ e ciò significa che è indipendente dalle caratteristiche della superficie e dipendente dalle caratteristiche del moto. Nel caso in cui $z_{0+} < 0.13$ (questo in generale non è il caso delle distese di ghiacci, che si trovano in situazioni caratterizzate da valori di z_{0+} intermedi tra 2 e 0.13 e per le quali non si può purtroppo applicare la relazione seguente) si ha che:

$$z_{0m} = 0.135\,\nu/u_* \qquad [8.80c]$$

A questo punto è però necessario evidenziare un altro problema. Se consideriamo, per esempio, una superficie con vegetazione, il problema che ci poniamo è quale sia la quota reale di misura rispetto al suolo o, che è lo stesso, quale sia la quota zero. Convenzionalmente si dice che la quota $z = 0$ è il *livello su cui giacciono gli elementi di rugosità*. In tal modo si evidenzia un ulteriore strato, posto tra il suolo vero e proprio e una quota d (*displacement height*) prossima all'altezza media degli elementi di rugosità (altezza media della vegetazione), noto col nome di *canopy layer*.

Una volta definito il parametro di rugosità z_{0m} (che nella maggior parte delle superfici coinciderà con z_0) ed il *displacement height d*, entro il *SL* la Relazione della Similarità di Monin-Obukhov per il profilo verticale del vento verrà riscritta in modo tale che a z si sostituisca la quota ridotta z-d. In pratica il profilo verticale del vento si annullerà alla quota $z = d+z_0$ e sarà data dalla relazione:

$$U(z) = \frac{u_*}{k}\left[ln\left(\frac{z-d}{z_0}\right) - \Psi_m(\zeta)\right] \qquad [8.81]$$

Sia z_0 che d nel caso di superfici idrodinamicamente rugose sono parametri che possono essere determinati sperimentalmente come si vedrà nel seguito. Tuttavia, in Letteratura (si veda per esempio Wieringa, 1993) sono stati pubblicati molti risultati di campagne sperimentali che consentono di individuare, con un buon grado di realismo, i valori dei due parametri per molti casi di interesse pratico. Nella **Tab. 8.1** sono presentati alcuni valori caratteristici per z_0.

Tipo di Suolo	z_0 *(m)*	***d*** *(m)*
Giaccio	$0.1\cdot10^{-4}$	-
Neve	10^{-4}	-
Deserto sabbioso	0.0003	-
Suolo nudo	0.005	-
Prato di erba bassa	0.02	0.1
Prato di erba alta	0.05	0.5
Campi di grano	0.02	0.25
Mais	0.06	0.8
Fagioli	0.08	1.18
Viti	0.1	1.1
Savana	0.4	8
Boschi	0.4	10-15
Pineta	0.5	13
Conifere	1.	10.
Foresta tropicale	2.	35

Tab. 8.1: Valori di roughness length e di displacement height caratteristici per alcune tipiche superfici naturali.

Per quanto riguarda il *displacement h*eight *d* una regola pratica per la sua determinazione è la seguente:

$$d = 2/3\,h_r \qquad [8.82]$$

dove h_r è l'altezza tipica degli elementi di rugosità (per esempio l'altezza media della vegetazione). Quando sulla superficie è riconoscibile una *canopy* ben definita e di altezza tipica d, la sostituzione di z con z-d nella Relazione di Similarità per il profilo verticale della velocità del vento viene estesa anche a tutti gli altri profili di Similarità (temperatura potenziale ed umidità specifica media e momenti che coinvolgono le varie grandezze di interesse).

Consideriamo ora i parametri di rugosità z_{0h} e z_{0q}. Nel caso (relativamente poco interessante) di una superficie *idrodinamicamente liscia*, da Garratt (1992) e Brutsaert (1984) si ha che

tali parametri dipendono direttamente dalla viscosità dinamica e sono inversamente proporzionali alla velocità di frizione; quindi, dipendono solo dalle proprietà fisiche e dalle proprietà dinamiche del fluido, ma non dalle proprietà geometriche del suolo. In particolare, questi parametri possono essere calcolati con le relazioni seguenti:

$$z_{0h} = 0.624\,\nu/u_* \qquad z_{0q} = 0.395\,\nu/u_* \qquad [8.83]$$

Quando, invece si considerano *superfici idrodinamicamente rugose* (situazione che rappresenta la stragrande maggioranza dei casi di interesse pratico) si è di fronte ad una quantità impressionante di correlazioni semiempiriche proposte in Letteratura e tutte hanno in comune il fatto che z_{0h} e z_{0q} dipendono sia dalle condizioni fluidodinamiche del fluido (cioè da z_{0+}) che dalle caratteristiche geometriche del suolo (cioè da z_{0m}). Per una rassegna di tali correlazioni si rimanda a Verhoef e al. (1997). A titolo di esempio citiamo le seguenti (Brutsaert, 1984):

$$z_{0h} = 7.4 \cdot z_{0m}\, exp\left[-2.46 z_{0+}^{1/4}\right] \qquad z_{0q} = 7.4 \cdot z_{0m}\, exp\left[-2.25 z_{0+}^{1/4}\right] \qquad [8.84]$$

Va ricordato che in Letteratura la grandezza $ln(z_{0m}/z_{0h})$ viene indicata col simbolo kB^{-1}. Molto è stato detto e scritto su kB^{-1}, senza peraltro giungere a conclusioni esaustive. Per alcuni esempi di studi sull'argomento si faccia riferimento a Blumel (1999), Su e al. (2001) e Duynkerke (1992). Comunque, in Verhoef e al. (1997) si è tentato un confronto sistematico tra le varie correlazioni proposte per kB^{-1} e i valori misurati in alcune campagne sperimentali giungendo alle conclusioni seguenti:

- la stima di z_{0m} è relativamente semplice e accurata, anche se, pur essendo una caratteristica geometrica del suolo, varia comunque col tempo per varie ragioni. La prima è il fatto che le irregolarità naturali di origine vegetale variano nel tempo (per esempio, l'erba di una prateria è bassa nel periodo invernale, ma poi cresce nella stagione estiva). Altri esempi tipici di variabilità della rugosità superficiale li troviamo considerando le superfici desertiche coperte di sabbia e le superfici coperte di neve. Per queste superfici possiamo semplicisticamente affermare che gli elementi di rugosità sono di fatto *mobili* e possono ad un certo punto essere asportati dalla superficie stessa mediante il processo di risospensione. Se le proprietà dinamiche del moto (in generale riassunte nella sola *friction velocity*) sono opportune, i granelli di sabbia o di neve lasciano la superficie interagendo attivamente col campo di moto. Il risultato finale è un aumento di z_{0m}. Una celebre relazione che descrive in maniera approssimata questi fenomeni è la celebre legge di Charnock (1955) secondo cui:

  $$z_{0m} = \alpha \cdot u_*^2/g \qquad [8.85]$$

  dove α è una costante pari a 0.016. Il fenomeno non è continuo, ma *a soglia*. Fino a che u_* non supera una ben precisa soglia (normalmente pari a 0.12 $m \cdot s^{-1}$) la risospensione non ha luogo ed inizia solo quando si supera questa soglia. L'altra ragione per cui z_{0m} risulta variabile la vedremo tra poco;

- la stima di z_{0h} (e quindi anche di z_{0q}) è molto più complicata ed incerta e comunque presenta una variazione nel tempo, in particolare presenta un evidente ciclo giornaliero. Per renderci conto di ciò è sufficiente utilizzare le Relazioni di Similarità per il profilo verticale medio della velocità del vento e della temperatura. Se ρ è la densità dell'aria, C_p il relativo calore specifico, θ_0 è la temperatura all'interfaccia aria-suolo, θ_a è la temperatura dell'aria alla quota z e d è il *displacement height*, con pochi passaggi algebrici si giunge facilmente alle relazioni seguenti:

$$H_0 = \rho C_p \frac{(\theta_0 - \theta_a)}{r_h} \quad [8.86a]$$

$$r_h = \frac{1}{ku_*}\left[ln\left(\frac{z-d}{z_{0m}}\right) - \Psi_m\left(\frac{z-d}{L}\right)\right] + \frac{1}{ku_*}kB^{-1} \quad [8.86b]$$

La *friction velocity* varia tipicamente durante la giornata, così come H_0 e le temperature e quindi anche kB^{-1} non potrà che avere un ciclo diurno. L'ordine di grandezza di kB^{-1} è 8÷10, cioè z_{0h} è di quattro o cinque ordini di grandezza inferiore a z_{0m};

- tra le varie correlazioni proposte per stimare kB^{-1}, quella che si è dimostrata più rispondente alle misure disponibili è stata la seguente

$$kB^{-1} = 2.46(z_{0+})^{0.25} - 2 \quad [8.87]$$

Per quanto riguarda il parametro di rugosità z_{0q}, Brutsaert (1984) conferma una completa analogia col parametro z_{0h}, quindi una sua dipendenza dalla rugosità superficiale e dalla dinamica del moto tra gli elementi di rugosità. Anche in questo caso, in analogia col parametro kB^{-1} è possibile definire il parametro $kB_q^{-1} = ln(z_{0m}/z_{0h})$ studiato estesamente nel lavoro di Park e al. (2010). Il risultato principale ottenuto è la stretta similitudine osservata tra kB^{-1} e kB_q^{-1}. Per questo, ai fini pratici, conviene porre z_{0q} ed il parametro di rugosità per ogni altro scalare z_{0c} pari a z_{0h}.

Fin qui si è implicitamente ipotizzato un terreno piatto, orizzontalmente omogeneo, che si estende cioè all'infinito con le medesime caratteristiche superficiali. Se questo è vero in certe situazioni (per esempio le grandi praterie nordamericane o le distese semidesertiche australiane), in moltissime altre la situazione non è così omogenea e quindi le proprietà aerodinamiche del suolo possono variare da zona a zona, anche rapidamente. Tra l'altro, anche in una situazione teoricamente omogenea, la rugosità superficiale può variare nel tempo; infatti, la vegetazione che copre il suolo cambia la propria altezza e la propria consistenza col procedere delle stagioni, ma nello stesso giorno il vento può piegare in maniera più o meno accentuata la vegetazione nella direzione sottovento in maniera proporzionale alla propria intensità, diminuendo la rugosità superficiale effettiva. Comunque stiamo ragionando in *termini locali*, cioè stiamo attribuendo ad una ben precisa porzione di territorio un valore caratteristico di rugosità superficiale z_{0m}. E questo è logico e corretto e conduce a definire una distribuzione spaziale di rugosità. Questo è ciò che si aspettano i modelli che descrivono la dinamica dell'atmosfera.

Il problema *filosofico* sorge quando cerchiamo di determinare sperimentalmente z_{0m}. Per fare ciò, un metodo possibile (Sozzi e al. 1998) è quello di collocare in un punto un palo alla cui sommità z si pone un anemometro ultrasonico triassiale che, oltre a misurare le componenti medie della velocità del vento e della temperatura, determina direttamente anche u_*, H_0 e quindi L. A questo punto, ipotizzando per semplicità che d sia praticamente nullo, dalla Relazione di Similarità per il profilo della velocità media del vento si ha che:

$$z_{0m} = \frac{z}{exp[kU/u_* + \Psi_m(z/L)]} \quad [8.88]$$

Quindi da una misura possiamo ottenere una stima del parametro di rugosità. Però si verifica sperimentalmente che in generale questa stima varia col variare della direzione di provenienza del vento se il terreno attorno alla postazione di misura non è omogeneo orizzontalmente. In realtà che cosa abbiamo stimato? Perché mai il parametro di rugosità determinato in un punto dovrebbe variare con la direzione del vento?

La risposta sta nel fatto che il punto di misura, se non è molto vicino al suolo (per esempio a 1 metro dal suolo), non *sente* la rugosità locale, ma quella che le masse d'aria hanno trovato giungendo al punto di misura lungo la direzione di provenienza del vento. In realtà, l'anemometro ha *catturato* il valor di u_* e di H_0 tipici di una porzione di territorio più o meno lontana dal punto di misura, ma localizzata sopravvento ad essa, e quindi lo z_{0m} stimato non è caratteristico del punto di misura, ma è caratteristico di quella porzione di territorio che ha dato luogo a quel valore di u_* e di H_0. Si indica col nome curioso di ***footprint*** l'area di territorio sopravvento al punto di misura

che ha generato u_* e H_0 misurati dallo strumento. Ovviamente è estremamente interessante determinare il *footprint* di ogni misura, cosa tutt'altro che semplice e che richiede tecniche numeriche comuni con la dispersione degli inquinanti. Non tratteremo qui l'argomento, ma nel Capitolo 13: per gli interessati si consigliano Horst e Weil (1992), Finn e al (1996), Hsieh e al. (1997), Neftel e al. (2008) e Vesala e al. (2008). Senza entrare nel dettaglio, comunque si può affermare che più è elevato il punto di misura, maggiore è la distanza sopravvento che separa il punto di misura stesso con l'area che ha generato u_* e H_0 e maggiore è l'estensione di questa area. Sostanzialmente correlato al concetto di *footprint* è il concetto di *fetch*. Seguendo Vieringa (1993) possiamo definire *fetch* la distanza *F* sopravvento ad un punto di misura collocato alla quota *z* (ovviamente entro il *SL*) entro cui le masse d'aria sono in equilibrio con il suolo sottostante. Una relazione di prima approssimazione per la stima di *F* è la seguente:

$$F \cong 2z_{0m}\left[\frac{10z}{z_{0m}}\left(ln\left(\frac{10z}{z_0 m}\right)-1\right)+1\right] \qquad [8.89]$$

che grossolanamente si riduce alla semplice regola secondo cui lo z_{0m} misurato è rappresentativo di una distanza sopravvento pari a circa 100 volte la quota di misura.

8.4 TEORIA DELLA SIMILARITÀ PER L'INTERO PBL

La Teoria della Similarità di Monin-Obukhov limita la propria validità alla previsione nel *SL* del profilo verticale delle principali variabili meteorologiche (i valori medi ed i principali momenti di ordine superiore). Ma il *SL* rappresenta, in estensione verticale, sostanzialmente solo 10% dell'intero *PBL*. Per questa ragione, le Relazioni di Similarità ottenute in questo contesto vengono usate normalmente più nei metodi indiretti di stima dei parametri della turbolenza del *PBL* (come si vedrà al Capitolo 15) che in un contesto veramente modellistico in cui quasi sempre è richiesta la previsione dei profili delle principali variabili di interesse entro tutto il *PBL*.

Anche se finora non è stata sviluppata una teoria coerente e organica della Similarità effettivamente valida per l'intero *PBL*, va ricordato che la Similarità di Rossby ha consentito di mettere a punto relazioni di similarità per il profilo verticale delle componenti orizzontali medie del vento, della temperatura potenziale e dell'umidità molto utili in pratica. Inoltre, la Teoria della Similarità Locale ha consentito di migliorare la descrizione diagnostica del *PBL*, soprattutto stabile ed altamente convettivo. Della teoria di Rossby già si è trattato, mentre qui di seguito presenteremo la Teoria della Similarità Locale evidenziandone le basi teoriche e le potenzialità applicative. Successivamente presenteremo una raccolta di Relazioni di Similarità che coprono l'intero *PBL* e che possono essere impiegate nelle applicazioni pratiche. Queste Relazioni, di tipo diagnostico e di fatto basate sull'Analisi Dimensionale (e quindi di Similarità), hanno come elemento caratteristico il fatto di rappresentare la variazione con la quota delle principali variabili meteorologiche in funzione non solo dalle forzanti presenti al suolo (*friction velocity*, galleggiamento e flusso turbolento di calore sensibile e latente), ma anche dall'estensione verticale del *PBL* stesso che esercita un'azione di *confinamento* che si ripercuote inevitabilmente sui profili stessi. Nel Capitolo 22 riprenderemo in modo organico la descrizione di queste relazioni di Similarità per l'intero *PBL* organizzate in modo da costituire un *modello diagnostico di PBL*, alternativo a quello prognostico, per alcune classi di modelli di dispersione degli inquinanti in aria e soprattutto per il Modello Lagrangiano a Particelle.

8.4.1 LA SIMILARITÀ LOCALE

La Teoria della Similarità di Monin-Obukhov è basata su un insieme di variabili tipiche come la friction velocity u_*, il flusso turbolento di calore sensibile H_0 e la lunghezza di Monin-Obukhov *L* che si ipotizzano costanti entro l'intero *SL*. Come abbiamo visto, ciò non è esattamente la realtà

dei fatti. E questa è una forte limitazione del MOST, unita al fatto che il *SL* rappresenta una porzione relativamente piccola dell'intero *PBL*. Era inevitabile cercare di estendere questa teoria per l'intero *PBL* e ciò è stato fatto nel decennio 1980÷1990. Il punto di partenza di tutto ciò curiosamente nasce da due lavori di Nieuwstadt (1984a, 1984b) che in realtà non affrontano il problema dal punto di vista dimensionale, ma piuttosto applicano le *normali* leggi della Fluidodinamica ad un *PBL* stabile ed in qualche modo *assimilano* le conoscenze sperimentali disponibili in proposito. Il risultato di questo elegante esercizio analitico è la nascita di una nuova forma di Similarità cui viene dato il nome di *Similarità Locale*. La costruzione di questa teoria è stata completata da Sorbjan (1986a, 1986b, 1986c, 1989, 2006, 2008a) che l'ha poi estesa alla trattazione del *PBL* convettivo (Sorbjan 1989, 1990, 1991, 1999, 2008b).

8.4.1.1 La Similarità Locale per un PBL stabile

L'operatività della torre meteorologica di Cabauw (Olanda), alta oltre 200 metri e strumentata a numerosi livelli, ha consentito di raccogliere una preziosa massa di misure del valor medio e dei momenti secondi delle principali variabili meteorologiche entro il *PBL* notturno. In particolare, le misure notturne raccolte nel periodo 1977 – 1979 hanno messo a disposizione un quadro conoscitivo praticamente completo di tutto il *PBL* notturno (*SBL*), caratterizzato nel periodo di osservazione da un regime che potremmo definire di stabilità debole, quadro che evidenziava in maniera chiara le differenze esistenti col *PBL* convettivo diurno. Era naturale, quindi, cercare di descrivere nel dettaglio la struttura verticale del *PBL* notturno ed il modo più immediato era quello di impiegare per la sua descrizione il modello fluidodinamico, cosa fatta da Nieuwstadt (1984 *a* e *b*). In questi lavori, l'Autore ha costruito inizialmente un modello prognostico per i valori medi e per tutti i momenti secondi, parametrizzando sistematicamente i momenti terzi. Inoltre, facendo l'ipotesi di stazionarietà ed impiegando il fatto che le condizioni sperimentali assicuravano una sostanziale omogeneità orizzontale, l'Autore ha condotto una sistematica ed elegante semplificazione dei vari termini presenti nelle diverse equazioni, giungendo a definire un quadro prognostico che consentiva di individuare la possibilità di una costruzione di profili verticali di Similarità per il gradiente delle variabili medie e per i momenti secondi basati sui valori locali dei flussi turbolenti (cioè i flussi ad una generica quota *z* entro il *PBL*) e non più basati sui flussi turbolenti al suolo, come richiesto dal MOST. Evidentemente questa era una notevole rivoluzione concettuale nell'ambito dell'Analisi di Similarità e tutto ciò veniva confermato proprio dalle osservazioni raccolte a Cabauw e anche da altre campagne sperimentali successive.

Per meglio quantificare il tutto, Sorbjan nei vari lavori indicati ha preso come riferimento le considerazioni analitiche di Nieuwstadt, sviluppandole sistematicamente in un rigoroso formalismo caratteristico di un'Analisi di Similarità. Va subito detto che questa Teoria, nota ora come Teoria della Similarità Locale, si riferisce a situazioni di *debole stabilità* in cui è presente una turbolenza continua localizzata nei pressi del suolo. In questo *SBL* le forze di galleggiamento tendono a sopprimere i vortici turbolenti generati dallo *shear del vento*, che rimangono di piccole dimensioni e possiedono caratteristiche sostanzialmente indipendenti dalla loro distanza dal suolo. Formalmente, la Teoria della Similarità Locale nel formalismo introdotto da Sorbjan (1986a) si basa su alcune fondamentali ipotesi.

Ipotesi 1: le scale appropriate per i flussi turbolenti nel regime stabile di turbolenza continua sono basati sui valori locali dello Stress di Reynolds $\tau(z)$ e del flusso turbolento di calore sensibile $\overline{w\theta}(z)$. In particolare, sono definibili:

- una velocità di scala (*local friction velocity*). Essa è legata ai valori delle covarianze tra le componenti orizzontali del moto e la componente verticale dalla relazione:

$$U_* = \left(\overline{u'w'}^2 + \overline{v'w'}^2\right)^{1/4} \qquad [8.90a]$$

Apparentemente questa è la definizione consueta della *friction velocity*, ma così non è

visto che le due covarianze non sono quelle al suolo, ma quelle relative alla generica quota *z* entro lo *SBL*, quindi a differenza di u_* che era costante, U_* varia con *z;*

- una <u>temperatura di scala</u> legata al flusso locale di quantità di moto (rappresentato da U_*) e al flusso locale di calore sensibile (rappresentato dalla covarianza *locale* della componete verticale del moto con la temperatura potenziale). Anche questa scala dipende dalla quota *z* ed è definita come:

$$\Theta_* = -\frac{\overline{w'\theta'}}{U_*} \qquad [8.90b]$$

- una <u>lunghezza di scala</u> che viene formalmente definita esattamente come la consueta lunghezza di Monin-Obukhov, impiegando però i valori locali di flusso. Pertanto, si ha che questa lunghezza di scala risulta definita come:

$$\Lambda = \frac{T_0}{kg}\frac{U_*^2}{\Theta_*} = \frac{U_*^2}{\beta\Theta_*} \qquad [8.90c]$$

In questa relazione T_0 è una temperatura di riferimento per tutto lo *SBL*. Anche questa scala varia al variare della quota *z*.

Queste tre variabili di scala sono state definite in maniera del tutto analoga alla loro controparte impiegata nella classica teoria della Similarità di Monin Obukhov; l'unica differenza è che nella teoria di Monin-Obukhov i flussi sono quelli misurati al suolo, mentre nella Similarità Locale essi sono quelli misurati alla quota che si sta considerando, quota che non necessariamente si trova entro il *SL*. Ovviamente nel *SL* le due teorie devono coincidere. Per completare il quadro, bisogna tener conto anche del contenuto di umidità dell'aria. Per fare ciò, nel contesto della Similarità Locale si introduce il parametro di scala $Q_*(z)$ definito sulla base del flusso locale di quantità di moto e di umidità nella maniera seguente:

$$Q_* = -\frac{\overline{wq}}{U_*} \qquad [8.90d]$$

Con l'ausilio di queste variabili di scala è possibile esprimere i profili verticali entro tutto lo *SBL* del gradiente verticale della velocità media del vento e della temperatura potenziale media mediante relazioni diagnostiche di Similarità. In generale, ogni momento statistico di interesse *X*, opportunamente *scalato* dalle variabili di scala precedenti, risulta indipendente dalla quota entro lo *SBL*. Questa affermazione è il risultato dell'applicazione del Teorema di Buckingham e può essere espressa in generale dalla relazione:

$$\frac{X}{U_*^a \Theta_*^b Q_*^c \Lambda^d} = Cost \qquad [8.90e]$$

dove gli esponenti *a*, *b*, *c* e *d* devono essere ottenuti, definito *X*, sulla base di considerazioni puramente dimensionali. In particolare, per il gradiente della velocità media del vento *S* a quota *z*:

$$S = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} \qquad [8.91]$$

la relazione di Similarità che ne esprime il profilo verticale è data da:

$$\Phi'_m = k\Lambda\frac{S}{U_*} \qquad [8.92a]$$

secondo cui ad una generica quota *z* nello *SBL* il gradiente verticale della velocità media del vento scalato dal valore locale della velocità e lunghezza di scala è una Funzione Universale. Questa relazione, nata dall'ipotesi introdotta, in realtà veniva prevista anche dal modello fluidodinamico di Nieuwstadt e riscontrata nelle misure sperimentali. Questa relazione è una relazione di profilo

anche se implicita, visto che essa lega le scale variabili con la quota al gradiente anch'esso variabile con la quota. Si può giungere facilmente ad analoghe relazioni di Similarità per il gradiente verticale della temperatura potenziale e per i momenti secondi ottenendo le relazioni seguente:

$$\Phi'_h = \frac{k\Lambda}{\Theta_*}\frac{\partial\Theta}{\partial z} \qquad [8.92b]$$

$$\Phi_1 = \frac{\overline{u'^2 + v'^2}}{U_*^2} = \frac{\sigma^2}{U_*^2} \qquad [8.92c]$$

$$\Phi_w = \frac{\overline{w'^2}}{U_*^2} \qquad [8.92d]$$

$$\Phi_{12} = \frac{\overline{u'w'^2}}{U_*^2} \qquad [8.92e]$$

$$\Phi_\theta = \frac{\overline{\theta'^2}}{U_*^2} \qquad [8.92f]$$

$$\Phi'_\varepsilon = k\frac{\Lambda\varepsilon}{U_*^3} \qquad [8.92g]$$

Quando si è in condizioni stabili, nel *SL* la turbolenza è in un regime *z-less* e ciò comporta che, come abbiamo visto, le funzio*ni* universale del MOST devono tendere ad una costante. Ma dato che la Similarità locale nel *SL* deve coincidere con il MOST, allora tutte le Funzioni di Similarità sopra introdotte dovranno tendere anch'esse ad una costante. È conveniente *riscalare* le tre Funzioni Universali Φ', definendo le nuove funzioni seguenti:

$$\Phi_m = Z\Phi'_m \qquad \Phi_h = Z\Phi'_h \qquad \Phi_\varepsilon = Z\Phi'_\varepsilon \qquad [8.93a]$$

dove:

$$Z = \frac{z}{\Lambda} \qquad [8.93b]$$

Ipotesi 2: la forma funzionale delle Funzioni di Similarità Φ rispetto a $Z = z/\Lambda$ nella parte superiore dello *SBL* sono identiche alla forma delle analoghe funzioni del MOST nel *SL* che dipendono da $\zeta = z/L$. Ciò comporta che le Funzioni Universali Φ' nel *SL* debbano tendere ad una costante in condizioni *z-less* che deve coincidere con quella prevista dal MOST, quindi sì ha che:

$$\Phi_m(Z) = 1 + 4.7Z \qquad \Phi_h(Z) = 0.74 + 4.7Z \qquad \Phi_\varepsilon(Z) = 1 + 3.7Z \qquad [8.93c]$$

$$\Phi_1 = 9.3 \qquad \Phi_w = 2.5 \qquad \Phi_\theta = 6.0 \qquad [8.93d]$$

Per quanto riguarda i parametri di struttura, la Similarità Locale porta alle seguenti relazioni:

$$\frac{(kz)^{2/3}C_v^2}{U_*^2} = 2\Phi_\varepsilon^{2/3} \qquad \frac{(kz)^{2/3}C_T^2}{\Theta_*^2} = 1.6\Phi_\varepsilon^{-1/3}\Phi_N \qquad [8.93e]$$

Per quanto riguarda, invece, la dissipazione di energia cinetica turbolenta e di varianza della temperatura, Sorbjan (1986a) giunge alle relazioni:

$$\Phi_\varepsilon = c_\varepsilon(1 + 3.7Z) \qquad \Phi_N = c_N(0.74 + 3.7Z) \qquad [8.93f]$$

dove C_ε e C_N valgono rispettivamente 1.25 e 1.5. Inoltre, dalla definizione dei coefficienti di diffusività turbolenta e di Numero di Richardson Gradiente e Flusso si ha che:

$$K_m = \frac{Z}{\Phi_m} \qquad K_h = \frac{Z}{\Phi_h} \qquad Ri = Z\frac{\Phi_h}{\Phi_m^2} \qquad R_f = \frac{Z}{\Phi_m} \qquad [8.93g]$$

Ovviamente tutte queste relazioni di Similarità sono *locali* e quindi non è immediato ottenere da esse un profilo, cosa che si richiede sempre alla Similarità. A tale scopo, Sorbjan ha introdotto l'ipotesi seguente.

Ipotesi 3: in uno *SBL* stabile, barotropico e orizzontalmente omogeneo, la distribuzione degli Stress di Reynolds e del flusso di calore entro lo *SBL* deve dipendere dal rapporto tra la quota *z* e l'estensione verticale dello *SBL h* nel modo seguente:

$$U_*^2 = u_*^2(1 - z/L)^{\alpha_1} \qquad \overline{w\theta} = \overline{w\theta}_0(1 - z/L)^{\alpha_2} \tag{8.94a}$$

dove $\overline{w\theta}_0$ è il flusso turbolento di calore sensibile al suolo. Ciò comporta che:

$$\Theta_* = T_*(1 - z/h)^{\alpha_2 - \alpha_1/2} \qquad \Lambda = L(1 - z/h)^{3/2\alpha_1 - \alpha_2} \tag{8.94b}$$

Gli esponenti α_1 e α_2 vanno determinati sperimentalmente, ma è stato dimostrato che deve comunque sempre valere la disuguaglianza $\alpha_2 \geq \alpha_1$. Nella campagna sperimentale del Minnesota (Caughey e al., 1979) si è visto che $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = 3$. Impiegando queste relazioni ed i valori indicati per i differenti coefficienti, alla fine si ottiene che:

$$\frac{kz}{u_*} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(U^2 + V^2)^{1/2} = \left(1 + 4.7\frac{z}{L}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 \tag{8.95a}$$

$$\frac{kz}{T_*} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} = \left(0.74 + 4.7\frac{z}{L}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 \tag{8.95b}$$

$$\frac{\overline{u'^2 + v'^2}}{u_*^2} = 9.3\left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 \tag{8.95c}$$

$$\frac{\sigma_w^2}{u_*^2} = 2.5\left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 \tag{8.95d}$$

$$\frac{\sigma_T^2}{T_*^2} = 6.0\left(1 - \frac{z}{L}\right)^4 \tag{8.95e}$$

$$\frac{\varepsilon h}{u_*^3} = 3.6\left(1 + 3.7\frac{z}{L}\right) \cdot \frac{(1 - z/L)^3}{z/L} \tag{8.95f}$$

$$\frac{Nh}{u_* T_*^2} = 4.3\left(1 + 3.7\frac{z}{L}\right) \cdot \frac{(1 - z/L)^5}{z/L} \tag{8.95g}$$

$$Ri = \frac{z/L}{(1 + 4.7\, z/L)^2} \cdot (0.74 + 4.7\, z/L) \tag{8.95h}$$

$$Rf = \frac{z/L}{(1 + 4.7\, z/L)} \tag{8.95i}$$

$$\frac{K_m}{k u_* h} = \frac{z/L \cdot (1 - z/h)}{(1 + 4.7\, z/L)} \tag{8.95j}$$

$$\frac{K_H}{k u_* h} = \frac{z/L \cdot (1 - z/h)}{(0.74 + 4.7\, z/L)} \tag{8.95k}$$

La relazione di Similarità per il gradiente verticale della temperatura potenziale media può ovviamente essere integrata giungendo ad una relazione di Similarità che descrive il profilo verticale di temperatura nell'intero *SBL*:

$$\Theta(z) = \Theta_0 + 0.74\frac{\Theta_*}{k}\left\{ln\left(\frac{z}{z_{0h}}\right) - 2\frac{z}{h} + 0.5\left(\frac{z}{h}\right)^2 + 4.7\mu_h\frac{z}{h}\left(1 - \frac{z}{h} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^2\right)\right\} \tag{8.96}$$

dove Θ_0 è la temperata al suolo e $\mu_h = h/L$.

In teoria si potrebbe integrare anche la relazione di Similarità Locale per il gradiente della velocità media del vento, anche se l'utilità pratica di ciò è decisamente bassa. Infatti, ci sono almeno due ragioni per ritenere di scarso interesse questa relazione. In primo luogo, essa si

riferirebbe alla sola velocità media e non al valor medio delle due componenti orizzontali. In secondo luogo, mancando nella Similarità Locale un parametro *esterno* al *PBL* (come, per esempio, il parametro di Coriolis *f*) che influenza in maniera determinante il moto delle masse d'aria facendole ruotare con la quota, è inevitabile che la realisticità di una relazione di questo tipo non può che essere bassa.

Comunque, se si esclude il profilo verticale delle componenti orizzontali della velocità del vento, si vede che l'insieme di tutte queste relazioni costituisce di fatto un modello prognostico di un *PBL* stabile e questo modello appare piuttosto accurato alla luce del confronto effettuato con le misure sperimentali ottenute nella campagna del Minnesota. Come esempio, nella **Fig. 8.43** viene messo a confronto il profilo verticale dello stress di Reynolds e del flusso turbolento di calore sensibile ottenuto dalla Similarità Locale con le misure ottenute durante la campagna del Minnesota e nella **Fig. 8.44** viene mostrato un analogo confronto per la varianza della componente longitudinale e verticale del moto. Come si nota, la Similarità Locale è ben confermata dalle misure disponibili e ciò è ulteriormente confermato dalle **Fig. 8.45** e **Fig. 8.46** in cui viene effettuato un analogo confronto per il tasso di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta e per il numero di Richardson *Ri*. Analoghe conferme sperimentali si hanno impiegando le misure di campagne più recenti, anche quelle realizzate nelle regioni polari, purché si considerino solo le misure relative a condizioni di stabilità non estrema.

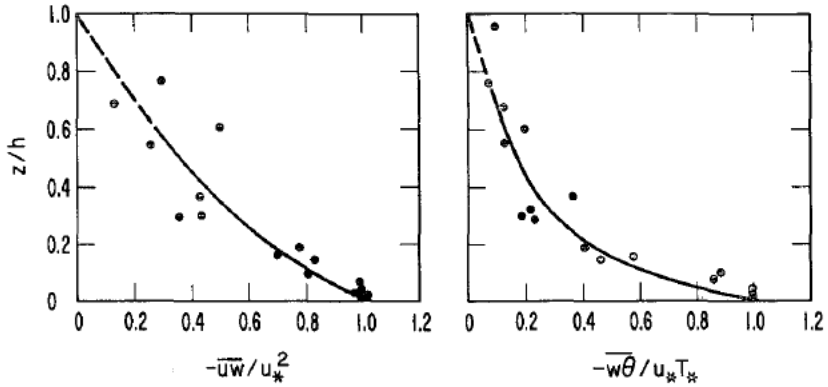


Fig. 8.43: profilo verticale dello stress di Reynolds e del flusso turbolento di calore sensibile (Caughey e al., 1979)

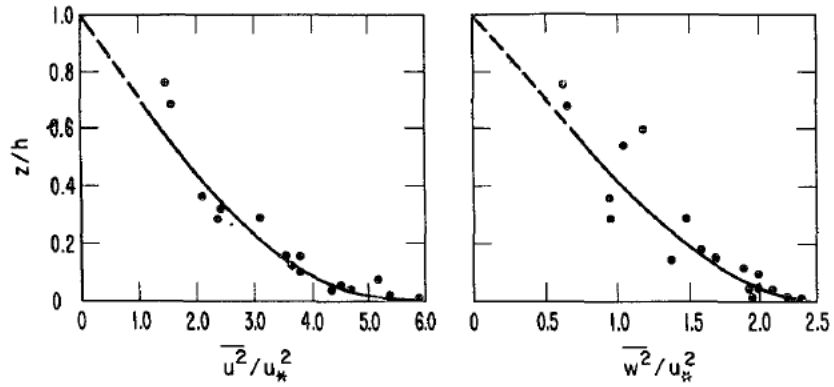


Fig. 8.44: profilo verticale della varianza della componente longitudinale e verticale del moto (Caughey e al., 1979)

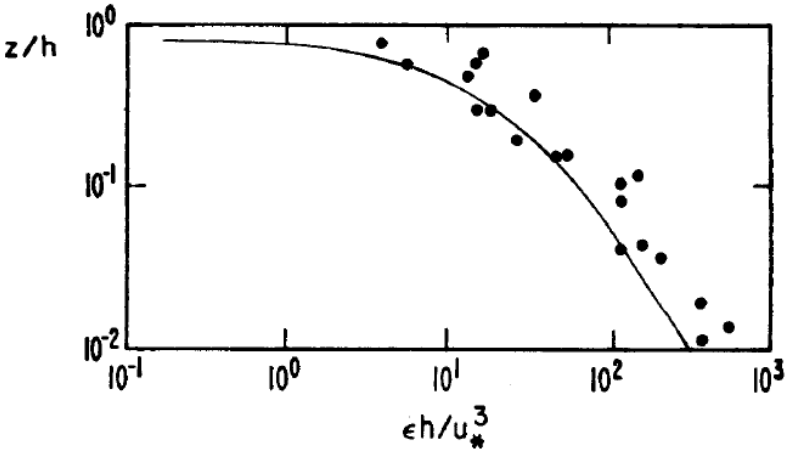


Fig. 8.45: profilo verticale del tasso di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta (Caughey e al., 1979)

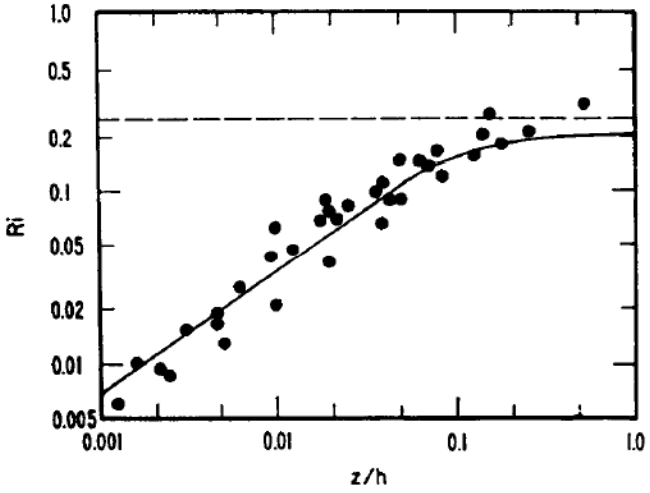


Fig. 8.46: profilo verticale del Numero di Richardson Gradiente (Caughey e al., 1979)

La Teoria della Similarità Locale, come il MOST, è basata su una scelta di variabili di base in cui compaiono due momenti del secondo ordine, la friction velocity ed il flusso turbolento di calore sensibile, e le varie grandezze di scala per come sono definite risentono moltissimo della *self-correlation*, soprattutto ad elevate stabilità. Nulla vieta di cambiare questo insieme di variabili di base. Tra le tante soluzioni possibili, è interessante considerarne una specifica denominata *Gradient-Based Similarity* (Sorbjan 2008b, Sorbjan e Gracev, 2010) che è caratterizzata dalle grandezze di scala seguenti:

- una velocità di scala $U_n(z)$ definita come:

$$U_n(z) = \sigma_w \qquad [8.97a]$$

  Questa scelta per la velocità di scala è estremamente vantaggiosa, visto che la varianza della componente verticale del vento è meno contaminata dai moti a mesoscala e dalle onde di gravità e ciò comporta di conseguenza che la scelta del periodo di mediazione per la sua stima è decisamente meno critica;

- una lunghezza di scala $L_n(z)$ definita come:

$$L_n(z) = \frac{U_n}{N} \qquad [8.97b]$$

dove N è la frequenza di Brunt-Vaisala locale che, una volta noto il gradiente locale di temperatura potenziale media $d\Theta/dz$, risulta pari a:

$$N = \sqrt{\frac{g}{T_0}\frac{d\Theta}{dz}} \qquad [8.97c]$$

- una <u>temperatura di scala</u> $T_n(z)$ definita come:

$$T_n(z) = L_n \frac{d\Theta}{dz} \qquad [8.97d]$$

Ragionamenti analitici basati su un modello fluidodinamico semplificato portano a dire che in condizioni stazionarie ed orizzontalmente omogenee i diversi momenti di interesse, opportunamente scalati con le grandezze di scala, sono funzioni esclusivamente del Numero di Richardson Gradiente *Ri*. Per esempio, le relazioni di Similarità Locale per lo stress di Reynolds e per il flusso turbolento di calore sensibile risultano date da:

$$\frac{\overline{uw}}{U_n^2} = \Phi_m(Ri) \qquad \frac{\overline{w\theta}}{U_n T_n} = -\Phi_h(Ri) \qquad [8.98]$$

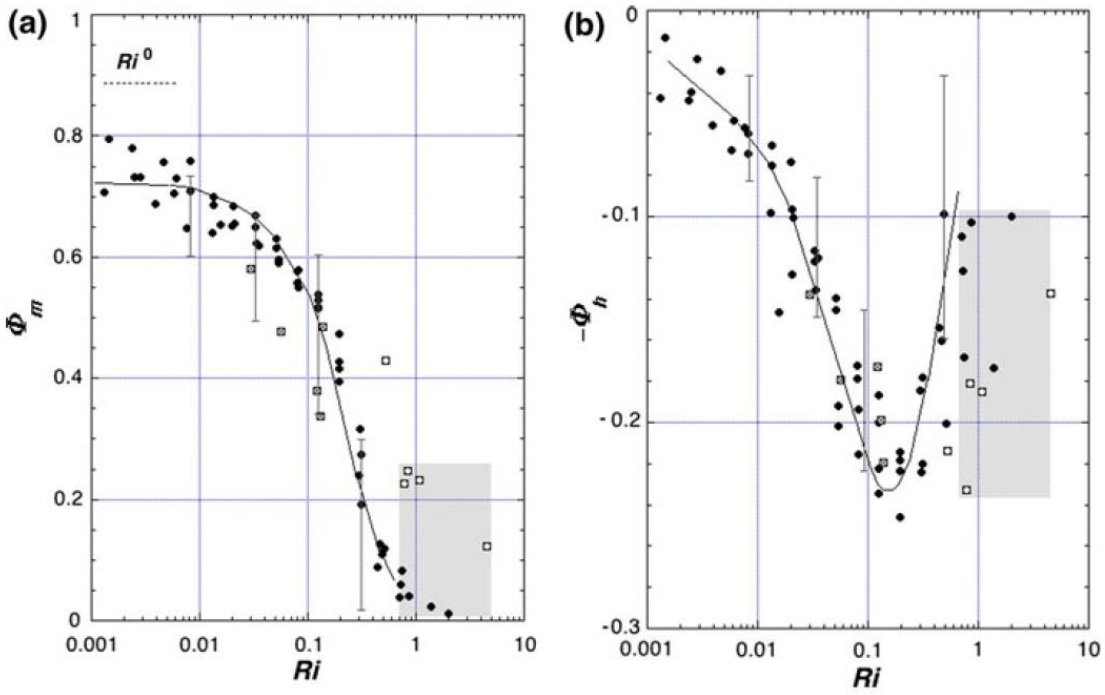


Fig. 7.48: funzioni di similarità Gradient-Based (Sorbjan e Gracev, 2010)

Nella **Fig. 8.47** viene presentato l'andamento di queste due relazioni di Similarità. In particolare, nella figura a destra è presentata $-\Phi_h(Ri)$ che mostra un andamento singolare. Infatti, tale funzione presenta un minimo in corrispondenza di $Ri \approx 0.15$ dove $-\Phi_h(Ri) = -0.23$. Ciò significa che il flusso turbolento di calore sensibile non varia monotonicamente con *Ri*, ma presenta un minimo che, per la definizione data delle grandezze di scala, risulta dato da:

$$0 \geq \overline{w\theta} \geq -0.23\frac{N}{\beta}\sigma_w^2 \qquad [8.99]$$

dove $\beta = g/T_0$.

8.4.1.2 La Similarità Locale per un PBL convettivo

La disponibilità di numerose misure di laboratorio e in atmosfera realizzate in situazioni convettive e l'utilizzo sistematico di modelli numerici ad elevata risoluzione (LES) ha consentito di avere un quadro sistematico della fenomenologia che caratterizza il *PBL* durante le ore diurne a vari gradi di convettività. Le caratteristiche salienti di questo regime fluidodinamico possono essere così riassunte (**Fig. 8.48**):

- all'interfaccia aria-suolo l'energia disponibile permette la formazione di strutture coerenti convettive che s'innalzano nello strato rimescolato e che giungono fino allo strato di *entrainment* (che spesso viene indicato anche col termine *interfacial layer*) caratterizzato da una marcata inversione termica;
- l'*interfacial layer* presenta un'estensione verticale Δ e la variazione di temperatura potenziale media tra la sua base è la sommità è pari a $\Delta\Theta$;
- all'inizio del periodo convettivo della giornata $\Delta\Theta$ è elevato, ma i *thermals* possiedono un'energia ascensionale insufficiente a penetrare l'inversione e la *convezione è non penetrativa*. Quindi nel periodo in cui ciò avviene non si ha un inglobamento di aria dell'atmosfera libera e non c'è un flusso di calore discendente alla sommità dello strato rimescolato;
- viceversa, col crescere della temperatura media dello strato rimescolato, $\Delta\Theta$ diminuisce ed il galleggiamento dei *thermals* aumenta. I *thermals* quindi penetrano l'inversione sovrastante lo strato rimescolato generando un inglobamento dell'aria dell'atmosfera libera con un conseguente flusso di calore diretto verso il basso. Questa situazione prende il nome di *convezione penetrativa*.

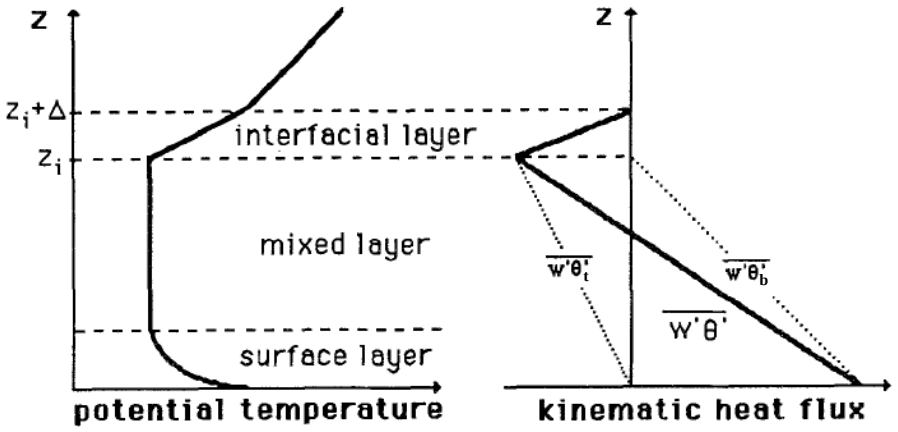


Fig. 8.48: la struttura termica di un PBL convettivo (Sorbjan, 1988)

Prendendo in considerazione tutto ciò, Sorbjan (1988) ha formulato una teoria di Similarità Locale dedicata esclusivamente al *PBL* convettivo.

Il punto di partenza è l'ipotesi secondo cui le proprietà statistiche (valori medi, momenti di vario ordine) che caratterizzano una generica situazione di convezione penetrativa (che ipotizziamo sia il caso generale da considerare) possa essere scomposta in una componente non penetrativa (indicata col pedice *b*) e da una componente residua (indicata col pedice *t*). Per esempio, il flusso turbolento di calore sensibile ad una generica quota può essere visto come la sovrapposizione della componente penetrativa e della componente residua il cui peso varia linearmente a seconda della quota *z* nel modo seguente:

$$\overline{w\theta} = \overline{w\theta}_0 \left(1 - \frac{z}{z_i}\right) + \overline{w\theta}_i \frac{z}{z_i} = \overline{w\theta}_b(z) + \overline{w\theta}_i(z) \qquad [8.100]$$

In questa relazione con $\overline{w\theta}_0$ si è indicato il flusso di calore (positivo) proveniente dall'interfaccia aria-suolo e diretto verso l'alto, mentre $\overline{w\theta}_i$ (negativo) è il flusso di calore diretto verso il basso prodotto all'*interfacial layer* a causa dell'inglobamento dell'aria dall'atmosfera libera. Rimandando ai riferimenti citati per i dettagli, conviene presentare le conclusioni cui è giunto Sorbjan (1988, 1990, 1991, 1999) impiegando questa scomposizione nell'equazione di bilancio dell'energia cinetica turbolenta e tenendo conto delle osservazioni disponibili.

In primo luogo, nelle situazioni non penetrative, le caratteristiche della turbolenza che coinvolgono le fluttuazioni della componente verticale del moto e della temperatura possono essere definite dai parametri seguenti: la quota *z* cui si è interessati, il parametro di galleggiamento $\beta = g/T_0$ ed il flusso turbolento di calore sensibile al suolo $\overline{w\theta}_b$. Questi parametri possono essere usati per costruire le scale locali seguenti:

- la velocità di scala, definita come:

$$U_b = \left[\beta \cdot z \cdot \overline{w\theta}_b(z)\right]^{1/3} \qquad [8.101a]$$

- la temperatura di scala, definita come:

$$\Theta_b = -\frac{\overline{w\theta}_b(z)}{U_b} \qquad [8.101b]$$

- una lunghezza di scala che si pone pari a *z*.

In secondo luogo, possiamo assumere che le componenti residue dipendano dal parametro di galleggiamento β, dal flusso di calore $\overline{w\theta}_t(z)$ e dalla distanza tra la quota di interesse e la sommità del *PBL*, cioè ($z_i + \Delta - z$). Con questi parametri si possono costruire le scale seguenti:

- una velocità di scala, definita come:

$$U_t = \left[\beta(z_i + \Delta - z) \cdot \overline{w\theta}_t(z)\right]^{1/3} \qquad [8.102a]$$

- una temperatura di scala, definita come:

$$\Theta_t = -\frac{\overline{w\theta}_t(z)}{U_t} \qquad [8.102b]$$

- una lunghezza di scala posta pari a $z_i + \Delta - z$.

Il modello introdotto, che vede la sovrapposizione di una fisica non penetrativa ad una fisica residua, supporta anche il fatto che ogni singola statistica di interesse (per esempio la varianza della componente verticale del moto e della temperatura potenziale) possa essere vista come la somma di una componente non penetrativa e di una componente residua, cioè:

$$\begin{aligned} \overline{w^2} &= \overline{w_b^2} + \overline{w_t^2} \\ \overline{\theta^2} &= \overline{\theta_b^2} + \overline{\theta_t^2} \end{aligned} \qquad [8.103a]$$

Motivazioni di Analisi Dimensionale inducono a ritenere che la parte non penetrativa delle varie statistiche di interesse, opportunamente scalate con le grandezze di scala introdotte, siano costanti e abbiano un carattere universale. Per esempio, si ha che:

$$\frac{\overline{w_b^2}}{U_b^2} = c_{wb} \qquad \frac{\overline{\theta_b^2}}{\Theta_b^2} = c_{\theta b} \qquad [8.103b]$$

Inoltre, sempre dall'analisi dimensionale, risulta che anche la parte residua delle statistiche di interesse, opportunamente scalate, dovrà essere pari ad una costante avente carattere universale. Per esempio:

$$\frac{\overline{w_t^2}}{U_t^2} = c_{wt} \qquad \frac{\overline{\theta_t^2}}{\Theta_t^2} = c_{\theta t} \qquad [8.103c]$$

Prima di mettere a frutto tutte queste considerazioni, conviene riscrivere in maniera opportuna le velocità e temperature di scala introdotte in precedenza utilizzando:

- la velocità convettiva di scala $w_* = \left[\beta \cdot \overline{w\theta}_0 \cdot z_i\right]^{1/3}$
- la temperatura convettiva di scala θ* definita come $\theta_* = -\overline{w\theta}_0 / w_*$
- il rapporto *R* definito come $R = \overline{w\theta}_i / \overline{w\theta}_0$
- il rapporto *D* definito come $D = \Delta / z_i$

Con ciò si ottiene:

$$U_b = w_* \left(\frac{z}{z_i}\right)^{1/3} \left(1 - \frac{z}{z_i}\right)^{1/3} \qquad [8.104a]$$

$$\Theta_b = \theta_* \left(\frac{z}{z_i}\right)^{-1/3} \left(1 - \frac{z}{z_i}\right)^{2/3} \qquad [8.104b]$$

$$U_t = w_* R^{1/3} \left(\frac{z}{z_i}\right)^{1/3} \left(1 - \frac{z}{z_i} + D\right)^{1/3} \qquad [8.104c]$$

$$\Theta_t = \theta_* R^{2/3} \left(\frac{z}{z_i}\right)^{2/3} \left(1 - \frac{z}{z_i} + D\right)^{-1/3} \qquad [8.104d]$$

Usando tutto ciò, si ottengono delle relazioni di Similarità Locale per le diverse statistiche di interesse. Per esempio, per la varianza della componente verticale del moto e della temperatura potenziale si ha che:

$$\frac{\overline{w^2}}{w_*^2} = c_{wb} \left(\frac{z}{z_i}\right)^{2/3} \left(1 - \frac{z}{z_i}\right)^{2/3} + c_{wt} R^{2/3} \left(\frac{z}{z_i}\right)^{2/3} \left(1 - \frac{z}{z_i} + D\right)^{2/3} \qquad [8.105a]$$

$$\frac{\overline{\theta^2}}{\theta_*^2} = c_{\theta b} \left(\frac{z}{z_i}\right)^{-2/3} \left(1 - \frac{z}{z_i}\right)^{4/3} + c_{\theta t} R^{4/3} \left(\frac{z}{z_i}\right)^{4/3} \left(1 - \frac{z}{z_i} + D\right)^{2/3} \qquad [8.105b]$$

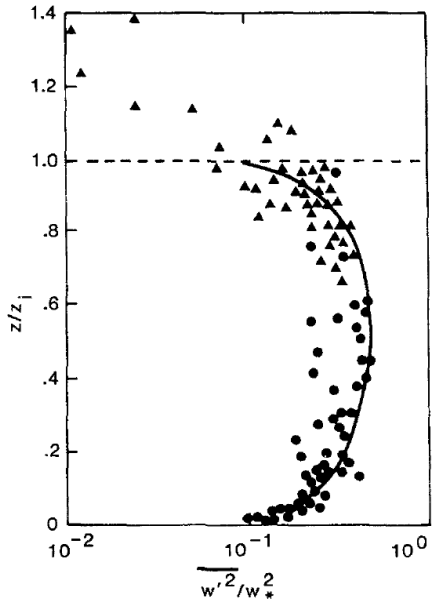


Fig. 8.49: confronto tra la relazione di similarità per la varianza della componente verticale del moto e le misure ottenute durante la campagna del Minnesota (Sorbjan, 1988)

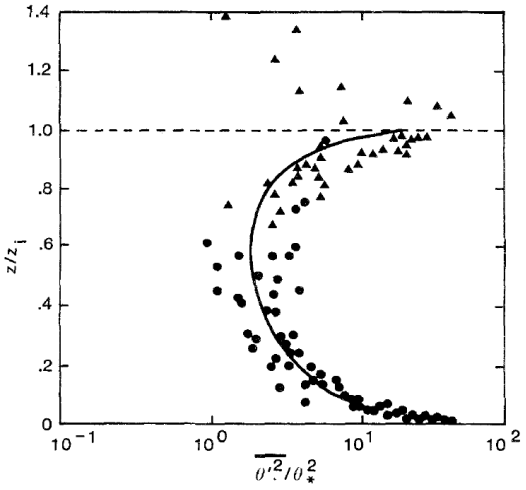


Fig. 8.50: confronto tra la relazione di Similarità per la varianza della temperatura potenziale e le misure ottenute durante la campagna del Minnesota (Sorbjan, 1988)

Provare la validità di queste relazioni (e delle altre che si riferiscono a differenti statistiche) è arduo perché dovrebbe essere sempre noto il rapporto R tra il flusso turbolento al suolo e quello all'*entrainment* ed il rapporto D tra lo spessore dell'*interfacial layer* e la quota della sommità dello strato rimescolato. Comunque, considerando per esempio i dati della campagna del Minnesota (Caughey e Palmer, 1979), si è visto che mediamente $R = -0.2$, $D = 0$ e che i coefficienti c_{wb}, c_{wt}, $c_{\theta b}$ e $c_{\theta t}$ valgono rispettivamente 1.0, 0.5, 2.0, 8.0. In questo caso nella **Fig. 8.49** e nella **Fig. 8.50** vengono presentate le relazioni di Similarità Locale per la varianza della componente del moto e della temperatura potenziale assieme alle misure sperimentali disponibili. Come si può vedere, l'accordo tra le relazioni di Similarità e le misure è decisamente buono.

8.4.2 MODELLI OPERATIVI DI PROFILO

Molte applicazioni pratiche, come la stima della dispersione degli inquinanti in aria, richiedono la conoscenza di relazioni diagnostiche che descrivono quantitativamente il profilo nell'intero *PBL* delle principali variabili meteorologiche d'interesse come il valor medio delle componenti orizzontali del vento, della temperatura potenziale e dell'umidità dell'aria e spesso questo interesse è esteso anche alle varianze delle componenti del moto e della temperatura e ad altri momenti di ordine superiore al primo. Le Teorie di Similarità (quella di Rossby, quella di Monin-Obukhov e la Similarità Locale) complessivamente forniscono tutto ciò che serve per ottenere tutti questi profili d'interesse. Qui di seguito, sistematicamente presentiamo una serie di relazioni diagnostiche di profilo utilizzabili nelle applicazioni di pratico interesse. Maggiori dettagli operativi verranno presentati al Cap. 22.

8.4.2.1 Il profilo verticale del vento

Come abbiamo visto, il profilo verticale del vento è l'oggetto principale della Teoria della Similarità di Rossby, ma il limite di questa Teoria sta nel fatto che una delle grandezze su cui si fonda è il parametro di Coriolis f, che normalmente compare a denominatore dei parametri di stabilità in essa utilizzati. Ciò, quindi, comporta che i risultati di questa teoria possano essere impiegati solo alle medie-alte latitudini, ma non all'equatore, dove f è nulla. Oltre a ciò, non sempre la corrispondenza tra previsioni delle relazioni di Similarità e dati misurati è così buona come nel caso riscontrato dalla Teoria della Similarità di Monin-Obukhov entro il *SL*.

Una delle Relazioni di Similarità della Teoria di Rossby più usate è quella che deriva dai lavori di Zilitinkevich (1989) e Yamada (1976), nella forma proposta da Ratto (1996) e che è

valida per l'intero *PBL* sia nelle condizioni convettive, che nelle situazioni adiabatiche e stabili. Se si considera un sistema di assi cartesiani ortogonali con la *x* orientata secondo la direzione media del vento al suolo (o ad una quota di riferimento z_r prossima al suolo), le due componenti orizzontali medie del vento ad una generica quota *z* (U_x e U_y) sono date dalla relazione seguente:

$$U_x(z) = \frac{u_*}{k}\left[ln\left(\frac{z}{z_0}\right) + f_u(z)\right] \quad [8.106a]$$

$$U_y(z) = -\frac{u_*}{k} f_v(z) \cdot sig(f) \quad [8.106b]$$

dove z_i è l'estensione verticale del *PBL* e *sign*(*f*) è pari a +1 o -1 a seconda del segno del parametro di Coriolis. Le funzioni di Similarità f_u e f_v sono date dalla relazioni quadratiche seguenti:

$$f_u(z) = b_\mu\left(\frac{z - z_0}{z_i}\right) + b_\mu^*\left(\frac{z - z_0}{z_i}\right)^2 \quad [8.106c]$$

$$f_v(z) = a_\mu\left(\frac{z - z_0}{z_i}\right) + a_\mu^*\left(\frac{z - z_0}{z_i}\right)^2 \quad [8.106d]$$

I coefficienti *a* e *b* dipendono dalla stabilità atmosferica e, in particolare, dal parametro μ, definito come:

$$\mu = \frac{ku_*}{fL} \quad [8.106e]$$

in cui *f* è il parametro di Coriolis ed *L* è la lunghezza di Monin-Obukhov. Si nota immediatamente come una tale relazione di Similarità possa essere impiegata solo lontano dall'equatore, in corrispondenza del quale *f* si annulla e μ tende all'infinito. Premesso ciò, la dipendenza dei coefficienti presenti nelle (8.106c e d) è la seguente:

- *nelle situazioni convettive* si ha che:

$$b_\mu = 34 - \frac{38}{1 + 0.027\sqrt{-\mu}} \qquad b_\mu^* = -24 + \frac{28.5}{1 + 0.027\sqrt{-\mu}}$$

$$a_\mu = \frac{10}{1 + 1.581\sqrt{-\mu}} \qquad a_\mu^* = \frac{-5.5}{1 + 1.581\sqrt{-\mu}}$$

- *nelle situazioni adiabatiche* si ha che:

$$b_\mu = 4 \qquad b_\mu^* = -4.5 \qquad a_\mu = 10 \qquad a_\mu^* = -5.5$$

- *nelle situazioni stabili* si ha che:

$$b_\mu = 4.0 + 10.20\sqrt{\mu} \qquad b_\mu^* = -4.5 - 7.65\sqrt{\mu}$$

$$a_\mu = 10. \qquad a_\mu^* = -5.5 + 1.7647\sqrt{\mu}$$

Un metodo alternativo che può essere impiegato nelle zone equatoriali e che non richiede l'impiego diretto del parametro di Coriolis è presentato in Ulke (2000). Tale metodo si basa sulle equazioni del moto per le componenti medie (orizzontali) del vento scritte per una situazione stazionaria, in cui si è adottata una chiusura del primo ordine (chiusura di tipo *K*) con il coefficiente di *eddy diffusivity* dato nelle situazioni stabili da:

$$K_m(z) = ku_*z_i\left(\frac{z}{z_i}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cdot \left(1 + 6.9\frac{h}{L} \cdot \frac{z}{h}\right)^{-1} \quad [8.107a]$$

e nelle situazioni convettive da:

$$K_m(z) = ku_*z_i\left(\frac{z}{z_i}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{z_i}\right) \cdot \left(1 - 22\frac{z_i}{L} \cdot \frac{z}{z_i}\right)^{1/4} \quad [8.107b]$$

In queste relazioni k è la costante di von Karman, h è l'altezza del *PBL* stabile mentre z_i è l'altezza del *PBL* convettivo. Se con U si considera la velocità del vento (cioè il modulo del vettore vento orizzontale), si ha che nelle *situazioni convettive:*

$$U(z) = \frac{u_*}{k}\left\{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) + \ln\left[\frac{(1+\mu_0^2)\cdot(1+\mu_0)^2}{(1+\mu^2)\cdot(1+\mu)^2}\right] + 2[\tan^{-1}\mu - \tan^{-1}\mu_0] + \frac{2L}{33z_i}[\mu^3 - \mu_0^3]\right\} \quad [8.107c]$$

in cui:

$$\mu = \left(1 - 22\frac{z}{L}\right)^{1/4} \qquad \mu_0 = \left(1 - 22\frac{z_0}{L}\right)^{1/4} \quad [8.107d]$$

mentre nelle *situazioni stabili:*

$$U(z) = \frac{u_*}{k}\left\{ln\left(\frac{z}{z_0}\right) - \left[1 - 6.9\frac{h}{L}\right]\cdot\left[\frac{z - z_0}{h}\right] - \frac{6.9h}{2L}\cdot\left[\frac{z^2}{h^2} - \frac{z_0^2}{h^2}\right]\right\} \quad [8.107e]$$

8.4.2.2 Il profilo verticale della temperatura potenziale media

Nell'ambito della Teoria della Similarità di Rossby sono state proposte delle Relazioni di Similarità per descrivere il profilo verticale della temperatura potenziale media. Facendo riferimento ai lavori di Yamada (1976), Brutsaert (1984), Garratt (1992) e Stull (1988), il profilo verticale della temperatura potenziale media nel *PBL* può essere descritta dalla relazione algebrica seguente:

$$\Theta(z) - \widehat{\Theta} = \frac{-T_*}{k}\left[ln\left(\frac{h}{z}\right) + \Psi_H(z/L) - C(\mu)\right] \quad [8.108a]$$

In essa $\hat{\Theta}$ è una temperatura potenziale *di riferimento*, spesso definita come il valor medio entro il *PBL* della temperatura potenziale, h è l'altezza del *PBL*, Ψ_H è la funzione di Similarità nel *SL* per la temperatura data dalla (8.35a) nelle situazioni convettive e dalla (8.36b) nelle situazioni stabili, μ è il parametro di stabilità $\mu = h/L$ e C è la Funzione Universale di Similarità di Rossby che, secondo Yamada (1976), è data da:

$$C(\mu) = \begin{cases} -4.32(\mu - 11.21)^{1/2} & \mu \geq 18 \\ 3.665 - 0.829\mu & 0 \leq \mu < 18 \\ 12 - 8.336(1 - 0.03106\mu)^{-1/3} & \mu \leq 0 \end{cases} \quad [8.108b]$$

La presenza di $\hat{\Theta}$ rende la relazione diagnostica (8.108a) impossibile da usare direttamente, quindi per la determinazione del profilo verticale di temperatura potenziale entro il *PBL* si può adottare la metodologia seguente a due step:

- sia nota la temperatura potenziale ad una generica quota di riferimento z_r, prossima al suolo. Con tale informazione, una volta noti anche i parametri che caratterizzano la turbolenza del *SL* (u_*, T_* e L) e l'estensione verticale del *PBL* h, è possibile dalla relazione (8.108a) ottenere il valore di $\hat{\theta}$;
- una volta noto il valore di $\hat{\Theta}$, l'impiego diretto della relazione (8.108a) fornisce il profilo desiderato entro l'intero *PBL*.

La relazione diagnostica (8.108a), nelle situazioni convettive, è in grado di riprodurre il profilo verticale della temperatura potenziale media solo fino alla sommità dello Strato Rimescolato (*Mixed Layer*) ma non può descrivere il forte gradiente positivo che si riscontra nello strato di *entrainment*.

8.4.2.3 Il profilo verticale della varianza delle componenti del vento

Lo stato attuale della tecnologia non è ancora sufficiente per consentire di determinare in maniera agevole e sicura i profili verticali della varianza delle tre componenti del vento. L'introduzione massiccia di Wind LIDAR (Cap. 11) dovrebbe nell'immediato futuro attenuare questa limitazione. Attualmente sono disponibili molti dati sperimentali, ma essi spesso coprono una porzione limitata del *PBL* e non sono in grado di rappresentare un esteso spettro delle possibili condizioni di turbolenza. A supplire, almeno in parte, a questa limitazione concorrono varie e sistematiche simulazioni modellistiche di tipo LES, consentendo di avere alla fine un quadro ragionevolmente accurato dei profili verticali dei principali momenti in un *PBL* stazionario ed omogeneo in orizzontale. Nella trattazione che segue seguiremo i risultati ottenuti da Rodean (1996) nel suo lavoro di sintesi dell'enorme massa di risultati sperimentali e teorici attualmente disponibili sull'argomento.

Il profilo verticale della varianza della componente verticale del vento

Una delle fonti di informazione più preziosa sul profilo verticale della varianza della componente verticale del vento è costituita dalle misure raccolte durante la campagna AMTEX (*Air-Mass Transformation Experiment*) descritta nei lavori di Lenschow e Agee (1976) e Lenschow e al. (1980), completate dalle simulazioni modellistiche LES tra cui quelle descritte nel lavoro di Moeng e Wyngaard (1989). Sulla base di tutte le misure e delle simulazioni disponibili è risultato evidente che la varianza della componente *w* del vento nelle situazioni convettive è il risultato della sovrapposizione di due distinti contributi. Il primo contributo deriva principalmente dalla turbolenza di origine meccanica (ben rappresentata da u_* e quindi proporzionale alla velocità del vento, oltre che al livello di stabilità del *SL*), mentre il secondo contributo deriva dall'azione della convettività presente, cioè dell'effetto combinato del flusso di calore sensibile, del galleggiamento e dell'effetto di costrizione esercitato dall'estensione verticale z_i del *PBL*. Questo secondo contributo è ben rappresentato globalmente dalla *velocità convettiva di scala* w_*. È interessante poi ricordare anche che $k\,(w_*/u_*)^3 = -z_i/L$.

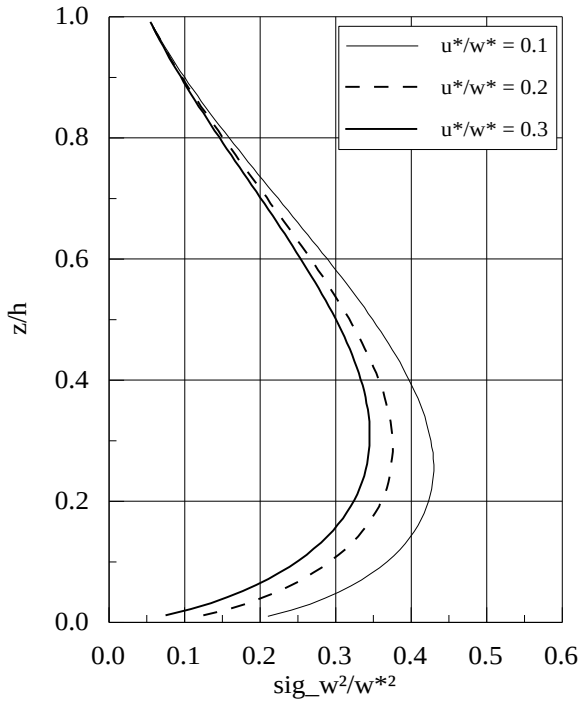


Fig. 8.51: profilo verticale nel PBL convettivo di $(\sigma_w/w_*)^2$ *in tre situazioni tipiche.*

Tutti questi contributi erano stati evidenziati nei differenti lavori pubblicati ed in particolare in

Hicks (1985), Nieuwstadt (1984a) e Caughey e al. (1979). Dalla composizione di tutti questi contributi parziali è nata la Relazione di Similarità seguente:

$$\sigma_w^2(z) = 1.7u_*^2\left(1-\frac{z}{h}\right)^{3/2} + 1.3w_*^2\left(\frac{z}{h}\right)^{2/3}\left(1-0.8\frac{z}{h}\right)^2 \qquad [8.109a]$$

dove con *h* si è indicata l'estensione verticale del *PBL* (sia stabile che convettivo). Nelle situazioni stabili la velocità convettiva di scala w_* è nulla e quindi il secondo termine di destra dell'equazione si annulla. Nella **Fig. 8.51** è presentato il grafico della relazione di profilo (8.109a) in tre situazioni convettive tipiche in cui il rapporto u_*/w_* risultava pari rispettivamente a 0.1, 0.2 e 0.3 in maniera da poter apprezzare l'influenza della turbolenza meccanica. Il profilo verticale, in tutti e tre i casi, presenta un valor massimo nella porzione inferiore del *PBL* ed un andamento decrescente fino ad annullarsi nella parte superiore. Dalla differenza tra le curve riportate si può valutare che l'influenza della turbolenza meccanica non è trascurabile. Nel caso, invece, delle situazioni stabili, il profilo verticale della varianza di *w* presenterà una diminuzione continua fino al suo annullamento alla sommità del *PBL*.

Una relazione molto simile alla precedente è stata proposta da Weil (1990) sulla base delle misure AMTEX e delle simulazioni LES. Essa è data dalla relazione:

$$\frac{\sigma_w^2}{w_*^2} = \left[\frac{u_*^3}{w_*^3}\left(1.6-\frac{z}{h}\right)^{3/2} + 1.2\cdot\frac{z}{h}\cdot\left(1-0.98\frac{z}{h}\right)^{3/2}\right]^{2/3} \qquad [8.109b]$$

È importante sottolineare che la (8.109a) e la (8.109b) possono essere usate sia nelle situazioni convettive che in quelle stabili, dato che in queste ultime w_* è nullo e quindi è in grado di rappresentare in maniera *continua* la transizione dalle condizioni diurne a quelle notturne.

Per completare il quadro, qui di seguito riportiamo altre relazioni per il profilo verticale di σ_w spesso utilizzate nei modelli di dispersione di tipo Lagrangiano:

- Rotach e al (1996) hanno proposta la relazione:

$$\frac{\sigma_w^2}{w_*^2} = 1.5\left(\frac{z}{h}\right)^{2/3} exp\left(-2\frac{z}{h}\right) + \left(1.7-\frac{z}{h}\right)\cdot\left(\frac{u_*}{w_*}\right)^2 \qquad [8.109c]$$

- la relazione di Similarità proposta da Luhar e Britter (1989) risulta così espressa:

$$\frac{\sigma_w^2}{w_*^2} = 1.1\left(\frac{z}{h}\right)^{2/3}\left(1-\frac{z}{h}\right)^{2/3}\cdot\left[1-\frac{4(z/h-0.3)}{[2+(z/h-0.3)]^2}\right] \qquad [8.109d]$$

- mentre Mayer e al. (2008) hanno proposto:

$$\sigma_w = \left\{\left[1.3u_*\,exp\left(-\frac{z}{h}\right)\right]^3 + \left[1.3\left(\frac{z}{h}\right)^{1/3}\cdot\left(1-0.8\frac{z}{h}\right)w_*\right]^3\right\}^{1/3} \qquad [8.109e]$$

Ryall e Maryon (1998) hanno messo a punto la puntigliosa parametrizzazione seguente per σ_w valida sia nelle condizioni convettive che in quelle stabili, anche sopra il *PBL*:

- nelle <u>situazioni convettive</u> entro il *PBL* vale la relazione:

$$\sigma_w = \left[1.2w_*^2\left(1-0.9\frac{z}{h}\right)\cdot\left(\frac{z}{h}\right)^{2/3} + \left(1.8-1.4\frac{z}{h}\right)u_*^2\right]^{1/2} \qquad [8.110a]$$

- nelle <u>situazioni stabili</u> entro il *PBL* va usata la stessa relazione in cui $w_* = 0$. cioè:

$$\sigma_w = \left(1.8-1.4\frac{z}{h}\right)^{1/2}u_* \qquad [8.110b]$$

- mentre al di sopra del *PBL* si pone $\sigma_w = 0.1$ ms^{-1}.

Il profilo verticale della varianza delle componenti orizzontali del vento

La prima domanda che ci si pone è se nel *PBL* le due componenti orizzontali del vento presentino la medesima deviazione standard. In Letteratura sono state espresse opinioni contrastanti, tuttavia, visto che comunque le differenze sono relativamente piccole (se esistono), seguendo Lenschow e al. (1988) le due varianze sono state ritenute uguali. Rodean, nel già citato lavoro, sintetizzando i risultati ottenuti in Caughey e Palmer (1979), Hicks (1985) e Lenschow e al. (1988), ha ottenuto la relazione seguente:

$$\sigma_u^2(z) = \sigma_v^2(z) = 4.5u_*^2\left(1-\frac{z}{h}\right)^{3/2} + 0.33w_*^2 \qquad [8.111a]$$

Anche in questo caso *h* è l'estensione verticale del *PBL* ed anche in questo caso la Relazione di Similarità si applica sia alle situazioni convettive che a quelle stabili, ricordando che in queste ultime w_* è nullo. Nelle situazioni convettive il profilo della varianza delle componenti orizzontali del vento presenta una lieve diminuzione con la quota nella parte più bassa del *PBL*, fino a raggiungere un valore che resta praticamente costante ed elevato in tutta la parte superiore.

Oltre alla precedente relazione, ne sono state proposte altre anche se per tutte è difficile un confronto attendibile con gli scarsi dati sperimentali disponibili. Comunque, val la pena ricordare:

- le relazioni proposte da Mayer e al. (2008) che presentano lievi differenze tra la deviazione standard della componente longitudinale e la componente trasversale del moto:

$$\sigma_u = [(2.3u_*)^3 + (0.59w_*)^3]^{1/3}\, exp(-z/h)$$
$$\sigma_v = [(1.8u_*)^3 + (0.59w_*)^3]^{1/3}\, exp(-z/h) \qquad [8.111b]$$

- le relazioni proposte da Ryall e Maryon (1998) che ritengono uguali le due deviazioni standard che, nelle situazioni convettive, sono espresse dalla relazione:

$$\sigma_u = \sigma_v = \left[0.4w_*^2 + \left(5.-4\frac{z}{h}\right)u_*^2\right]^{1/2} \qquad [8.111c]$$

mentre nelle situazioni stabili, questa relazione si riduce alla forma:

$$\sigma_u = \sigma_v = \left(5.-4\frac{z}{h}\right)^{1/2} u_* \qquad [8.111d]$$

e al di sopra del *PBL* $\sigma_u = \sigma_v = 0.25$ ms^{-1}.

8.4.2.4 Il profilo verticale della varianza della temperatura potenziale

Per quanto riguarda la varianza della temperatura potenziale virtuale, le misure disponibili nel *PBL*, soprattutto nella parte alta del *PBL* convettivo, sono veramente poche e le incertezze molte.

Seguendo Sorbjan (1989), nelle *situazioni convettive* si può considerare la Relazione di Similarità seguente secondo cui la varianza della temperatura potenziale è costituita dalla somma di un contributo non penetrativo e di un contributo residuo:

$$\frac{\sigma_T^2}{T_*^2} = 2\left(\frac{z}{h}\right)^{-2/3}\left(1-\frac{z}{h}\right)^{4/3} + 0.94\left(\frac{z}{h}\right)^{4/3}\left(1-\frac{z}{h}\right)^{-2/3} \qquad [8.112a]$$

Nelle *situazioni stabili*, invece, Caughey e al. (1979) hanno proposto la seguente Relazione di Similarità che evidenzia come la varianza della temperatura potenziale sia sostanzialmente di origine meccanica e decresca molto rapidamente con la quota:

$$\frac{\sigma_T^2}{T_*^2}(z) = 6\left(1-\frac{z}{h}\right)^4 \qquad [8.112b]$$

L'impiego di queste relazioni deve essere molto cauto, dato che esse si basano su un numero di misure estremamente esiguo.

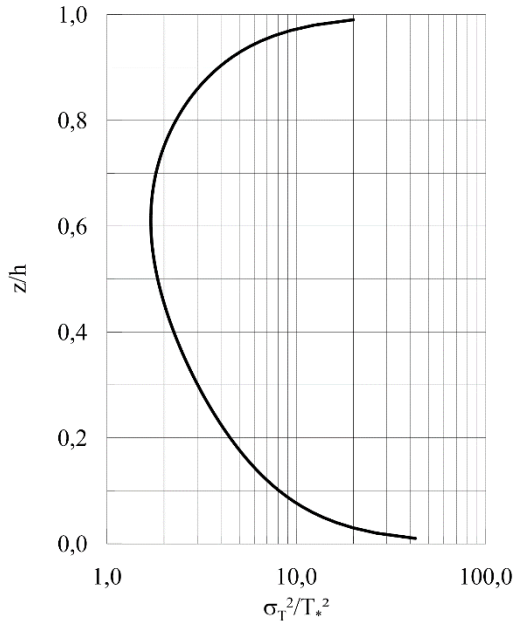


Fig. 8.52: profilo verticale nel PBL convettivo di σ_T/T_* .

Considerando il caso convettivo (**Fig.8.52**) si nota come il profilo presenti un andamento caratteristico molto singolare: infatti nella parte bassa del *PBL* si ha una diminuzione del valore di σ_T/T_*^2 fino a raggiungere un minimo a circa metà del *PBL*, dopo di che σ_T/T_*^2 continua a crescere fino all'*entrainment*.

8.4.2.5 Il profilo verticale della dissipazione di energia cinetica turbolenta

La misura della dissipazione di energia cinetica turbolenta nel *PBL* è ben al di là delle possibilità sperimentali attuali e i dati sicuri attualmente disponibili sono molto pochi. Di conseguenza, definire una Relazione di Similarità per tale parametro è difficile e l'incertezza intrinseca è molto elevata, anche se nelle applicazioni pratiche, soprattutto legate alla modellizzazione della dispersione degli inquinanti, è necessario disporre di una relazione che ne descriva almeno il profilo verticale. In Rodean (1996) e in Rotach e al. (1996) sono disponibili informazioni al riguardo. In particolare, seguendo Rotach e al. (1996) si giunge alla Relazione di Similarità seguente, anch'essa valida sia nelle situazioni convettive che in quelle stabili (in cui w_* è nullo):

$$\varepsilon(z) = \frac{u_*^3}{h}\left\{1.07\left[\frac{(1-z/h)^2}{kz/h}\right] + 2.56\right\} + \frac{w_*^3}{h}\left\{1.5 - 1.2\left(\frac{z}{h}\right)^{1/3}\right\} \qquad [8.113a]$$

Oltre a questa relazione di Similarità, sono state proposte anche le parametrizzazioni seguenti:

- limitatamente alle situazioni convettive, Weil (1990) ha proposto:

$$\varepsilon = \frac{w_*^3}{h}\left[1.15 \cdot exp\left(-12.5\frac{z}{h}\right) - 0.2 \cdot exp\left[-50\left(1-\frac{z}{h}\right) + 0.3\right]\right] \qquad [8.113b]$$

- la relazione fornita da Mayer e al. (2008) nelle situazioni convettive risulta invece così espressa:

$$\varepsilon = max\left\{\frac{u_*^3}{kz}\left[\left(1-\frac{z}{h}\right)^2 + 2.5\frac{kz}{h}\right] + \frac{w_*^3}{h}\left[1.5 - 1.3\left(\frac{z}{h}\right)^{1/3}\right];\quad \frac{u_*^3}{kz}\right\} \qquad [8.113c]$$

mentre nelle situazioni stabili essa si riduce alla forma seguente:

$$\varepsilon = \frac{u_*^3}{kz}\left(1 + 4\frac{z}{h}\right) \qquad [8.113d]$$

- infine, Ryall e Maryon (1998), nelle situazioni convettive consigliano la relazione:

$$\varepsilon = \left[1.5 - 1.2\left(\frac{z}{h}\right)^{1/3}\right]\frac{w_*^3}{h} + \left(1 - 0.8\frac{z}{h}\right)\frac{u_*^3}{kz} \qquad [8.113e]$$

mentre nelle situazioni stabili la relazione da usare si riduce a:

$$\varepsilon = \left(1 - 0.8\frac{z}{h}\right)\frac{u_*^3}{kz} \qquad [8.113f]$$

e sopra il *PBL* $\varepsilon \approx$ 10-4 m^2s^{-3}.

8.4.2.6 Il profilo verticale del momento terzo e quarto della componente verticale del vento

Le poche misure disponibili nel *PBL* ci fanno ritenere che la *skewness* della componente verticale del vento sia differente da zero solo nelle situazioni convettive e sia tanto maggiore quanto più elevata è w_*. Seguendo (Rotach e al., 1996), nelle situazioni convettive il profilo verticale della *skewness* ($\overline{w^3}$) è dato dalla relazione di Similarità seguente:

$$\frac{\overline{w^3}}{w_*^3}(z) = 1.3\left(\frac{z}{h}\right)\cdot\left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \qquad [8.114a]$$

Oltre a questa relazione ne sono state proposte altre come:

- la relazione proposta da Luhar e Britter (1990) è la seguente:

$$\frac{\overline{w^3}}{w_*^3} = 0.72\cdot\left(\frac{z}{h}\right)\cdot\left(1 - 0.333\frac{z}{h}\right) \qquad [8.114b]$$

- Weil (1990) ha poi proposto:

$$\frac{\overline{w^3}}{w_*^3} = 0.64\left[\left(\frac{z}{h}\right)\cdot\left(1 - \frac{z}{h}\right)\right]^{3/2} \qquad [8.114c]$$

- e Baerentsen e Berkowicz (1984) consigliano:

$$\frac{\overline{w^3}}{w_*^3} = 0.8\left(\frac{z}{h}\right)\cdot\left(1 - \frac{z}{h}\right)\cdot\left(1 + 0.667\frac{z}{h}\right)^{-1} \qquad [8.114d]$$

Per quanto riguarda, infine, il momento quarto, seguendo Franzese e al. (1999), si ha che:

$$\overline{w^4} = 3.5(\sigma_w^2)^2 \qquad [8.114e]$$

8.4.2.7 Il profilo verticale dello stress di Reynolds

Nel caso dello stress di Reynolds $\overline{u'w'}$, le informazioni disponibili sono ancora più scarse. Seguendo Rodean (1996) si ottiene la seguente Relazione di Similarità:

$$\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2}(z) = \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{3/2-q} \quad dove \quad q = \begin{cases} \dfrac{-h/L}{2\cdot(1 - h/L)} & \text{per } L < 0 \\ 0 & \text{per } L > 0 \end{cases} \qquad [8.115]$$

Anche questa relazione vale sia nelle situazioni convettive che in quelle stabili, in cui w_* è nullo.

8.4.3 OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

L'enorme sforzo sperimentale realizzato in questo ultimo mezzo secolo ha consentito la raccolta di una grande mole di informazioni sperimentali, sia nello Strato superficiale che nel *PBL*, soprattutto grazie all'attuale disponibilità di sensori di tipo *remote sensing* ed all'impiego di piattaforme aeree. Ciò ha incoraggiato e consentito un'estensiva applicazione dell'Analisi Dimensionale nello studio del *PBL* che ha portato all'individuazione di un numero rilevante di Relazioni di Similarità. Tuttavia, l'incertezza connessa a queste relazioni di Similarità è ancora notevolmente elevata, tanto più elevata quanto più ci si allontana dalla superficie. Comunque, il risultato che emerge da quanto presentato fin qui è che si è ottenuto da questo tipo di analisi semiempirica un *modello alternativo di PBL*, di tipo completamente diagnostico (quindi di tipo algebrico), molto maneggevole e le cui informazioni di ingresso sono costituite dalle forzanti superficiali (velocità di frizione, flusso turbolento di calore sensibile e latente e galleggiamento) e dall'estensione verticale del *PBL*. In pratica, note queste variabili, che di fatto caratterizzano in maniera pressoché completa lo stato di turbolenza del *PBL*, l'applicazione pratica di questo *modello alternativo* risulta immediata.

Questo modello diagnostico di *PBL* si dovrebbe applicare solo in situazioni paradigmatiche, cioè stazionarie o quasi-stazionarie in cui sia estremamente elevato il grado di omogeneità orizzontale ed in cui sia assente l'orografia. In sostanza è prevedibile che esso sia in grado di rappresentare bene situazioni piane, con rugosità omogenea e situazioni meteorologiche poco perturbate. I limiti al suo impiego non sono pochi, tuttavia in moltissimi casi reali esso rappresenta un mezzo relativamente semplice per modellizzare il *PBL*. Vista la sua semplicità ed il suo realismo, esso è attualmente il modello micrometeorologico più usato per determinare la struttura della turbolenza atmosferica necessaria ai modelli di simulazione della dispersione degli inquinanti in atmosfera di medio-alta complessità.

8.5 ANALISI SPETTRALE DELLA TURBOLENZA DEL PBL

Nel *PBL* l'energia dei moti atmosferici medi viene convertita nell'energia cinetica turbolenta posseduta dalle strutture coerenti di maggiori dimensioni (*eddy*); tali strutture, a loro volta, trasferiscono questa energia cinetica ai vortici di dimensione inferiore, finché questo processo *a cascata* si esaurisce nella conversione in calore, ad opera della viscosità dell'aria. Ciò è già stato descritto al Capitolo 4, tuttavia quello che ancora non si è studiato è il *peso* che i vortici di differente dimensione hanno in questo *energy cascade*, cosa che costituisce l'obiettivo *dell'Analisi Spettrale.* È abbastanza naturale che le tecniche fin qui descritte non consentano di studiare in modo agevole questo problema ed i paragrafi che seguono saranno interamente dedicati alla presentazione di alcune tecniche di *analisi spettrale* appropriate per lo studio del *PBL*, prediligendo gli aspetti di rilevanza teorica. L'applicazione pratica di queste tecniche sarà invece un tema trattato con maggior dettaglio nel Capitolo 14.

Per prima cosa va sottolineato il fatto che possiamo partire da due distinti punti di vista: il punto di vista *Lagrangiano* ed il punto di vista *Euleriano*. Per il momento trascureremo il primo punto di vista e ci concentreremo solo sul secondo. In questo caso le *osservazioni* vengono fatte in *punti fissi dello spazio-tempo* ed in questo sistema di riferimento fisso si cerca di evidenziare i vortici responsabili della turbolenza del *PBL*. Come già sottolineato, anche in questo caso ci sono due modi di vedere il problema. In un caso ci si può porre *in un punto fisso dello spazio* e si può analizzare la variazione nel tempo delle differenti variabili meteorologiche, realizzando quindi un'*analisi temporale del fenomeno*. Come si è già visto, la correlazione temporale tra le differenti variabili e la loro autocorrelazione definiscono completamente, anche se in maniera molto

scomoda, questa analisi temporale. Tuttavia, essa trascura di considerare come il fenomeno ad un dato istante temporale vari nello spazio e le funzioni di correlazione ed autocorrelazione spaziali sopperiscano a tale difficoltà, anche in questo caso in maniera molto scomoda. Se però, in entrambi i casi, si introducesse un metodo di analisi *armonico* basato sul fatto che una qualsiasi funzione comunque variabile nello spazio o nel tempo può essere vista come la sovrapposizione di segnali *armonici* (trigonometrici), inevitabilmente la scomodità d'analisi, tipica delle funzioni di correlazione, cederà il passo ad una visione molto più comprensibile. Questo è proprio il filo conduttore che seguiremo nella nostra esposizione.

8.5.1 SPETTRI E COSPETTRI TEMPORALI

Il metodo di osservazione più comodo e frequente è quello di collocarsi in un punto fisso dello spazio e realizzare misure prolungate nel tempo di una generica variabile meteorologica α (la temperatura, l'umidità o le tre componenti del vettore vento). Dall'andamento temporale $\alpha(t)$ è possibile costruire la *funzione di autocovarianza* $R_\alpha(\tau)$ definita come:

$$R_\alpha(\tau) = \overline{\alpha'(t) \cdot \alpha'(t+\tau)} \qquad [8.116]$$

dove α' è la *fluttuazione di* α *attorno al proprio valor medio* e l'operatore $\overline{(\cdot)}$ è la *media temporale*. Se α è un processo stocastico stazionario, $R_\alpha(\tau)$ dipende solo dal *tempo di ritardo* (*time lag*) τ e la funzione di autocovarianza descrive quanto la variabile α resta correlata con sé stessa al variare del tempo. Questa informazione è estremamente importante, ma scomoda; se, per esempio, considerassimo un segnale variabile sinusoidalmente nel tempo ad una data frequenza, tutte le informazioni contenute nella sua funzione di autocovarianza ne descriverebbero completamente l'andamento nel tempo, ma dall'analisi di tale funzione non sarebbe immediato comprendere che effettivamente ci si trova di fronte ad un segnale "monocromatico".

Per evidenziare in modo più immediato questi andamenti oscillatori del segnale, conviene usare forme di analisi differenti. Per esempio, il <u>*Teorema di Fourier*</u> asserisce che *ogni segnale* $\alpha(t)$ *in condizioni molto generali può essere decomposto in un numero infinito di armoniche e l'ampiezza di ogni singola armonica rappresenta il peso che essa ha nel segnale originario analizzato*. Questo non è l'unico metodo di analisi possibile, anche se sicuramente è il più utilizzato. A questo punto cerchiamo di applicare il Teorema di Fourier per presentare in maniera più chiara le informazioni contenute nella funzione $R_\alpha(\tau)$. A tal proposito, la <u>*Trasformata di Fourier*</u> (cioè la decomposizione in armoniche) della funzione di autocovarianza $R_\alpha(\tau)$, è data dalla relazione (Sorbjan, 1989):

$$S_\alpha(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_\alpha(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau \qquad [8.117a]$$

dove j è l'unità immaginaria pari a $\sqrt{-1}$ e ω è la *frequenza angolare dell'armonica* (rad·s^{-1}). Va ricordato che, se T è il periodo di una generica armonica (in secondi), $\omega = 2\pi/T$. In base al Teorema di Fourier, la funzione di Autocorrelazione $R_\alpha(\tau)$ risulta quindi decomposta nelle singole armoniche di frequenza ω nel modo seguente (<u>*Antitrasformata di Fourier*</u>):

$$R_\alpha(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} S_\alpha(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega \qquad [8.117b]$$

in cui si vede chiaramente che la funzione di autocovarianza risulta essere la somma di infinite armoniche; ognuna di esse ha frequenza ω ed il *peso* con cui essa è presente nel segnale originario è pari a $S_\alpha(\omega)$. A causa della stazionarietà del segnale, si ha che $R_\alpha(\tau) = R_\alpha(-\tau)$ (cioè la funzione $R_\alpha(\tau)$ è una funzione *pari*) e quindi si può più comodamente definire la *densità spettrale di* α come:

$$S_\alpha(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_\alpha(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} R_\alpha(\tau)\cdot cos(\omega\tau)\cdot d\tau \qquad [8.117c]$$

$S_\alpha(\omega)$ è una funzione pari e quindi la (8.117b) può essere riscritta nel modo seguente:

$$R_\alpha(\tau) = \int_{0}^{\infty} S_\alpha(\omega)\cdot cos(\omega\tau)\cdot d\omega \qquad [8.117d]$$

L'impiego della *frequenza angolare* ω risulta spesso scomoda nelle applicazioni pratiche, in cui si usa più frequentemente la *frequenza naturale f* in Hz ($1Hz = 1s^{-1}$). Si vede subito che:

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi f \\ S_\alpha(f) &= 2\pi S_\alpha(\omega) \end{aligned} \qquad [8.117e]$$

Se ricordiamo che la *varianza* di α altro non è che la *funzione di autocovarianza con time lag nullo*, dalla (8.117d) e dalla (8.117e) si ha:

$$\sigma_\alpha^2 = R_\alpha(0) = \int_{0}^{\infty} S_\alpha(f)\cdot df \qquad [8.118]$$

cioè la varianza è l'integrale su tutte le frequenze *f* della densità spettrale S_α. Riassumendo, la densità spettrale relativa a ciascuna armonica indica il peso che quell'armonica ha entro il segnale originario e la somma (integrale) di tutte le densità spettrali possibili è pari alla varianza complessiva del segnale.

In pratica, l'aver basato la definizione di densità spettrale sulla funzione di autocorrelazione $R_\alpha(\tau)$ invece che direttamente sul segnale $\alpha(t)$ è sicuramente scomodo. Vediamo ora come ci si arriva partendo da quest'ultimo. Per prima cosa, possiamo applicare ad $\alpha(t)$ il Teorema di Fourier e quindi l'espressione della trasformata e della antitrasformata del segnale sarà:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t)\cdot e^{-j\omega t}dt \qquad \alpha(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega \qquad [8.119a]$$

La trasformata $A(\omega)$ è in generale un numero complesso. Per il <u>*Teorema della Correlazione*</u> ed il <u>*Teorema di Wiener-Khinchin*</u>, si ha che la *Trasformata di Fourier dell'autocorrelazione* $R_\alpha(\tau)$ *è il prodotto della Trasformata di Fourier di* $\alpha(t)$*, cioè* $A(\omega)$ *per la sua complessa coniugata*:

$$S_\alpha(\omega) = A(\omega)\cdot A^*(\omega) = |A(\omega)|^2 \qquad [8.119b]$$

dove A^* è la complessa coniugata di A.

Il <u>*Teorema di Parseval*</u> assicura, poi, che la *potenza* totale del segnale rimane la stessa sia che la si calcoli nel dominio delle frequenze che nel dominio del tempo. Perciò:

$$P_t = \int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |A(\omega)|^2 d\omega \qquad [8.119c]$$

Dato che potenza del segnale e la sua varianza σ^2_α sono sinonimi, tenendo conto anche del fatto che la trasformata $A(\omega)$ è una funzione pari, risulta che:

$$\sigma_\alpha^2 = 2\int_{0}^{+\infty} |A(\omega)|^2 d\omega \qquad [8.119d]$$

Per questo il contributo alla varianza totale del segnale attribuibile alle frequenze appartenenti all'intervallo spettrale $\omega - d\omega/2 \div \omega + d\omega/2$ centrato sulla frequenza ω è:

$$d\sigma_\alpha(\omega) = 2|A(\omega)|^2 d\omega \qquad [8.119e]$$

e quindi dovrebbe risultare chiaro ora come la densità spettrale $S_\alpha(\omega)=|A(\omega)|^2$ sia il *peso* che ha l'armonica di frequenza ω nel segnale che si sta analizzando.

È tradizione nell'analisi spettrale impiegare al posto della densità spettrale $S_\alpha(f)$ la

funzione $f{\cdot}S_\alpha(f)$. La principale ragione di ciò sta nel fatto che se f tende a zero, $f{\cdot}S_\alpha(f)$ tende anch'essa a zero e se invece f tende all'infinito $f{\cdot}S_\alpha(f)$ tende ancora una volta a zero. Se la varianza del segnale non è nulla, bisogna quindi che la funzione $f{\cdot}S_\alpha(f)$ abbia un *massimo* tra zero e infinito e questo massimo è di estremo interesse. Infatti, se definiamo come *Tempo Euleriano Integrale di scala* $T_{E\alpha}$*:*

$$T_{E\alpha} = \frac{1}{\sigma_\alpha^2}\int_0^\infty R_\alpha(\tau)\cdot d\tau = \int_0^\infty \rho(\tau)\cdot d\tau \qquad [8.120a]$$

dove $\rho(\tau)$ è la familiare *funzione di autocorrelazione*, dalle relazioni precedenti si ha che:

$$T_{E\alpha} = \frac{1}{4\sigma_\alpha^2}[S_\alpha(f)]_{f=0} \qquad [8.120b]$$

Come mostrato in Kaimal e Finnigan (1994), se si indica con f_m la frequenza corrispondente al picco dello spettro, cioè il massimo della funzione $f{\cdot}S(f)$, tra il *Tempo Euleriano di scala* e f_m si può individuare la seguente relazione approssimata:

$$T_{E\alpha} \cong \frac{1}{6.3 f_m} \qquad [8.120c]$$

Consideriamo ora due variabili meteorologiche α e β (es. la componente *w* del moto e la temperatura potenziale). La loro *cross-covarianza* è data da:

$$R_{\alpha\beta}(\tau) = \overline{\alpha'(t)\cdot\beta'(t+\tau)} \qquad [8.121]$$

che, se i due segnali sono stazionari, è funzione del solo *time lag*. Applicando la Trasformata di Fourier alla *cross-covarianza* e verificando che $R_{\alpha\beta}$ *non è una funzione pari*, si ha che il *cross-spettro* è definito come:

$$\Psi_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{\alpha\beta}(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau = C_{\alpha\beta}(\omega) - jQ_{\alpha\beta}(\omega) \qquad [8.122a]$$

Come si vede immediatamente, il *cross-spettro* alle diverse frequenze ω è un numero complesso. La parte reale del *cross-spettro* $C_{\alpha\beta}$ (detta *co-spettro*) è pari a:

$$C_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{\alpha\beta}(\tau)\cdot cos(\omega\tau)\cdot d\tau = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[R_{\alpha\beta}(\tau) + R_{\alpha\beta}(-\tau)\right]\cdot cos(\omega\tau)\cdot d\tau \qquad [8.122b]$$

mentre la parte immaginaria $Q_{\alpha\beta}$ (detta *spettro di quadratura*) è data da:

$$Q_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{\alpha\beta}(\tau)\cdot sin(\omega\tau)\cdot d\tau = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[R_{\alpha\beta}(\tau) - R_{\alpha\beta}(-\tau)\right]\cdot sin(\omega\tau)\cdot d\tau \qquad [8.122c]$$

In pratica la funzione $\Psi_{\alpha\beta}(\omega)$ è una *funzione complessa* che può essere espressa nella forma:

$$\Psi_{\alpha\beta}(\omega) = \left|\Psi_{\alpha\beta}\right|\cdot e^{-j\Theta(\omega)} \qquad [8.123a]$$

con l'*ampiezza* del *cross-spettro* data da:

$$\left|\Psi_{\alpha\beta}(\omega)\right|^2 = \left[C_{\alpha\beta}(\omega)\right]^2 + \left[Q_{\alpha\beta}(\omega)\right]^2 \qquad [8.123b]$$

e l'*angolo di fase* dato da:

$$\Theta(\omega) = tan^{-1}\frac{Q_{\alpha\beta}(\omega)}{C_{\alpha\beta}(\omega)} \qquad [8.123c]$$

L'angolo di fase spesso fornisce informazioni non facilmente ottenibili altrimenti. Per esempio (Stull 1989), se le fluttuazioni delle due variabili α e β sono dovute a onde di gravità, lo sfasamento tra i due segnali è di circa π/4, mentre se le fluttuazioni sono di origine turbolenta, o sono in fase o il loro sfasamento è di circa 2π. Normalizzando l'ampiezza del *cross-spettro* con gli spettri delle due variabili si ottiene la nuova quantità, chiamata *coerenza* definita come:

$$\Gamma(\omega) = \frac{\left[C_{\alpha\beta}(\omega)\right]^2 + \left[Q_{\alpha\beta}(\omega)\right]^2}{S_\alpha(\omega) \cdot S_\beta(\omega)} \qquad [8.123d]$$

Anche in questo caso è semplice vedere che la *covarianza* tra α e β è esprimibile come:

$$\overline{\alpha'\beta'} = R_{\alpha\beta}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\alpha\beta}(\omega) \cdot d\omega \qquad [8.124]$$

8.5.2 SPETTRI SPAZIALI

Se invece di analizzare l'andamento temporale di una o più variabili micrometeorologiche in un punto fisso dello spazio, ne analizzassimo la variazione spaziale in due punti fissi del *PBL*, con l'aiuto delle funzioni di *autocovarianza spaziale* potremmo descrivere, anche in questo caso in maniera molto scomoda, quanto un valore di una generica variabile misurata in un punto è *parente* del valore della stessa variabile (o di un'altra) rilevata in un punto differente dello spazio. In precedenza è stata introdotta la funzione di autocovarianza e si è anche visto come una generica covarianza possa essere ricondotta alle tre funzioni base relative riferite alle tre localizzazioni tipiche dei due punti di misura: la *funzione di autocovarianza longitudinale* in cui i due punti di misura sono localizzati lungo una linea parallela alla direzione media del vento (R_{11}) e le *funzioni di autocovarianza trasversali*, una localizzata su una linea perpendicolare alla direzione media del vento ma giacente nel piano orizzontale (R_{22}) e l'altra sempre perpendicolare alla direzione media del vento, ma giacente nel piano (y,z) (R_{33}). Detta α una generica variabile di interesse micrometeorologico, in generale una di queste funzioni di autocorrelazione è data dalla relazione:

$$R^{\alpha\alpha}(\boldsymbol{r}) = \overline{\alpha'(\boldsymbol{x}) \cdot \alpha'(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r})} \qquad [8.125]$$

che, quando ci si trova in una situazione omogenea, dipende solo dalla distanza $\boldsymbol{r}$ tra i due punti di misura. Come nell'analisi temporale, anche in questo caso si è interessati ad individuare andamenti armonici, questa volta però nello spazio. Per prima cosa dobbiamo definire l'equivalente spaziale della *frequenza*. Se nel tempo il *periodo* (inverso della frequenza) caratterizza un'armonica, nello spazio è la *lunghezza d'onda* λ a caratterizzare completamente una funzione trigonometrica. Attenzione che mentre l'analisi temporale era intrinsecamente monodimensionale, l'analisi spaziale, al contrario, è intrinsecamente tridimensionale. Pertanto, è opportuno vedere in generale un'armonica nello spazio come una entità vettoriale avente tre componenti orientate secondo i tre assi del sistema cartesiano con l'asse x lungo la direzione media del vento nel punto di misura. Sono quindi definibili tre lunghezze d'onda λ_j ($j = 1, 2, 3$) secondo i tre assi coordinati. Per una generica direzione j è possibile definire la componente *j-esima* del *numero d'onda*, come:

$$k_j = 2\pi/\lambda_j \qquad [8.126]$$

e quindi l'armonica spaziale considerata ha come equivalente della frequenza il *vettore numero d'onda* $\boldsymbol{k}$, le cui componenti sono date dalla (8.126). Anche in questo caso è applicabile il Teorema di Fourier e la *densità spettrale* $B(\underline{\boldsymbol{k}})$ *e la autocovarianza* $R^{\alpha\alpha}$ sono legate tra loro dalle relazioni:

$$B^{\alpha\alpha}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\pi^3} \int \int_{-\infty}^{\infty} \int R^{\alpha\alpha}(\boldsymbol{r}) \cdot e^{-j\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{r}} \cdot d\boldsymbol{r} \qquad [8.127a]$$

$$R^{\alpha\alpha}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2^3} \int \int_{-\infty}^{\infty} \int B^{\alpha\alpha}(\boldsymbol{k}) \cdot e^{j\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{r}} \cdot d\boldsymbol{k} \qquad [8.127b]$$

dove $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, k_3)$, $d\boldsymbol{k} = dk_1 \cdot dk_2 \cdot dk_3$ e $d\mathbf{r} = dr_1 \cdot dr_2 \cdot dr_3$. Quanto detto vale per ogni generica variabile micrometeorologica di interesse e si può estendere anche alla *covarianza spaziale* tra variabili meteorologiche differenti, per le quali la funzione di autocovarianza è data da:

$$R^{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}) = \overline{\alpha'(\boldsymbol{x}) \cdot \beta'(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})} \qquad [8.128]$$

Nel caso particolare in cui si considerino le tre componenti del vento, la somma delle tre *autocovarianze* con distanza tra i punti di misura nulla ($\boldsymbol{r} = 0$), cioè la somma delle varianze, risulta pari a due volte l'energia cinetica turbolenta E che, nell'ambito dell'analisi di Fourier, porta a:

$$\sum_{i=1}^{3} R^{u_i u_i}(\underline{0}) = 2E = \frac{1}{2^3}\int\int_{-\infty}^{\infty}\int \sum_{i=1}^{3} B^{u_i u_i}(\underline{k}) \cdot d\underline{k} = 2\int_0^{\infty} \Psi_E(k) \cdot dk \qquad [8.129]$$

dove u_i è la generica componente del vettore vento, $k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$ e Ψ_E è detto *densità spettrale tridimensionale dell'energia cinetica*.

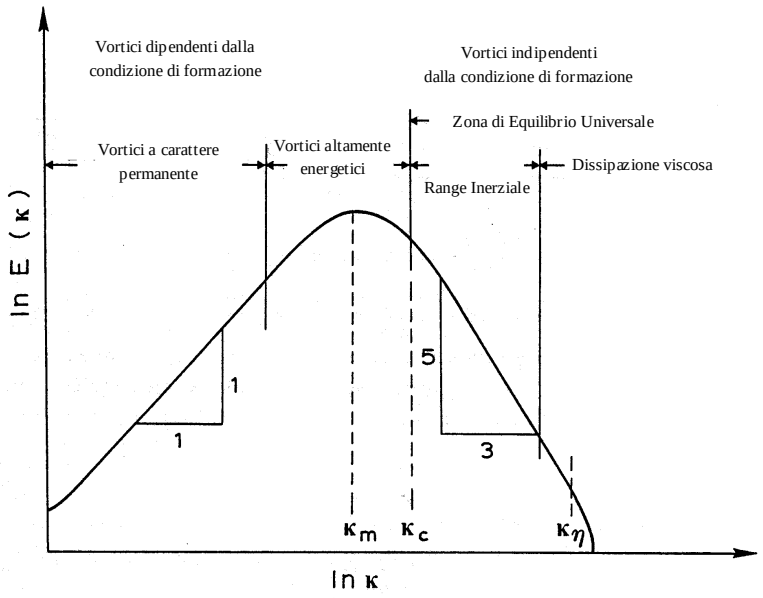


Fig. 8.53: rappresentazione schematica della densità spettrale dell'energia cinetica (Trombetti e Tagliazucca, 1994).

Ovviamente non è facile misurare uno spettro tridimensionale e quindi l'attenzione viene focalizzata prevalentemente su ciò che realisticamente è possibile misurare nel *PBL*. In effetti solo gli spettri monodimensionali (longitudinale e trasversali), che dipendono dal numero d'onda in una particolare direzione, possono essere agevolmente misurati e su di essi concentriamo la nostra attenzione, anche se non sono completamente appropriati per descrivere la struttura tridimensionale della turbolenza del *PBL* (Sorbjan, 1989). In particolare, se si considera la direzione del vento medio (k_1), lo *spettro longitudinale e laterale* possono essere definiti come:

$$H_{11}(k_1) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R^{uu}(r,0,0) \cdot e^{-jk_1 r} dr \qquad [8.130a]$$

$$H_{22}(k_1) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R^{vv}(r,0,0) \cdot e^{-jk_1 r} dr \qquad [8.130b]$$

Se si è in condizioni isotropiche, k_1 può essere sostituito da k (da non confondere nelle formule con la costante di von Karman).

Consideriamo ora con maggior dettaglio *la densità spettrale dell'energia cinetica* Ψ_E presentata schematicamente nella **Fig. 8.53**. Essa rappresenta la distribuzione dimensionale dei vortici presenti nel *PBL*, dato che Ψ_E rappresenta il contributo all'energia cinetica totale portato dalle armoniche caratterizzate da un numero d'onda compreso tra k e $k+dk$. Per comprendere meglio il suo significato è opportuno richiamare quanto già presentato al Capitolo 4. Kolmogorov ha mostrato come lo spettro dell'energia cinetica turbolenta possa essere suddiviso *qualitativamente* in tre zone distinte (Trombetti e Tagliazucca, 1994):

1. *la Zona dei vortici di maggior dimensione a carattere permanente* che acquisiscono l'energia cinetica dall'instabilità dei moti a grande scala derivante dallo *shear* e dal *galleggiamento*. Pertanto, le caratteristiche della densità spettrale dipendono dalle condizioni di formazione (velocità del vento, stabilità, rugosità superficiale ed estensione verticale del *PBL*) ed in questa zone la turbolenza è permanente, cioè $\partial\Psi_E(\boldsymbol{k},t)/\partial t$ è piccolo.
2. *la Zona dei vortici di grandi dimensioni contenenti energia*; in questa zona l'energia cinetica passa dai vortici a maggior dimensione a quelli a dimensione inferiore senza perdite dissipative. La densità spettrale ad ogni numero d'onda dipende quindi dall'energia che transita in questa zona. La tipica lunghezza di scala nello Strato Superficiale è dell'ordine dell'estensione verticale del *PBL*.
3. *la Zona di isotropia locale* (o *zona di equilibrio universale*). In questa zona i vortici di dimensione inferiore ad una lunghezza d'onda critica λ_c hanno subito un decadimento sufficiente a perdere completamente le caratteristiche dei vortici più grandi da cui hanno avuto origine. Così, i vortici di dimensione inferiore a λ_c presentano proprietà statistiche indipendenti dai vortici di dimensioni superiori e sono caratterizzati da *isotropia, omogeneità e stazionarietà locali*. In questa zona, quindi, le caratteristiche statistiche della turbolenza sono *universali*, cioè indipendenti dalle condizioni esterne e determinate unicamente dalla viscosità dinamica ν e dal tasso di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta ε (*Prima ipotesi di Kolmogorov*). Questa zona non è completamente omogenea, ma può essere ulteriormente suddivisa in due sottozone distinte:

   3a) *Inertial Subrange*: in questa zona il rapporto tra le forze di inerzia e le forze viscose (cioè il Numero di Reynolds) è così elevato da poter trascurare le forze viscose. Il comportamento della turbolenza dipenderà esclusivamente da ε (*Seconda ipotesi di Kolmogorov*) e dall'analisi Dimensionale si ha che:

   $$\Psi_E(\underline{k}) = C_{\underline{k}}\varepsilon^{2/3}\underline{k}^{-5/3} \qquad [8.131a]$$

   in cui $C_{\underline{k}}$ è la costante universale adimensionale di Kolmogorov. Questa relazione vale finché la lunghezza caratteristica del vortice risulta superiore a η, microscala di Kolmogorov, che rappresenta la tipica dimensione dei vortici che dissipano energia in calore (dell'ordine dei millimetri) e che è definita come:

   $$\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} \qquad [8.131b]$$

   3b) *Viscous subrange*: intervallo spettrale in cui l'energia dei vortici di dimensione piccolissima viene irrimediabilmente trasformata in moti molecolari e rimossa dal sistema sotto forma di calore.

8.5.3 SPETTRI NELL'INERTIAL SUBRANGE

Limitando l'attenzione solo all'*Inertial Subrange*, è possibile definire in termini più quantitativi le caratteristiche spettrali delle tre componenti del vento, della temperatura potenziale ed anche le caratteristiche principali dei co-spettri relativi. Da quanto detto e tenendo conto dell'isotropia locale tipica di questa zona spettrale, si ha che gli spettri monodimensionali per le tre componenti

del vento sono dati dalle relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} H_u(k) &= \alpha_u \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \\ H_v(k) &= \alpha_v \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \\ H_w(k) &= \alpha_w \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \end{aligned} \qquad [8.132a]$$

dove α_u è una costante universale (costante di Kolmogorov) da determinarsi sperimentalmente e α_v e α_w sono analoghe costanti legate, per l'isotropia locale, alla precedente dalla relazione:

$$\alpha_v = \alpha_w = 4/3\,\alpha_u \qquad [8.132b]$$

In Letteratura sono stati pubblicati i risultati di molte ricerche volte alla determinazione sperimentale di α_u, la principale delle quali è riportata in Dyer e Hicks (1982). In Trombetti e Tagliazucca (1994) è presentata una sintesi dei risultati ottenuti da cui risulta che $\alpha_u = 0.5 \pm 0.05$ (si veda anche Sorbjan 1989). In Kaimal e Finnigan (1994) è mostrato come il valore numerico di α_u sia intrinsecamente collegato al valore attribuito alla costante di von Karman. Su questo argomento ritorneremo al termine del paragrafo.

La teoria della turbolenza isotropica locale è stata estesa anche allo studio della temperatura potenziale (e di sostanze passive) in fluidi ad alto numero di Reynolds. Il risultato è riassunto dalla relazione seguente:

$$H_\theta(k) = \alpha_T \varepsilon^{-1/3} N_\theta k^{-5/3} \qquad [8.133]$$

dove α_T è *costante di Kolmogorov* per la temperatura pari a 0.8 e N_θ è il tasso di distruzione di $\overline{\theta'^2}/2$. Un'analoga relazione vale per l'umidità specifica q dove α_q è pari a circa 0.85.

In modo simile, per i co-spettri unidimensionali (la parte reale dei cross-spettri), Wyngaard e Cotè (1972) hanno ottenute le relazioni seguenti:

$$H_{uw}(k) = -\alpha_{uw} \varepsilon^{1/3} \frac{dU}{dz} k^{-7/3} \qquad [8.134a]$$

$$H_{w\theta}(k) = -\alpha_{w\theta} \varepsilon^{1/3} \frac{d\Theta}{dz} k^{-7/3} \qquad [8.134b]$$

in cui le costanti universali α_{uw} e $\alpha_{w\theta}$ valgono rispettivamente 0.12 e 0.2.

Finora abbiamo considerato gli spettri ed i co-spettri monodimensionali *spaziali*; tuttavia, è decisamente più agevole misurare gli spettri *temporali* ed il problema che ci poniamo ora è se sia possibile utilizzare questi ultimi al posto dei precedenti. Come sempre la risposta ci viene dall'*Ipotesi di Taylor* del *congelamento della turbolenza* secondo cui la correlazione tra due eventi simultanei riscontrati in due punti distinti posti lungo la direzione del moto medio è uguale alla correlazione tra gli eventi riscontrati in due istanti temporali distinti rilevati nel medesimo punto dello spazio. Ovviamente secondo l'ipotesi di Taylor tra spazio e tempo esiste quindi la trasformazione lineare $x = Ut$, dove U è la velocità media del fluido. Se è valida l'ipotesi di Taylor, è possibile esprimere il numero d'onda k in funzione della frequenza f e la relazione che lega tra loro questi parametri è:

$$k = \frac{2\pi f}{U} \qquad [8.135a]$$

Oltre a ciò, si può facilmente dimostrare che:

$$k \cdot H_u(k) = f \cdot S(f) \qquad [8.135b]$$

e questa relazione tra densità spettrali spaziali e temporali vale in generale. Sulla base di questa constatazione, una volta definita la *frequenza adimensionale n* come:

$$n = fz/U \qquad [8.135c]$$

le relazioni (8.132a) ÷ (8.134b) possono essere riscritte come:

$$fS_u(f) = \left(\frac{z}{2\pi}\right)^{2/3} \alpha_u \varepsilon^{2/3} n^{-2/3} \quad [8.136a]$$

$$fS_v(f) = \left(\frac{z}{2\pi}\right)^{2/3} \alpha_v \varepsilon^{2/3} n^{-2/3} \quad [8.136b]$$

$$fS_w(f) = \left(\frac{z}{2\pi}\right)^{2/3} \alpha_w \varepsilon^{2/3} n^{-2/3} \quad [8.136c]$$

$$fS_\theta(f) = \left(\frac{z}{2\pi}\right)^{2/3} \alpha_T \varepsilon^{-1/3} N_\theta \cdot n^{-2/3} \quad [8.136d]$$

$$fC_{uw}(f) = -\left(\frac{z}{2\pi}\right)^{4/3} \alpha_{uw} \varepsilon^{1/3} \frac{dU}{dz} n^{-7/3} \quad [8.136e]$$

$$fC_{w\theta}(f) = -\left(\frac{z}{2\pi}\right)^{4/3} \alpha_{w\theta} \varepsilon^{1/3} \frac{d\Theta}{dz} n^{-7/3} \quad [8.136f]$$

L'ipotesi di Taylor è valida solo per trasformare in prima approssimazione *spettri spaziali monodimensionali longitudinali in spettri temporali*, quindi le relazioni (8.136a)÷(8.136f) devono essere considerate delle approssimazioni ragionevoli. Una discussione sui limiti e sulla validità dell'ipotesi di Taylor è presentata in Kaimal e Finnigan (1994).

Esercizio 8.5

Come vedremo, dalla serie temporale delle tre componenti del moto (u,v,w) e della temperatura potenziale θ non è difficile ottenere le corrispondenti densità spettrali S_i relative alle frequenze f_i, il cui valore dipende dal periodo temporale cui si riferiscono le serie (per es. 1 ora) e dalla frequenza di campionamento adottata. Cerchiamo ora di individuare una metodologia per la determinazione del tasso di dissipazione medio dell'energia cinetica turbolenta ε e del tasso di dissipazione della varianza di temperatura N_θ.

Si consideri per esempio la componente longitudinale del moto u di cui siamo in grado di conoscere il valore della rispettiva densità spettrale S_u^i per ognuno degli N valori f_i di frequenza, tutti nell'*Inertial Subrange*. Dato che, in generale, vale la relazione di Similarità:

$$fS_u(f) = \left(\frac{z}{2\pi}\right)^{2/3} \alpha_u \cdot \varepsilon^{2/3} \cdot \left(\frac{fz}{U}\right)^{-2/3}$$

cioè:

$$S_u(f) = \left(\frac{U}{2\pi}\right)^{2/3} \alpha_u \cdot \varepsilon^{2/3} \cdot f^{-5/3}$$

allora una stima robusta del tasso di dissipazione media di energia cinetica turbolenta è:

$$\varepsilon = \left[\left(\frac{2\pi}{U}\right)^{2/3} \frac{1}{\alpha_u} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(S_u^i f_i^{5/3}\right)\right]^{3/2}$$

dove U è la velocità media del vento alla quota z.
Noto ε, per poter stimare N_θ è necessario utilizzare la relazione di Similarità per la temperatura potenziale virtuale:

$$fS_\theta(f) = \left(\frac{z}{2\pi}\right)^{2/3} \alpha_T \cdot \varepsilon^{-1/3} N_\theta \cdot \left(\frac{fz}{U}\right)^{-2/3}$$

e si nota che semplici passaggi portano alla relazione seguente che esprime lo stimatore per il tasso di dissipazione della varianza di temperatura:

$$N_\theta = \left(\frac{2\pi}{U}\right)^{2/3} \frac{\varepsilon^{1/3}}{\alpha_u} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(S_\theta^i f_i^{5/3}\right)$$

8.5.4 SPETTRI NELLO STRATO SUPERFICIALE

Dopo aver introdotto le principali nozioni generali di analisi spettrale, ora ci accingiamo a studiare più in dettaglio gli spettri che si ottengono entro il *SL*, dove tutte le attività di misura risultano molto più agevoli. Dalle osservazioni sperimentali finora realizzate nel *SL* è stata evidenziata la complessa struttura spettrale prevista teoricamente e soprattutto è stata verificata la presenza dell'*Inertial Subrange*. Alla luce di ciò, prima di studiare gli spettri in tutta la finestra spettrale di interesse (che ricordiamo si estende per circa cinque decadi), ci limiteremo a focalizzare lo studio sul solo *Inertial Subrange*.

8.5.4.1 Relazioni di Similarità nell'Intertial Subrange

Nell'*Inertial Subrange*, il MOST consente di affermare che gli spettri e i co-spettri logaritmici (cioè le densità spettrali moltiplicate per la frequenza *f*), opportunamente normalizzati, dipendono *solo* da Funzioni Universali di $\zeta = z/L$ e dalla frequenza adimensionale *n*.

Consideriamo inizialmente lo spettro della componente *u* del vento. Dalla (8.136a), normalizzata con u_*^2, si ha che (attenzione che da questo momento in poi il simbolo *k* torna a rappresentare la costante di von Karman):

$$\frac{fS_u(f)}{u_*^2} = \frac{\alpha_u}{(2\pi k)^{2/3}} \cdot \left(\frac{kz\varepsilon}{u_*^3}\right)^{2/3} \left(\frac{fz}{U}\right)^{-2/3} \qquad [8.137a]$$

Ricordando la relazione di Similarità (8.68a) che descrive nel *SL* il tasso di dissipazione di energia cinetica turbolenta in funzione della stabilità ed impiegando la frequenza normalizzata data dalla relazione (8.135b), la relazione precedente può essere riscritta nella forma seguente:

$$\frac{fS_u(f)}{u_*^2} = \frac{\alpha_u}{(2\pi k)^{2/3}} \cdot \Phi_\varepsilon^{2/3} n^{-2/3} \qquad [8.137b]$$

in cui Φ_ε è la Funzione Universale di Similarità per la dissipazione di energia cinetica turbolenta. Se riscriviamo questa relazione nel modo seguente:

$$\frac{fS_u(f)}{u_*^2 \Phi_\varepsilon^{2/3}} = \frac{\alpha_u}{(2\pi k)^{2/3}} \cdot n^{-2/3} \qquad [8.137c]$$

ci accorgiamo immediatamente che, così normalizzata, le porzioni inerziali di tutti gli spettri della componente *u*, qualunque sia la stabilità, *collassano* in un'unica curva, funzione solo della frequenza adimensionale *n*.

Comportamento analogo presentano le altre due componenti del vettore vento, per le quali si giunge alle relazioni seguenti:

$$\frac{fS_v(f)}{u_*^2} = \frac{\alpha_v}{(2\pi k)^{2/3}} \cdot \Phi_\varepsilon^{2/3} n^{-2/3} \qquad [8.138a]$$

$$\frac{fS_w(f)}{u_*^2} = \frac{\alpha_w}{(2\pi k)^{2/3}} \cdot \Phi_\varepsilon^{2/3} n^{-2/3} \qquad [8.138b]$$

Per quanto riguarda lo spettro logaritmico della temperatura potenziale, si può operare in maniera analoga, giungendo inizialmente alla relazione:

$$\frac{fS_\theta}{T_*^2} = \frac{\alpha_T}{(2\pi k)^{2/3}} \cdot \frac{(kz)^{2/3} N_\theta}{T_*^2} \cdot \varepsilon^{-1/3} n^{-2/3} \qquad [8.139a]$$

Non è difficile mostrare che con la dissipazione della varianza della temperatura N_θ, u_*, T_* e la quota di misura *z* è possibile ottenere un'ulteriore Relazione di Similarità:

$$\frac{kzN_\theta}{u_* T_*^2} = \Phi_N \qquad [8.139b]$$

dove Φ_N è una Funzione Universale di Similarità. Se si considera, inoltre, che:

$$N_\theta \cong -\overline{w\theta}\frac{d\Theta}{dz} \qquad [8.139c]$$

è immediato verificare che $\Phi_N \approx \Phi_H$. Con queste considerazioni, la relazione di Similarità (8.139a) può essere ora riscritta nella forma seguente:

$$\frac{fS_\theta}{T_*^2} = \frac{\alpha_T}{(2\pi k)^{2/3}} \cdot \Phi_\varepsilon^{-1/3} \cdot \Phi_N n^{-2/3} \qquad [8.139d]$$

che, opportunamente normalizzata, diventa:

$$\frac{fS_\theta}{\Phi_\varepsilon^{-1/3} \cdot \Phi_N T_*^2} = \frac{\alpha_T}{(2\pi k)^{2/3}} \cdot n^{-2/3} \qquad [8.139e]$$

Quindi, lo spettro logaritmico della temperatura potenziale normalizzato, non dipende più dalla stabilità atmosferica, ma solo dalla frequenza adimensionale *n*. Analogamente si può operare per lo spettro dell'umidità specifica *q*.

Poniamo ora tutta l'attenzione sui co-spettri. Se si considera la relazione (8.136e) e la si scala con u_*^2, si ottiene:

$$\frac{fC_{uw}(f)}{u_*^2} = -\frac{\alpha_{uw}}{(2\pi k)^{4/3}} \cdot \frac{(kz)^{4/3}\varepsilon^{1/3}}{u_*^2}\frac{dU}{dz} n^{-4/3} \qquad [8.140a]$$

Ricordando le Relazioni di Similarità per la dissipazione dell'energia cinetica turbolenta e per il gradiente verticale della velocità media del vento, la (8.140a) può essere riscritta nella forma:

$$\frac{fC_{uw}(f)}{u_*^2} = -\frac{\alpha_{uw}}{(2\pi k)^{4/3}} \cdot \Phi_\varepsilon^{1/3}\Phi_m n^{-4/3} \qquad [8.140b]$$

che può essere ulteriormente normalizzata, giungendo a:

$$\frac{fC_{uw}(f)}{\Phi_\varepsilon^{1/3}\Phi_m u_*^2} = -\frac{\alpha_{uw}}{(2\pi k)^{4/3}} n^{-4/3} \qquad [8.140c]$$

in cui tutti i co-spettri della covarianza tra *u e w* collassano su di un'unica curva indipendente dalla stabilità atmosferica e dipendente solo dalla frequenza adimensionale *n*.

Da ultimo, consideriamo il co-spettro $C_{w\theta}$ dato dalla relazione (8.136f). Scalando il co-spettro logaritmico con $u_* T_*$ si ha che:

$$\frac{fC_{w\theta}(f)}{u_* T_*} = -\frac{\alpha_{w\theta}}{(2\pi k)^{4/3}} \cdot \frac{(kz)^{4/3\varepsilon^{1/3}}}{u_* T_*}\frac{d\Theta}{dz} n^{-4/3} \qquad [8.141a]$$

Ricordando le opportune Relazioni di Similarità, questa relazione si riduce alla forma:

$$\frac{fC_{w\theta}(f)}{u_* T_*} = -\frac{\alpha_{w\theta}}{(2\pi k)^{4/3}} \cdot \Phi_\varepsilon^{1/3}\Phi_H n^{-4/3} \qquad [8.141b]$$

che anche in questo caso può essere resa adimensionale, giungendo alla relazione:

$$\frac{fC_{w\theta}(f)}{\Phi_\varepsilon^{1/3}\Phi_H u_* T_*} = -\frac{\alpha_{w\theta}}{(2\pi k)^{4/3}} n^{-4/3} \qquad [8.141c]$$

su cui collassano tutti i co-spettri $w\theta$ normalizzati, indipendentemente dalla stabilità atmosferica che li caratterizza.

Perché tutto questo apparato teorico sia valido, è necessario considerare la porzione di spettro entro l'*Inertial Subrange*. Non è facile stabilire con esattezza questa finestra spettrale, anche se, dal punto di vista pratico, si può adottare quanto proposto da Kaimal e al. (1972) e Fairall e al. (1990), secondo cui l'estremo inferiore di tale intervallo, in termini di frequenza

adimensionale, risulta pari a $n = 2$.

Da quanto fin qui presentato, risulta che nel *SL* la porzione *inerziale* degli spettri e dei cospettri delle variabili meteorologiche ammette una Relazione di Similarità che li descrive in maniera universale. A parte l'indubbio interesse teorico, questo risultato riveste anche un importante risvolto pratico; infatti, queste relazioni di similarità costituiscono un ulteriore mezzo di stima dei principali parametri descrittori della turbolenza atmosferica. Se infatti non risultassero applicabili altri metodi di stima (cosa che, per esempio, capita quando si stima la turbolenza del *PBL* sopra la superficie marina a bordo di navi opportunamente attrezzate), la misura dello spettro entro l'*Inertial Subrange* e l'impiego delle Relazioni di Similarità sopra riportate consente di stimare u_* e T_*. Dettagli su questo metodo, noto col nome di *Inertial Dissipation Method*, verranno dati quando si presenteranno i metodi per la stima della turbolenza al Capitolo 15.

Esercizio 8.6

Analizziamo la dipendenza esistente tra la costante di von Karman k e la costante di Kolmogorov α_u (Kaimal e Finnigan, 1994). Mentre la costante k compare in tutta la Teoria della Similarità nel *SL* quando si trattano i gradienti verticali delle variabili medie, la costante α_u compare quando si descrive lo spettro delle componenti del vento nel *SL*. In sostanza, la prima costante impera nel dominio del tempo mentre la seconda comanda nel dominio delle frequenze, ma è inevitabile che esse non siano tra loro indipendenti. Per dimostrare ciò, si ricordi che il MOST prescrive che ε dipenda sia dalla componente meccanica della turbolenza che dalla componente convettiva, oltre che dalla distanza dall'interfaccia aria-suolo. Quindi ε dipende da u_*, L e z secondo la relazione:

$$\varepsilon = \frac{u_*^3}{kz}\Phi_\varepsilon(z/L) \qquad [8.142a]$$

D'altro canto, lo spettro $S_u(f)$ della componente u del vento nel *SL* è dato da:

$$fS_u(f) = \left(\frac{z}{2\pi}\right)^{2/3} \alpha_u \varepsilon^{2/3} \left(\frac{fz}{U}\right)^{-2/3} \qquad [8.142b]$$

dove U è la velocità media del vento alla quota z. Inserendo la (8.142a) nella (8.142b) si ha che:

$$\frac{fS_u(f)}{u_*^2} = \frac{\alpha_u}{(2\pi)^{2/3}} \cdot \left(\frac{\varepsilon^{2/3} z^{2/3}}{u_*^2}\right) \cdot \left(\frac{fz}{U}\right)^{-2/3} \qquad [8.142c]$$

cioè:

$$\frac{fS_u(f)}{u_*^2} = \frac{\alpha_u}{(2\pi k)^{2/3}} \cdot \Phi_\varepsilon^{2/3} \left(\frac{fz}{U}\right)^{-2/3} \qquad [8.142d]$$

Quindi, è immediato ottenere la relazione seguente:

$$\alpha_u k^{-2/3} = (2\pi)^{2/3} \frac{fS_u(f)}{u_*^2} \Phi_\varepsilon^{-1} \left(\frac{fz}{U}\right)^{2/3} \qquad [8.142e]$$

che sembrerebbe indicare una dipendenza della combinazione delle due costanti con la stabilità, U, z e f. Se effettivamente si tratta di due costanti, tutte queste dipendenze apparenti devono compensarsi l'un l'altra. Per verificare ciò, durante la campagna del Kansas (Kaimal et al., 1972) le misure spettrali ottenute sono state impiegate per analizzare il problema. In primo luogo, per facilitare l'analisi, sono state selezionate le situazioni circa adiabatiche per cui $\Phi_\varepsilon(z/L)$ era prossimo a 1. Oltre a ciò, si è visto che alla frequenza normalizzata $n = fz/U = 4$:

$$\frac{fS_u(f)}{u_*^2} = 0.12$$

quindi:

$$\alpha_u k^{-2/3} = 1.03$$

Se ricordiamo che per la costante di von Karman k le indagini di Högström (1985) hanno dato $k = 0.4 \pm 0.011$, si ha che α_u sarà pari a 0.56 ± 0.01.

8.5.4.2 Modelli spettrali per lo strato superficiale

Dopo aver studiato le proprietà degli spettri nell'*Inertial Subrange*, volgiamo ora l'attenzione all'intera finestra spettrale di interesse micrometeorologico, analizzando separatamente gli spettri delle principali variabili meteorologiche, sempre limitatamente allo Strato Superficiale.

Spettro della componente verticale del vento

Se si grafica lo spettro logaritmico, opportunamente scalato, in funzione della frequenza adimensionale, si ottengono i tipici andamenti riportati nella **Fig.8.54**. Come si può notare, alle alte frequenze appare la zona inerziale in cui collassano tutti gli spettri misurati a differente stabilità. A frequenze inferiori, invece, ogni spettro presenta un tipico andamento caratterizzato da un massimo che è l'unica caratteristica che accomuna spettri a differente stabilità. Si nota inoltre un altro elemento di regolarità. Se si fissa l'attenzione allo spettro corrispondente alla situazione adiabatica, tutti gli spetti convettivi si trovano alla sua sinistra (verso frequenze inferiori) e si dispongono tanto più a sinistra quanto maggiore è il livello di convettività. Al contrario, le situazioni stabili esibiscono spettri con massimi meno marcati e sempre più spostati alla destra dello spettro adiabatico quanto maggiore è il livello di stabilità. Un'ulteriore osservazione che si può fare è che nello spettro della componente *w*, come nel caso della sua varianza, l'estensione verticale del *PBL* non gioca un ruolo rilevante (almeno entro il *SL*).

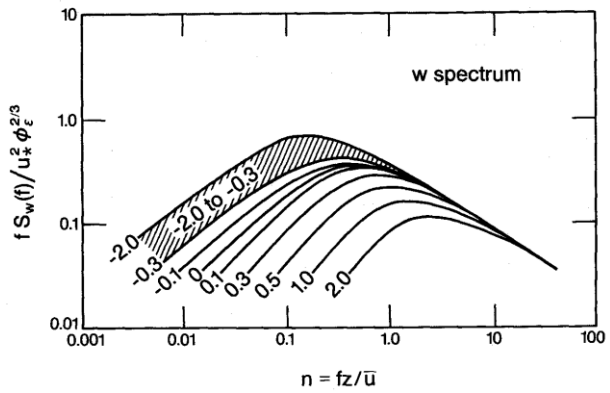


Fig 8.54: spettro logaritmico della componente w del vento (Kaimal e Finnigan (1994)

Per quanto riguarda le *situazioni convettive*, Peltier e al. (1996) e Højstrup (1981) hanno proposto un modello matematico per descrivere lo spettro. Qui di seguito viene presentato il più usato e semplice modello di Højstrup, secondo cui lo spettro logaritmico normalizzato risulta composto dalla sovrapposizione di *due contributi distinti*, uno dipendente solo dalla frequenza adimensionale *n* e l'altro dal parametro di stabilità ζ, secondo la relazione:

$$\frac{fS_w(f)}{u_*^2} = \frac{32n}{(1+17n)^{5/3}}(-\zeta)^{2/3} + \frac{2n}{1+5.3n^{5/3}} \qquad [8.143a]$$

Considerando il limite per *n* tendente all'infinito della relazione precedente, si ha che:

$$\frac{fS_w(f)}{u_*^2} \to 0.28(-\zeta)^{2/3}n^{-2/3} + 0.38n^{-2/3} \qquad [8.143b]$$

Il modello, quindi, presenta il tipico andamento previsto per l'*Inertial Subrange* in termini di dipendenza dalla frequenza adimensionale, anche se il primo addendo del membro di destra indica anche una dipendenza da ζ. Tanto più piccolo è ζ e tanto maggiore è *n*, tanto inferiore è il peso di questo termine e quindi tanto più ci si avvicina all'andamento previsto nell'*Inertial Subrange*. Questo spiega perché nella **Fig.8.54** sia visibile un *Inertial Subrange*, però a frequenze adimensionali piuttosto elevate. Se invece si considera il limite della (8.143a) per *n* tendente a zero, si

vede immediatamente che:

$$\frac{fS_w(f)}{u_*^2} \to 0.28(-\zeta)^{2/3}n^{-2/3} + 0.38n^{-2/3} \qquad [8.143c]$$

da cui risulta che lo spettro logaritmico segue un andamento di potenza con la frequenza adimensionale, cosa riscontrata sperimentalmente. Si nota inoltre che il termine dipendente dalla stabilità è predominante, ricordando, come già detto, che le dimensioni dei vortici di grandi dimensioni sono enormemente dipendenti dalle condizioni di stabilità in cui vengono generati.

Lo spettro della componente *w* del moto nelle situazioni stabili ($\zeta > 0$) è stato studiato nei lavori di Olesen e al. (1984) e nel lavoro di Moraes e Epstein (1987), in cui sono stati proposti due modelli spettrali molto differenti, ma del tutto equivalenti ai fini pratici. Consideriamo inizialmente il modello di Olesen. Le considerazioni su cui esso si basa sono le seguenti:

- gli spettri logaritmici normalizzati da u_*^2 raccolti nelle situazioni a differenti valori del parametro di stabilità ζ sono tutti rappresentabili da una funzione del tipo:

$$\frac{fS_w}{u_*^2} = \frac{a}{1 + bn^{5/3}} \qquad [8.144a]$$

- una funzione di questo tipo presenta un limite asintotico per $f \to \infty$ pari a:

$$\frac{fS_w}{u_*^2} \to \frac{a}{b} \cdot n^{-2/3} \qquad [8.144b]$$

  che ci assicura che la forma funzionale (8.144a) prevede l'esistenza di un *Inertial Subrange*, esistenza confermata dalle osservazioni sperimentali.

- la frequenza normalizzata n_{max} corrispondente al massimo della (8.144a) dipende da ζ, cosa confermata dalle osservazioni sperimentali. Se si considera la (8.144a) , si ha che:

$$n_{max} = \left[\frac{3}{2b}\right]^{3/5} \qquad [8.144c]$$

Olesen e al. (1984), per quantificare n_{max}, partono dall'ipotesi che il vortice cui corrisponde n_{max} e che, quindi, influenza maggiormente la componente *w*, sia anche il responsabile dello *shear* nel *SL*. Rifacendosi *alla Teoria della Lunghezza di Rimescolamento* di Prandtl, lo *shear* è direttamente proporzionale ad una velocità caratteristica ed inversamente proporzionale ad una lunghezza caratteristica. Nel *SL* la velocità caratteristica è sicuramente u_*, mentre si può ipotizzare che la lunghezza caratteristica sia la lunghezza d'onda λ_m associata al vortice di frequenza n_{max} e per l'ipotesi di Taylor si ha che $\lambda_m = U/f_m$. Dato che $n_{max} = f_m z/U$, si ha che $n_{max} = z/\lambda_m$. Quindi, alla luce della Teoria della Lunghezza di Rimescolamento:

$$\frac{dU}{dz} = c \cdot u_*/\ell = cu_* n_{max} \qquad [8.144d]$$

dove *c* è una costante numerica. D'altro canto nel *SL* il gradiente verticale della velocità media del vento è ben descritto dalla Relazione di Similarità (8.17a). Quindi:

$$n_{max} = C_2 \Phi_m(\zeta) \qquad [8.144e]$$

dove $C_2 = 1/(kc)$. La relazione precedente porta a concludere che n_{max} dipende dal parametro ζ ed in particolare cresce con esso, cosa confermata dalle misure sperimentali. Dalle misure ottenute in condizioni adiabatiche, quando $\Phi_m(0) = 1$, si è ottenuto per C_2 il valore 0.35 , quindi :

$$n_{max} = 0.35\Phi_m(\zeta) \qquad [8.144f]$$

e dalla (8.144c):

$$b = 8.63\Phi_m^{-5/3} \qquad [8.144g]$$

Uguagliando la relazione (8.144b), cioè il comportamento asintotico dello spettro nell'*Inertial Subrange*, con la Relazione di Similarità (8.138b), si ottiene il valore di *a* della (8.144a), che si trasforma in:

$$\frac{fS_w}{u_*^2} = \frac{\alpha_w}{(2\pi k)^{2/3}} \cdot \frac{8.6(n/\Phi(\zeta))}{1 + 8.6(n/\Phi_m(\zeta))^{5/3}} \cdot \left(\frac{\Phi_\varepsilon(\zeta)}{\Phi_m(\zeta)}\right)^{2/3} \qquad [8.144h]$$

che è la forma finale del modello spettrale di Olesen in condizioni stabili.

Moraes e Epstein (1987) e Kaimal e Finnigan (1994) hanno proposto un modello differente per lo spettro stabile di *w*, dato da:

$$\frac{fS_w(f)}{\sigma_w^2} = \frac{0.164\, f/f_{0w}}{1 + 0.164(f/f_{0w})^{5/3}} \qquad [8.145a]$$

in cui:

$$f_{0w} = 0.094\Phi_\varepsilon \qquad [8.145b]$$

È facile verificare che anche questo modello nell'*Inertial Subrange* (*f* tendente all'infinito) si comporta come previsto dalla Teoria della Similarità.

È interessante analizzare la dipendenza della frequenza adimensionale corrispondente al picco dello spettro logaritmico dalla stabilità. Tale relazione potrebbe essere dedotta dal modello di Højstrup per le situazioni convettive e dal modello di Olesen (o di Moraes) per le situazioni stabili, derivandoli rispetto a *n* ed eguagliando a zero il risultato. Ciò che risulta è una relazione analiticamente abbastanza complessa e poco attraente. Tuttavia, Dutton e al. (1980) hanno ottenuto per questo la relazione semiempirica seguente:

$$n_w^{max} = \begin{cases} 0.183 & \text{per } \zeta < \text{-}0.7 \\ 0.482 + 0.437\zeta & \text{per } \text{-}0.7 \le \zeta < 0 \\ 0.482 + 0.87\zeta & \text{per } \zeta \ge 0 \end{cases} \qquad [8.146a]$$

Dato che gli spettri logaritmici sono abbastanza *piatti*, non è agevole determinare sperimentalmente la frequenza adimensionale corrispondente al picco. Viceversa, è molto più agevole determinare il valore di $fS_w(f)/u_*^2$ di picco. Anche in questo caso, Dutton e al. (1980) hanno determinato la relazione semiempirica seguente:

$$\left(\frac{fS_w(f)}{u_*^2}\right) \begin{cases} 0.4 + 0.2|\zeta|^{1/2} - 0.35\zeta - 0.03\zeta^2 & \text{per } \zeta \le 0 \\ 1.22\zeta + 0.4 & \text{per } 0 \le \zeta < 0.18 \\ 0.62 & \text{per } \zeta < 0.18 \end{cases} \qquad [8.146b]$$

<u>Spettro delle componenti orizzontali del vento</u>

Molto più complessa è la situazione per gli spettri delle componenti *u e v* del vento. In **Fig. 8.55** e **Fig. 8.56** sono riportati rispettivamente gli andamenti degli spettri logaritmici della componente *u* e *v* del vento una volta opportunamente scalati rispetto alla frequenza adimensionale *n*.

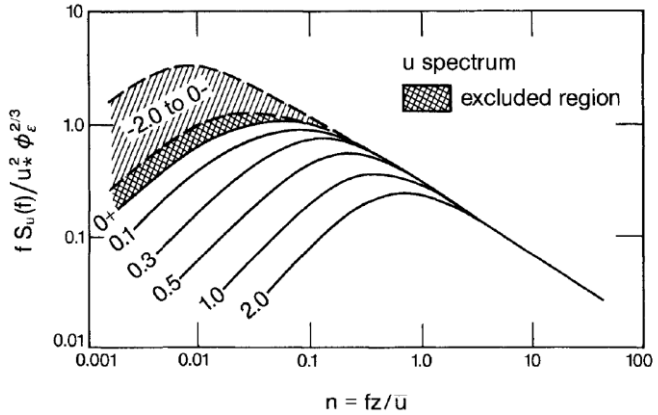


Fig 8.55: spettro logaritmico della componente u del vento (Kaimal e Finnigan, 1994)

Da esse è evidente alle alte frequenze l'andamento previsto per l'*Inertial Subrange*, mentre a frequenze inferiori il comportamento è complesso e dipendente dalla stabilità atmosferica. In certe situazioni era evidente la presenza di un massimo unico, in altre era altrettanto evidente la presenza di due massimi distinti. In realtà ciò può essere spiegato dal modello proposto per le situazioni convettive da Højstrup (1982) secondo cui a determinare lo spettro delle componenti orizzontali del vento intervengono non solo u_* e ζ, ma anche l'estensione verticale z_i del *PBL*. Una volta definita una nuova frequenza adimensionale n_i come:

$$n_i = \frac{nz_i}{U} \qquad [8.147a]$$

i due spettri nelle situazioni convettive possono essere descritti dalle relazioni:

$$\frac{fS_u(f)}{u_*^2} = \frac{0.5n_i}{1 + 2.2n_i^{5/3}}\left(-\frac{z_i}{L}\right)^{2/3} + \frac{105n}{(1+33n)^{5/3}} \qquad [8.147b]$$

$$\frac{fS_v(f)}{u_*^2} = \frac{0.32n_i}{1 + 1.1n_i^{5/3}}\left(-\frac{z_i}{L}\right)^{2/3} + \frac{17n}{(1+9.5n)^{5/3}} \qquad [8.147c]$$

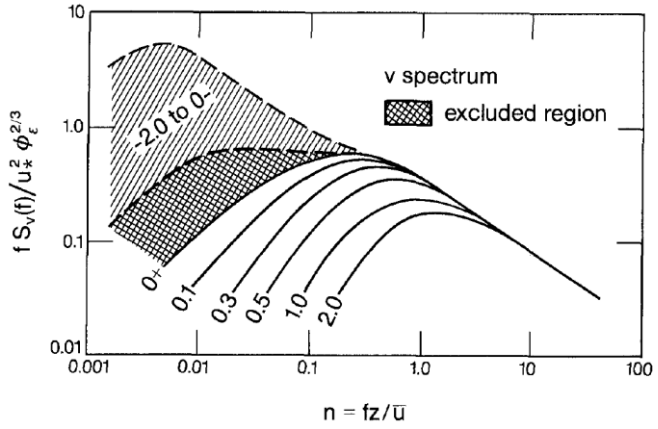


Fig 8.56: spettro logaritmico della componente v del vento (Kaimal e Finnigan, 1994)

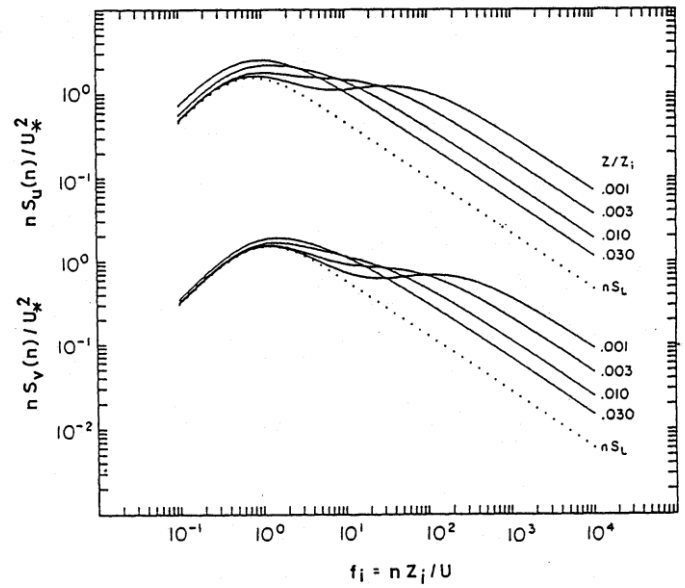


Fig. 8.57: spettri logaritmici delle componenti orizzontali del vento in funzione dell'altezza del PBL (Hojstrup 1982).

È opportuno a questo punto effettuare una piccola trasformazione nelle due relazioni precedenti. Ricordando che tra la *friction velocity* u_*, la velocità convettiva di scala w_*, la lunghezza di Monin-Obukhov L e l'estensione verticale dello strato rimescolato z_i sussiste la relazione:

$$\frac{w_*}{u_*} = \left(-\frac{z_i}{kL}\right)^{1/3} \qquad [8.148a]$$

si ha che:

$$fS_u(f) = \frac{0.27n_i}{1 + 2.2n_i^{5/3}} w_*^2 + \frac{105n}{(1 + 33n)^{5/3}} u_*^2 \qquad [8.148b]$$

$$fS_v(f) = \frac{0.17n_i}{1 + 1.1n_i^{5/3}} w_*^2 + \frac{17n}{(1 + 9.5n)^{5/3}} u_*^2 \qquad [8.148c]$$

da cui risulta che lo spettro complessivo delle due componenti orizzontali del vento nelle situazioni convettive è il risultato della sovrapposizione di *una componente a bassa frequenza* dominata dalla convettività e direttamente dipendente dall'altezza del *PBL* e *di una componente ad alta frequenza* dipendente solo dalla turbolenza di tipo meccanico. Quando la frequenza tende all'infinito, entrambe le relazioni tendono a comportarsi secondo le previsioni della Teoria della Similarità di Monin-Obukhov. Nella **Fig.8.57** sono presentate le previsioni di questo modello a differenti valori del rapporto z/z_i, da cui è evidente che il modello risulta completamente in grado di riprodurre le *apparenti stranezze* riscontrate nelle misure sperimentali.

Nel caso stabile, anche questa volta Olesen e al. (1984) e Moraes e Epstein (1987) hanno proposto dei modelli spettrali per le componenti *u* e *v* del vento. Il modello di Olesen si fonda su considerazioni del tutto analoghe a quelle che hanno portato alla formulazione dello spettro di *w* nelle situazioni stabili. Il risultato ottenuto è rappresentato dalle relazioni seguenti:

$$\frac{fS_u}{u_*^2} = \frac{\alpha_u}{(2\pi k)^{2/3}} \cdot \frac{263 \cdot \left(n/\Phi_m(\zeta)\right)}{1 + 263 \cdot \left(n/\Phi_m(\zeta)\right)^{5/3}} \cdot \left(\frac{\Phi_\varepsilon(\zeta)}{\Phi_m(\zeta)}\right)^{2/3} \qquad [8.149a]$$

$$\frac{fS_v}{u_*^2} = \frac{\alpha_v}{(2\pi k)^{2/3}} \cdot \frac{32 \cdot \left(n/\Phi_m(\zeta)\right)}{1 + 32 \cdot \left(n/\Phi_m(\zeta)\right)^{5/3}} \cdot \left(\frac{\Phi_\varepsilon(\zeta)}{\Phi_m(\zeta)}\right)^{2/3} \qquad [8.149b]$$

Il modello di Moraes e Epstein, invece, è rappresentato dalle relazioni:

$$\frac{fS_{u,v}(f)}{\sigma_{u,v}^2} = \frac{0.164\, f/f_{0u,v}}{1 + 0.164\left(f/f_{0u,v}\right)^{5/3}} \qquad [8.150a]$$

in cui:

$$f_{0u} = 0.012\Phi_\varepsilon \qquad f_{0v} = 0.045\Phi_\varepsilon \qquad [8.150b]$$

Spettro della temperatura potenziale

Lo spettro logaritmico della temperatura potenziale, opportunamente scalato, è presentato nella **Fig.8.58**. Anche in questo caso sono evidenti delle caratteristiche che già abbiamo incontrato discutendo delle componenti orizzontali del vento, cioè la presenza di un *Inertial Subrange* e la forte dipendenza dalla stabilità e dall'estensione verticale del *PBL* z_i nella parte di spettro a bassa frequenza e nelle situazioni convettive. Una volta fissata l'attenzione sulla situazione adiabatica, le situazioni stabili si trovano alla sua destra (lo spettro risulta traslato verso le alte frequenze) e le situazioni convettive alla sua sinistra.

Nelle *situazioni convettive*, seguendo Kaimal e Finnigan (1994) e limitatamente *all'Inertial Subrange*, si ha che:

$$\frac{fS_\theta(f)}{\gamma T_*^2} = \frac{\alpha_T}{(2\pi)^{2/3}} n_i^{-2/3} \qquad [8.151a]$$

dove:

$$\gamma = \frac{N_\theta \varepsilon^{-1/3}}{T_*^2 z_i^{-2/3}} \qquad [8.151b]$$

Un'utile approssimazione di γ è la seguente (Kaimal e al. 1976):

$$\gamma = \begin{cases} 0.83(z/z_i)^{-4/3} & z \le 0.5 z_i \\ 2.1 & 0.5 z_i \le z \le 0.7 z_i \\ 6.1(z/z_i)^3 & 0.7 z_i \le z \le z_i \end{cases} \qquad [8.151c]$$

Sorbjan (1989) ha presentato per le situazioni convettive un modello spettrale molto più complesso a cui rimandiamo per ulteriori dettagli.

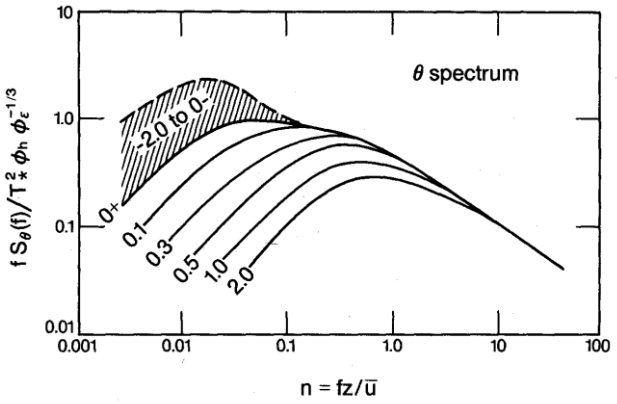


Fig 8.58: spettro logaritmico della temperatura potenziale (Kaimal e Finnigan 1994).

Nelle *situazioni stabili* lo spettro logaritmico della temperatura potenziale, scalato dalla relativa varianza, è espresso dalla seguente relazione di Similarità (Kaimal e Finnigan, 1994):

$$\frac{f S_\theta}{\sigma_T^2} = \frac{a \cdot (n/n_{0\theta})}{1 + a \cdot (n/n_{0\theta})^{5/3}} \qquad [8.152a]$$

con $a = 0.164$ (Kaimal, 1973). La frequenza $n_{0\theta}$ è il valore di n a cui l'estrapolazione dell'*Inertial Subrange* raggiunge il valore $f S_\theta(f)/\sigma_T^2 = 1$. La definizione di $n_{0\theta}$ è ben poco operativa e nell'uso pratico si impiega la correlazione seguente (Caughey, 1982):

$$n_{0\theta} = 0.0013 + 0.74\zeta \frac{\Phi_h(\zeta)}{\Phi_m^2(\zeta)} \qquad [8.152b]$$

Cospettri

Nella **Fig.8.59** sono mostrati i co-spettri logaritmici, opportunamente scalati, tra le componenti *u* e *w* del vento e tra *w* e la temperatura potenziale. Come si nota, tutte le curve collassano in un'unica curva entro l'*Inertial Subrange*, a frequenze normalizzate elevate e ad elevate stabilità. I modelli proposti finora sono meno *ricchi* rispetto ai modelli spettrali presentati precedentemente ed in pratica si riducono a quanto proposto in Kaimal e Finnigan (1994).

Consideriamo inizialmente il *cospettro* C_{uw}. In generale, il modello spettrale normalmente impiegato è dato dalla relazione:

$$\frac{f C_{uw}}{u_*^2} = -\frac{12n}{(1 + 9.6n)^{7/3}} \cdot G(\zeta) \qquad [8.153a]$$

dove $G(\zeta)$, che rappresenta un fattore correttivo dipendente dalla stabilità, risulta pari a:

$$G(\zeta) = \begin{cases} 1 & -2 \le \zeta \le 0 \\ 1 + 7.9\zeta & 0 \le \zeta \le 2 \end{cases} \qquad [8.153b]$$

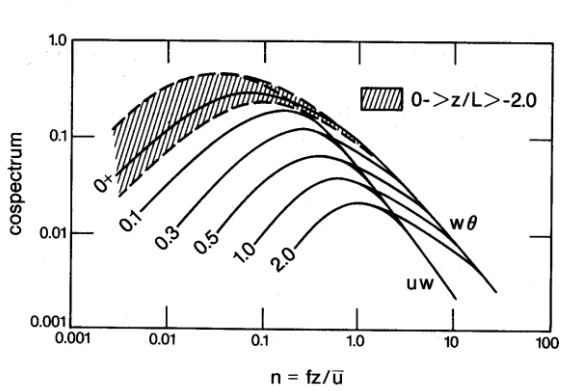


Fig 8.59: co-spettro logaritmico uw e $w\theta$ (Kaimal e Finnigan 1994)

Il modello spettrale proposto per $C_{w\theta}$ è lievemente più complesso ed è rappresentato dalle relazioni seguenti:

$$\frac{fC_{w\theta}}{u_* T_*} = -F_{w\theta}(n) \cdot H(\zeta) \qquad [8.154a]$$

dove:

$$F_{w\theta}(n) = \begin{cases} \dfrac{11n}{(1+13.3n)^{7/4}} & n \le 1 \\ \dfrac{4n}{(1+3.8n)^{7/3}} & n > 1 \end{cases} \qquad [8.154b]$$

e la correzione rispetto alla stabilità è descritta da:

$$H(\zeta) = \begin{cases} 1 & -2 \le \zeta \le 0 \\ 1 + 6.4\zeta & 0 \le \zeta \le 2 \end{cases} \qquad [8.154c]$$

Parametri di struttura e spettri

Spesso abbiamo parlato dei parametri di struttura C_V^2 e C_T^2 e per essi sono state sviluppate apposite Relazioni di Similarità, come si è visto in precedenza. Dato che esse, in qualche modo, rappresentano una correlazione spaziale (e quindi temporale se si utilizza l'ipotesi di Taylor), non è inattesa una loro *parentela* con gli spettri. Infatti, se si considera l'*Inertial Subrange*, Kaimal e Finnigan (1994) hanno mostrato che:

$$C_V^2 = 4\alpha_u \varepsilon^{2/3} \qquad [8.155a]$$

$$C_T^2 = 4\alpha_T N_\theta \varepsilon^{-1/3} \qquad [8.155b]$$

da cui risulta che:

$$\frac{C_V^2 z^{2/3}}{u_*^2} = 2.2k^{-2/3}\Phi_\varepsilon^{2/3} \qquad [8.155c]$$

$$\frac{C_T^2 z^{2/3}}{T_*^2} = 3.2k^{-2/3}\Phi_H \Phi_\varepsilon^{-1/3} \qquad [8.155d]$$

8.5.5 MODELLI SPETTRALI PER L'INTERO PBL

Misurare gli spettri lontano dal suolo è un'impresa ancor oggi estremamente ardua e non è sorprendente che le misure disponibili siano molto scarse. Sfruttando al meglio questa conoscenza parziale, parecchi autori hanno presentato lavori in cui propongono modelli spettrali validi per l'intero *PBL*, sia in condizioni convettive che in condizioni stabili. Per queste ultime, va sottolineato il fatto che spesso si sovrappongono alla turbolenza anche fenomeni ondosi (come, per esempio, le onde di gravità e i moti submeso) che complicano notevolmente l'interpretazione

delle misure disponibili. Nei paragrafi che seguono vengono presentati alcuni dei risultati ottenuti nella modellizzazione degli spettri entro l'intero *PBL*.

8.5.5.1 Spettri delle componenti del vento

Per quanto riguarda le tre componenti del vento, in Letteratura sono stati proposti due modelli, uno specializzato per le situazioni convettive e l'altro per quelle stabili.

Per quanto riguarda le *situazioni convettive*, Højstrup (1982) ha presentato un modello matematico valido fino a quote dell'ordine di $0.5z_i$, secondo cui le componenti orizzontali del vento vengono descritte dalle relazioni seguenti:

$$\frac{fS_u(f)}{u_*^2} = \frac{0.5n_i}{1+2.2n_i^{5/3}} \cdot \left(-\frac{z_i}{L}\right)^{2/3} + \frac{105n_{ru}}{(1+33n_{ru})^{5/3}} \cdot \frac{(1-z/z_i)^2}{(1+15\,z/z_i)^{2/3}} \qquad [8.156a]$$

$$n_{ru} = n/(1+15\,z/z_i) \qquad [8.156b]$$

$$\frac{fS_v(f)}{u_*^2} = \frac{0.95n_i}{1+2n_i^{5/3}} \cdot \left(-\frac{z_i}{L}\right)^{2/3} + \frac{17n_{rv}}{(1+9.5n_{rv})^{5/3}} \cdot \frac{(1-z/z_i)^2}{(1+2.8\,z/z_i)^{2/3}} \qquad [8.156a]$$

$$n_{ru} = n/(1+15\,z/z_i) \qquad [8.156a]$$

Nella **Fig.8.60** sono presentati gli spettri delle componenti del vento a vari livelli di stabilità e a varie quote.

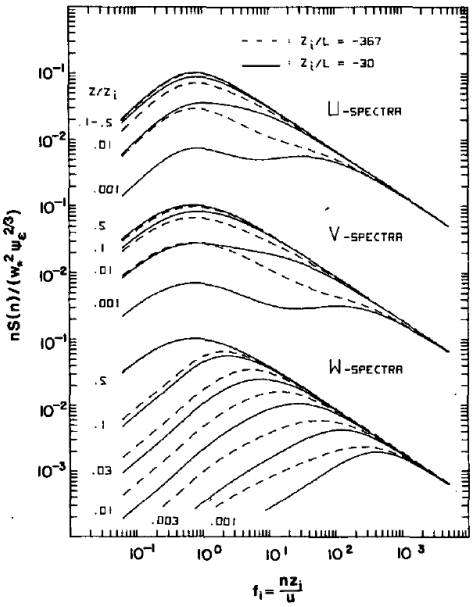


Fig.8.60: spettri delle tre componenti del vento nel PBL (Hojstrup, 1982).

Anche per la componente verticale del vento, sempre nelle situazioni convettive, le poche misure disponibili hanno evidenziato una dipendenza dello spettro da z_i. Højstrup (1982) ha proposto il modello seguente, anch'esso valido fino a quote dell'ordine di $0.5\ z_i$:

$$\frac{fS_w(f)}{u_*^2} = F(n,z/z_i)\frac{0.95n_i}{(1+2n_i)^{5/3}} \cdot \left(-\frac{z_i}{L}\right)^{2/3} + \frac{2n}{1+5.3n^{5/3}} \cdot (1-z/z_i)^2 \qquad [8.157a]$$

con:

$$F(n,z/z_i) = \left[\frac{n^2+(0.3\,z/z_i)^2}{n^2+(0.15)^2}\right]^{1/2} \qquad [8.157b]$$

Per quanto riguarda invece le *situazioni stabili*, Moraes (1988) ha proposto un modello

che si fonda sulla Teoria della Similarità Locale per i cui dettagli si rimanda a Sorbjan (1989). In pratica, se si conosce u_*, $\overline{w\theta}$ ed L e l'estensione verticale h del *PBL* stabile, il modello per una generica componente *i* del vettore vento è costituito dalla relazione seguente:

$$\frac{fS_i(f)}{U_*^2\Phi_\varepsilon^{2/3}} = \gamma_i^{SBL}\frac{An}{(n_{0i}^{SBL})^{5/3} + An^{5/3}} \qquad [8.158a]$$

dove:

$$U_*^2 = u_*^2(1 - z/h)^{3/2}$$
$$n_{0i}^{SBL} = \beta_i^{SBL}(1 + 3.7\, z/\Lambda)$$
$$\Lambda = L(1 - z/h)^{5/4} \qquad [8.158b]$$
$$\beta_i^{SBL} = \beta_i\frac{\left[1 + 0.628(h/L)^{3/5}\right]^{3/2}}{1 + 0.422(h/L)}$$

dovee Φ_ε è la Funzione Universale di Similarità per il tasso di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta, *A* risulta pari a 0.164, mentre γ_i^{SBL} vale 0.3 per la componente *u* e 0.4 per le componenti *v e w*. Per quanto riguarda il valore dei parametri β_i, essi valgono 0.012 per *u*, 0.045 per *v* e 0.094 per *w*. Nella **Fig.8.61** è mostrata la variazione degli spettri in funzione del rapporto *z/h*.

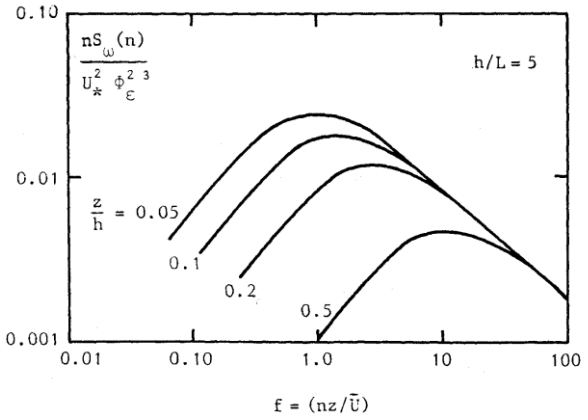


Fig.8.61: spettro logaritmico normalizzato in funzione del rapporto z/h (Moraes, 1988)

7.5.5.2 Spettri della temperatura potenziale

Poco si sa dello spettro della temperatura potenziale al di fuori del *SL*. Per quanto riguarda le situazioni convettive Kaimal e Finnigan (1994) suggeriscono di utilizzare comunque il modello proposto per il *SL* nel quale già si teneva conto dell'influenza dell'altezza del *PBL* z_i.

Per quanto riguarda, invece, le situazioni stabili, in Sorbjan (1989) si propone la relazione seguente, derivata dalla Similarità Locale proposta dallo stesso Sorbjan per realizzare Relazioni di Similarità valide entro tutto il *PBL* stabile:

$$\frac{fS_\theta(f)}{\Theta_*^2} = \frac{\alpha_T}{(2\pi k)^{2/3}}F_\varepsilon^{-1/3}F_N n^{-2/3} \qquad [8.159a]$$

In tale relazione sono presenti due relazioni di Similarità Locale così definite:

$$F_\varepsilon = 1 + 3.7\, z/\Lambda$$
$$F_N = 0.74 + 3.7\, z/\Lambda \qquad [8.159b]$$

In entrambe le relazioni è presente la lunghezza di scala Λ che sostituisce la lunghezza di Monin-Obukhov nella Similarità Locale e che è definita come

$$\Lambda = L \cdot (1 - z/h)^{5/4} \qquad [8.159d]$$

8.5.5.3 Cospettri

Le misure sperimentali dei co-spettri al di fuori del *SL* sono estremamente difficili e finora ben pochi sono i dati sperimentali a disposizione. Questa scarsità di dati e la loro difficile interpretazione non ha consentito finora la realizzazione di modelli convincenti. Kaimal e Finnigan (1994) affermano che in pratica essi sono ben poco prevedibili, soprattutto nelle situazioni convettive. Nel caso delle situazioni stabili, la limitata estensione verticale *h* del *PBL* ha consentito di realizzare alcuni studi, che sono stati sintetizzati da Sorbjan (1989) con l'aiuto dalla Similarità Locale. Il risultato è costituito dalle relazioni seguenti:

$$\frac{fC_{uw}(f)}{U_*^2} = -\frac{\alpha_{uw}}{(2\pi k)^{-4/3}} F_\varepsilon^{1/3} F_m \cdot n^{-7/3} \qquad [8.160a]$$

$$\frac{fC_{w\theta}(f)}{U_*\Theta_*} = -\frac{\alpha_{w\theta}}{(2\pi k)^{-4/3}} F_\varepsilon^{1/3} F_H \cdot n^{-7/3} \qquad [8.160b]$$

dove F_ε è dato dalla (8.159b) e:

$$\begin{gathered} F_m = 1 + 4.7Z \\ F_H = 0.74 + 4.7Z \\ \Theta_* = -\frac{\overline{w\theta}}{u_*} \cdot (1 - z/h)^{1/4} \\ Z = z/\Lambda \end{gathered} \qquad [8.160c]$$

8.5.6 CENNI ALL'ANALISI SPETTRALE LAGRANGIANA

Nello studio dell'analisi spettrale condotta finora, si è seguito esclusivamente *un punto di vista Euleriano*. La *visione Lagrangiana* è totalmente differente. Il punto di partenza di un'analisi di tipo Lagrangiano è l'individuazione di una particella di fluido e l'analisi viene condotta considerando la variazione temporale delle tre componenti della velocità di tale particella, della sua temperatura potenziale, del suo contenuto di vapor d'acqua e di differenti specie chimiche durante il suo moto (regolare o irregolare) nello spazio. A rigore non è difficile definire valori medi, varianze, covarianze e spettri anche in questo caso; tuttavia, quello che ancora oggi risulta proibitivo è determinare tutto ciò sperimentalmente, specialmente entro il *PBL*. Vista l'importanza che la visione Lagrangiana ha nello studio della dispersione degli inquinanti, qui presenteremo alcune considerazioni importanti, senza tuttavia approfondire eccessivamente l'argomento.

Consideriamo, per fissare le idee, la variabile Euleriana *u* (componente istantanea *streamwise* del vettore vento rilevata in un punto *P* dello spazio al tempo *t*) e la sua controparte Lagrangiana u_L (componente *streamwise* del vettore velocità di una generica particella al tempo *t*). La prima considerazione che si può fare (Trombetti e Tagliazucca, 1994) è che la serie temporale Lagrangiana $u_L(t_i)$ fluttua meno frequentemente della serie Euleriana $u(t_i)$ e questo vale in generale per ogni variabile considerata. Con le tecniche presentate in questo capitolo, non è difficile determinare il Tempo Caratteristico di Scala per entrambe le serie. Sia T_{Eu} il *Tempo Caratteristico Euleriano* per la serie Euleriana e T_{Lu} il *Tempo Caratteristico Lagrangiano* per la seria Lagrangiana. È interessante verificare l'esistenza di una relazione tra T_{Eu} e T_{Lu} e, più in generale, tra i tempi caratteristici Euleriani e Lagrangiani delle variabili di interesse micrometeorologico. Il tema è stato trattato da molti autori e qui ci si riferisce a tre riferimenti principali: Pasquill e Smith (1983), Wang e al. (1988) e Koeltzsch (1999). Senza entrare nei dettagli, si può affermare che tale relazione esiste e che, nei limiti di validità dell'ipotesi di Taylor, ha la forma:

$$T_L/T_E = \alpha \cdot \frac{\overline{u}}{\sigma_u} = \beta \qquad [8.161a]$$

Per il coefficiente α sono stati individuati sperimentalmente valori compresi nell'intervallo

0.3÷0.8. La variabilità di tale parametro può essere spiegata in vari modi e non è stato individuato un modello semplice che la metta in relazione con altre variabili, come la rugosità superficiale, l'altezza del *PBL* e la stabilità. A titolo esemplificativo un valore sperimentale ricorrente nel caso di *w* in situazioni adiabatiche è $\alpha = 0.35$ (Reid, 1979), mentre il valore $\alpha = 0.7$ risulta un valore applicabile alle situazioni convettive (Hanna, 1981).

Un altro aspetto di interesse pratico è lo studio della *funzione di struttura delle componenti della velocità Lagrangiana* di una particella. Questo argomento riveste un ruolo importante nei modelli stocastici Lagrangiani per la dispersione degli inquinanti nel *PBL*. Per una componente Lagrangiana u_i (u, v, w) di una particella, la funzione di struttura Lagrangiana è data da:

$$D_i^L(\tau) = \overline{u_i(t+\tau) - u_i(t)} \qquad [8.161b]$$

Nell'*Inertial Subrange*, in accordo con le ipotesi di Kolmogorov, per $D_i^L(\tau)$ esiste una relazione di Similarità del tipo (Monin e Yaglom, 1971b):

$$D_i^L(\tau) = C_0 \varepsilon \tau \qquad [8.161c]$$

dove C_0 è una costante numerica. Riferendoci a Degrazia e Anfossi (1998), non esiste un accordo sul valore numerico da attribuire a tale costante. Alcuni dei valori proposti sono:

- $C_0 = 3$ per tutte le componenti di velocità della particella;
- $C_0 = 4.2 \div 0.6$ per la componente *v* e *w*;
- $C_0 = 2.8 \div 0.4$ per la componente *u* .

8.6 MODELLO DI RIPARTIZIONE ALLA SUPERFICIE DELLA ENERGIA DISPONIBILE

All'interfaccia aria-suolo, che per semplicità immaginiamo sia una superficie geometrica piana, ha luogo il principale trasferimento di energia termica e di vapor d'acqua tra il suolo stesso ed il *PBL*. Come abbiamo visto, il Bilancio Energetico Superficiale ci assicura che ad ogni istante deve valere la relazione seguente:

$$R_N - G_0 = H_0 + H_E \qquad [8.162a]$$

cioè che l'energia disponibile alla superficie (la differenza algebrica tra la Radiazione Netta ed il Flusso di Calore nel suolo) si ripartisce tra un ***Flusso Turbolento di Calore Latente*** H_E (che causa l'evapotraspirazione) ed un ***Flusso Turbolento di Calore Sensibile*** H_0 (che, per esempio, nelle situazioni convettive causa la nascita dei vortici di grandi dimensioni). Entrambi questi flussi, come vedremo, possono essere misurati direttamente essendo definiti come:

$$H_0 = \rho C_p \overline{w'\theta'} \qquad H_E = \lambda \rho \overline{w'q'} \qquad [8.162b]$$

In queste relazioni, ρ è la densità dell'aria, C_p è il relativo calore specifico, λ è il calore specifico di evaporazione dell'acqua e q è l'umidità specifica. Evidentemente è di estremo interesse capire come e perché l'energia disponibile all'interfaccia aria-suolo si ripartisca nei due differenti tipi di flusso turbolenti o, che è lo stesso, perché suoli differenti in differenti situazioni presentino differenti valori del ***Rapporto di Bowen*** *Bo*, definito come:

$$Bo = H_0 / H_E \qquad [8.162a]$$

Ciò che risulta evidente dalla realtà sperimentale è che suoli aridi o semiaridi, quindi poveri di umidità, trasformano preferibilmente l'energia disponibile in H_0 e ciò determina valori di *Bo* piuttosto elevati (un valore tipico è 5), mentre suoli molto umidi o addirittura con acqua superficiale prediligono la trasformazione dell'energia disponibile in H_E. In questo caso *Bo* assume valori che vanno da 0.5 per prati in condizioni normali, a 0.2 per campi irrigati.

Per comprendere meglio ciò è utile considerare alcuni tipici modelli che descrivono in un certo dettaglio questo fenomeno. Prima, però, bisogna ricordare che il concetto d'interfaccia aria-suolo è un concetto piuttosto *sfumato* specialmente quando alla superficie terrestre è presente della vegetazione. Operativamente possiamo ritenere che questa superficie teorica che separa il suolo dall'atmosfera sia una superficie ideale posta alla quota z_0 se stiamo considerando il trasferimento di quantità di moto ed alla quota z_{0h} se stiamo considerando il trasferimento di calore o di vapor d'acqua.

Un concetto utile per quantificare questo trasferimento di proprietà fisiche tra suolo ed aria è il concetto di *resistenza al trasferimento* e a questo proposito, possiamo *estendere concettualmente* la legge di Ohm al trasferimento di una generica proprietà f (che nell'analogia elettrica consideriamo come un potenziale) in un piccolo strato di aria adiacente al suolo. In generale possiamo dire che vale la legge seguente:

$$\text{Flusso della grandezza } f = \frac{\text{gradiente di } f}{\text{resistenza}} \qquad [8.163a]$$

Nei pressi dell'interfaccia aria-suolo si può ipotizzare valida la chiusura del primo ordine:

$$F = -K_f \frac{\partial f}{\partial z} \qquad [8.163b]$$

Quindi la *resistenza* posta dal sistema al fluire di *f* dalla quota z_1 (che di fatto è z_0 o z_{0h}) alla quota z_2 (che è la generica quota d'interesse entro il *SL* e prossima al suolo) è definita come:

$$r_f = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{K_f(z)} \qquad [8.163c]$$

Indichiamo ora con r_{am}, r_{ah} e r_{av} la resistenza esercitata dal sistema atmosfera al trasferimento rispettivamente di quantità di moto, di calore e di vapor d'acqua. È immediato constatare che:

$$u_*^2 = \frac{U(z)}{r_{am}} \qquad [8.163d]$$

$$H_0 = \frac{T(z_{0h}) - T(z)}{r_{ah}} \rho C_p \qquad [8.163e]$$

$$H_E = \frac{q(z_{0v}) - q(z)}{r_{av}} \cdot \frac{\rho C_p}{\gamma} \qquad [8.163f]$$

dove γ è il *rapporto psicrometrico* definito come $\gamma = C_p/\lambda$.

Operando nei pressi del suolo, la differenza di temperatura tra z_{0h} e quella alla quota z è del tutto indistinguibile dall'analoga differenza di temperatura potenziale. Quindi, ricordando la relazione di Similarità di Monin-Obukhov per il gradiente di temperatura potenziale si ha che:

$$r_{ah} = -\rho C_p \frac{\Theta_a - \Theta_0}{H_0} = \frac{1}{k u_*}\left[ln\left(\frac{z}{z_{0h}}\right) - \Psi_h\left(\frac{z}{L}\right) + \Psi_h\left(\frac{z_{0h}}{L}\right)\right] \qquad [8.163g]$$

dove Θ_0 e Θ_a sono rispettivamente la temperatura all'interfaccia aria-suolo e la temperatura dell'aria alla quota z. Utilizzando, poi, la relazione di Similarità del profilo della velocità media del vento per eliminare u_*, si ha che:

$$r_{ah} = \frac{1}{k^2 U(z)}\left[ln\left(\frac{z}{z_{0h}}\right) - \Psi_h\left(\frac{z}{L}\right) + \Psi_h\left(\frac{z_{0h}}{L}\right)\right] \cdot \left[ln\left(\frac{z}{z_0}\right) - \Psi_m\left(\frac{z}{L}\right) + \Psi_m\left(\frac{z_0}{L}\right)\right] \qquad [8.163h]$$

In modo analogo è definita la resistenza r_{av} che a tutti gli effetti può essere ritenuta uguale a r_{ah}.

Combinando tra loro questi due *ingredienti*, il bilancio energetico superficiale ed il concetto di resistenza al trasferimento di calore e di vapor d'acqua, sono stati sviluppati modelli in grado di definire la ripartizione dell'energia disponibile al suolo ($R_N - G_0$) in flusso turbolento di calore sensibile H_0 e latente H_E. (Galinski e Thomson, 1995).

8.6.1 IL MODELLO DI PENMAN-MONTEITH

Consideriamo inizialmente una *superficie bagnata* (uno specchio d'acqua o una superficie coperta da vegetazione bagnata) e siano T_0 e q_0 rispettivamente la temperatura e l'umidità specifica misurata all'interfaccia suolo-aria e T e q il valore della temperatura e dell'umidità specifica misurata ad una generica quota di riferimento z entro il *SL*.

Cerchiamo di calcolare <u>*la massima evaporazione possibile*</u> (<u>*evaporazione potenziale* E_P</u>); evidentemente essa ha luogo quando l'umidità all'interfaccia suolo-aria è pari al valore di saturazione e questa è la situazione tipica di una superficie *bagnata* come la superficie dei laghi e dei mari. Per prima cosa è necessario fare un'approssimazione che costituisce il punto cruciale del metodo. Se la presenza del vapor d'acqua nell'aria la quantifichiamo con l'umidità specifica q ($g_{\text{vapore}}/g_{\text{aria}}$), allora la situazione che stiamo considerando è ben rappresentata dalla **Fig. 8.62** che rappresenta l'andamento della tensione di vapore alla saturazione in funzione della temperatura.

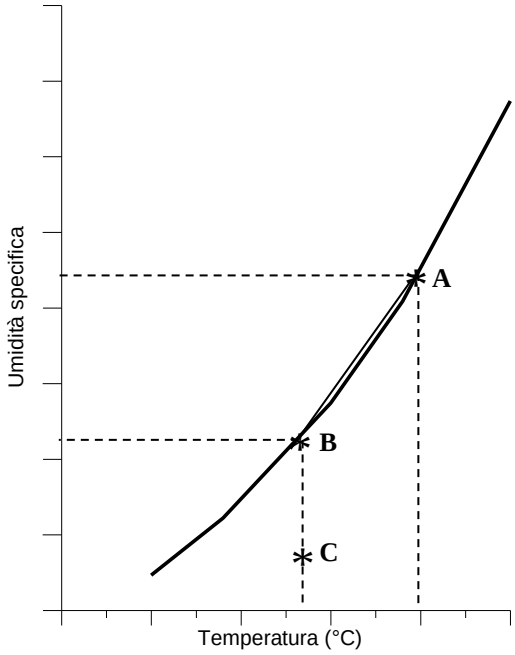


Fig. 8.62: linearizzazione nel modello di Penman-Monteith

In essa il *punto A* rappresenta l'umidità specifica alla saturazione q_{s0} alla temperatura T_0 a cui si trova il suolo. Questo punto rappresenta la situazione della superficie bagnata. Il *punto C*, invece, rappresenta la situazione dell'aria alla quota z: essa possiede una temperatura T_a ed una umidità specifica q_a in generale inferiore al valore di saturazione. Infine, il *punto B* rappresenta un'ipotetica situazione in cui anche l'aria è alla saturazione e quindi possiede la temperatura T_a ma una umidità specifica q_{sa}. È evidente che:

$$q_{s0} - q_a = (q_{s0} - q_{sa}) + q_{sa} - q_a \qquad [8.164a]$$

Se definiamo:

$$s = \frac{\partial q_s}{\partial T} \qquad [8.164b]$$

un'accettabile approssimazione (indicata in figura) è:

$$q_{s0} - q_a = s(T_0 - T_a) + q_{sa} - q_a = s(T_0 - T_a) + \delta q_a \qquad [8.164c]$$

dove δ_{qa} è il *deficit* di umidità dell'aria, cioè l'incremento che l'umidità specifica dell'aria dovrebbe avere per giungere alla saturazione. Il valore del gradiente s dipende in teoria dalla quota z a cui lo si calcola, ma visto che lo strato d'aria che consideriamo è di spessore piuttosto limitato,

è sufficiente ipotizzare di calcolarlo alla temperatura $(T_0+T_a)/2$.

A questo punto, per definizione di resistenza aerodinamica al trasporto di vapor d'acqua (che con buona approssimazione ipotizziamo coincida con la resistenza aerodinamica relativa al trasporto di calore), si ha che:

$$H_E = \frac{\rho\lambda}{r_{ah}}[s(T_0 - T_a) + \delta q_a] \qquad [8.164d]$$

ma ricordando la relazione che intercorre tra r_{ah} e H_0, essa si trasforma nella forma seguente:

$$H_E = \frac{\lambda s H_0}{\rho C_p r_{ah}} + \frac{\lambda\delta_a}{r_{ah}} \qquad [8.164e]$$

Esprimendo ora H_0 in termini di bilancio energetico superficiale ed utilizzando la definizione di rapporto psicrometrico, si giunge facilmente alle relazioni seguenti:

$$H_E = \frac{s}{\gamma + s}(R_N - G_0) + \frac{\rho C_p\, \delta_a / r_{ah}}{\gamma + s} \qquad [8.165a]$$

$$H_0 = \frac{\gamma}{\gamma + s}(R_N - G_0) - \frac{\rho C_p\, \delta_a / r_{ah}}{\gamma + s} \qquad [8.165a]$$

che, per una superficie bagnata, definiscono le modalità con cui l'energia disponibile $R_N - G_0$ si ripartisce nel flusso turbolento di calore sensibile e latente. Queste relazioni sono di tipo binomio: il primo termine (*Energy term*) dipende solo dalla disponibilità energetica all'interfaccia aria-suolo e dalla temperatura dell'aria, mentre il secondo termine (*Aerodynamic term*) rappresenta l'effetto combinato del deficit di vapor d'acqua posseduto dall'aria e della resistenza aerodinamica al trasporto di vapor d'acqua. Quest'ultima dipende poi dal tipo di turbolenza posseduta dal *PBL* (convettiva o stabile e quantificata dalla lunghezza di Monin-Obukhov *L*), dalle rugosità superficiali e dalla velocità del vento, come è facile vedere prendendo in considerazione la definizione di r_{ah}.

Normalmente la superficie non è alla saturazione e ciò è normale, per esempio, quando la superficie è coperta dalla vegetazione. In questo caso i meccanismi con cui c'è trasferimento tra l'umidità disponibile all'interfaccia aria-suolo (contenuta alla superficie vera e propria e all'interno degli stomi della vegetazione) sono molto complessi e dipendono dal tipo di vegetazione; tuttavia, sinteticamente possiamo affermare che questo trasferimento avviene in due fasi:

- in primo luogo, si ha la traspirazione tra gli elementi della vegetazione (per esempio le foglie) e l'aria immediatamente adiacente ad essa che giunge alla saturazione. Questo processo è prevalentemente di tipo biofisico;
- in secondo luogo, c'è un trasferimento turbolento di vapor d'acqua tra l'aria immediatamente adiacente alla vegetazione e l'aria del *PBL*.

Questo meccanismo a due fasi è accurato in condizioni relativamente stazionarie, dato che la vegetazione si autoregola in maniera da mantenersi in equilibrio con l'atmosfera circostante.

Quando l'umidità all'interfaccia aria-suolo non è alla saturazione, l'umidità superficiale q_0 risulta inferiore a $q_s(T_0)$, quindi si ha che:

$$H_E = \lambda E = \lambda\rho\frac{q_0 - q}{r_{av}} \qquad [8.166a]$$

dove la differenza di umidità specifica tra la superficie e l'aria sovrastante può quindi essere espressa come:

$$q_0 - q = q_s(T_0) - q - (q_s(T_0) - q_0) = s(T_0 - T) + \delta q_a - \delta q_0 \qquad [8.166b]$$

È semplice ripercorrere i passi fatti a proposito di una superficie saturata (Garratt, 1992)

giungendo alla relazione seguente che esprime il flusso latente di calore in funzione dell'energia disponibile all'interfaccia aria-suolo:

$$H_E = \frac{s}{\gamma + s}(R_N - G_0) + \left(1 - \frac{s}{\gamma + s}\right) \cdot \rho\lambda \frac{\delta q - \delta q_0}{r_{ah}} \qquad [8.166c]$$

Anche in questo caso il flusso latente di calore dipende dall'energia disponibile, ma dato che δq_0 non è nullo, risulta inferiore al massimo valore possibile corrispondente al flusso latente che si instaura al di sopra di una superficie bagnata. La presenza di uno strato di vegetazione sopra la superficie introduce ulteriori complicazioni derivanti dai complessi meccanismi di traspirazione delle piante. Come si vedrà nel Capitolo successivo, tutto questo meccanismo di traspirazione viene *condensato* in una opportuna *resistenza superficiale* r_s definita come:

$$r_s = \frac{\rho\lambda\delta q_0}{H_E} \qquad [8.166d]$$

Introducendo questa nuova resistenza nella (8.166c) ed impiegando il bilancio energetico superficiale, si giunge dopo un po' di algebra alle due relazioni seguenti che esprimono il flusso turbolento di calore sensibile e latente (Berkowicz e Prahm, 1982a):

$$H_E = \frac{(R_N - G_0) \cdot s \cdot r_{ah} \cdot \gamma^{-1} + \rho C_p \cdot \gamma^{-1} \delta q_a}{r_s + (1 + s \cdot \gamma^{-1}) \cdot r_{ah}} \qquad [8.167a]$$

$$H_0 = \frac{(R_N - G_0) \cdot (r_{ah} + r_s) - \rho C_p \cdot \gamma^{-1} \delta q_a}{r_s + (1 + s \cdot \gamma^{-1}) \cdot r_{ah}} \qquad [8.167b]$$

Questo modello è il celebre modello di Penman-Monteith che consente di stimare la ripartizione dell'energia disponibile all'interfaccia aria-suolo in H_E e H_0. Ulteriori dettagli su questo metodo possono essere trovati in Garratt (1992) e Oke (1987).

L'applicazione pratica del modello di Penman-Monteith non è semplice visto che, accanto a grandezze facilmente misurabili come R_N e G_0, sono richieste anche altre variabili di difficile determinazione. Tuttavia, la sua importanza sta nell'evidenziare alcune peculiarità del trasferimento di energia e massa all'interfaccia suolo-aria:

- sia il flusso turbolento di calore sensibile che il flusso turbolento latente sono proporzionali all'energia disponibile all'interfaccia suolo-aria;
- l'uno prevale sull'altro, a parità di energia disponibile, in funzione delle caratteristiche del suolo, in particolare più il suolo risulta vicino alla saturazione, più elevata è la frazione di energia disponibile che viene dedicata all'evaporazione dell'acqua e quindi al flusso latente.

Il problema nell'applicazione pratica di questo metodo sta nella determinazione della resistenza superficiale r_s. Molto è stato scritto in proposito, ma le varie correlazioni e teorie proposte, soprattutto in ambito agrometeorologico, richiedono misure normalmente non disponibili. Solo alcune particolarmente semplificate possono essere usate operativamente, come per esempio quelle proposte nei lavori di Berkowicz e Prahm (1982a), De Roy e Holtslag (1999) e Crawford e Bluestein (2000) per quanto riguarda le superfici con vegetazione e quelle proposte nel lavoro di Grimmond e Oke (1991) per quanto riguarda le aree urbane. Come esempio, qui di seguito riportiamo due possibili modelli per la stima della resistenza r_s, salvo tornare sull'argomento al Capitolo 15:

- Modello 1: questo semplicissimo modello è stato proposto da De Roy e Holtslag (1999) e ipotizza che la resistenza superficiale dipenda esclusivamente dal deficit di umidità dell'aria δq_a (espresso in $g_{acqua} \cdot k_{garia}^{-1}$) secondo la relazione:

$$r_s = a + b \cdot \delta q_a \qquad [8.168]$$

dove le costanti numeriche a e b assumono rispettivamente i valori 15 e 7. Questa relazione, ai fini pratici, si può anche semplificare nella seguente:

$$r_s = 10\delta q_a \quad [8.169]$$

- Modello 2: questo modello sostanzialmente coincide con quanto proposto da Grimmond e Oke (1991) ed ipotizza anche questa volta che r_s dipenda da δq_a, R_N e T, ma in maniera più complessa secondo la relazione:

$$r_s = \frac{1}{c_1} f_1(R_N) \cdot f_2(\delta q_a) \cdot f_3(T) \quad [8.170a]$$

dove:

$$f_1 = \frac{725(R_N + c_2)}{R_N(725 + c_2)} \quad [8.170b]$$

$$f_2 = \begin{cases} 1/(1 - c_3\delta q_a) & 0 < \delta q_a < 8.91 \\ 1/(1 - 8.91c_3) & \delta q_a \geq 8.91 \end{cases} \quad [8.170c]$$

$$f_3 = \frac{(c_5 - T_L) \cdot (T_H - c_5)^{\omega}}{(T - T_L) \cdot (T_H - T)^{\omega}} \quad [8.170d]$$

$$\omega = \frac{T_H - c_5}{c_5 - T_H} \quad [8.170e]$$

Le costanti c_1, c_2, c_3 e c_5 presenti nelle varie correlazioni assumono rispettivamente i valori seguenti: 53.41 (mm·s^{-1}), 104.4 (W·m^{-2}), 0.0821 (K·g·g^{-1}) e 18.88 (°C).

8.6.2 IL MODELLO DI PRIESTLEY-TAYLOR

La non facile applicabilità pratica del modello di Penman-Monteith dovuta ai vari tipi di resistenza presenti nelle relazioni che esprimono il flusso turbolento di calore sensibile e latente, ha indotto ad una sua drastica semplificazione. Il modello di questo tipo attualmente più impiegato nelle applicazioni pratiche non agrometeorologiche (dove regna sovrano il metodo originale di Penman-Monteith) è il metodo di Priestley-Taylor modificato da De Bruin e Holtslag (1982). Ulteriori dettagli, soprattutto legati all'uso di *routine* del modello possono essere trovati in De Bruin (1983), Holtslag e Van Ulden (1983), Van Ulden e Holtslag (1985), Holtslag e De Bruin (1988), Beljaars e Holtslag (1991), Hanna e Chang (1992). Questo modello, che concettualmente è una drastica semplificazione del metodo di Penman-Monteith, ripartisce l'energia disponibile all'interfaccia aria-suolo in flusso turbolento sensibile e latente secondo le relazioni seguenti:

$$H_0 = \frac{(1 - \alpha) + \gamma/s}{1 + \gamma/s}(R_N - G_0) - \beta \quad [8.171a]$$

$$H_E = \frac{\alpha}{1 + \gamma/s}(R_N - G_0) + \beta \quad [8.171b]$$

dove compaiono due parametri semiempirici α e β che dipendono dal tipo di suolo e soprattutto dal suo contenuto di umidità. In pratica, il rapporto γ/s può essere determinato con la relazione:

$$\gamma/s = exp[-0.055 \cdot (T - 279)] \quad [8.171c]$$

Dal punto di vista concettuale, questo modello non ha introdotto un reale vantaggio rispetto all'originario modello di Penman-Monteith, visto che condensa in due parametri tutte le complicazioni insite nel modello originario (in particolare il tipo di suolo e la vegetazione presente), senza peraltro fornire indicazioni su come stimarli. Tuttavia, l'esteso uso pratico che in questi ultimi decenni si è fatto di questo modello ha portato ad individuare alcuni valori caratteristici per i due parametri. Per il parametro β, c'è ormai un accordo unanime nell'attribuirgli il

valore di 20 ($W \cdot m^{-2}$), indipendentemente dal tipo di superficie considerata e dalla sua umidità. Per quanto riguarda invece il parametro α, alcuni valori tipici tratti da (Hanna e Chang, 1992) sono stati riportati nella **Tab.8.2**.

Tipo di Suolo	α
deserto secco senza pioggia per mesi	0.0 ÷0.2
zone rurali aride	0.2÷0.4
campi coltivati o meno, in periodi secchi	0.4÷0.6
ambiente urbano	0.5÷1.0
campi coltivati nei periodi umidi e foreste	0.8÷1.2
laghi ed oceani	1.2÷1.4

Tab.8.2: valori caratteristici per il parametro a del modello di Priestley-Taylor modificato

Esercizio 8.7

Consideriamo due distinte località, una desertica e secca e l'altra umida con la presenza della foresta pluviale. Per le due località, ad un certo istante la radiazione netta sia pari a R_N = 600 W/m^2. Se per entrambe le località la temperatura dell'aria è pari a 310 K ed il flusso di calore all'interfaccia aria-suolo è pari a $G_0 = 0.15\ R_N$, determinare per ognuna delle due località il flusso turbolento di calore sensibile H_0 e latente H_E. Per entrambe le località, che presentano la medesima temperatura media caratteristica, il rapporto γ/s è pari a 0.18 ed è immediato constatare che G_0 = 90 Wm^2.
Se consideriamo inizialmente la località desertica, dalla *Tab. 8.2* deduciamo che il valore di α può essere posto pari a 0.2. In questo caso si ha che:

$$H_0 = \frac{1-0.2}{1.18}(600-90) - 20 = 325\ \mathrm{Wm}^2$$

$$H_E = 600 - 90 - 325 = 184\ \mathrm{Wm}^2$$

quindi la maggior parte dell'energia disponibile all'interfaccia aria-suolo viene tramutata in turbolenza.
Se consideriamo, invece, la foresta pluviale in cui la disponibilità di acqua da evaporare è notevolmente maggiore, vediamo che il valore appropriato per il coefficiente α è di 0.8 ed è immediato constatare che la stima di H_0 e di H_E è rispettivamente pari a 66 e 444 Wm^{-2}. Nella foresta pluviale quasi tutta l'energia disponibile al suolo è utilizzata nel processo di evapotraspirazione.

8.7 LA CONVETTIVITÀ

Quando il *PBL* si trova in situazioni convettive con un terreno orizzontalmente omogeneo, la sua struttura verticale evidenzia tre stratificazioni tipiche, ben evidenziate dal profilo verticale della temperatura potenziale virtuale. In particolare, risultano facilmente distinguibili:

- uno *Strato Superficiale (SL)*, a contatto col suolo e di estensione verticale dell'ordine del 10% dell'intero *PBL*, dove il gradiente di temperatura potenziale è negativo nei pressi della superficie e tende ad annullarsi con l'aumentare della quota. In esso vale la Teoria della similarità di Monin-Obukhov. Si può ritenere poi che questo strato termini quando il gradiente di temperatura potenziale raggiunge un valore prossimo allo zero. Di tale strato si è finora ampiamente parlato, evidenziandone le caratteristiche principali e soprattutto il suo ruolo nella produzione della turbolenza meccanica e convettiva;
- uno *Strato Rimescolato (ML)*, con un gradiente di temperatura potenziale circa nullo. In questo strato si instaura una circolazione ad area limitata di grandi *strutture coerenti* che

lo rimescolano costantemente e completamente, consentendo, tra l'altro, la dispersione degli inquinanti ed il trasporto in quota del vapor d'acqua per la formazione delle nuvole. Le principali variabili d'interesse, come la temperatura potenziale virtuale media, l'umidità media o il valor medio delle due componenti orizzontali del moto variano poco con la quota e, almeno in prima approssimazione, possono ritenersi costanti, anche se ad un esame più dettagliato, esse non mostrano sempre una completa uniformità verticale, a causa dei processi di rimescolamento che non sono istantanei ed a causa del rimescolamento che è parzialmente contrastato dalle forzanti che agiscono alla sommità e alla base del *ML*. In particolare, la temperatura potenziale media presenta un minimo circa a metà del *ML*, dato che la sua parte inferiore viene riscaldata dal flusso turbolento di calore al suolo mentre la parte superiore viene riscaldata dall'alto a causa dell'*entrainment* di aria calda dall'alto. Non tutte le grandezze si comportano in questo modo. Per esempio, l'umidità media diminuisce leggermente con la quota e ciò è dovuto al fatto che l'evaporazione porta vapor d'acqua dal suolo, mentre l'*entrainment* porta aria secca dall'alto (Stull, 1989);

- uno *Strato di Entrainment (EL)*, in cui il gradiente di temperatura potenziale risulta fortemente positivo. Tale strato agisce come una barriera fisica ai movimenti verticali delle grosse strutture coerenti. La sua importanza sta nel frenare queste masse d'aria che debordando un poco nella sovrastante atmosfera libera, catturano aria da quest'ultima e la trascinano entro gli strati sottostanti consentendo quindi l'accrescimento verticale del *PBL* nel suo complesso. Questo processo di cattura (l'*entrainment*) ha luogo a causa della stratificazione termica estremamente stabile presente che determina condizioni favorevoli alla generazione di onde di Kelvin-Helmholtz la cui instabilità alimenta il processo di cattura di aria calda (dal punto di vista della temperatura potenziale) dall'atmosfera libera sovrastante e la sua introduzione nel *ML* dopo aver fornito la necessaria energia perché ciò avvenga.

L'insieme di questi tre strati di atmosfera costituisce il *PBL* convettivo. Nei punti che seguono da un lato studieremo la complessa circolazione delle masse d'aria organizzate in strutture coerenti e dall'altra cercheremo di definire un modello per questo tipo di *PBL* e per la stima della sua estensione verticale. Va infine sottolineato che non esiste un accordo unanime nella definizione dell'altezza del *PBL* convettivo, normalmente indicata col simbolo z_i: spesso la si identifica con la sommità dello strato di *EL*, altre volte come la sommità del *ML*, a volte come una quota intermedia tra le due.

8.7.1 LE STRUTTURE COERENTI

La caratteristica principale di un *PBL* convettivo sta nel fatto che all'interfaccia aria-suolo si viene a costituire un flusso di calore verticale diretto verso l'alto che si trasferisce all'atmosfera sovrastante. Questa continua immissione di calore, associata all'*entrainment* dell'aria della libera atmosfera, alimenta le circolazioni d'aria che, nel tempo, accrescono verticalmente il *PBL*. Questo trasferimento di calore superficiale non deve essere visto come un processo continuo nello spazio e nel tempo, ma piuttosto come un *processo intermittente*. Esso ha origine in corrispondenza di numerose porzioni di suolo di estensione limitata dove si vanno a formare inizialmente delle *bolle* di aria calda schiacciate sopra il suolo che successivamente aumentano la propria dimensione verticale fino a dar luogo a strutture coerenti verticali, inclinate nella direzione del vento, che ad un certo punto lasciano il suolo e si innalzano nelle parti superiori del *PBL*. Queste strutture coerenti, normalmente vengono indicate col termine *piume termiche*, sono di estensione orizzontale relativamente limitata ed hanno un'origine spaziale e temporale pressoché casuale, ricordando la formazione delle bolle di vapore sul fondo di una pentola piena di acqua prossima all'ebollizione. Questo processo è altamente discontinuo ed intermittente e ciò è evidenziato dall'andamento temporale delle principali variabili meteorologiche.

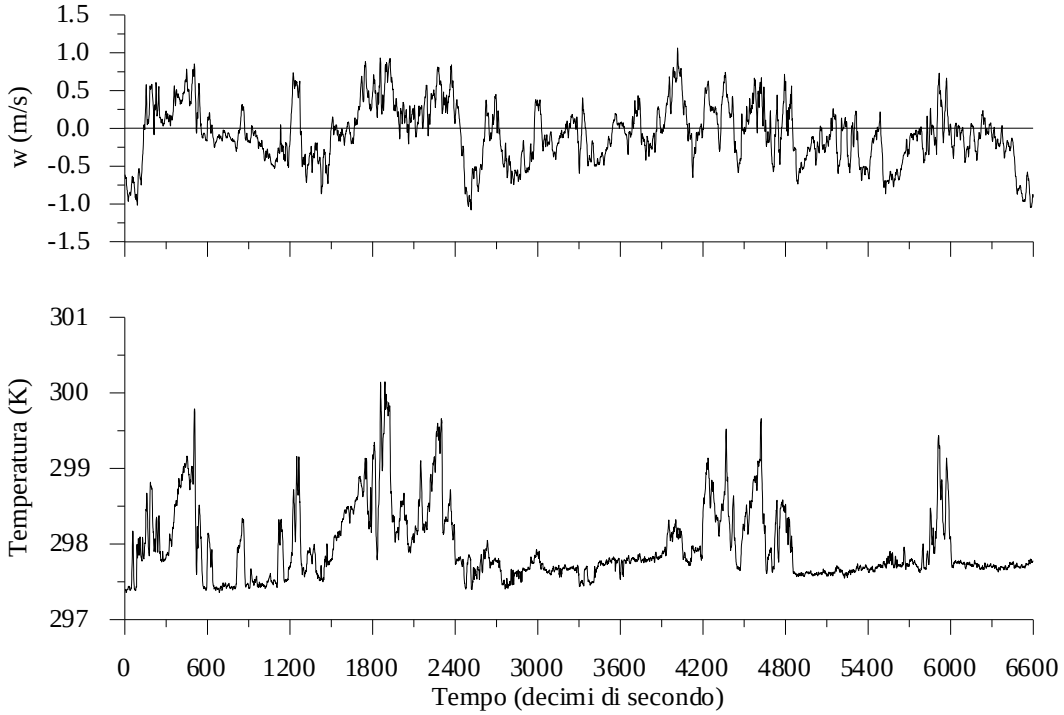


Fig.8.63: variazione nel tempo della temperatura e della componente verticale del vento in una situazione convettiva

Se consideriamo, per esempio, la **Fig. 8.63** in cui è riportato l'andamento nel tempo della temperatura e della componente verticale del vento per un periodo di 11 minuti rilevato nei pressi del suolo in una situazione convettiva tipica, possiamo notare come il segnale di temperatura presenti un tipico andamento *a rampa*, costituito cioè da lenti aumenti circa lineari della temperatura seguiti da repentine diminuzioni. Le rampe sono intervallate da periodi più o meno lunghi di apparente *inattività* ed il risultato è un tipico segnale a *dente di sega*. Se focalizziamo l'attenzione alle rampe mostrate in figura, possiamo notare che, mentre la temperatura inizia a crescere, la velocità verticale diviene positiva, cosa che sta a significare la presenza di un flusso ascendente di aria calda (la piuma termica). Ad un certo punto la bolla d'aria calda si stacca dal suolo ed il suo posto viene preso da altra aria più fredda (*processo di rinnovamento*) e ciò è visibile nella figura dal fatto che alla fine della salita, la temperatura scende bruscamente al di sotto del suo livello *base* (è arrivata dell'aria più fredda) e questo arrivo è ulteriormente segnalato dalla velocità verticale fortemente negativa. Per un po' non succede nulla, poi riprende il processo di formazione della bolla d'aria calda negli stessi termini visti in precedenza.

Se invece di analizzare, come si è fatto nella **Fig.8.63**, un periodo di soli 11 minuti, analizzassimo un'intera ora, potremmo applicare una *tecnica di separazione degli eventi* registrati che prenda in considerazione la fluttuazione w e T della componente verticale del vento e della temperatura rispetto al loro valor medio orario, separando gli eventi nelle classi seguenti:

- eventi con $w > 0$ e $T > 0$: tali eventi vengono detti *ejection* e rappresentano particelle d'aria che vengono riscaldate e *sparate* verso l'alto;
- eventi con $w < 0$ e $T < 0$: tali eventi vengono detti *sweep* e rappresentano particelle d'aria che *rinnovano* l'aria calda che sale nei pressi della superficie;
- eventi con $w > 0$ e $T < 0$: tali eventi vengono detti *outward interaction* e rappresentano particelle d'aria che in qualche modo non appartengono alla piuma calda ma che, stando al suo bordo, vengo da essa trascinata verso l'alto;

- eventi con $w < 0$ e $T > 0$: tali eventi vengono detti *inward interaction* e rappresentano particelle d'aria che vengono *perse* dalla piuma calda interagendo con l'aria circostante.

In pratica questa tecnica di separazione raggruppa i dati elementari misurati nei quattro quadranti sopra individuati e consente di evidenziare quali tra i differenti eventi è maggiormente probabile. Questa tecnica di analisi prende il nome di *campionamento condizionale* (*conditional sampling*) e per maggiori dettagli si veda, per esempio, Katul e al. (1997). Se applichiamo questa tecnica all'intera ora di dati di cui abbiamo rappresentato una piccola porzione in **Fig. 8.63**, otteniamo quanto riportato nella **Fig. 8.64**. Quello che si nota in questa figura è che i quattro quadranti *non sono equiprobabili*, che gli *ejection* e *sweep* sono molto più numerosi degli eventi *interaction* e che c'è una notevole asimmetria nella distribuzione delle fluttuazioni di temperatura e di velocità verticale, cosa che vedremo essere comune anche entro il *ML*.

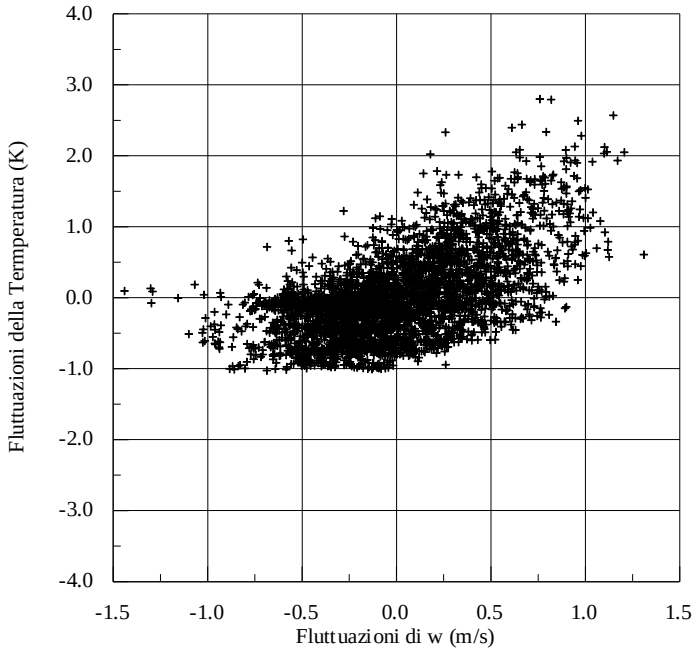


Fig.8.64: applicazione del conditional samplig in una situazione convettiva

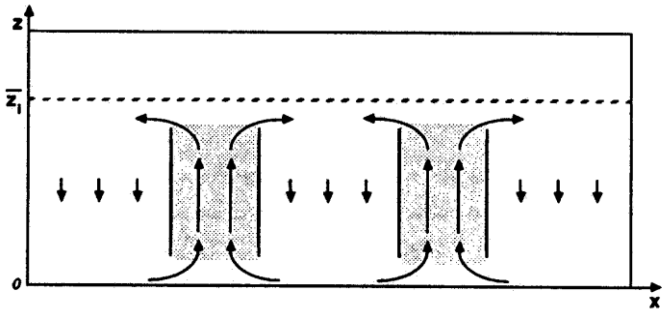


Fig.8.65: updraft e downdraft nel PBL convettivo (Stull, 1989)

Una volta innalzatesi, a breve distanza dal suolo le piume termiche, numerose e relativamente piccole, iniziano un *progressivo processo di aggregazione* che porta alla costruzione di strutture coerenti di notevoli dimensioni e di tipo colonnare che percorrono compatte il *ML*. In realtà quello che si origina in assenza di vento (o con velocità media del vento bassa) è un insieme di colonne d'aria calda che salgono verso la parte alta del *PBL* (Hunt e al. 1988). Tali colonne d'aria ascendenti (dette *updraft*) sono confinate in una regione piuttosto limitata e lo spazio tra di esse è riempito da aria in lenta discesa sempre organizzata in strutture coerenti (dette *downdraft*).

Gli *updraft* sono caratterizzati da una velocità ascensionale media piuttosto elevata e dell'ordine di grandezza della velocità convettiva di scala w_*, mentre i *downdraft*, che sono analoghe colonne questa volta discendenti e che si generano per garantire la continuità, occupano una porzione più vasta dello spazio ed hanno una velocità media inferiore (**Fig.8.65**).

Raggiunta la sommità del *PBL*, alcuni *updraft sconfinano* nell'atmosfera libera sovrastante (*overshoot*) dove però incontrano aria caratterizzata da una temperatura potenziale superiore e quindi si trovano a possedere un galleggiamento negativo. Se potessero, si disperderebbero nell'atmosfera libera, ma ciò non è possibile per il bassissimo livello di turbolenza presente in questa zona dell'atmosfera. Quindi l'unica cosa che possono fare è ridiscendere, trascinandosi dietro (e quindi inglobando) una parte di aria dell'atmosfera libera (**Fig. 8.66**). Questo processo di *entrainment a senso unico* fa sì che complessivamente il *PBL si espanda verticalmente* e che aria meno turbolenta venga inglobata in aria a maggior turbolenza che scende al suolo; qui il *downdraft* acquista tutta l'energia di cui ha bisogno per riprendere la salita. L'insieme degli *updraft* e *downdraft* costituiscono una circolazione che ha una scala orizzontale pari a circa 1.5 z_i, dove z_i è l'altezza del *PBL*.

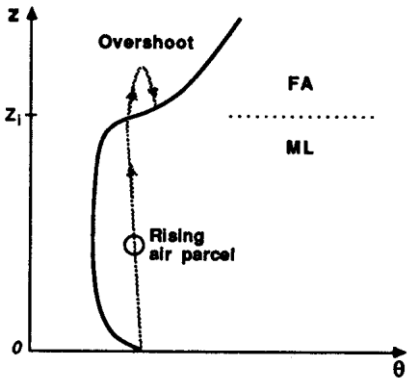


Fig. 8.66: fenomeno dell'overshoot di un vortice turbolento (Stull, 1989).

Una misura Euleriana della componente verticale del vento nel *PBL* deve evidenziare la presenza degli *updraft* e *downdraft*, dato che i primi occupano una ridotta porzione di spazio ma hanno una velocità ascensionale superiore, mentre i secondi occupano una porzione molto più vasta di spazio e sono caratterizzati da velocità discenti in modulo molto inferiori. Weil (1990) ha sviluppato una parametrizzazione per la stima della velocità media degli *updraft* w_u e *downdraft* w_d basata sia su dati sperimentali rilevati con campagne aeree sia su risultati modellistici condotti con modelli di simulazione ad altissima risoluzione, ottenendo i risultati seguenti:

$$w_u(z) = \sigma_w(z) \cdot \left[0.21Sk(z) + 0.5 \cdot (0.18Sk^2(z) + 1.23)^{1/2}\right] \quad [8.172a]$$

$$w_d(z) = \sigma_w(z) \cdot \left[0.21Sk(z) - 0.5 \cdot (0.18Sk^2(z) + 1.23)^{1/2}\right] \quad [8.172b]$$

dove *Sk* è la *Skewness* della componente verticale del vento. In precedenza, sono state riportate alcune Relazioni di Similarità che consentono di Stimare il profilo verticale in tutto il *PBL* di σ_w e *Sk*, tuttavia nel riferimento citato, Weil consiglia le relazioni seguenti:

$$\frac{\sigma_w}{w_*} = \left[\left(\frac{u_*}{w_*}\right)^3 \left(1.6 - \frac{z}{z_i}\right)^{3/2} + 1.2\frac{z}{z_i}\left(1 - 0.98\frac{z}{z_i}\right)^{3/2}\right]^{1/3} \quad [8.172c]$$

$$\frac{\overline{w^3}}{w_*^3} = 0.84\frac{z}{z_i}\left(1 - \frac{z}{z_i}\right) \quad [8.172d]$$

$$Sk = \frac{\overline{w'^3}}{\sigma_w^3} \quad [8.172e]$$

Sperimentalmente si è poi verificato che la *funzione di densità di probabilità p(w) della componente w* presenta una *skewness negativa*, cosa che può essere rappresentata dalla somma di due distribuzioni Gaussiane. A tal proposito, Luhar e Britter (1989) hanno proposto che:

$$p(w,z) = A \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A} exp\left[\frac{(w-w_A)^2}{2\sigma_A^2}\right] + B \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_B} exp\left[\frac{(w+w_B)^2}{2\sigma_B^2}\right] \qquad [8.173a]$$

dove:

$$\sigma_A = w_A \qquad \sigma_B = w_B \qquad [8.173b]$$

$$w_A = \overline{w^2}/2w_B \qquad w_B = \frac{\sqrt{\left(\overline{w^3}\right)^2 + 8\left(\overline{w^2}\right)^3} - \overline{w^3}}{4\overline{w^2}} \qquad [8.173c]$$

$$A = w_B/(w_A + w_B) \qquad B = w_A/(w_A + w_B) \qquad [8.173d]$$

Nella **Fig.8.67** è presentata questa funzione di densità di probabilità per diversi valori della quota adimensionale z/z_i.

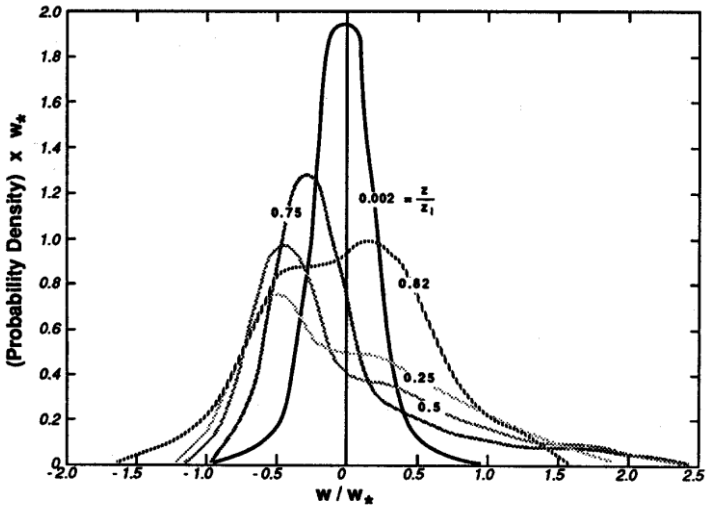


Fig:8.67: distribuzione di probabilità della componente w del vento in funzione del rapporto z/z_i (Stull, 1989).

Quanto fin qui presentato si riferisce a situazioni caratterizzate da venti bassi o moderati. Quando invece la velocità del vento supera i 6 m/s, queste strutture coerenti si deformano, formando caratteristiche *strutture a rulli* allineate parallelamente alla direzione del vento (**Fig.8.68**). Come si vede, i *rulli* sono in rotazione lungo un asse parallelo alla direzione del vento e due rulli adiacenti ruotano in senso opposto creando così alternativamente un corridoio d'aria ascendente e discendente. Spesso alla sommità del corridoio ascendente si hanno formazioni nuvolose disposte lungo linee, sempre parallele al vento e note come *strade di nuvole (cloud streets)*.

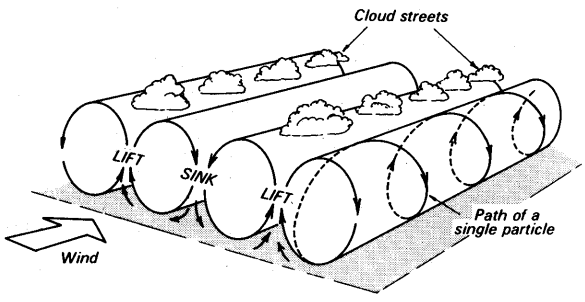


Fig. 8.68: vortici a rullo e strade di nuvole (da Oke, 1987)

8.7.2 MODELLO SEMPLIFICATO DEL PBL CONVETTIVO

Anche se il modello operativo di *PBL* è perfettamente in grado di descrivere la struttura convettiva dell'atmosfera, in una situazione di omogeneità orizzontale, il profilo verticale delle principali variabili meteorologiche durante le situazioni convettive presenta caratteristiche tali da suggerire utili semplificazioni. La semplificazione più naturale cui si possa pensare è quella che ipotizza:

- uno Strato Superficiale di estensione verticale molto ridotta rispetto all'estensione verticale del *ML*;
- uno Strato di *Entrainment*, posto alla sommità del *ML*, di estensione verticale infinitesima.

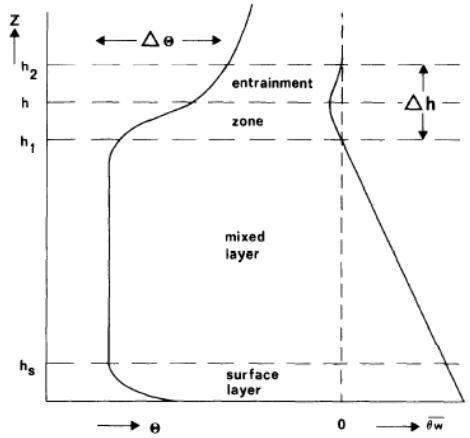


Fig. 8.69: profilo verticale della temperatura potenziale e del flusso turbolento di calore sensibile nelle situazioni convettive (Driedonks e Tennekes, 1984)

La situazione reale è schematizzata nella **Fig. 8.69** (dove è presentato il profilo verticale della temperatura potenziale media e del flusso di calore sensibile) già discussa in precedenza, mentre questa semplificazione (nota come *zero-order jump model* o <u>*slab model*</u>) può essere efficacemente descritta dalla **Fig. 8.70**.

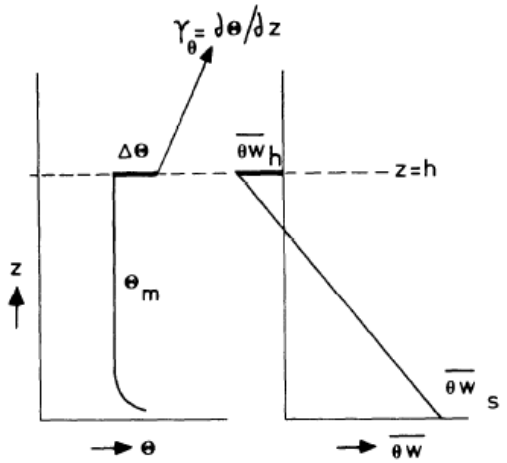


Fig. 8.70: profilo verticale della temperatura potenziale e del flusso turbolento di calore sensibile nelle situazioni convettive secondo lo slab model (Driedonks e Tennekes, 1984)

Confrontando le due figure che descrivono entrambe il profilo verticale della temperatura potenziale virtuale media Θ e del profilo verticale del flusso turbolento di calore sensibile (in forma cinematica), si possono fare alcune considerazioni:

- in un *PBL* ad elevata convettività, lo spessore del *SL* è sostanzialmente trascurabile e ciò comporta che la temperatura potenziale media Θ possa essere considerata costante in tutto il *PBL* e pari al valore che assume nel *ML*, cioè pari a Θ_m. Questa ipotesi è decisamente confermata dalla realtà;
- tutto lo Strato di *Entrainment*, dove ha luogo l'inglobamento dell'aria calda della atmosfera libera nel *PBL* che ne determina l'evoluzione nel tempo, in generale non è di spessore trascurabile e spesso raggiunge il 30% dell'estensione dell'intero *ML*. Alla sua base il flusso di calore, che presentava un profilo verticale lineare in tutto il *ML*, si annulla e nel suo interno prima diminuisce ulteriormente raggiungendo valori negativi; quindi, aumenta nuovamente (sempre con valori negativi) fino ad annullarsi alla sua sommità. La semplificazione adottata nello *slab model*, invece, ritiene questo strato di dimensione infinitesima. In uno spessore verticale infinitesimo la temperatura media dell'aria varia di $\Delta\Theta$ ed immediatamente al di sopra del salto cresce in maniera lineare con un gradiente γ_θ tipico dell'atmosfera libera. Il fatto che questo salto di spessore infinitesimo rappresenti in modo molto condensato il processo di cattura dell'aria calda dall'atmosfera libera e la sua introduzione nel *PBL* comporta che in corrispondenza della base del salto il flusso di calore, che presenta un profilo verticale completamente lineare, raggiunga valori negativi pari a $\overline{w\theta}_h$, mentre alla sua sommità il flusso di calore si annulla. In sostanza, lo *slab model* ipotizza che oltre ad un flusso di calore $\overline{w\theta}_0$ alla superficie e diretto verso l'alto prodotto dal contributo energetico solare, nel *PBL* convettivo ci sia anche un altro flusso turbolento di calore sensibile $\overline{w\theta}_h$ diretto verso il basso (e quindi negativo) prodotto dal processo di *entrainment*. Come si vede, questa schematizzazione non sempre è vicina alla realtà delle cose.

Lo *slab model* può essere esteso anche ad altre variabili meteorologiche. In particolare, se consideriamo il vento, ponendoci in un sistema di riferimento in cui l'asse *x* è orientato secondo lo *stress* superficiale (e quindi secondo la direzione media del moto, se si tratta di terraferma), il profilo semplificato che si ottiene seguendo la logica dello *slab model* è quello presentato nella **Fig. 8.71** in cui la velocità media del vento è sostanzialmente costante entro tutto il *PBL* e pari a U_m fino al di sotto del salto infinitesimo che rappresenta *EL*. In questo strato infinitesimo la velocità media del vento varia bruscamente di ΔU, adeguandosi istantaneamente al valore dell'atmosfera immediatamente sopra il *PBL*. Poi la velocità cresce nell'atmosfera libera in maniera lineare con uno *shear* costante S_x. Lo *stress* di Reynolds $\overline{uw}_0$ ricevuto al suolo decresce linearmente con la quota fino a raggiungere il valore $\overline{uw}_h$ sotto il salto. Nel salto questo valore si riduce immediatamente a zero, valore tipico dell'atmosfera libera.

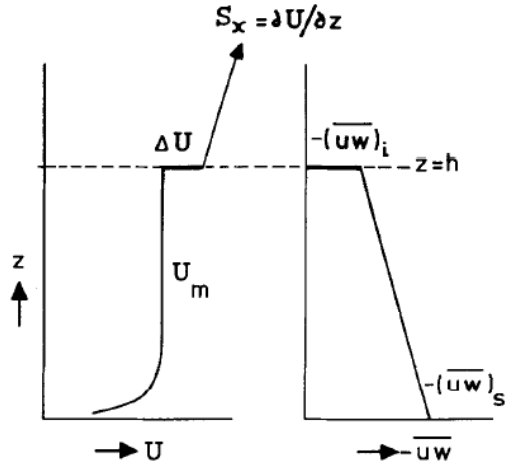


Fig. 8.71: profilo della velocità del vento secondo lo slab model (Tennekes e Driedonks 1981)

Una volta introdotto in maniera fenomenologica, è necessario ora definire le equazioni che descrivono lo *slab model*. Per questo faremo ampio riferimento ai lavori di Tennekes (1973), Tennekes e Driedonks (1981) e Driedonks e Tennekes (1984). A tal proposito, è opportuno ricordare che, se ad un certo istante *t* una generica variabile media ξ presenta un profilo $\xi(z)$, il valore considerato dallo *slab model*, costante entro tutto il *PBL*, sarà dato da:

$$\xi_m = \frac{1}{z_i}\int_0^h \xi(z)\cdot dz \qquad [8.174]$$

Se consideriamo inizialmente l'equazione prognostica per la temperatura potenziale virtuale, integrandola dal suolo fino alla sommità del *PBL*, ignorando l'avvezione, l'irraggiamento e l'eventuale presenza di nuvole, si ottiene la relazione prognostica seguente:

$$\frac{d\Theta_m}{dt} = [\overline{w\theta}_s - \overline{w\theta}_h]/h \qquad [8.175a]$$

in cui, per semplicità tipografica, con *h* si è indicata l'estensione verticale del *PBL*, normalmente indicata come z_i. Questa equazione descrive l'evoluzione nel tempo della temperatura caratteristica del *PBL* in funzione dei flussi turbolenti di calore sensibile al suolo e all'*entrainment* e della sua estensione verticale. Bisogna, ora, individuare una relazione che descriva come varia nel tempo il *salto* di temperatura potenziale $\Delta\Theta$. Fisicamente, $\Delta\Theta$ dovrà decrescere al crescere della temperatura media Θ_m del *PBL*, ma dovrà crescere con l'aumento della sua estensione verticale. In pratica dovrà valere la relazione:

$$\frac{d\Delta\Theta}{dt} = \frac{d\Theta}{dz}\cdot\frac{dh}{dt} - \frac{d\Theta_m}{dt} = \gamma_\theta\frac{dh}{dt} - \frac{d\Theta_m}{dt} \qquad [8.175b]$$

cioè:

$$\frac{d\Delta\Theta}{dt} = \gamma_\theta\frac{dh}{dt} - \frac{\overline{w\theta}_s - \overline{w\theta}_h}{h} \qquad [8.175c]$$

Serve ora una relazione che connetta tra loro la variazione col tempo dell'estensione verticale del *PBL*, il salto di temperatura $\Delta\Theta$ ed il flusso turbolento di calore sensibile all'*entrainment*. Semplici ragionamenti energetici (Tennekes 1973) con l'aiuto *della* **Fig. 8.72** conducono alla relazione:

$$-\overline{w\theta_h} = \Delta\Theta\frac{dh}{dt} \qquad [8.175d]$$

Che lega tra loro l'estensione verticale del *PBL*, il salto di temperatura $\Delta\Theta$ ed il flusso turbolento di calore sensibile all'*entrainment.*

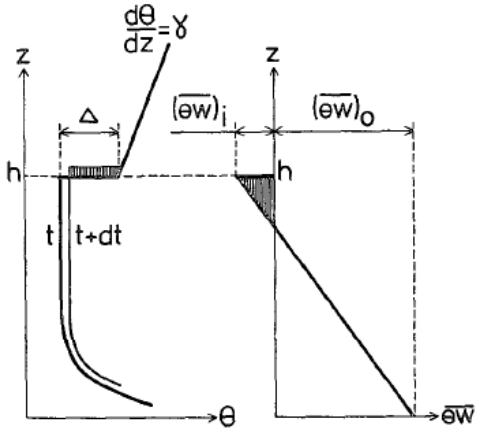


Fig. 8.72: meccanismo che conduce alla relazione (8.175d) (Tennekes 1973)

Se ora consideriamo le relazioni della fluidodinamica relative alle due componenti

orizzontali medie del vento, lo *slab model* prevede per esse le relazioni seguenti:

$$\frac{dU_m}{dt} = +f\left(V_m - V_{gm}\right) + (\overline{uw}_0 - \overline{uw}_h)/h \qquad [8.176a]$$

$$\frac{dV_m}{dt} = -f\left(U_m - U_{gm}\right) + (\overline{vw}_0 - \overline{vw}_h)/h \qquad [8.176b]$$

dove f è il coefficiente di Coriolis, U_{gm} e V_{gm} sono le componenti del vento geostrofico e le covarianze presenti, se hanno pedice $_0$ si riferiscono ai valori rilevati al suolo, mentre se hanno il pedice $_h$ sono i valori relativi alla sommità dell'*entrainment*.

Analogamente a quanto fatto per la temperatura, lo *slab model* propone anche equazioni per l'evoluzione temporale del salto ΔU e ΔV nell'*entrainment* che risultano rispettivamente:

$$\frac{d\Delta U}{dt} = S_x\frac{dh}{dt} - \frac{1}{h}[\overline{uw}_0 - \overline{uw}_h] + f\Delta V \qquad [8.176c]$$

$$\frac{d\Delta V}{dt} = S_y\frac{dh}{dt} - \frac{1}{h}[\overline{vw}_0 - \overline{vw}_h] - f\Delta U \qquad [8.176d]$$

dove S_x e S_y sono i gradienti verticali delle due componenti orizzontali medie del moto nell'atmosfera libera. Oltre a ciò, lo *slab model* prevede anche le relazioni seguenti:

$$-\overline{uw}_h = \Delta U\frac{dh}{dt} \qquad [8.176e]$$

$$-\overline{vw}_h = \Delta V\frac{dh}{dt} \qquad [8.176f]$$

Infine, si consideri *l'equazione di continuità*. Dato che entro il *PBL* ideale la temperatura potenziale in un dato istante temporale è costante, la conservazione della massa e del volume coincidono. Se si considera una colonna cilindrica di aria con una base (di dimensione A) al suolo e l'altra alla quota h e se η è il flusso volumetrico netto di aria nel volume di *PBL* considerato, l'equazione di continuità può essere espressa come:

$$A\frac{dh}{dt} = \eta \qquad [8.177a]$$

Il flusso η risulta in generale costituito da due termini. Il primo tiene conto del processo di *entrainment*, cioè di inglobamento turbolento dell'aria più calda (in termini di temperatura potenziale) dell'atmosfera al di sopra del *PBL* entro il *PBL* stesso, mentre il secondo tiene conto della *divergenza orizzontale* dovuta ai movimenti atmosferici a grande scala. Se si indica con w_e la *velocità di entrainment* e con w_h il moto verticale medio dovuto ai moti a grande scala dell'atmosfera, la (8.177a) può essere riscritta nella forma:

$$\frac{dh}{dt} = w_e + w_h \qquad [8.177b]$$

In generale w_h non è trascurabile, anche se frequentemente presenta valori estremamente piccoli. La sua determinazione sperimentale risulta estremamente complessa, come evidenziato in Stull, (1988) ed in Boers e al. (1984) e per questa ragione viene frequentemente ignorata nelle applicazioni pratiche.

Come si nota, l'insieme di tutte queste equazioni che descrivono analiticamente lo *slab model*, non è chiuso (cosa prevedibile) e quindi è necessario introdurre un'ulteriore relazione di chiusura. Normalmente si considera l'equazione dell'energia cinetica turbolenta integrata su tutto il *PBL* ed opportunamente parametrizzata. Questa equazione consta di molti termini e la discussione sul peso di ciascuno è stata oggetto di notevoli studi (Driedonks, 1982). Senza entrare nei dettagli, normalmente si giunge in modo non semplice alla relazione seguente:

$$-\overline{w\theta}_h = A \cdot \overline{w\theta}_0 + \frac{Bu_*^3}{(g/\Theta_m)h} - \frac{Cu_*^2}{(g/\Theta_m)h} \cdot \frac{dh}{dt} \qquad [8.178]$$

dove *A*, *B* e *C* sono opportune costanti.

Lo *slab model* ha come elemento di debolezza il fatto di considerare lo *Strato di Entrainment* di spessore infinitesimo. Naturalmente è stata esplorata anche la semplificazione che vede l'*EL* di spessore finito Δh e le variabili medie che variano linearmente nel suo interno. A questo tema si riferiscono i lavori di Deardorff (1979), Fedorov (1995), Fedorov e Mironov (1995) e Van Zanten e al. (1999). Il risultato di questi lavori è stato la costruzione di un *first-order jump model* notevolmente più complesso dello *slab model* e quindi meno utilizzabile.

8.7.3 MODELLI PER L'ESTENSIONE VERTICALE DEL PBL CONVETTIVO

La circolazione di strutture coerenti che si viene ad instaurare nel *PBL* convettivo, in ultima analisi, dipende dalla turbolenza meccanica presente, dal flusso turbolento di calore sensibile fornito dal suolo e dall'estensione verticale z_i del *PBL* stesso. Risulta quindi indispensabile verificare la possibilità di costruire un modello che permetta la stima di z_i. Naturalmente, se si impiegasse un modello numerico prognostico basato sulle equazioni di conservazione con una chiusura non locale o con una chiusura locale di ordine superiore al primo, z_i sarebbe uno dei risultati prodotti dal modello stesso. Tuttavia, nella pratica corrente è necessario poter disporre di un modello dedicato alla previsione di z_i, possibilmente di complessità ridotta e comunque basato sugli elementi fisici principali che influenzano l'estensione verticale del *PBL*. Qui di seguito presentiamo i due modelli più importanti che hanno fornito risultati estremamente realistici.

8.7.3.1 Il modello termodinamico

Il modello più semplice per determinare l'evoluzione temporale dell'altezza z_i del *PBL* convettivo è quello che viene indicato come *modello termodinamico* e che tiene conto solo della termodinamica, trascurando completamente la dinamica connessa con l'inglobamento (*entrainment*) dell'aria dell'atmosfera libera entro il *PBL* stesso. Consideriamo infatti una situazione convettiva ad un istante *t*. Se si è in un sito pianeggiante e regolare e si trascurano gli effetti *avvettivi*, si può ritenere che il profilo verticale della temperatura potenziale sia rappresentativo di una vasta area e che presenti un forte gradiente negativo, localizzato nelle immediate vicinanze del suolo, e un gradiente circa costante e praticamente nullo per tutto il *ML*. Nella *EL* tale gradiente assume un elevato valore positivo che persiste per l'intera zona di *entrainment*. Al di sopra di tale zona, il gradiente di temperatura potenziale diminuisce e raggiunge rapidamente un valore circa costante, che indichiamo con il simbolo γ. Per ottenere un semplice modello che preveda l'incremento col tempo dell'altezza del *PBL* convettivo, è opportuno semplificare questa situazione nel modo indicato in **Fig. 8.73** (Carson 1973; Carson e Smith 1994; Stull 1989; Garratt 1992):

- trascuriamo il *SL* e la *EL* e quindi immaginiamo che tutto il *PBL* in realtà sia rappresentato dal solo *ML*;
- il profilo di temperatura potenziale è costante e pari ad un valore Θ per tutto il *PBL*;
- sopra il *PBL* la temperatura potenziale cresce linearmente con gradiente costante γ.

Il problema è determinare come varia la quota z_i in un intervallo di tempo *dt*. In tale intervallo di tempo la temperatura media del *PBL* aumenterà di $d\Theta$ e ciò provocherà un'*erosione* di una porzione di aria sovrastante con gradiente di temperatura potenziale γ. Quindi, dalla definizione di γ si ha che:

$$dz_i = \frac{1}{\gamma} d\Theta \qquad [8.179a]$$

cioè:

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{d\Theta}{dt} \qquad [8.179b]$$

che è *l'equazione di evoluzione dell'altezza del PBL convettivo.*

La variazione col tempo della temperatura media del *PBL* e, di conseguenza, l'aumento della sua estensione verticale avviene con l'introduzione di calore nel *PBL* stesso. Per quantificare ciò, consideriamo una colonna d'aria di superficie unitaria, di altezza z_i e con una temperatura media pari a Θ. Perché questa colonna d'aria vari la propria temperatura media di una quantità $d\Theta$ è necessario che acquisti la quantità di calore:

$$Q_1 = \rho C_p \cdot d\Theta \cdot z_i \qquad [8.180a]$$

che può derivare solo da due fonti distinte. La prima (e più importante) è costituita dal flusso di calore sensibile presente al suolo che contribuisce con il termine:

$$Q_2 = H_0 \cdot dt = \rho C_p \overline{w\theta}_0 \cdot dt \qquad [8.180b]$$

La seconda è costituita da eventuale calore che dall'*EL* entra nella colonna d'aria dall'alto. Dato che riteniamo positivo il flusso di calore verso l'alto e negativo quello verso il basso, si ha che questo eventuale contributo sarà espresso dalla relazione seguente:

$$Q_3 = -\rho C_p \cdot \overline{w\theta}_{z_i} \cdot dt \qquad [8.180c]$$

dove $\overline{w\theta}_{z_i}$ è il flusso di calore dalla zona di *entrainment*.

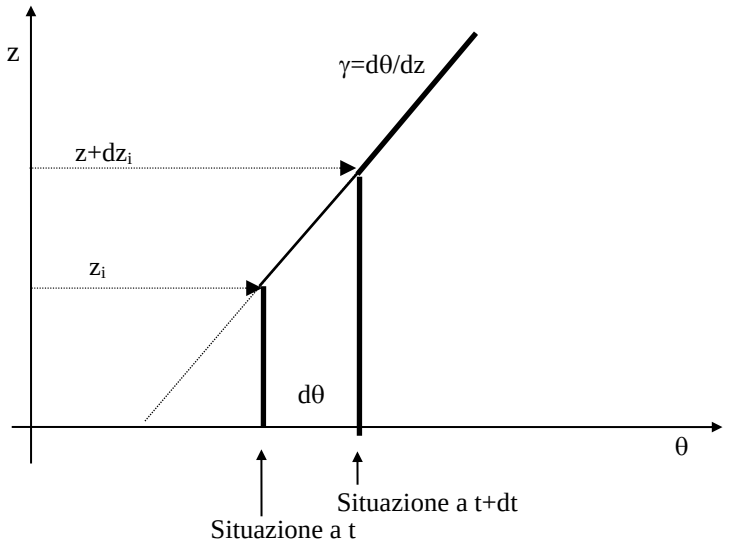


Fig 8.73: schematizzazione dell'evoluzione del profilo verticale di temperatura potenziale nel PBL convettivo.

Quindi, il bilancio energetico della colonna d'aria nell'intervallo di tempo *dt* è dato da:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \qquad [8.180d]$$

da cui si ottiene la seguente equazione che mette in relazione la variazione della temperatura potenziale media del *PBL* con z_i e con il flusso di calore al suolo e all'*entrainment*:

$$\frac{d\Theta}{dz} = \frac{1}{z_i}\left[\overline{w\theta}_0 - \overline{w\theta}_{z_i}\right] \qquad [8.180e]$$

Introducendo la (8.180e) nella (8.179b) si ottiene la relazione generale seguente che rappresenta l'evoluzione temporale dell'altezza del *PBL:*

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{1}{\gamma z_i}\left[\overline{w\vartheta}_0 - \overline{w\theta}_{z_i}\right] \qquad [8.180f]$$

Se si assume che la colonna d'aria si riscalda solo per il flusso di calore al suolo (questo caso si indica col termine di *encroachment*), la relazione precedente si riduce alla forma:

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{\overline{w\theta}_0}{\gamma z_i} \qquad [8.181a]$$

Se poi *H* è il valore medio del flusso turbolento di calore sensibile al suolo nell'intervallo temporale t_1 - t_2, la relazione precedente può essere integrata analiticamente, giungendo a:

$$z_i(t_2) = \sqrt{\left\{z_i^2(t_1) + \frac{2}{\gamma}\cdot\frac{H}{\rho C_p}\cdot(t_2 - t_1)\right\}} \qquad [8.181b]$$

Spesso non è possibile trascurare il flusso di calore all'entrainment e quindi non è applicabile la relazione (8.181b). Tuttavia, come evidenziato da Stull (1988), tra il flusso sensibile al suolo e quello all'entrainment esiste, con buona approssimazione, una relazione del tipo:

$$\frac{-\overline{w\theta}_{z_i}}{\overline{w\theta}_0} = A_R \qquad [8.182a]$$

dove A_R vale circa 0.2. Quindi in questo caso la (8.181a) si trasforma in:

$$\frac{dz_i}{dt} = 1.2\frac{\overline{w\vartheta}_0}{\gamma z_i} \qquad [8.182b]$$

e se consideriamo l'intervallo t_1 - t_2 ed il flusso medio al suolo *H*, la relazione (8.181b) diventa:

$$z_i(t_2) = \sqrt{\left\{z_i^2(t_1) + \frac{2.4}{\gamma}\cdot\frac{H}{\rho C_p}\cdot(t_2 - t_1)\right\}} \qquad [8.182c]$$

Per come concepito, il modello termodinamico, molto usato nelle applicazioni pratiche per la sua semplicità formale e per la buona realisticità, trascura completamente l'influenza che l'apporto meccanico della turbolenza ha sull'accrescimento dell'estensione verticale del *PBL* con un'inevitabile sottostima delle previsioni in tutte quelle situazioni in cui tale apporto è significativo o predominante (specialmente nelle prime ore convettive della giornata).

8.7.3.2 Il modello bulk

A differenza del modello termodinamico, una classe importante di modelli per la previsione dell'estensione verticale del *PBL* convettivo prende le mosse dall'impiego diretto di parte delle equazioni prognostiche che costituiscono lo *slab model*. Tra i molti modelli proposti, qui di seguito viene presentato inizialmente un modello direttamente derivato dallo *slab model* e successivamente questo modello verrà esteso per tener conto anche dell'estensione finita dello Strato di Entrainment. Entrambi questi modelli sono stati sviluppati in una serie di lavori prodotti da Sven-Erik Gryning e da Ekaterina Batchvarova.

Zero-Order Model

Il punto di partenza è lo schematizzare il *PBL* convettivo come una struttura omogenea in orizzontale, con una temperatura potenziale virtuale media costante ad ogni quota e pari a Θ, alla cui sommità l'intero processo di *entrainment* è rappresentato da un salto di temperatura Δ. Nell'atmosfera libera il profilo medio di temperatura è lineare con gradiente pari a γ (**Fig. 8.74**).

Come abbiamo visto (Driedonks e Tennekes, 1984), nell'ambito dello *slab model,* l'equazione che descrive la variazione nel tempo della temperatura media del *PBL* è la seguente:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\overline{w\theta}_0 - \overline{w\theta}_h}{h} \qquad [8.183a]$$

in cui, ancora una volta per semplicità grafica, con h si è indicata l'estensione verticale del *PBL* convettivo (al posto di z_i). Quindi, il tasso di variazione della temperatura media dello strato rimescolato è direttamente proporzionale alla differenza tra il flusso di calore turbolento al suolo ed il flusso derivante dall'entrainment ed è inversamente proporzionale all'estensione verticale del *PBL*: meno esteso è il *PBL*, maggiore è l'aumento della temperatura media dello strato (ovviamente se il flusso di calore al suolo è superiore a quello alla sommità). Oltre a ciò, il flusso turbolento di calore sensibile alla sommità dello strato rimescolato è dato da:

$$-\overline{w\theta}_h = \Delta \frac{dh}{dt} \qquad [8.183b]$$

quindi questo flusso turbolento è tanto maggiore quanto maggiore è il *salto* di temperatura Δ alla sommità del *PBL* e tanto maggiore è la sua velocità di accrescimento $w_e = dh/dt$.

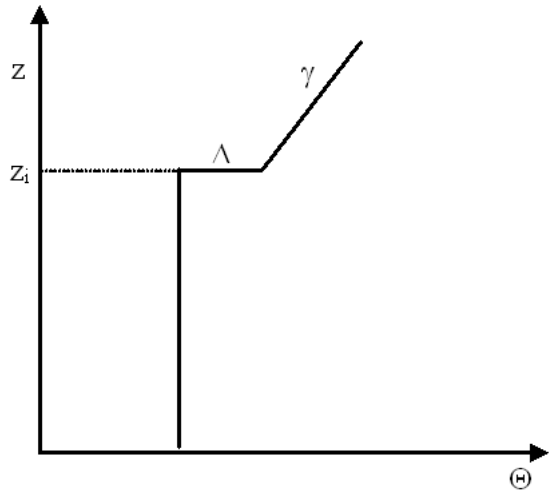


Fig. 8.74: il profilo verticale della temperatura potenziale secondo lo slab-model.

Da ultimo, lo *slab model* ricava anche un'equazione che descrive come il *salto* di temperatura varia col tempo, equazione che risulta pari a:

$$\frac{d\Delta}{dt} = \gamma \frac{dh}{dt} - \frac{d\Theta}{dt} \qquad [8.183c]$$

Considerando, poi, *l'equazione di continuità*, abbiamo visto che al tasso di variazione dell'estensione verticale del *PBL* convettivo derivante da questi ragionamenti (w_e) va aggiunto anche l'effetto derivante dai movimenti verticali a grande scala delle masse d'aria (subsidenza) w_h. In sostanza, alla fine dovremo tener conto del fatto che l'effettivo valore di dz_i/dt sarà pari a:

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{dh}{dt} + w_h = w_e + w_h \qquad [8.183d]$$

Come abbiamo anticipato, in generale w_h non è trascurabile, anche se frequentemente presenta valori estremamente piccoli. La sua determinazione sperimentale risulta estremamente complessa, come evidenziato in Stull, (1988) ed in Boers e al. (1984) e per questa ragione viene frequentemente ignorata nelle applicazioni pratiche. L'insieme di queste relazioni differenziali, derivate da rigorose considerazioni termodinamiche e fluidodinamiche, non costituisce un insieme chiuso e per poter effettivamente giungere ad un modello operativo è necessario individuare una relazione di chiusura. È su questo argomento che si sono concentrati i lavori di Gryning e Batchvarova (1990a e b), Batchvarova e Gryning (1991 e 1994) e Gryning (2005) che descriveremo

sinteticamente qui di seguito.

Durante le ore convettive la crescita del *PBL* è dovuta prevalentemente all'inglobamento di aria calda proveniente dall'atmosfera sovrastante che possiede un livello di *energia cinetica turbolenta* inferiore a quella tipica dell'aria già appartenente al *PBL* ed una temperatura potenziale superiore. Il rimescolamento di questo volume d'aria con quella del *PBL* richiede quindi energia, fornita dall'energia cinetica turbolenta posseduta dal *PBL* stesso. L'equazione di *conservazione dell'energia cinetica turbolenta,* scritta per il *PBL* ideale qui considerato, dopo opportune semplificazioni e parametrizzazioni (Gryning e Batchvarova 1990 a e b; Batchvarova e Gryning 1991) diventa:

$$-\frac{gh}{\Theta}\overline{w\theta}_h + Cu_*^2\frac{dh}{dt} = A\cdot\frac{gh}{\Theta}\overline{w\theta}_0 + Bu_*^3 \qquad [8.184a]$$

dove il termine di sinistra dell'equazione rappresenta il *consumo* di energia potenziale e cinetica all'inversione dovuta al processo di *entrainment*, mentre la parte destra della relazione rappresenta la produzione convettiva e meccanica di energia turbolenta entro il *PBL*. I valori normalmente accettati per le costanti numeriche *A, B, C* sono rispettivamente 0.2, 2.5 e 8. Risolvendo questa relazione rispetto al flusso cinematico di calore alla quota *h* si ha che:

$$-\overline{w\theta}_h = A\cdot\overline{w\theta}_0 + \frac{Bu_*^3}{(g/\Theta)h} - \frac{Cu_*^2}{(g/\Theta)h}\frac{dh}{dt} \qquad [8.184b]$$

dove l'ultimo termine di destra rappresenta l'effetto di *spin-up* o la correzione di Zilitinkevich (1975). Quando *h* è piccolo, $w_e = dh/dt = B/Cu_*$, il che porta a dire che le prime fasi dell'evoluzione di *h* sono dominate dall'azione della turbolenza meccanica. L'insieme delle precedenti equazioni, opportunamente combinate, conduce ad un modello per l'evoluzione temporale di *h* in funzione del flusso turbolento di calore sensibile al suolo e della friction velocity. In particolare (Batchvarova e Gryning 1991):

- trascurando il termine di *spin-up* (significativo solo quando *h* è piccolo) ed inserendo nella relazione (8.183c) l'equazione (8.183b) e (8.183a), si ottiene:

$$\left(h\frac{d\Delta}{dh} + \Delta - \gamma h\right)w_e = -\left(\overline{w'\theta'}\right)_0 \qquad [8.185a]$$

  che, tenendo conto della (8.183b), della (8.184b) e della definizione di lunghezza di Monin Obukhov, porta alla relazione:

$$\frac{d\Delta}{dh} + \Delta\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{Ah - BkL}\right) = \gamma \qquad [8.185b]$$

  dove *k* è la costante di von Karman. Questa equazione descrive l'evoluzione temporale del *salto* di temperatura che si realizza entro la zona di *entrainment*. La relazione (8.185b) è un'equazione differenziale ordinaria che può essere risolta analiticamente (Gryning e Batchvarova 1990b). Vista però la complessità della soluzione analitica, Batchvarova e Gryning (1991) hanno preferito una sua approssimazione asintotica, rappresentata dalla relazione:

$$\Delta = \left(\frac{Ah - BkL}{(1+2A)h - 2BkL}\right)\gamma h \qquad [8.185c]$$

- si sostituisce, ora, nella (8.183c) l'espressione esatta (8.185b) per $d\Delta/dt$. Si considera poi l'espressione approssimata (8.185c) per il *salto* di temperatura Δ, la relazione (8.184b) e la conservazione della massa (8.184b), ottenendo la seguente equazione differenziale prognostica che descrive il tasso di variazione dell'estensione verticale del PBL convettivo, tenendo conto anche dei moti verticali a mesoscala:

$$\left\{\frac{h^2}{(1+2A)h-2BkL}+\frac{Cu_*^2\Theta}{\gamma g[(1+A)h-BkL]}\right\}\left(\frac{dh}{dt}-w_h\right)=-\frac{\overline{w'\theta'}_0}{\gamma} \qquad [8.185d]$$

nota col nome di *modello di Gryning Batchvarova*. Tale modello è un'equazione differenziale ordinaria che richiede la conoscenza dell'evoluzione temporale di u_*, del flusso cinematico al suolo $\left(\overline{w\theta}\right)_0 = H_0/\rho C_p$ e di γ.

Va notato che, se si considera nella (8.184b) $B = C = 0$ (cioè se si trascura la turbolenza meccanica, cosa vera alle elevate convettività), la (8.185d) si riconduce al modello di evoluzione di z_i derivato da pure considerazioni termodinamiche come descritto in Garratt (1992) e Stull (1988). Inoltre, se si considera che anche A nullo (situazione che richiede un flusso di calore all'interfaccia nullo e che a volte si presenta nella pratica), la (8.184b) si riconduce al noto *modello di encroachment* (Carson e Smith, 1974). Nella pratica si individua una situazione di *encroachment* quando il profilo di temperatura potenziale risulta privo di una inversione Δ.

L'elemento interessante di questo modello dell'evoluzione dell'estensione verticale del *PBL* sta nel fatto che è in grado di descriverne l'evoluzione nelle situazioni diurne tenendo conto sia dell'apporto convettivo che dell'apporto meccanico. Una possibile criticità però deriva dal fatto che questo modello presenta una singolarità quando il gradiente termico γ al di sopra del *PBL* si annulla. Per superare questo problema Luhar (1998) ha riformulato il problema giungendo, però, ad un modello di una notevole complessità.

First-Order Model

Il modello di Gryning-Batchvarova nella versione presentata non considera però l'estensione verticale dello *Strato di Entrainment*. Gli Autori hanno esteso questo modello per tener conto anche di questo aspetto. In Batchvarova e Gryning (1994) e Gryning e Batchvarova (1994) sono presentati i dettagli e in Beyrich e Gryning (1998) sono presentati alcuni riscontri sperimentali. In questo nuovo modello, il profilo di temperatura considerato è quello disegnato in **Fig.8.75**, in cui risulta evidente la presenza dello Strato di Entrainment. In tale figura è inoltre evidenziato il fatto che z_i determinato dal modello originale risulta essere una quota intermedia tra la sommità dello Strato Rimescolato e la sommità dell'*Entrainment*.

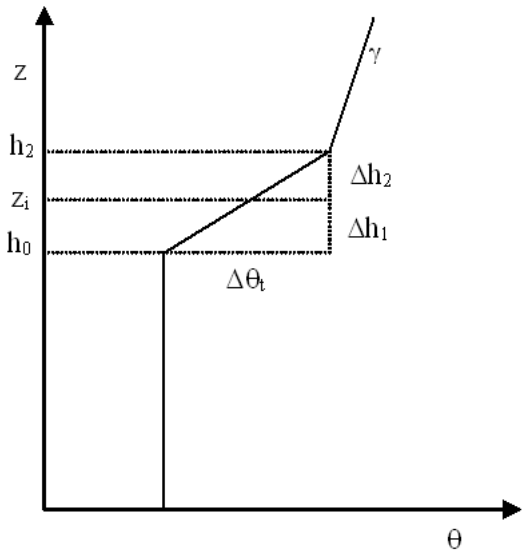


Fig. 8.75: profilo verticale della temperatura potenziale considerato dal nuovo modello di Gryning-Batchvarova.

Mettendo in relazione il tasso con cui viene consumata l'energia cinetica turbolenta inglobando l'aria dell'atmosfera libera nel *PBL* (che incrementa la propria estensione verticale) alla

distanza verticale percorsa da una particella d'aria che penetra nello strato stabile di *entrainment*, Gryning e Batchvarova (1994) hanno trovato che lo spessore della zona di *entrainment* normalizzata $\Delta h/h$ può essere parametrizzata in funzione dell'*Entrainment Richardson Number* Ri_E definito come:

$$Ri_E = \frac{(g/\Theta)\cdot\Delta\cdot h}{(dh/dt)^2} = \frac{(g/\Theta)\cdot\Delta\cdot h}{w_e^2} \qquad [8.186a]$$

In questa relazione e nelle successive, ancora una volta il simbolo h sostituisce per comodità tipografica il simbolo z_i con cui si indica l'estensione verticale del *PBL* tenendo conto anche dell'effetto della subsidenza. La parametrizzazione può essere del tipo:

$$\frac{\Delta h}{h} \propto Ri_E^{-1/3} \qquad [8.186b]$$

dove la costante di proporzionalità deve essere determinata dalle misure. Gli Autori, a questo proposito hanno considerato le misure di laboratorio, le misure LIDAR in atmosfera realizzate da Boers e al. (1984) e quelle SODAR realizzate da Boers e Eloranta (1986), giungendo alla parametrizzazione eseguente:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{3.3}{Ri_E^{1/3}} + 0.2 \qquad [8.186c]$$

A questo punto gli Autori combinano il modello *zero-order* che fornisce la velocità di entrainment w_e con le conoscenze acquisite sulla zona di *entrainment*. Da considerazioni geometriche otteniamo la seguente relazione tra Δ (il salto di temperatura alla sommità del *PBL* schematizzato dal modello *zero-order*) e $\Delta\Theta_t$:

$$\frac{\Delta}{\gamma\Delta h} - \sqrt{\left(\frac{\Delta}{\gamma\Delta h}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{\Delta\Theta_t}{\gamma\Delta h} + \sqrt{\frac{\Delta\Theta_t}{\gamma\Delta h}\left(\frac{\Delta\Theta_t}{\gamma\Delta h} - 1\right)} \qquad [8.186d]$$

dove $\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2$, cioè l'intero spessore della zona di *entrainment*.

Il modello proposto, per prima cosa, calcola col modello *zero-order* la velocità di entrainment w_e e il *salto* di temperatura Δ impiegando rispettivamente le (8.185d) e (8.185c). Per il calcolo, invece, di $\Delta\Theta_t$ si potrebbe impiegare la relazione (8.185d) che però richiede un'integrazione numerica. Un'utile alternativa è la seguente approssimazione fornita dagli Autori:

$$\frac{\Delta h}{h}\left(1 + Ri_E^{-1/3}\frac{h\gamma}{4\Delta}\right) = 3.3Ri_E^{-1/3} + 0.2 \qquad [8.186e]$$

Dopo aver determinato Δh e Δ, otteniamo Δh_1 dalla relazione:

$$\frac{\Delta h_1}{\Delta h} = \frac{1}{2} + \frac{\Delta\Theta_t}{\gamma\Delta h} - \sqrt{\left(\frac{\Delta\Theta_t}{\gamma\Delta h}\right)^2 + \frac{1}{4}} \qquad [8.186f]$$

quindi è immediato determinare $h_0 = z_i - \Delta h_1$ e $h_2 = h_0 + \Delta h$.

Il modello di Gryning Batchvarova presenta l'indubbio vantaggio di essere costituito da un'unica equazione differenziale ordinaria, relativamente semplice da integrare numericamente. È possibile realizzare anche modelli meno approssimati, che però alla fine risultano costituiti da un sistema di alcune equazioni differenziali ordinarie, che richiedono uno sforzo maggiore per la loro integrazione. Dettagli su ciò si incontrano in (Stull, 1989).

Esercizio 8.8

Il modello di Gryning-Batchvarova (ed altri simili) per la stima prognostica dell'estensione verticale del *PBL* convettivo, dal punto di vista puramente matematico sono costituiti almeno da un'equazione differenziale ordinaria non lineare del tipo:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

dove t è la variabile tempo e y è l'estensione verticale del *PBL*. Questa equazione differenziale deve essere integrata numericamente da $t = 0$, quando $y = y_0$, fino ad un tempo generico t. L'intervallo temporale d'interesse varia quindi da 0 a t e, per realizzare un'integrazione numerica dell'equazione, conviene che lo consideriamo costituito da un insieme di istanti t_i crescenti equispaziati di Δt. Quando $i = 0$, $t_0 = 0$, quando $i = N$, $t_N = t$. Il problema che ci poniamo è quale algoritmo di integrazione numerica utilizzare per ottenere risultati accurati.

La *tentazione* immediata è quella di espandere la funzione $f(t,y)$ in una serie di Taylor rispetto alla variabile t e troncando l'espansione al primo ordine, cioè dire che:

$$y(t + \Delta t) \cong y(t) + \Delta t \cdot \left.\frac{dy}{dt}\right|_t$$

Quindi al generico istante t_{i+1} si avrebbe in maniera esplicita ed immediata:

$$y(t_{i+1}) \cong y(t_i) + \Delta t \cdot \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_i}$$

Semplice! Questo è il ben noto metodo di Eulero, ma purtroppo questa è anche una trappola in cui non si deve cadere perché il risultato che si otterrebbe normalmente è drammaticamente errato. La spiegazione di ciò la si può trovare in qualsiasi buon testo di Analisi Numerica (per esempio in Conte De Boor, 1983). Abbandonate la pigrizia e soffermatevi a studiare nel libro di Analisi Numerica i paragrafi successivi e troverete molti algoritmi, decisamente più complessi, ma molto più corretti. In particolare, troverete la famiglia di algoritmi di tipo Runge e Kutta il più consigliabile dei quali fornisce per un generico istante t_{i+1} la discretizzazione seguente:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

dove:

$$k_1 = \Delta t \cdot f(t_i, y_i)$$
$$k_2 = \Delta t \cdot f(t_i + \Delta t/2, y_i + k_1/2)$$
$$k_3 = \Delta t \cdot f(t_i + \Delta t/2, y_i + k_2/2)$$
$$k_4 = \Delta t \cdot f(t_i + \Delta t, y_i + k_3)$$

Ora va molto meglio! Insomma, la regola generale è: non usare mai per alcun motivo il metodo di Eulero!!

8.7.4 LA DIFFUSIONE TOP-DOWN E BOTTOM-UP

Come abbiamo visto, nella parte centrale di un *PBL* convettivo, cioè nel *ML*, la temperatura potenziale virtuale media è sostanzialmente costante con la quota e ciò ci induce a ritenere che il *ML* sia molto ben rimescolato. Tuttavia, un'analisi più dettagliata evidenzia come in realtà il profilo non sia realmente costante, ma presenti un massimo approssimativamente a metà del *ML* e ciò ci fa ritenere che lo *slab-model* sia un'approssimazione drastica della realtà anche se, come abbiamo visto, ci consente di ottenere un modello prognostico decisamente realistico per l'estensione verticale del *PBL*. Se però consideriamo il profilo verticale di altre sostanze scalari dinamicamente passive (cioè quelle sostanze che non influenzano il campo del moto), ci accorgiamo che il ritenere costante il valor medio di queste variabili entro il *ML* è un'approssimazione meno buona di quanto lo sia per la temperatura. A questo punto ci si è posta la domanda: cosa determina il gradiente verticale del rapporto di mescolanza di uno scalare passivo in un *PBL* convettivo? Questa domanda ha motivato numerosi studi che, basandosi su considerazioni teoriche, su misure in atmosfera e su simulazioni modellistiche di tipo LES, hanno condotto a formulare il modello della diffusione *top-down* e *bottom-up*. Qui di seguito si esporranno per sommi capi i risultati raggiunti facendo riferimento prevalentemente ai lavori di Wyngaard e Brost (1984) e Wyngaard (1987).

Consideriamo il rapporto di mescolanza di un generico scalare passivo e conservativo in un *PBL* convettivo presente in un giorno sereno e con omogeneità orizzontale. In queste condizioni, alla sommità del *ML* sarà attivo l'*entrainment* che può influenzare profondamente il profilo verticale del rapporto di mescolanza dello scalare considerato. In queste condizioni è naturale immaginarsi che questo profilo sia il risultato della sovrapposizione di due processi fisici distinti: il primo sarà il processo di diffusione dello scalare derivante dal flusso dello stesso presente al suolo e l'altro sarà il processo di diffusione pilotato dall'alto dall'*entrainment*. Cerchiamo di quantificare tutto ciò. Per prima cosa, indicando con *C* il valor medio del rapporto di mescolanza dello scalare (e con *c* la relativa fluttuazione turbolenta), varrà l'equazione seguente:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U_i \frac{\partial C}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_i c} = 0 \qquad [8.187a]$$

che, in condizioni di omogeneità orizzontale, si riduce a:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{wc} = 0 \qquad [8.187b]$$

Questa relazione la possiamo riscrivere anche nella forma seguente, derivando entrambi i membri rispetto alla quota *z*:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\overline{wc} = 0 \qquad [8.187c]$$

Essa mostra come la curvatura del profilo verticale dello scalare dipenda solo dalla variazione nel tempo del gradiente medio dello scalare. Se, però, assumiamo per semplicità che tale variazione sia molto lenta, allora il risultato è che il profilo del flusso verticale dello scalare è lineare. Indichiamo con $\overline{wc}_s$ il flusso turbolento dello scalare alla superficie ($z = 0$) e con $\overline{wc}_h$ l'analogo flusso *all'entrainment* (per semplicità espositiva immaginiamo che l'*entrainment* sia di spessore nullo) relativo ad una quota rappresentativa *h* che, di fatto coincide per i nostri scopi con z_i. Tutte queste considerazioni ci portano a dire che il flusso complessivo di scalare ad una quota *z* è pari a:

$$\overline{wc} = \overline{wc}_s(1 - z/h) + \overline{wc}_h(z/h) \qquad [8.187d]$$

Quindi il profilo verticale del flusso dello scalare presenterà due contributi distinti ed additivi, un contributo dalla superficie (diffusione *bottom-up*) ed un contributo dall'*entrainment* (diffusione *top-down*).

Per definire meglio il contributo *bottom-up*, ipotizziamo nullo il flusso all'*entrainment* e quindi, per quanto detto, si avrà che:

$$\overline{wc} = \overline{wc}_s(1 - z/h) \qquad [8.188a]$$

Sempre considerando questa situazione in cui è nullo il flusso all'*entrainment*, il gradiente verticale medio dello scalare è ragionevole che non venga influenzato da u_*, mentre lo sarà dal flusso al suolo, dalla quota *z* d'interesse, dall'estensione verticale del *PBL h* e dalla velocità di scala w_* definita come:

$$w_* = \left(\frac{g}{\Theta}\overline{w\theta}h\right)^{1/3} \qquad [8.188b]$$

Alla luce di ciò, considerazioni di Analisi Dimensionale ci portano a dire che:

$$\frac{\partial C}{\partial z} = -\frac{\overline{wc}_s}{w_* h} g(z/h) \qquad [8.188c]$$

dove $g_b(z/h)$ è una Funzione Universale di Similarità per il processo diffusivo *bottom-up* da determinare sulla base delle misure o da simulazioni modellistiche LES. Una volta definita una relazione di Similarità per il gradiente verticale della concentrazione media dello scalare, è ragionevole almeno definire un coefficiente di diffusività turbolenta *bottom-up* dato da:

$$K_b = -\frac{\overline{wc_s}}{\partial C/\partial z} = \frac{w_* h(1 - z/h)}{g_b} \qquad [8.188d]$$

Se consideriamo poi la situazione speculare in cui è nullo il flusso turbolento al suolo ma è viceversa attivo il flusso turbolento all'*entrainment*, ragionamenti del tutto analoghi portano a dire che:

$$\frac{\partial C}{\partial z} = -\frac{\overline{wc}_h}{w_* h} g_t(z/h) \qquad [8.189a]$$

dove $g_t(z/h)$ è una Funzione Universale di Similarità per il processo diffusivo *top-down* da determinare sulla base delle misure o da simulazioni modellistiche LES. Una volta definita una relazione di Similarità per il gradiente verticale della concentrazione media dello scalare, è ragionevole almeno definire un coefficiente di diffusività turbolenta *top-down* dato da:

$$K_t = -\frac{\overline{wc}_h}{\partial C/\partial z} = \frac{w_* h}{g_t} \qquad [8.189b]$$

La domanda naturale che ci si pone è se g_b sia uguale a g_t. La risposta la daranno le evidenze sperimentali, ma la differenza profonda delle cause che caratterizzano la diffusione *top-down* e *bottom-up* fanno presagire che le due funzioni di Similarità debbano essere differenti tra loro. In effetti, con l'aiuto delle modellizzazioni *LES* si è giunti ad individuare per le due funzioni di Similarità le due relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} g_b &= 0.4(z/h)^{-3/2} \\ g_t &= (1 - z/h)^{-3/2} \end{aligned} \qquad [8.190]$$

In una situazione convettiva tipica saranno attivi contemporaneamente sia il flusso turbolento al suolo che quello all'*entrainment* e per questo ipotizziamo che sia valida la sovrapposizione degli effetti, cioè che, detta C la concentrazione dello scalare, C_b il contributo *bottom-up* e C_t il contributo *top-down*, $C = C_b + C_t$. Inoltre, ipotizziamo che $c = c_b + c_t$. Se ciò è vero, come appare dalle sperimentazioni e dalle simulazioni *LES*, allora:

$$\frac{\partial C}{\partial z} = -\frac{\overline{wc}_h \cdot g_t + \overline{wc}_s \cdot g_b}{w_* h} \qquad [8.191a]$$

Quindi il gradiente verticale medio dello scalare passivo consta di due distinti contributi, uno *top-down* ed un altro *bottom-up* ed il suo valore dipenderà dalla combinazione dei segni presentati dai flussi e dalle Funzioni di Similarità. In effetti, se le due Funzioni di Similarità sono entrambe positive ed i due flussi hanno lo stesso segno, come capita per esempio per l'umidità, allora il gradiente verticale medio della concentrazione di scalare nel *ML* può essere relativamente elevato. Viceversa, se i due flussi sono di segno opposto, come capita per la temperatura potenziale, allora il gradiente può essere piccolo o addirittura nullo.

Da ultimo, almeno formalmente è possibile ancora una volta ottenere una relazione per il coefficiente di diffusività turbolenta che risulta espressa come:

$$K = -\frac{\overline{wc}}{\partial C/\partial z} = \frac{w_* h[\overline{wc}_s(1 - z/h) + \overline{wc}_h(z/h)]}{g_b \overline{wc}_s + g_t \overline{wc}_h} \qquad [8.191b]$$

Questa relazione evidenzia un fatto molto importante: il coefficiente di diffusività turbolenta, che dovrebbe esprimere i flussi, dipende proprio dai flussi stessi. Oltre all'indubbia complessità operativa nell'impiegare un tale coefficiente per realizzare una chiusura di tipo *K* nel caso convettivo, questa relazione altamente non lineare evidenzia come una chiusura del primo ordine non sia adeguata a rappresentare le situazioni convettive.

8.8 LA STABILITÀ

Un *PBL* si trova in condizioni stabili quando viene a mancare l'apporto energetico solare. In queste situazioni, tipicamente notturne o di copertura totale del cielo, l'unica turbolenza presente ed attiva è la turbolenza di origine meccanica prodotta dal movimento delle masse d'aria ed in particolare quella prodotta dallo *shear* del vento e dai moti ondosi di vario tipo che sono praticamente sempre presenti in atmosfera. La mancanza di apporto solare fa sì che la superficie terrestre si raffreddi, emettendo in maniera radiativa energia elettromagnetica, e ciò determina un profilo verticale di temperatura potenziale virtuale positivo, situazione favorevole all'instaurarsi di onde di vario tipo che trasportano energia nelle varie direzioni in alternativa ed in competizione con la turbolenza propriamente detta che decade progressivamente nel tempo. Il *PBL* non è in situazioni di stabilità solo nelle ore notturne, ma può diventare tale ogni volta che la superficie terrestre risulta più fredda dell'aria sovrastante e quindi può formarsi anche quando si ha un'avvezione di aria più calda sopra una superficie a temperatura inferiore.

In un *PBL Stabile* (*SBL*) la turbolenza è molto meno intensa di quella caratteristica delle situazioni convettive, i vortici turbolenti in esso presenti sono di dimensioni ridotte e sono il risultato della turbolenza meccanica prodotta prevalentemente dallo *shear del vento*. A differenza del *PBL* convettivo, lo *SBL* non presenta sempre le medesime caratteristiche: a volte la turbolenza risulta abbastanza continua ed in questo caso si ha un rimescolamento sufficientemente uniforme, anche se di gran lunga meno intenso di quello presente nelle situazioni convettive. Più spesso, però, la turbolenza presenta un elevato grado di *intermittenza*, con una forte localizzazione nello spazio e nel tempo. In quest'ultimo caso la caratteristica più evidente è un *disaccoppiamento* dei processi che hanno luogo nel *PBL* dalle forzanti superficiali. Un altro fenomeno ricorrente in uno *SBL*, soprattutto nelle *ore notturne, è la presenza contemporanea della turbolenza e di fenomeni oscillatori (moti submeso* se limitati alle sole componenti orizzontali del moto e *onde di gravità* se tali oscillazioni sono presenti anche nella componente verticale del moto) che a volte interagiscono tra loro rendendo arduo comprendere quali siano gli effetti di un fenomeno e quali gli effetti dell'altro.

L'assenza di strutture turbolente di grandi dimensioni comporta il fatto che lo *SBL* non abbia una individualità molto spiccata (cioè non è facilmente individuabile in maniera univoca) e non presenti un elemento di discontinuità (come l'*EL* nel caso convettivo) che lo separi nettamente dall'atmosfera libera sovrastante. In effetti la turbolenza, che almeno nelle situazioni debolmente stabili raggiunge il massimo di intensità al suolo, decresce progressivamente ed in modo estremamente graduale fino a scomparire a distanze dal suolo relativamente piccole (da qualche decina di metri a qualche centinaia di metri a seconda dell'intensità della turbolenza meccanica che si ha al suolo e quindi in funzione della velocità del vento). Ci sono due sintomi interessanti che evidenziano il *SBL*. Il primo è il fatto che molto spesso si riscontra nel profilo verticale della velocità del vento un massimo, frequentemente molto marcato, che supera il valore geostrofico: a tale massimo normalmente viene attribuito il nome di *low-level jet*. In prima approssimazione tale livello rappresenta la quota massima a cui si spinge la turbolenza generata al suolo e quindi può essere considerato come l'estensione del *SBL h*, dal punto di vista della turbolenza atmosferica. Il secondo fatto importante è che durante le ore stabili e soprattutto notturne si ha un forte raffreddamento del suolo che genera un conseguente raffreddamento dell'aria sovrastante, raffreddamento che diminuisce progressivamente con l'aumentare della quota. Risulta quindi individuabile facilmente uno *strato di inversione termica* che aumenta col trascorrere delle ore notturne e che è del tutto indipendente dallo strato di atmosfera interessato dalla turbolenza meccanica. Quindi il *SBL* risulta caratterizzato da due distinte estensioni verticali: una è h e rappresenta la porzione di atmosfera interessata dalla turbolenza meccanica e l'altra è h_T che indica lo strato di atmosfera interessato dal forte raffreddamento notturno dell'aria indotta dal raffreddamento radiativo del suolo.

La turbolenza nello *SBL* è debole e spesso sporadica e per questo emergono prepotentemente altri fenomeni che si insinuano nei *segnali meteorologici* che gli strumenti registrano. La stratificazione termica stabile è l'ambiente ideale in cui si originano, si propagano ed

interagiscono fenomeni ondosi (onde di gravità) di vario tipo e di essi parleremo brevemente nel seguito. Tuttavia, accanto ad esse si fanno evidenti anche altre forme di moto che in un *PBL* convettivo erano molto meno visibili (anche se esistenti). Questi moti con tempi di scala dell'ordine dei minuti prendono il nome di *moti submeso* (Mahrt e Mills, 2009) o *meandering* (Etling, 1990). L'origine di queste forme di movimento, prevalentemente orizzontali e relativamente lente, non è ben chiara fisicamente e di tale fenomeno ci occuperemo nel seguito cercando di sintetizzare le conoscenze attuali in proposito. L'importanza di questi fenomeni è duplice. Da un lato la loro presenza ed il relativo trasporto di energia in qualche modo *contaminano* i segnali meteorologici sovrapponendosi alle fluttuazioni turbolente, dall'altro sono fondamentali nello spiegare le modalità della dispersione degli inquinanti nelle situazioni stabili. Proprio per questa ragione, questo fenomeno viene attualmente molto studiato, anche per la sua difficoltà ad essere riprodotto e previsto dai modelli numerici meteorologici (Belušić e Güttler, 2010). Il fenomeno del *meandering*, che non è confinato agli eventi di vento debole nelle situazioni stabili ma in qualche misura è presente anche nelle situazioni convettive, non è ancora stato compreso a sufficienza, soprattutto alla luce delle misure ottenute in situazioni di elevatissima stabilità quali quelle frequentemente presenti nelle zone artiche ed antartiche (Cava e al. 2017, 2019a, 2019b).

Comunque, il quadro fenomenologico che caratterizza il *PBL* stabile (*Stable Boundary Layer SBL*) è stato descritto al punto 8.1.2 e da esso emerge subito una complessità sconcertante difficile da classificare ed anche da descrivere. Infatti, se nel passato si era riusciti a catturare sperimentalmente, anche se con notevoli difficoltà, alcuni aspetti dello *SBL* notturno alle medie latitudini (che pur presentavano aspetti singolari e non facili da spiegare), la disponibilità attuale di una massa notevole di misure realizzate nelle basi artiche ed antartiche sia nel periodo estivo che, soprattutto, nel periodo invernale, ha messo in discussione alcune antiche certezze e ha aperto un nuovo capitolo della ricerca sulla turbolenza (o mancanza di turbolenza) nel *PBL*. Ciò che è stato esposto precedentemente si riferisce prevalentemente ad uno *SBL* notturno alle medie latitudini; ora ci accingiamo a completare e discutere questa visione delle cose alla luce delle osservazioni più recenti, cercando di dare un quadro ragionevolmente completo della situazione, almeno per quanto si conosce attualmente e per fare ciò ci riferiamo principalmente alle sintesi fatte da Mahrt e al. (1998) e da Grachev e al. (2005, 2013).

Ma prima di fare ciò è bene mettere in luce un'evidente difficoltà operativa. Le fluttuazioni presentate dalle diverse variabili meteorologiche in uno *SBL* sono spesso talmente piccole da essere dello stesso ordine di grandezza dell'incertezza intrinseca alle misure realizzate dalla strumentazione attualmente disponibile. Ciò comporta, quindi, che l'inevitabile incertezza insita nella stima dei parametri caratteristici della turbolenza del *PBL* (varianze, covarianze e momenti di ordine superiore) sia talmente elevata da rendere dubbio il loro significato fisico. Inoltre, nella costruzione di relazioni di Similarità, il problema della *self-correlation*, probabilmente poco importante nelle situazioni convettive e adiabatiche, diventa tanto più critico quanto più la stabilità è elevata. Infine, la presenza massiccia di fenomeni ondosi non stazionari complica ulteriormente le cose. Infatti, una volta raccolte le misure istantanee di una data grandezza (per esempio una delle componenti del moto), l'applicazione diretta della decomposizione di Reynolds fa sì che le fluttuazioni individuate una volta che si è stabilito un periodo di mediazione siano solo in parte derivanti dalla turbolenza dell'aria. Infatti, una parte di esse, più o meno elevata a seconda del tempo di mediazione adottato, sono dovute ai movimenti ondosi e a movimenti submeso a cui ancora è difficile attribuire un chiaro significato fisico. E su tutto ciò incombe il problema derivante dal dover realizzare misure prossime al limite di rilevabilità della strumentazione impiegata.

Per cercare di organizzare un'esposizione comprensibile del complesso quadro fenomenologico che ci presenta il *PBL* stabile, conviene fare alcune osservazioni preliminari:

- nelle situazioni stabili l'estensione verticale del *PB*L è molto ridotta ed è tanto minore quanto maggiore è il livello della stabilità caratterizzato, per esempio, dal *Flux Richardson Number* R_f. In sostanza, mentre nelle condizioni convettive l'estensione verticale del *PBL* era dell'ordine di 1000 metri, nelle condizioni stabili il *PBL* si estende a quote dell'ordine della decina di metri. In questo caso non è facile individuare uno strato

superficiale *SL* e, soprattutto, non è facile essere certi che le misure che si realizzano siano effettivamente state realizzate in questo strato che a volte risulta dell'ordine del metro. Dato che il requisito essenziale per l'applicabilità della Similarità di Monin-Obukhov è il fatto di trattare esclusivamente il *SL*, è naturale che le misure disponibili non sempre rispettino tali leggi o le rispettino in maniera curiosa;

- analizzare ciò che si è riusciti a derivare dalle misure sperimentali ci consente di giungere ad una prima rozza classificazione delle situazioni stabili che di fatto rappresentano due regimi fluidodinamici profondamente diversi. Il primo regime, il più consueto, è quello che possiamo definire di debole stabilità (*weakly stable regime*) che osserviamo alle medie latitudini nelle notti nuvolose e con vento forte. Questo regime fluidodinamico è caratterizzato da una turbolenza continua di tipo meccanico che si origina prevalentemente al suolo in modo sostanzialmente identico a quanto avviene nelle situazioni convettive o adiabatiche. Questa turbolenza progressivamente decresce con la quota ed in qualche modo è descrivibile con la teoria della similarità di Monin-Obukhov opportunamente estesa (la *Local Similarity*). Quando, però, la turbolenza è molto elevata, tale regime continuo lascia il posto ad una situazione decisamente meno consueta e discontinua che è il regime di elevata stabilità (*very stable regime*). Tra queste due situazioni si può individuare una gamma piuttosto vasta di situazioni di transizione.

Perché si ha tutto ciò? Una risposta definitiva alla domanda ad oggi non c'è, ma a questo proposito sono state formulate solo alcune risposte parziali che cercheremo di presentare alla luce delle conoscenze attuali.

8.8.1 I PROFILI VERTICALI DELLE VARIABILI METEOROLOGICHE

Nella **Fig. 8.76** è presentato il profilo verticale schematico della temperatura, della temperatura potenziale, della velocità del vento (indicata con *M* nella figura) e dell'umidità specifica per uno *SBL* alle medie latitudini. Per quanto riguarda la temperatura, si nota come il suo profilo presenti una marcata inversione che diminuisce progressivamente con la quota fino a raggiungere il gradiente caratteristico dell'atmosfera sovrastante che normalmente altro non sarà che il *Residual Layer* del giorno precedente. Una situazione analoga si riscontra per l'umidità specifica, mentre per il profilo della velocità del vento è stata evidenziata la presenza di un *low-level jet*. Anche nel *SBL* è individuabile uno strato superficiale, che però è ancor meno definito che nel caso convettivo e molto meno esteso. Per questo strato possono essere ritenute valide le Relazioni di Similarità di Monin-Obukhov, mentre per l'intero *SBL* debolmente convettivo è stata verificata la sostanziale validità della *Local Similarity* che abbiamo ampiamente illustrato in precedenza.

Non è il caso di aggiungere altro se non l'osservazione che se le relazioni di Similarità (di Monin-Obukhov o locali) erano un'ottima approssimazione per un *PBL* convettivo, nel caso di uno *SBL* esse devono ritenersi buone approssimazioni solo in situazioni di debole stabilità.

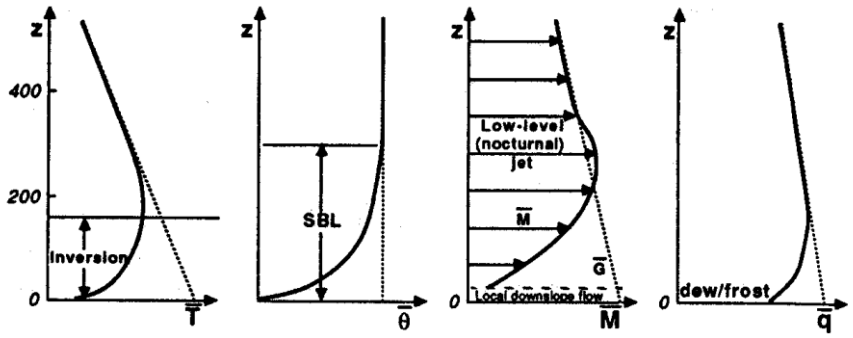


Fig. 8.76: profili verticali tipici in un PBL stabile (da Stull, 1989).

8.8.2 IL NUMERO DI RICHARDSON CRITICO

Lo *SBL* ha come caratteristica principale il fatto di presentare una stratificazione termica positiva spesso piuttosto elevata, cosa tipica, per esempio, nelle notti serene e con vento debole o nella lunga notte artica ed antartica. Ciò che vediamo sperimentalmente è che con l'aumentare della stabilità, quantificata dal parametro $\zeta = z/L$ o dai Numeri di Richardson Ri e R_f, le fluttuazioni turbolente diminuiscono d'intensità e si fanno sempre più intermittenti, alternando scoppi di turbolenza a periodi, più o meno lunghi, in cui le fluttuazioni scompaiono, almeno per quanto sono in grado di stabilire gli strumenti attualmente impiegabili. C'è un valore limite di stabilità oltre il quale la turbolenza scompare? Questo è il vero interrogativo che ci si pone e, purtroppo, finora la scomparsa o meno della turbolenza alle elevate stabilità è un enigma ancora praticamente irrisolto. Qui di seguito cercheremo di dare un quadro almeno approssimato della questione sulla base dei numerosi lavori pubblicati di recente in proposito e specialmente sulla base dei lavori di Gracev e al. (2013) e di Zilitinkevich e al. (2010).

Come sappiamo, la stabilità del moto di un fluido è caratterizzata in maniera compatta da due *indici storici*: il Numero di Richardson Gradiente Ri ed il Numero di Richardson Flusso R_f. Se ci poniamo in un sistema di riferimento in cui l'asse x è diretto nella direzione dello *stress*, la loro definizione, come noto, è la seguente:

$$Ri = \frac{g}{\Theta_0}\frac{d\Theta/dz}{(dU/dz)^2}$$
$$R_f = -\frac{g}{\Theta_0}\frac{\overline{w\theta}}{u_*^2(dU/dz)} \qquad [8.192]$$

La Teoria Classica del moto dei fluidi asserisce che un fluido stazionario e non viscoso che si muove con moto laminare resta stabile alle piccole perturbazioni quando Ri supera un valore critico Ri_c pari a circa 0.25. In sostanza, ciò porta a dire che per un fluido ed un moto di questo tipo esiste un valore critico Ri_c oltre il quale nel fluido non possono sopravvivere perturbazioni di piccole dimensioni. La stessa cosa si può dire anche se si considera R_f. E questo è un dato di fatto.

Storicamente, per analogia, si è esteso questo concetto allo studio dei moti turbolenti caratteristici dello *SBL* in cui la stratificazione termica positiva spesso porta a Ri e R_f positivi ed elevati, ipotizzando che esistesse per Ri ed anche per R_f un valore critico oltre il quale la turbolenza veniva soppressa ed il moto progressivamente diventava laminare. Ma, nella realtà, evidenze sperimentali chiare e conclusive in questo senso non ci sono e non ci sono neppure convincenti e rigorose teorie matematiche al riguardo (Galperin e al., 2007). Comunque, sulla base dell'enorme lavoro fatto finora, si possono fare alcune affermazioni interessanti.

Per prima cosa cerchiamo indicazioni dalla Teoria della Similarità (quella classica di Monin-Obukhov o la Local Similarity). Se ammettiamo che:

$$\Phi_m(\zeta) = \left(\frac{kz}{u_*}\right)\cdot\frac{dU}{dz}$$
$$\Phi_h(\zeta) = \left(\frac{kz}{T_*}\right)\cdot\frac{d\Theta}{dz} \qquad [8.193a]$$

nelle condizioni estremamente stabili (cioè quando $\zeta>>1$), in cui la stratificazione termica inibisce i moti verticali e la turbolenza risulta sostanzialmente disaccoppiata dal suolo, la variabile z non è più un parametro di scala rilevante. In questo caso (*z-less*) abbiamo visto che la forma asintotica per le due Funzioni Universale di Similarità risulta essere la seguente:

$$\Phi_m(\zeta) = \beta_m\zeta$$
$$\Phi_h(\zeta) = \beta_h\zeta \qquad [8.193b]$$

con i due coefficienti numerici β_m e β_h prossimi a 5. Dato che, come è facile verificare:

$$Ri = \frac{\zeta \cdot \Phi_h}{\Phi_m^2}$$
$$R_f = \frac{\zeta}{\Phi_m} \qquad [8.193c]$$

si vede chiaramente come il limite asintotico per *Ri* e R_f è una costante che, per i valori dati ai coefficienti numerici presenti nelle Funzioni di Similarità, è prossima a 1. Ma in condizioni asintotiche che cosa capita davvero? Lo vedremo dopo, per lo meno sulla base delle conoscenze sperimentali finora acquisite.

Se poi consideriamo semplicemente la definizione di R_f, vediamo che questo indicatore di stabilità rappresenta il rapporto tra il consumo di energia cinetica turbolenta causato dalle forze di galleggiamento negative e la produzione di turbolenza meccanica derivante dallo *shear*. Quindi R_f non può crescere indefinitamente altrimenti il consumo di energia cinetica risulterebbe superiore alla sua produzione. Perciò, quando $\zeta \to \infty$, R_f dovrebbe tendere ad un valore limite $R_{f\infty}$. Proseguendo gli sviluppi analitici, è facile verificare che l'eventuale esistenza di $R_{f\infty}$ implicherebbe necessariamente che la forma asintotica per la Funzioni di Similarità del profilo verticale del vento medio sia proprio quella prevista dall'ipotesi *z-less*. Questo ragionamento è stato sviluppato in maniera estremamente chiara nel lavoro di Zilitinlevich e al. (2010) nell'ipotesi, però, in cui la turbolenza fosse stazionaria ed omogenea, condizione facilmente ottenibile in simulazioni LES, ma molto meno frequenti nello *SBL* reale (Kouznetsov e Zilitinkevich 2010). Considerazioni decisamente più complicate sono riportate nel lavoro di Zilitinkevich e al. (2008).

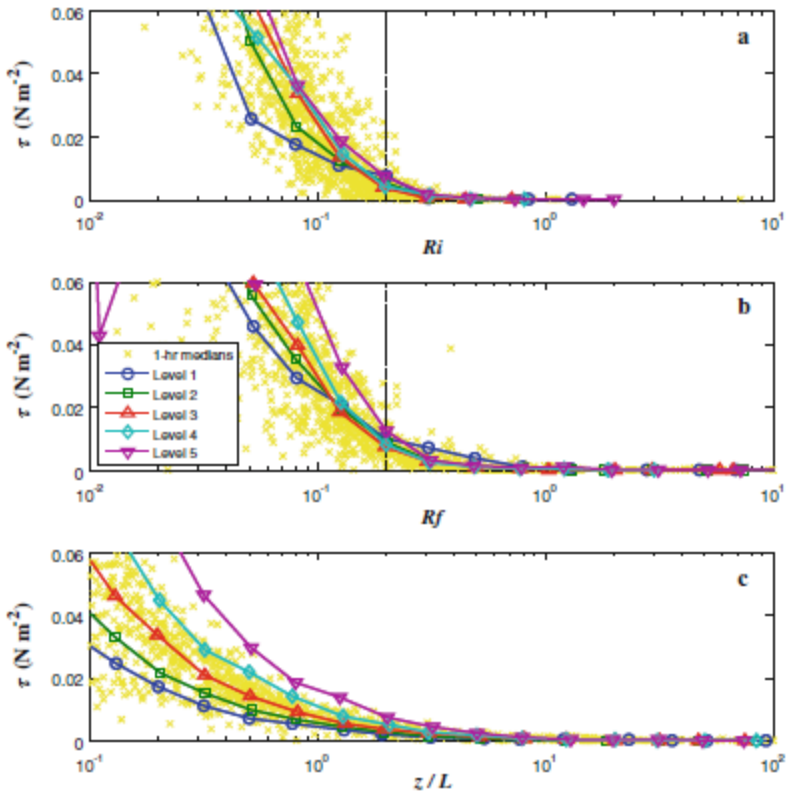


Fig. 8.77: misure di stress di Reynolds rilevate durante la campagna SHEBA con le curve medie ad ogni quota di misura (Gracev e al. 2013)

Per tentare di fare un po' di luce sull'esistenza o meno di un valore critico per i Numeri di Richardson, conviene affidarsi alle misure in atmosfera. A questo proposito, le misure raccolte durante la campagna SHEBA (*Surface Heat Budget of the Arctic Ocean*) realizzata sul pack artico

dall'ottobre 1997 al settembre 1998 (Gracev e al. 2005) sono estremamente utili allo scopo perché si riferiscono a situazioni che coprono un intervallo molto ampio di stabilità (dalle situazioni debolmente stabili a quelle fortemente stabili). Iniziamo prendendo in considerazione tutte le misure stabili raccolte nella campagna e organizziamole secondo la stabilità che possiamo esprimere sia in termini di ζ, che in termini di *Ri* e R_f. Nei grafici della **Fig. 8.77** sono presentate le misure di *stress* di Reynolds $\tau = \varrho \cdot u_*^2$ ottenute ai 5 livelli di misura (circa 2, 3, 5, 9, 18. metri), assieme a 5 curve, una per ciascuna quota di misura, in cui giacciono i valori medi delle misure rilevate a quella quota ad una data stabilità. Nei grafici in cui la stabilità è quantificata da *Ri* e R_f viene indicato anche l'ipotetico valore critico posto pari a 0.2. Come si vede, lo *stress* nelle situazioni subcritiche (cioè quando *Ri* o R_f risulta inferiore a 0.2) presenta un andamento rapidamente decrescente con la stabilità fin quasi ad annullarsi nei pressi del valore critico e ciò si ha sia che si utilizzi *Ri* che R_f come indicatore di stabilità. Il grafico, invece, che rappresenta le misure in funzione di $\zeta = z/L$ presenta andamenti decrescenti con la stabilità molto più lenti. Tutto ciò conferma come l'elevata stratificazione termica distrugge progressivamente e rapidamente la turbolenza meccanica.

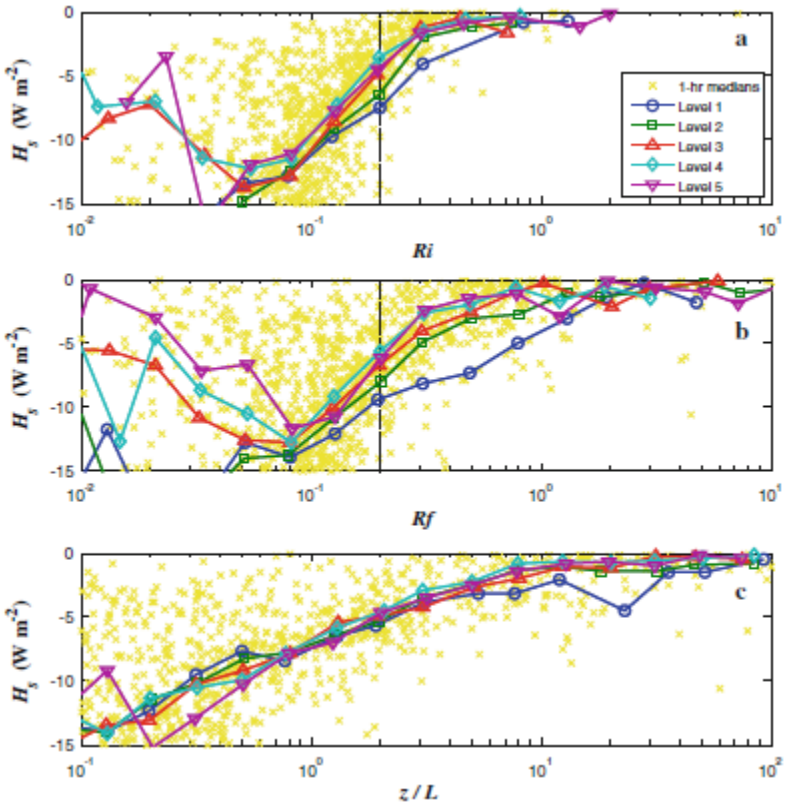


Fig. 8.78: misure del flusso turbolento di calore sensibile rilevate durante la campagna SHEBA con le curve medie ad ogni quota di misura (Gracev e al. 2013)

Se, poi, consideriamo i grafici di **Fig. 8.78** per il flusso turbolento di calore sensibile (indicato come H_S), notiamo almeno due particolarità interessanti. In primo luogo, nelle situazioni supercritiche (quando *Ri* o R_f superano il valore 0.2) il flusso turbolento di calore sensibile tende a zero molto rapidamente. In secondo luogo, guardando attentamente le curve dei flussi ai vari livelli di misura opportunamente mediati, notiamo come nella zona subcritica il flusso di calore presenti un minimo. Questa è un'ulteriore evidenza sperimentale della natura duale del flusso turbolento di calore sensibile che discuteremo più nel dettaglio nel punto successivo. Continuando l'analisi esplorativa e realizzando un'analisi spettrale, gli Autori hanno poi verificato la presenza dell'*Inertial Subrange* nelle misure e ne hanno valutato anche la sua pendenza, che teoricamente

dovrebbe essere pari a -5/3 ≈ -1.667. I risultati ottenuti sono rappresentati nei grafici di **Fig. 8.79** dove è riportata, a titolo di esempio, la pendenza della parte inerziale dello spettro della componente longitudinale *u* del moto. Come si vede, nella zona subcritica la pendenza rilevata è esattamente quella teorica, mentre nella zona supercritica la pendenza tende a zero, cosa che sta a significare da un lato l'assenza di un *Intertial Subrange* e dall'altro il fatto che lo spettro ottenuto dalle misure in effetti è quello relativo al rumore strumentale, molto maggiore delle fluttuazioni turbolente presenti.

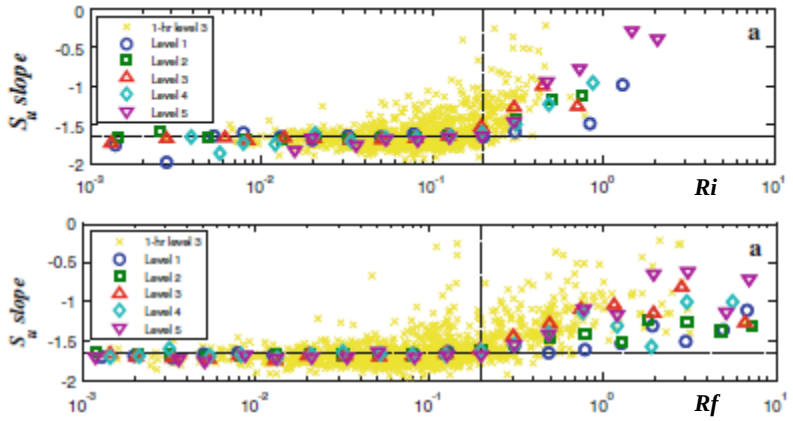


Fig. 8.79: misure della pendenza dell'Inertial Subrange rilevate durante la campagna SHEBA relative alla componente longitudinale del moto (Gracev e al. 2013)

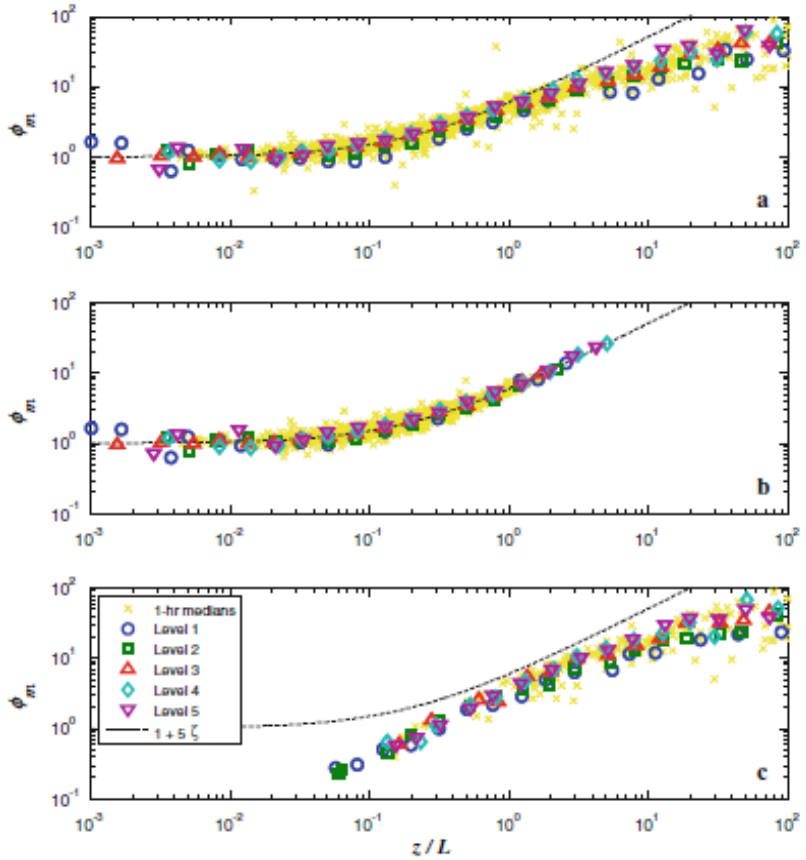


Fig. 8.80: Funzione di Similarità Φ_m rispetto al parametro ζ. Il pannello a rappresenta tutte le misure, il pannello b solo le misure subcritiche e il pannello c solo quelle supercritiche (Gracev e al. 2013)

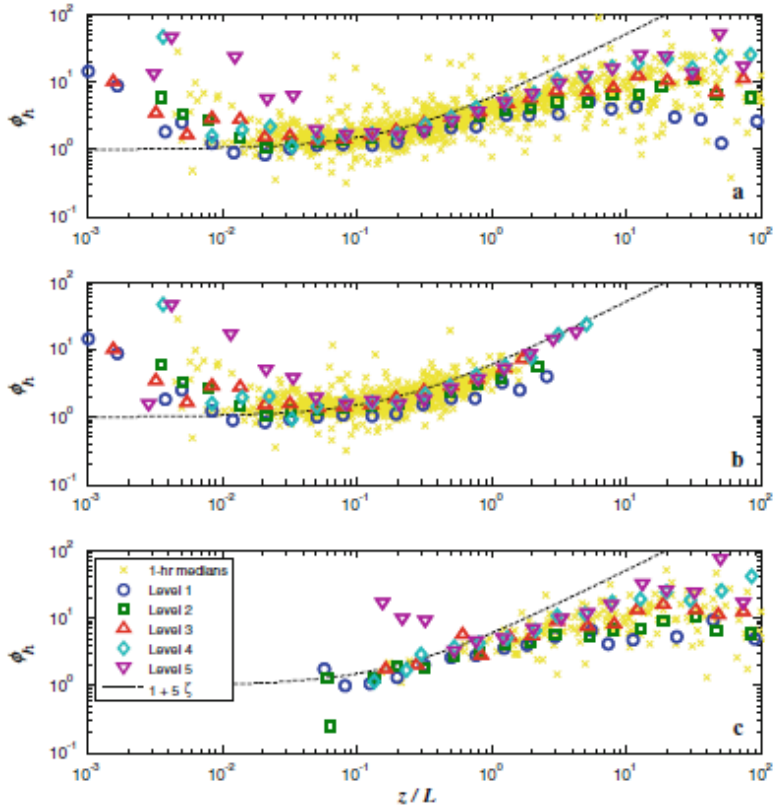


Fig. 8.81: Funzione di Similarità Φ_h rispetto al parametro ζ. Il pannello a rappresenta tutte le misure, il pannello b solo le misure subcritiche e il pannello c solo quelle supercritiche (Gracev e al. 2013)

La prima conclusione che possiamo trarre è che effettivamente esiste un valore critico per R_f (e apparentemente anche per *Ri*) che separa in maniera piuttosto *sfumata*, ma decisa, una zona subcritica, caratterizzata dalla presenza di turbolenza sviluppata e continua, da una zona supercritica in cui la turbolenza, pur esistendo, è debole ed intermittente. Quindi il passaggio da un regime subcritico ad un regime supercritico non comporta un repentino passaggio da una situazione turbolenta ad una situazione laminare, ma piuttosto il passaggio da una situazione di turbolenza continua ad una situazione di turbolenza intermittente, pilotata e modulata dalla presenza dei movimenti di tipo ondoso e a mesoscala (Zilitinkevich e Esau 2007).

Ma la considerazione più interessante è quella che segue. Dalle misure sperimentali risulta possibile calcolare il valore delle due funzioni di similarità $\Phi_m(\zeta)$ e $\Phi_h(\zeta)$. Se consideriamo i grafici riportati nella **Fig. 8.80** finalmente otteniamo alcune risposte alle domande che ci siamo posti. Nel grafico *a*) sono riportati tutti i valori medi di Φ_m disponibili in funzione di $\zeta = z/L$ e da esso si nota come la forma lineare normalmente considerata e giustificata teoricamente da Zilitinkevich e al. (2010) non rappresenti bene le situazioni ad elevata stabilità. Tuttavia, se si separano i valori di Φ_m in due classi distinte a seconda del valore di R_f, quelli relativi alle situazioni subcritiche (con R_f inferiore a 0.2 riportate nel grafico *b*) e quelle supercritiche (riportate nel grafico *c*) la situazione cambia drammaticamente. Sorprendentemente, tutte le situazioni subcritiche rispetto a R_f seguono perfettamente il modello lineare *z-less* esattamente con il coefficiente β_m previsto e pari a circa 5, mentre i valori relativi alle situazioni supercritiche no. Nella regione supercritica sembrerebbe comunque possibile esprimere Φ_m con una legge lineare, ma il coefficiente numerico β_m sarebbe differente. Se però facessimo la stessa ripartizione, ma utilizzando *Ri* come indicatore di stabilità, tutto ciò non emergerebbe. Nella **Fig. 8.81** sono riportati analoghi

grafici relativi a Φ_h e la situazione è sostanzialmente analoga, anche se la dispersione dei dati è decisamente superiore. La conclusione cui siamo giunti è di estremo interesse. Esistono effettivamente due regimi di turbolenza che caratterizzano lo *SBL*, uno di turbolenza continua ben sviluppata ed un altro di turbolenza ridotta ed intermittente prevalentemente dovuta a fluttuazioni orizzontali. Le due zone che possiamo chiamare di *debole stabilità* e di *elevata stabilità* sono separate da una zona di transizione in cui si ha un rapido passaggio da un regime all'altro. L'indicatore di stabilità che mostra con chiarezza l'appartenenza o meno ai due regimi non è $\zeta = z/L$ e tantomeno *Ri* per i quali di fatto non si può definire un valore critico, ma è R_f che pare essere il vero indicatore di stabilità, confermando le affermazioni e le previsioni di Zilitinkevich e al. (2010).

8.8.3 LA NATURA DUALE DEL FLUSSO TURBOLENTO DI CALORE SENSIBILE

Se consideriamo il flusso turbolento di calore sensibile H_0 nelle situazioni stabili, notiamo una situazione curiosa. Quando siamo prossimi all'adiabaticità, cioè quando $\zeta = z/L$ tende a zero, la stratificazione termica è prossima all'adiabaticità (quindi il gradiente di temperatura potenziale è praticamente nullo) e le fluttuazioni termiche tendono ad annullarsi. Quindi è logico prevedere che anche H_0 e la temperatura di scala T_* tendano ad annullarsi. Viceversa, alle elevatissime stabilità, quando ζ tende ad infinito, la turbolenza generata meccanicamente verrà soppressa dalla elevatissima stratificazione termica portando a zero H_0 ed anche T_*. Quindi nelle due situazioni asintotiche di stabilità si ha sempre che H_0 e T_* tendono ad annullarsi. Perciò è inevitabile che nelle situazioni di stabilità intermedia H_0 raggiunga un minimo (o, che è lo stesso, il suo modulo presenti un valore massimo). Questa è la *natura duale* del flusso turbolento di calore sensibile che si manifesta nelle situazioni stabili. Questa situazione era già stata individuata nel lavoro di de Bruin (1994) e in alcuni lavori posteriori si è cercato di definirla più precisamente.

Si considerino inizialmente (Wang e Bras 2010) le relazioni di Similarità per il profilo verticale nel *SL* del gradiente della velocità media del vento *U* e della temperatura potenziale media Θ di una tipica situazione stabile:

$$\frac{kz}{u_*}\frac{\partial U}{\partial z} = \Phi_m(\zeta)$$
$$\frac{kz}{u_*}\frac{\partial \Theta}{\partial z} = \Phi_h(\zeta) \qquad [8.194a]$$

E si ipotizzi che le Funzioni Universali di Similarità siano date dalle relazioni di Businger:

$$\Phi_m = 1 + \beta\zeta$$
$$\Phi_m = \alpha + \beta\zeta \qquad [8.194b]$$

dove, per esempio, $\alpha = 0.75$ e $\beta = 4.7$. La validità di queste forme funzionali per le Funzioni Universali di Similarità in tutto il *range* di stabilità (da situazioni quasi adiabatiche a situazioni estremamente stabili) è stata dimostrata recentemente da Zilitinkevich e al. (2010) sulla base di ragionamenti rigorosi basati sul bilancio di energia cinetica turbolenta, anche se ciò è vero solo se ci si trova in situazioni stazionarie ed omogenee. I ragionamenti che verranno fatti qui di seguito mantengono la loro validità anche quando vengono impiegate Funzioni Universali di Gradiente diverse dalle (8.194b) come mostrato nel lavoro di Casasanta e al. (2021). È facile verificare che, tenendo conto di queste Relazioni di Similarità MOST per il gradiente della temperatura potenziale e della velocità media del vento e della definizione di ζ, si ottengono due equazioni equivalenti, entrambe che legano tra loro il flusso turbolento di calore sensibile, la *friction velocity* ed il gradiente verticale della velocità media del vento: la prima vede come variabile dipendete il flusso turbolento di calore sensibile normalizzato e la seconda che vede come variabile dipendente il gradiente di velocità media del vento normalizzato:

$$\frac{H_0}{\rho C_p} = \frac{1}{\beta}\frac{T_0}{kgz}u_*^2\left(u_* - kz\frac{\partial U}{\partial z}\right) \qquad [8.195a]$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{u_*}{kz}\left[1 - \beta\frac{kzg}{T_0}\frac{1}{u_*^3}\frac{H_0}{\rho C_p}\right] \qquad [8.195b]$$

Se fissiamo un valore per il gradiente verticale della velocità media del vento, la relazione (8.195a) si presenta come mostrato nella **Fig. 8.82a**, dove abbiamo messo in relazione il flusso di calore sensibile alla *friction velocity* u_*. Inoltre, se fissiamo un valore di H_0, la (8.195b) si presenta come indicato nella **Fig. 8.82b**, dove abbiamo messo in relazione lo *shear* del vento con u_*. È immediato constatare che le due relazioni non sono monotone in u_* e che sia H_0 che lo *shear* del vento presentano un valore minimo.

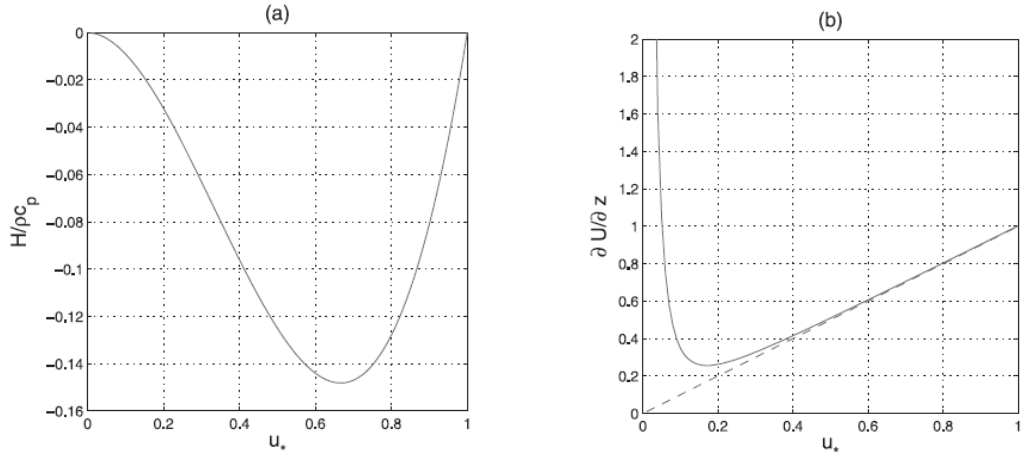


Fig. 8.82: variazione con u_* di H_0 (a) e del gradiente verticale di velocità media del vento (b) (Wang e Bras, 2010)

Nella **Fig. 8.83** viene mostrato ciò che si può ottenere in termini sperimentali, cosa che conferma quanto dedotto in precedenza.

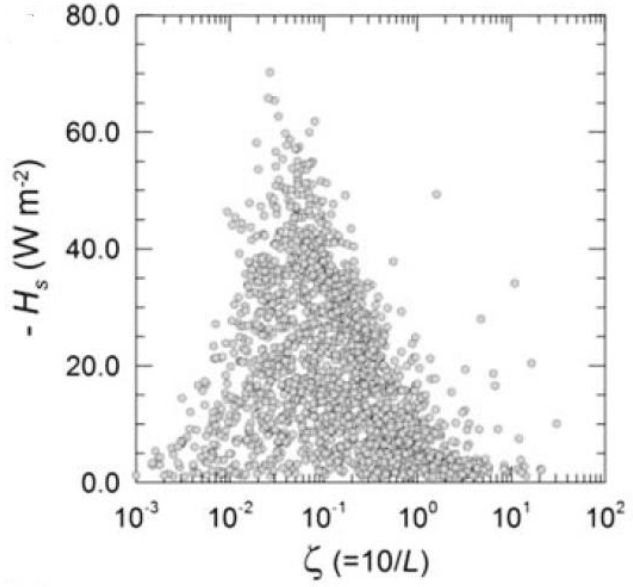


Fig. 8.83: Misure di flusso turbolento di calore sensibile (H_s) in funzione del parametro di stabilità ζ. La quota di misura è a 10 m dal suolo (Luhar e Rayner 2009).

Considerando, per il momento, la relazione (8.195a) vediamo che ad un dato valore di H_0 corrispondono due possibili valori per u_* a meno che H_0 abbia raggiunto il valore minimo

possibile. È immediato constatare che ciò avviene quando:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{3}{2}\frac{u_*}{kz} \qquad [8.195c]$$

ed il corrispondente valore minimo raggiunto da H_0 risulta pari a:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{3}{2}\frac{u_*}{kz} \qquad [8.195d]$$

Ciò ovviamente comporta, per la definizione della lunghezza di Monin-Obukhov, che il parametro di stabilità ζ corrispondente assuma il valore:

$$\zeta = \frac{1}{2\beta} \cong 0.1 \qquad [8.195e]$$

valore molto prossimo a quanto rilevato da Mahrt e al. (1998), come ben si vede nella **Fig. 8.8**, e da molti altri Autori tra cui Grachev e al. (2013), come abbiamo visto nella **Fig. 8.78**. Inoltre, quando H_0 raggiunge il valore minimo, il gradiente verticale di temperatura potenziale media risulta pari a:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2\beta}\frac{T_0}{g}\left(\frac{u_*}{kz}\right)^2 \qquad [8.195f]$$

Questa relazione ci consente di verificare se queste deduzioni sono anche congruenti con quanto previsto dalla *Gradient-Based Similarity*. Infatti (si veda il punto 8.4.1.1), sulla base di questa forma di Similarità e tenendo conto del fatto che H_0 presenta anche in questo caso un valore minimo dato dalla relazione (8.99), ipotizzando che in condizioni stabili $\sigma_w = 1.25\ u_*$, si giunge ancora una volta alla (8.195e) dove il coefficiente numerico invece di essere $(2\beta)^{-1} = 0.1064$ è pari a 0.1311. Quindi anche la *Gradiente-Based Similarity* riconferma non solo la presenza di un valore minimo per H_0, ma anche la relazione funzionale che lo lega a u_*.

A che valore del Numero di Richardson Flusso R_f si colloca il valore minimo di H_0 e dello *shear*? E' immediato vedere, utilizzando la definizione di R_f e le relazioni precedenti, che R_f deve valere $1/(3\beta) \approx 0.07$, cosa che coincide con quando riportato nella **Fig. 8.78b** per la campagna SHEBA. Ciò che abbiamo ottenuto comporta che il flusso di quantità di moto (rappresentata da u_*) che minimizza H_0, minimizza anche lo shear del vento. Questo fatto suggerisce che è il rimescolamento dinamico il responsabile del trasferimento di calore in uno *SBL* dove la convezione termica è inibita.

Alla natura duale di H_0 (così viene normalmente indicato questo fenomeno) è giunto anche Malhi (1995) considerando le relazioni di profilo sia per la velocità media del vento che per la temperatura potenziale media e le relazioni ottenute sono molto simili a quelle qui riportate. Casasanta e al. (2021) hanno rivisto criticamente tutto ciò verificando l'impatto sulle conclusioni raggiunte dovuto all'impiego di Funzioni Universali di Gradiente diverse da quelle di Businger. Si potrebbe pensare che la natura duale di H_0 sia un artefatto numerico, ma è stata confermata da molte osservazioni sperimentali (Mahrt, 1998 e 2007; Basu e al. 2006; Luhar e Rayner 2009; Luhar e al. 2009). Inoltre, lo studio teorico di van de Wiel e al. (2011a e b) conferma sostanzialmente questa visione.

8.8.4 ALTEZZA DEL PBL STABILE

Durante il pomeriggio di una giornata tipica alle medie latitudini in ambiente non urbano il flusso turbolento di calore sensibile decresce costantemente fino ad annullarsi poco prima del tramonto, interrompendo così l'immissione di energia nel *PBL* convettivo. In questo istante ideale in cui H_0 è nullo, in gran parte del *PBL* il profilo della temperatura potenziale virtuale è costante con la quota, che è poi la tipica situazione adiabatica. È da questo momento in poi che comincia il raffreddamento radiativo della superficie terrestre che inizialmente coinvolge l'aria immediatamente

sovrastante la superficie terrestre e che col tempo si propaga a quote sempre più elevate dando luogo nei pressi del suolo ad un profilo termico stabile con gradiente positivo. Abbiamo, quindi, nei pressi del suolo uno strato d'aria stabile e al di sopra sopravvive ciò che resta del *PBL* convettivo pomeridiano con temperatura potenziale costante, completamente disaccoppiato dal suolo che è poi il *Residual Layer*. Nello strato stabile si instaura, quindi, un'inversione termica con base al suolo che col tempo *erode* il *Residual Layer*. Fintanto che l'erosione non è completa, il gradiente dell'inversione termica diminuisce gradualmente con la quota fino ad annullarsi alla sommità dello strato dove si trova aria del *Residual Layer*. Quando, però, l'erosione è completa, l'inversione con base al suolo si inoltra nell'atmosfera libera assumendone il gradiente termico corrispondente. Questa transizione da un regime convettivo ad un regime stabile (e il viceversa al termine della notte) è sicuramente un processo non stazionario e proprio per questo di difficile descrizione e quantificazione. Maggiori dettagli sono contenuti nei lavori di Caughey e al. (1979), Nieuwstadt e Brost (1986) e Grimsdell e Angevine (2002). Dall'istante in cui s'annulla il flusso turbolento di calore sensibile, si viene quindi a creare una inversione con base al suolo che contiene il *PBL* notturno. Infatti, in generale solo nella parte bassa di questo strato si concentra la turbolenza, ovviamente solo di tipo meccanico, che evidenzia l'esistenza dello *SBL*. Nei punti che seguono, cercheremo di individuare l'estensione verticale dell'inversione termica e l'estensione verticale dello *PBL* stabile notturno che ne rappresenta solo una porzione, quella immediatamente adiacente al suolo.

8.8.4.1 Lo strato di inversione termica

Per individuare un modello analitico con cui descrivere l'evoluzione nel tempo dello spessore verticale dell'inversione termica con base al suolo che si viene a creare nelle situazioni notturne, faremo riferimento direttamente ai lavoro di Yamada (1979) e di Martano e Romanelli (1997).

Il punto di partenza di queste considerazioni analitiche è il considerare, come sempre, una situazione orizzontalmente omogenea ed il trascurare ogni tipo di avvezione. In queste condizioni, l'equazione prognostica della temperatura potenziale virtuale media (che, per semplicità indichiamo col simbolo Θ) prende la semplice forma:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{w\theta}}{\partial z} + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right)_R \qquad [8.196a]$$

in cui l'ultimo termine del membro di destra rappresenta il tasso di variazione della temperatura dell'aria dovuto all'irraggiamento di radiazione ad onda lunga. Questa equazione può essere integrata dal suolo ($z = 0$) alla sommità h_t dello strato d'inversione, ottenendo:

$$\int_0^{h_t} \frac{\partial \Theta}{\partial t} dz = \overline{w\theta}_0 - \overline{w\theta}_{h_t} + \int_0^{h_t} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right)_R dz \qquad [8.196b]$$

Impiegando poi la regola di Leibniz, si ha che:

$$\int_0^{h_t} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right)_R dz = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{h_t} \Theta dz - \Theta_{h_t}\frac{dh_t}{dt} \qquad [8.196c]$$

Per poter procedere, è necessario avere una relazione analitica che esprima il profilo verticale della temperatura media Θ e a questo proposito ci sono utili le indicazioni derivanti dalla Similarità Locale. In particolare, sulla base anche delle evidenze sperimentali, si può impiegare la relazione seguente:

$$\Theta = \Theta_{h_t} - \left(\Theta_{h_t} - \Theta_0\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{h_t}\right)^n = \Theta_{h_t} - \Delta\Theta_t \cdot \left(1 - \frac{z}{h_t}\right)^n \qquad [8.196d]$$

dove Θ_0 è la temperatura all'interfaccia aria-suolo. In entrambi i lavori, sulla base di numerose evidenze sperimentali si è posto $n = 3$. Oltre a ciò, per giungere all'integrazione definitiva dell'equazione prognostica della temperatura potenziale virtuale, è necessario conoscere come

evolve con la quota il raffreddamento radiativo. A tal proposito, Yamada (1979) ha giustificato la scelta seguente:

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right)_R = \frac{\partial \Theta_0}{\partial t} \qquad [8.196e]$$

A questo punto ci sono tutti gli elementi per poter integrare con la quota l'equazione prognostica per Θ, giungendo, infine, alla relazione:

$$\frac{dh_t}{dt} = -\frac{1}{\Theta_{h_t} - \Theta_0} \cdot [h_t + 4\overline{w\theta}_0] \qquad [8.196f]$$

che è la relazione che descrive l'accrescimento nel tempo dello spessore verticale dell'inversione con base al suolo. Come si nota, il tasso di variazione di h_t è direttamente proporzionale al flusso turbolento di calore sensibile al suolo (che è negativo nel periodo notturno) ed è inversamente proporzionale all'intensità dell'inversione, cioè alla differenza tra la temperatura potenziale media alla sommità ed alla base dell'inversione.

All'interno dell'inversione termica con base al suolo si sviluppa il *PBL* stabile notturno (*SBL*) che, come vedremo, è evidenziato da vari sintomi. Il SODAR (che è di fatto un radar acustico) evidenzia molto bene le porzioni di aria nei pressi del suolo in cui è presente la turbolenza e proprio da queste misure è risultato evidente come la turbolenza durante le situazioni stabili notturne sia confinata solamente in una porzione dell'inversione notturna, quella a diretto contato col suolo che presenta normalmente un'estensione verticale inferiore all'inversione stessa. Nel prossimo punto cerchiamo di individuare delle relazioni che quantificano lo spessore dello *SBL*.

8.8.4.2 L'estensione verticale del PBL stabile

Nonostante il suo carattere intermittente nello spazio e nel tempo, lo *SBL* possiede comunque una sua individualità, anche se sicuramente inferiore a quella del *PBL* convettivo. La letteratura scientifica ha proposto differenti definizioni di *altezza del SBL h* e ciò ha creato una notevole confusione e indeterminazione, come chiaramente descritto in Wetzel (1982). In sostanza, dal punto di vista teorico, possiamo seguire due criteri per cercare di individuare e quantificare l'estensione verticale dello *SBL*:

- Il criterio della turbolenza. Lo *SBL* può essere visto come l'estensione verticale della porzione di inversione termica con base al suolo in cui è confinata la turbolenza continua. Alla sua sommità *h* la turbolenza scompare o è una piccola frazione di quella presente alla superficie. Inevitabilmente, tutte le teorie che cercano di individuare *h* seguendo questo criterio devono passare da ragionamenti di tipo energetico che coinvolgono l'impiego dell'equazione di bilancio dell'energia cinetica turbolenta semplificata e parametrizzata in vari modi;
- Il criterio del profilo della velocità del vento. In questo caso, *h* rappresenta la quota a cui il vento medio si avvicina o coincide col vento geostrofico e ciò comporta che *h* rappresenti lo spessore dello strato di Ekman. Dato che lo strato di Ekman deriva la propria esistenza dalla rotazione terrestre, ogni teoria che seguirà questa strada porterà a formulazioni in cui comparirà sempre il parametro di Coriolis *f*.

Dal punto di vista pratico, l'individuazione di *h* non è né semplice né univoca. Come evidenziato da Wetzel (1982), ci sono diverse metodologie in uso che però spesso portano all'individuazione di diversi valori per *h.* In particolare, sono possibili le scelte seguenti:

- la quota h_v in corrispondenza del massimo del profilo verticale della velocità del *vento (Low Level Jet, LLJ*). Questa grandezza la possiamo stimare se abbiamo a disposizione il profilo verticale della velocità media del vento ottenuta o da un radiosondaggio ad alta

risoluzione spaziale o dall'innalzamento di un pallone frenato e da strumentazione *remote sensing* attiva;

- la quota h_i a cui si estende il massimo raffreddamento (in pratica la quota dove termina l'inversione della temperatura potenziale). Come abbiamo visto, in realtà h_i è ciò che al punto precedente abbiamo indicato con h_t, cioè l'estensione verticale dell'inversione con base al suolo che può essere individuata da un termosondaggio, da un pallone frenato o da strumentazione *remote sensing* attiva e passiva;
- la quota h dove diventa trascurabile la turbolenza. Questa è la definizione più logica e più normale, ma è quella che con maggior difficoltà si ottiene sperimentalmente. In pratica la possiamo dedurre dall'analisi del segnale di diverse strumentazioni *remote sensing* attive come il SODAR, il LIDAR, il Ceilometer e il Radar.
- la quota h_R in corrispondenza della quale il Numero di Richardson gradiente raggiunge o supera un valore critico. Nel seguito vedremo come impiegare questa metodologia.

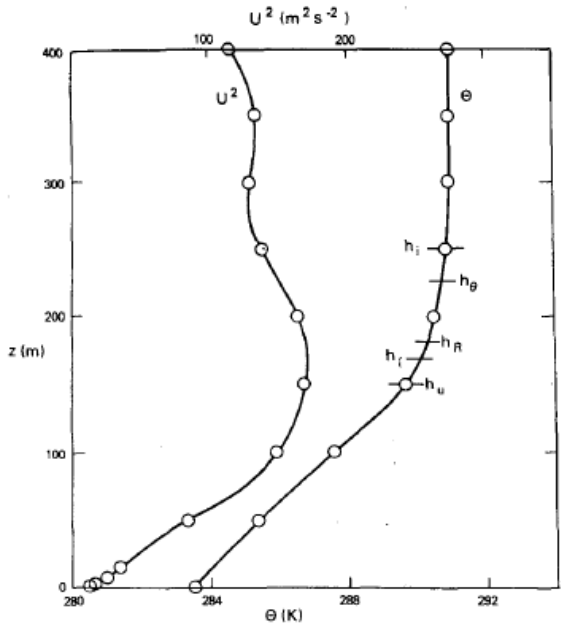


Fig. 8.84: due profili reali di temperatura potenziale nello SBL (Wetzel, 1982)

Nella **Fig. 8.84** sono presentati due casi reali e da essi si vede quanto siano differenti le diverse definizioni di altezza del *SBL* e si nota anche che tra di esse non esiste neppure una relazione valida in generale. Analizzando però la realtà dello *SBL*, si nota immediatamente che si possono individuare due elementi caratteristici di questa parte di atmosfera:

- il primo elemento è la turbolenza presente in una piccola zona di atmosfera a contatto col suolo, turbolenza originata principalmente dallo *shear* del vento. Se si è interessati a questo fenomeno (e questo è il caso quando l'obiettivo è, per esempio, la dispersione degli inquinanti), è inevitabile che per altezza dello *SBL* si intenda l'estensione dello strato di atmosfera in cui è rilevabile della turbolenza. Pertanto, le definizioni corrette saranno h e h_R. Tale quota in qualche modo risentirà delle forzanti al suolo (la *friction velocity* in particolare) e di alcune forzanti *esterne* come la rotazione terreste ed il gradiente termico nell'atmosfera libera sovrastante (se il *Residual Layer* è stato completamente eroso), anche se a tali forzanti non potrà adeguarsi velocemente come nel caso convettivo (in cui in pratica si assiste ad un adeguamento pressoché istantaneo). Ad una data situazione al suolo (per esempio ad un dato valore di u_*) si svilupperà della turbolenza che si

propagherà verso l'alto lentamente e non è detto che si raggiunga mai una situazione di equilibrio, soprattutto se le condizioni al suolo variano molto velocemente.

- il secondo elemento è il raffreddamento dell'aria, conseguenza del forte e progressivo raffreddamento del suolo. La situazione è molto differente dalla precedente, visto che il suolo può solo raffreddarsi e lo farà prevalentemente in maniera radiativa. In questo caso non è tanto la situazione al suolo che determina l'estensione verticale a cui si è propagato il raffreddamento, quanto piuttosto il *tempo* trascorso dal termine dell'immissione di energia nel suolo (in ultima analisi il tempo dal tramonto). Pertanto, quello a cui si assiste è un progressivo aumento col tempo dello spessore di atmosfera h_i interessato da questo raffreddamento. All'inizio della notte, soprattutto con velocità del vento elevata, h potrà essere maggiore di h_i, mentre nelle ultime ore della notte, soprattutto con venti deboli, è normalmente vero il viceversa. In quest'ultimo caso fino alla quota h sarà presente della turbolenza, mentre a quote superiori, anche se inferiori ad h_i la turbolenza sarà assente.

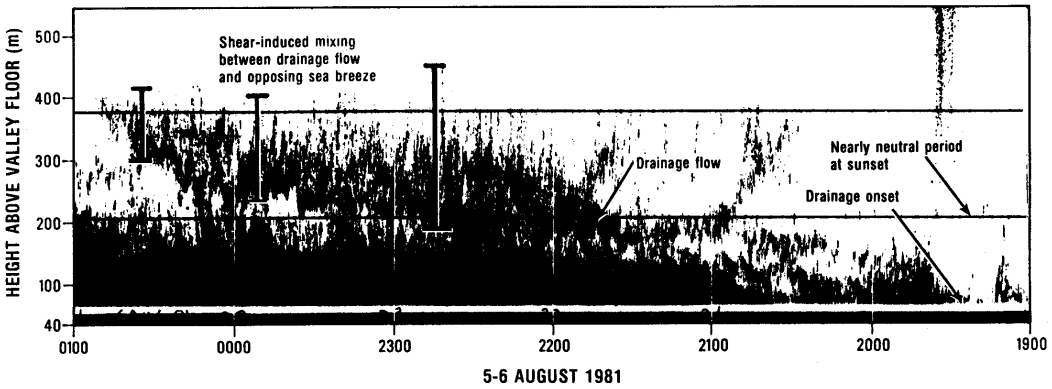


Fig:8.85: il facsimile SODAR per una situazione notturna (Neff e Coulter, 1986)

Da quanto detto non è facile dire quanto possa valere h e l'unica maniera *semplice* per la sua determinazione è l'analisi dell'eco di *backscattering* del *SODAR.* Nella **Fig.8.85** viene presentato l'andamento temporale dell'eco (quello che normalmente viene chiamato il *facsimile*) in cui, per ragioni tecniche, il tempo cresce da destra a sinistra. Per una sua interpretazione si ricordi che tanto più una parte del facsimile è scura, tanto maggiore è l'eco di ritorno e tanto più elevata è la turbolenza rilevata dal SODAR. Se si focalizza l'attenzione sulla parte scura inferiore, risulta evidente uno strato turbolento vicino al suolo dello spessore massimo di 200 metri che ha inizio al tramonto e persiste per l'intera notte e questo è proprio l'altezza h cercata. In realtà nella figura sono presenti altre zone scure a quote più elevate, che però rappresentano solo una situazione locale di brezza.

Modello prognostico dell'estensione verticale dello SBL

Sarebbe molto singolare se per la previsione dell'estensione verticale del *PB*L convettivo (la cui variazione nel tempo è decisamente lenta) si dovesse impiegare un modello prognostico, mentre per lo *SBL*, che è intrinsecamente non stazionario, fosse sufficiente usare leggi diagnostiche. Ed in effetti così non è e Nieuwstadt e Driedonks (1979) e Nieuwstadt e Tennekes (1981) hanno sviluppato un modello in grado, pur con molte semplificazioni, di stimare la dinamica di uno *SBL* e la sua estensione verticale seguendo il secondo dei due criteri indicati in precedenza.

Il punto di partenza del loro lavoro è la scrittura delle equazioni del moto orizzontale di un *PBL* e dell'equazione della temperatura potenziale. Una volta introdotta un'opportuna ipotesi di chiusura e fatte opportune parametrizzazioni, gli Autori sono giunti alla relazione:

$$\frac{dh_t}{dt} = w_h - \frac{h_e - h}{T} \qquad [8.197a]$$

dove w_h è la subsidenza (come già si era fatto per il modello prognostico del *PBL* convettivo). In sostanza questa relazione afferma che, a fronte di opportune forzanti esterne ed interne, l'estensione verticale dello *SBL* si adegua progressivamente alla nuova situazione, evolvendo verso una situazione di equilibrio caratterizzata dalla quota h_e con un tempo caratteristico di scala pari a T. In pratica, h_e sarebbe l'estensione verticale dello *SBL* che si otterrebbe per $t \to \infty$ se permanessero costanti le forzanti interne ed esterne. Ovviamente, per poter rendere operativo questo modello prognostico è necessario conoscere sia T che h_e, mentre w_h normalmente è noto o per misure meteorologiche o da modellizzazioni meteorologiche a grande scala.

Per quanto riguarda il tempo di scala caratteristico T, Nieuwstadt e Tennekes (1981) propongono la semplice relazione seguente:

$$T^{-1} = C_E|f| \qquad [8.197b]$$

dove la costante numerica C_E risulta dell'ordine di 1. Questa relazione porterebbe a ritenere che il tempo caratteristico di scala dipenda solo dalla rotazione terrestre, cosa piuttosto difficile da credere. Viceversa, Martano e Romanelli (1997), estendendo i ragionamenti di Nieuwstadt e Tennekes (1981) e integrandoli con il modello di Yamada (1979) per l'inversione con base al suolo, hanno ritenuto che il tempo caratteristico di scala fosse direttamente proporzionale all'intensità dell'inversione termica riscontrata alla quota h ($\Delta\Theta_h$) e al tasso di raffreddamento del suolo, giungendo a dire che:

$$T = \frac{1}{a_1} \cdot \left[\frac{\Delta\Theta_h}{d\Theta/dt}\right] \qquad [8.197c]$$

dove la costante a_1 è pari a 20. Per quanto riguarda, invece, h_e, i lavori citati hanno tutti portato a delle relazioni che, per varie ragioni, presentano delle criticità. Quindi, a questo proposito, si è concentrata una mole notevole di lavori che hanno proposto varie formulazioni alternative per h_e che illustreremo qui di seguito.

L'estensione verticale all'equilibrio dello SBL

La ricerca di espressioni sempre più realistiche e credibili che esprimano h_e è durata molti decenni ed ancora prosegue. Quanto segue è stato dedotto impiegando la parziale rassegna fatta da Seibert e al. (2000) ed i lavori di Zilitinkevich e Mironov (1996), Vogelezang e Holtslag (1996), Joffre e al. (2001), Zilitinkevich e Baklanov (2002), Zilitinkevich e al. (2002), Zilitinkevich e Esau (2002, 2003) e Vickers e Mahrt (2004).

L'estensione verticale all'equilibrio h_e, dal punto di vista dell'Analisi Dimensionale, dovrà avere come riferimento una o più delle lunghezze di scala che si possono ottenere combinando tra loro alcuni elementi sia interni allo *SBL* che esterni ad esso, come:

- la rotazione terrestre, espressa dal parametro di Coriolis f,
- lo stress superficiale espresso dalla *friction velocity* u_*,
- il flusso di galleggiamento ed il flusso turbolento di calore sensibile, espresso dal parametro:
$$B_S = \frac{g}{\Theta_0}\overline{w\theta}$$
- la stratificazione termica alla sommità dello *SBL*, quando è stato completamente eroso il *Residual Layer*. Ciò è espresso dalla frequenza di Brunt-Vaisala definita come
$$N = \sqrt{\frac{g}{\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial z}}$$

Con questi parametri possono essere definite le seguenti lunghezze di scala:

$$\frac{u_*}{|f|} \qquad \frac{u_*^2}{|fB_S|^{1/2}} \qquad \frac{u_*}{|fN|^{1/2}} \qquad \frac{u_*}{N}$$

cui si aggiunge la lunghezza di Monin-Obukov.

Basandosi su argomenti di Analisi Dimensionale in cui compaiono queste variabili di scala e su versioni semplificate e parametrizzate delle equazioni del moto, dell'equazione della temperatura potenziale virtuale e dell'equazione che esprime il bilancio di energia cinetica turbolenta, si è giunti a molte formulazioni per h_e, le più importanti delle quali sono qui di seguito elencate:

- la prima relazione, derivante direttamente dal secondo criterio sopra indicato per definire l'estensione verticale di uno *SBL*, è:

$$h_e = C_n \frac{u_*}{|f|} \qquad [8.198a]$$

  dove la costante C_n assume un valore compreso nell'intervallo 0.1÷0.5. Questa relazione, che prende le mosse dalla classica teoria di Ekman, ipotizza che h_e sia influenzata solo dalla rotazione terrestre e dagli *stress* superficiali. Ovviamente questa relazione non può essere utilizzata nelle zone equatoriali;

- un'altra relazione, che tiene conto sia della rotazione terrestre che dei flussi turbolenti al suolo, risulta espressa come:

$$h_e = C_{sr} \frac{u_*^2}{|fB_S|^{1/2}} \qquad [8.198b]$$

  dove la costante numerica C_{sr} risulta dell'ordine di 1. Questa relazione è stata decisamente la più usata nel passato, ovviamente alle medie latitudini, mentre la presenza del parametro di Coriolis ne impedisce l'uso nelle zone equatoriali;

- Vickers e Mahrt (2004) hanno proposto la combinazione delle due relazioni precedenti, ottenendo la seguente espressione:

$$h_e = L \cdot \frac{0.3 \cdot u_*/(fL)}{1 + 1.9\, h_e/L} \qquad [8.198c]$$

  in cui compaiono sia la rotazione terrestre (con la presenza del parametro di Coriolis *f*), che i flussi superficiali di quantità di moto e di calore;

- sulla base delle equazioni del moto semplificate secondo la Teoria di Ekman e dell'equazione prognostica della temperatura potenziale, una volta introdotta una chiusura basata su un valore critico per *Ri*, si è giunti per h_e alla relazione seguente:

$$h_e = C_{ir} \frac{u_*}{|fN|^{1/2}} \qquad [8.198d]$$

  dove la costante C_{ir} vale 1.7. Va rilevato che questa equazione, dipendendo dalla frequenza di Brunt-Vaisala *N*, è legata alla stratificazione stabile dell'atmosfera libera se il *Residual Layer* è stato completamente eroso.

- dat che, in generale, l'influenza alle medie latitudine del parametro di Coriolis è limitata, è stata proposta anche la relazione seguente, che ha le stesse limitazioni della precedente:

$$h_e = C_i \frac{u_*}{N} \qquad [8.198e]$$

  dove C_i è compresa tra 4 e 20;

- sempre nel caso in cui il *Residual Layer* sia stato completamente eroso, è stata proposta

da Zilitinkevich e al. (2002) anche la più complessa relazione seguente:

$$h_e = \frac{C_R u_*}{|f|}\left[1 + \frac{C_R^2 u_*(1 + C_{UN} L\, N/u_*)}{C_S^2 f L_*}\right]^{-1/2} \qquad [8.198f]$$

dove le costanti C_R, C_S e C_{UN} valgono rispettivamente 0.4, 0.75 e 0.25. Zilitinkevich e Baklanov (2002) mostrano che questa relazione fornisce risultati ragionevolmente realistici. Va rilevato che, come spesso accade nei lavori degli Autori Russi, al posto della lunghezza di Monin-Obukhov normalmente definita, ne viene introdotta un'altra indicata col simbolo L_* e la relazione tra le due è: $L = k \cdot L_*$

- Zilitinkevich e Esau (2003) hanno affrontato il tema combinando tra loro diverse lunghezze di scala. Rimandando per i dettagli al riferimento citato, essi, sulla base del confronto con un esteso insieme di misure, propongono la relazione seguente:

$$h_e = C_R \frac{u_*}{|f|}\left(1 + \frac{C_R^2 C_{uN}}{C_S^2}\mu_N + \frac{C_R^2}{C_S^2}\mu\right)^{-1/2} \qquad [8.198g]$$

dove $C_R = 0.5$, $C_{uN}/C_S^2 = 0.56$ e $C_S = 1$. Inoltre, $\mu_N = N/|f|$ è un parametro che rappresenta le forzanti esterne e $\mu = u_*/(|f|L_*)$ è un parametro di stabilità interna.

- Zilitinkevich e Mironov (1996) hanno sviluppato due relazioni *multi-limite* cercando di combinare in maniera appropriata le varie possibili forzanti esterne ed interne. La prima versione tiene conto della rotazione terrestre, della stratificazione al di sopra dello *SBL*, dello *stress* superficiale e del flusso turbolento di calore sensibile ed è la soluzione dell'equazione seguente:

$$\left(\frac{f h_e}{C_n u_*}\right)^2 + \frac{h_e}{C_S L_*} + \frac{N h_e}{C_i u_*} = 1 \qquad [8.198h]$$

se si vuole invece tener conto dell'interazione reciproca tra la rotazione terrestre, il flusso di galleggiamento e la stratificazione al di sopra dello *SBL*, la relazione da considerare è la seguente:

$$\left(\frac{f h_e}{C_n u_*}\right)^2 + \frac{h_e}{C_S L_*} + \frac{N h_e}{C_i u_*} + \frac{h_e |f|^{1/2}}{C_{sr}(u_* L_*)^{1/2}} + \frac{h_e |N f|^{1/2}}{C_{ir} u_*} = 1 \qquad [8.198i]$$

Queste relazioni, pur essendo implicite, sono estremamente interessanti perché da esse si ottiene un valore definito per h_e anche se f oppure N oppure L_* tendono a zero. Per i valori delle costanti C_n, C_S, C_i, C_{sr} e C_{ir} gli Autori hanno ottenuto rispettivamente i valori 0.5, 10, 20, 1, 1.7, mentre Joffre e al. (2001) propongono rispettivamente i valori 0.2, 2.5, 10, 0.4, 1.2.

- da ultimo, Zilitinkevich ritiene estremamente accurata la relazione seguente:

$$\frac{1}{h_e^2} = \left(\frac{f}{C_R u_*}\right)^2 + \frac{|f|N}{(C_{CN} u_*)^2} + \frac{\left|f\overline{w\theta_0}\right|}{(C_S u_*^2)^2} \qquad [8.198j]$$

con le costanti $C_R = 0.6$, $C_{CN} = 1.3$ e $C_S = 0.8$.

8.8.5 NOCTURNAL LOW-LEVEL JET

Durante le ore notturne è molto frequente che il profilo verticale della velocità del vento presenti un valore massimo (spesso superiore al valore geostrofico e dell'ordine di 10 $m \cdot s^{-1}$) a quote relativamente basse (dell'ordine del centinaio di metri dal suolo). Questo fenomeno, universalmente denominato *Low-Level-Jet* (*LLJ*), è stato osservato un po' ovunque ed una visione climatologica

del fenomeno la si può trovare in vari lavori di ricerca, per esempio in Baas e al. (2009). Per la sua individuazione pratica e quantitativa dai profili verticali della velocità del vento sono stati usati metodi differenti. Alcuni di essi richiedono che il *LLJ* sia localizzato alla quota dove la velocità del vento risulta superiore ad uno specifico valore di soglia (per es. 12, 16 o 20 $m \cdot s^{-1}$), mentre altri richiedono che la velocità del vento sia super-geostrofica. Questo fenomeno è stato molto studiato (si veda per es. Malcher e Kraus, 1983; Kraus e al. 1985), è caratteristico delle situazioni stabili e può avere molte cause differenti. Infatti può essere causato:

- dalla variazione con la quota del vento geostrofico, derivante da fenomeni a mesoscala o da fenomeni indotti dall'orografia,
- dall'instaurarsi di effetti di brezza nelle zone costiere e montuose,
- dal passaggio di fronti ed anche (e forse soprattutto) da oscillazioni inerziali (di cui parleremo tra poco).

Il *LLJ* non è in generale un fenomeno occasionale, ma viceversa normalmente presenta un'evoluzione nel tempo. Se, per esempio, consideriamo la **Fig. 8.86** dove viene presentato il profilo verticale della velocità del vento ogni tre ore a partire dalle ore 18 del giorno iniziale fino alle ore 12 del giorno successivo, notiamo un'impressionante regolarità nell'evoluzione del fenomeno. Il profilo di partenza delle nostre considerazioni è quello delle ore 18 che non evidenzia alcun massimo nei primi 1000 m di quota. Tuttavia, nelle ore successive si nota come alla quota di circa 300 m si venga a formare progressivamente un massimo nel profilo della velocità del vento che diventa sempre più pronunciato col trascorrere del tempo fino a raggiungere il valore massimo attorno alle ore 6 del mattino successivo. A questo punto il processo s'inverte ed il *LLJ* regredisce in intensità fino a scomparire completamente alle ore 12.

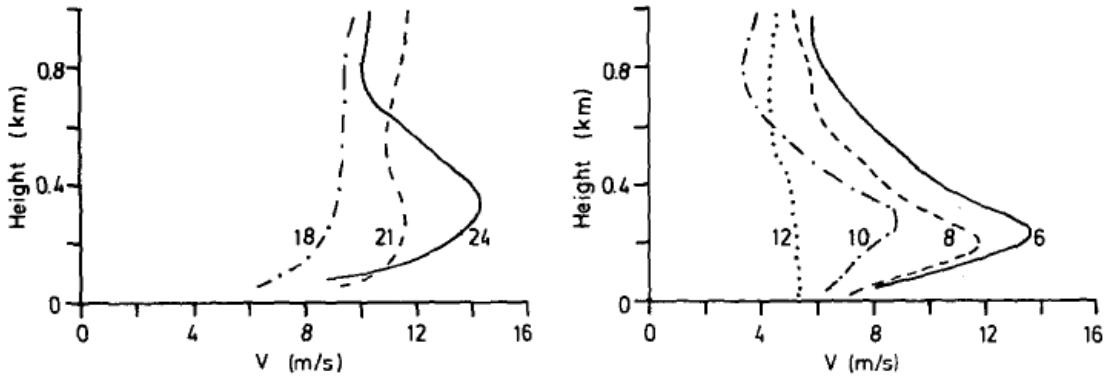


Fig.8.86: evoluzione notturna del Low-Level-Jet (Malcher e Kraus, 1983)

Le cause che probabilmente determinano l'insorgere e l'evolversi del LLJ sono molte e non è agevole descriverle tutte in termini rigorosamente analitici. Rimandando a Stull (1988) per ulteriori dettagli, qui ci concentriamo solo sulle oscillazioni inerziali che, per semplicità, ipotizziamo essere una delle cause più probabili da cui si origina il *LLJ*. A tal proposito si può impiegare il modello di Blackadar (1957), come presentato da Stull (1989).

Se ci si pone in un sistema di riferimento orientato secondo la direzione del vento geostrofico e si adottano le seguenti drastiche semplificazioni:

- trascuriamo completamente l'avvezione,
- ipotizziamo che il vento geostrofico non vari con la quota, cioè ci poniamo in condizioni rigorosamente barotropiche. Dato che il sistema di riferimento è tale per cui l'asse delle x è diretto secondo la direzione del vento geostrofico, avremo che solo la componente U_g è diversa da zero e costante ad ogni quota z;

- per semplicità trascuriamo la variazione della velocità e della direzione del vento con la quota. Quindi nel *PBL* il vento presenterà le due componenti cartesiane medie *U* e *V*, anch'esse costanti con la quota *z* ma non col tempo *t*;
- con queste considerazioni le equazioni di moto si semplificano notevolmente come vedremo subito dopo ed i termini $\partial\overline{uw}/\partial z$ e $\partial\overline{vw}/\partial z$ possono essere espressi rispettivamente nella forma più semplice $f{\cdot}F_u$ e $f{\cdot}F_v$, dove F_u e F_v sono detti *scostamenti dal vento geostrofico*.

Considerando tutte queste drastiche ipotesi, le equazioni del moto per una qualsiasi ora diurna o notturna possono essere scritte nella forma semplificata seguente:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= fV - fF_u \\ \frac{dV}{dt} &= f\left(U_g - U\right) + fF_v \end{aligned} \qquad [8.199]$$

In prima approssimazione nelle ore diurne (fino al tramonto) è possibile ritenere che la situazione meteorologica sia variabile nel tempo molto lentamente e ciò ci porta a dire che all'ora del tramonto (che consideriamo avvenire al tempo $t = 0$) le due componenti cartesiane del vento siano date dalle semplici relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} U_0 &= U_g - F_v \\ V_0 &= F_u \end{aligned} \qquad [8.200]$$

ottenute annullando le derivate temporali nelle equazioni del moto. Questa soluzione, relativa alle ore diurne, di fatto costituisce la condizione iniziale per l'evoluzione notturna. Per considerare tale situazione è necessario descriverla schematicamente in maniera più realistica. In effetti di notte nel *PBL* di dimensioni ridotte la turbolenza, anche se debole ed intermittente, è presente decrescendo costantemente con la quota fino ad annullarsi alla sua sommità. Se consideriamo proprio l'atmosfera <u>*appena sopra*</u> il *PBL*, possiamo dire che:

- come condizioni iniziali possiamo considerare le componenti del vento riscontrate a quella quota al tramonto, quando questa quota ancora stava *entro* il *PBL*;
- le caratteristiche di un *PBL* notturno sono tali da rendere non realistica l'ipotesi di una sua quasi-stazionarietà. Quindi dobbiamo inevitabilmente considerare la sua evoluzione nel tempo e descriverla analiticamente, anche se nella forma semplificata derivante dalle ipotesi appena adottate;
- i termini contenenti gli sforzi di Reynolds saranno nulli, visto che la poca turbolenza presente resta confinata sotto, nel *PBL*.

Tenendo conto di queste osservazioni, combiniamo le due equazioni (8.199) in un'unica equazione, derivando rispetto a *t* la prima e sostituendola nella seconda. Tutto ciò porta a:

$$\frac{d^2U}{dt^2} = -f\left(U - U_g\right) \qquad [8.201a]$$

equazione che descrive un sistema oscillante. Come noto, la sua soluzione generale è:

$$U - U_g = A \cdot sin(f \cdot t) + B \cdot cos(f \cdot t) \qquad [8.201b]$$

Le costanti d'integrazione *A* e *B* dovranno essere determinate dalle condizioni iniziali rappresentate dal valore che la componente del moto *U* avrà all'istante $t = 0$, condizioni date dalle relazioni (8. 200). Quindi la soluzione definitiva sarà data dalle relazioni:

$$\begin{aligned} U &= U_g + F_u\, sin(f \cdot t) - F_v\, cos(f \cdot t) \\ V &= F_u\, cos(f \cdot t) - F_v\, sin(f \cdot t) \end{aligned} \qquad [8.202]$$

Da questa soluzione è immediato verificare che la *velocità del vento continua ad oscillare* attorno al valore geostrofico, senza mai convergere a questo valore. Il periodo di oscillazione (*periodo inerziale*) risulta pari a $2\pi/f$, che alle medie latitudini corrisponde a circa 17 ore. L'ampiezza dell'oscillazione durante la notte dipende dallo scostamento geostrofico che si ha al tempo $t = 0$, cioè al termine delle ore diurne. Scostamenti geostrofici tipici sono dell'ordine di $2 \div 5$ m·s^{-1} e ciò porta a *LLJ* che possono essere di $2 \div 5$ m·s^{-1} più veloci del vento geostrofico. Il modello utilizzato per descrivere il *low-level jet* è estremamente semplificato. Un modello semplice, ma più realistico, può essere trovato in Garratt (1992).

Esercizio 8.9

(Da Stull, 1988) Il coefficiente di drag durante il giorno produce degli scostamenti geostrofici di $F_u = F_v = 3$ ms^{-1}. Calcolare a livello orario i venti notturni che ne derivano per un periodo inerziale completo. Determinare anche quando si ha il valore massimo della velocità del vento e a quanto ammonta questo massimo ipotizzando che $f = 10^{-4}$ s^{-1}, $U_g = 10$ ms^{-1} e che $V_g = 0$.

Risolvendo le equazioni (8.202) impiegando allo scopo le condizioni iniziali indicate, otteniamo quanto riportato nella tabella seguente dove il tempo $t = 0$ corrisponde al tramonto.

t (h)	U-Ug (ms^{-1})	Vg (ms^{-1})	t (h)	U-Ug (ms^{-1})	Vg (ms^{-1})
0	-3.00	3.00	10	1.36	-4.02
1	-1.75	3.86	11	-0.14	-4.24
2	-0.28	4.23	12	-1.62	-3.92
3	1.23	4.06	13	-2.90	-3.10
4	2.58	3.37	14	-3.81	-1.88
5	3.60	2.24	15	-4.22	-0.41
6	4.16	0.83	16	-4.10	1.10
7	4.19	-0.69	17	-3.45	2.47
8	3.67	-2.12	17.45	-3.00	3.00
9	2.69	-3.28			

Osservando attentamente i risultati ottenuti vediamo che il vettore vento descrive un cerchio attorno al vento geostrofico con raggio 4.24 ms^{-1}. Vediamo, poi, che la massima velocità del vento è pari a 14.24 ms^{-1} circa 6.5 h dopo il tramonto.

8.8.6 ONDE DI GRAVITÀ

Uno dei fenomeni più affascinanti e più complessi che interessano praticamente tutta l'atmosfera sono i fenomeni ondosi, cioè porzioni di fluido che presentano movimenti oscillatori che si propagano nello spazio. Studiare le onde in atmosfera non è un'impresa facile e studiarle nella Troposfera e nel *PBL* è ancora più importante soprattutto per la loro capacità di generare turbolenza e di interagire con essa. Qui non tenteremo neppure di andare oltre una breve introduzione sull'argomento, rimandando a Nappo (2002) chi fosse interessato a maggiori dettagli.

Un fluido stratificato stabilmente presenta una temperatura potenziale crescente con la quota e, per quanto abbiamo visto già al Capitolo 1, ciò implica che in esso possano esistere e propagarsi moti di tipo ondoso, cioè movimenti sostanzialmente armonici. Ad eccezione del *PBL* convettivo, l'intera atmosfera è sempre stratificata stabilmente ed è quindi ragionevole ipotizzare che essa contenga sempre moti di tipo ondoso. Molte delle onde atmosferiche si muovono diagonalmente verso l'alto o verso il basso, altre si propagano orizzontalmente. Alcune di queste onde, poi, appaiono stazionarie, come se fossero congelate nello spazio. Vediamo onde che si propagano verso l'alto contorcendosi come serpenti, aumentando la propria frequenza ed ampiezza e spesso riflettendosi verso il basso. Alcune di esse, poi, non vengono riflesse, ma si frantumano in innumerevoli onde più piccole che gradualmente spariscono dalla vista. Vediamo anche onde che seguono percorsi curvi, vediamo onde totalmente ed anche parzialmente trasmesse. Insomma, il quadro che emerge è da un lato affascinante e dall'altro demoralizzante se vogliamo tentare di descrivere analiticamente questa realtà.

Non possiamo vedere direttamente le onde di gravità dell'atmosfera, ma possiamo solo vederne gli effetti costituiti da variazioni locali in alcune proprietà dell'atmosfera che possono essere individuate per esempio dai sistemi *remote sensing* come il SODAR che opera nella parte bassa del *PBL*. Nella **Fig. 8.87** viene riportato il facsimile del SODAR rilevato in una situazione notturna che evidenzia una complessa forma di moto ondoso a varie frequenze ed ampiezze che coinvolge tutto il *PBL* stabile notturno. Molto lavoro è stato fatto sull'argomento, sia nel cercare di definire la teoria delle onde in atmosfera e la loro interazione con la turbolenza, sia nell'individuarle nelle misure (si veda come esempi i lavori di Terradellas e al. 2005; Zeri e Sa, 2011; Sorbjan e Czerwinska, 2013). Senza entrare nel dettaglio, qui di seguito presentiamo solo alcune considerazioni importanti.

Le osservazioni fatte al Capitolo 1 sulla stabilità statica portano ad affermare che nelle situazioni stabili esista una frequenza di oscillazione caratteristica, la frequenza di Brunt-Vaisala N_{BV}, dipendente dal parametro di galleggiamento e dal gradiente verticale della temperatura secondo la relazione:

$$N_{BV}^2 = \frac{g}{\Theta_v}\frac{\partial \Theta_v}{\partial z} \qquad [8.203]$$

Questa frequenza costituisce di fatto un limite superiore per ogni onda di gravità ad ogni quota. Se consideriamo uno *SBL* alla cui sommità sopravvive un *Residual Layer*, i moti ondosi che si generano per vari motivi nella stratificazione stabile presso il suolo si propagano verso l'alto e, se raggiungono una quota a cui N_{BV} coincide con la propria frequenza, vengono riflessi verso il basso. Queste onde vengono così intrappolate tra il suolo e lo strato circa adiabatico che limita superiormente lo *SBL*, propagandosi in orizzontale come si vede nella **Fig. 8.87**. Il periodo di queste onde è dell'ordine di alcuni minuti: nella precedente figura è agevole verificare che le onde visibili nel facsimile hanno periodo variabile tra 1 e 10 minuti.

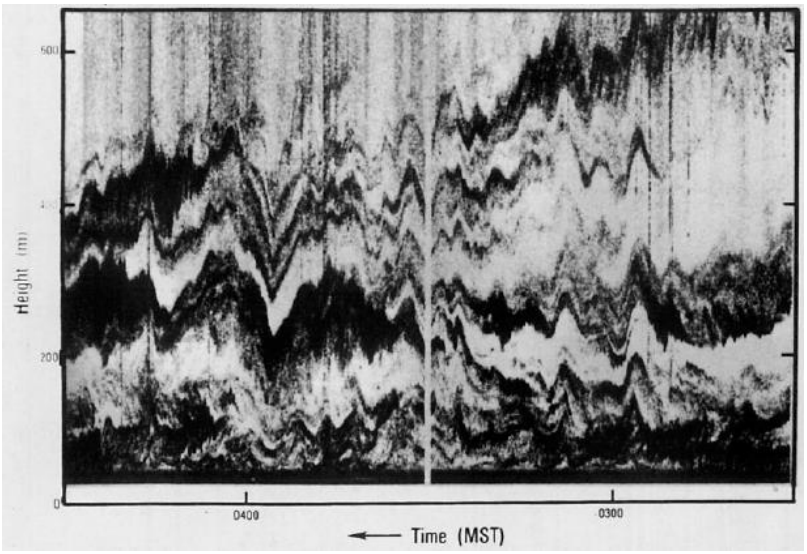


Fig: 8.87: facsimile SODAR di una situazione notturna con la presenza di onde di gravità

Lo spostamento verticale dell'aria indotto dal moto armonico dell'onda va da frazioni di metro a 200 metri. Se consideriamo ancora una volta la figura precedente, vediamo che questo spostamento varia tra 10 e 100 metri. Più elevato è questo spostamento, maggiori sono le fluttuazioni di pressione che si possono misurare alla superficie fino a variazioni bariche dell'ordine 0.05÷0.1 mb, difficili da apprezzare nelle normali misure di pressione, ma rilevabili con i microbarometri. Dato che l'ampiezza di un'onda di gravità può essere anche maggiore dell'estensione verticale dello *SBL*, ci possiamo aspettare, come in effetti è, che lo stato dello *SBL* sia fortemente modulato da tali onde.

Le onde di gravità possono essere generate da *wind shear* e da *impulsi*. A certe quote

(*livelli critici*) dove il Numero di Richardson è piccolo, il *wind shear* può generare onde di Kelvin-Helmholtz che eccitano altre onde di gravità che coesistono ed interagiscono con lo *SBL*. Le onde generate da impulsi, invece, sono altamente coerenti, virtualmente non dispersive e sono associate a specifici eventi come esplosioni, temporali o flussi sopra ostacoli e possiedono periodi piuttosto lunghi. Propagandosi nello *SBL*, esse possono indurre spostamenti rilevanti dell'aria dello *SBL*, modificando lo *shear* e la stabilità. In uno *SBL* fortemente turbolento, le onde sono soggette ad intense interazioni non lineari con la turbolenza. Di fatto, ogni onda comunque generata che si propaga in una regione a forte turbolenza verrà assorbita dalla turbolenza stessa e l'energia posseduta dall'onda verrà convertita in energia cinetica turbolenta.

È evidente l'enorme complessità del tema e non faremo alcun tentativo per approfondirlo. Qui di seguito presenteremo solo alcune brevi considerazioni tratte integralmente da Stull (1989).

Cenni alla teoria lineare delle onde

Partendo delle equazioni base di conservazione della quantità di moto e della temperatura:

- espandiamo ogni singola variabile ξ in un valore di base (o di *background*) ξ_b e in una perturbazione armonica ξ",
- assumiamo che le perturbazioni ondose siano di piccola intensità,
- eliminiamo tutti i termini che consistono del prodotto di perturbazioni ondose perché l'analisi di scala mostra come essi siano più piccoli degli altri termini presenti nelle equazioni.

Questo processo viene chiamato *linearizzazione delle equazioni fluidodinamiche*. Per alcuni casi speciali (dettagliatamente descritti in Nappo, 2002) si possono individuare soluzioni analitiche di tipo armonico per le equazioni del moto e per la temperatura e tali equazioni costituiscono la *teoria lineare delle onde*. Anche se la realtà è ben lontana da questa situazione ideale, comunque alcune delle onde reali presenti in atmosfera possiedono delle caratteristiche congruenti con la teoria lineare e per questo vengono dette *onde lineari*, mentre le altre, che si allontanano da questo comportamento ideale, vengono indicate come *onde non-lineari*.

Se k_x, k_y e k_z sono i numeri d'onda nelle direzioni x, y e z, e se f è la frequenza locale dell'onda osservata da un punto fisso al suolo, allora le perturbazioni ondose delle varie grandezze relative alle onde gravitazionali lineari vengono descritte dalle relazioni seguenti, tutte di tipo armonico:

$$
\begin{aligned}
w" &= A \cdot sin(J) \\
\eta" &= \frac{A}{f_i} cos(J) \\
u" &= -\left(\frac{k_x k_z A}{k_H^2}\right) sin(J) \\
v" &= -\left(\frac{k_y k_z A}{k_H^2}\right) sin(J) \\
p" &= -\left(\frac{\overline{\rho} k_z f_i A}{k_H^2}\right) sin(J) \\
\theta" &= -\left(\frac{A}{f_i}\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right) cos(J)
\end{aligned}
\qquad [8.204a]
$$

dove:

- η" è lo spostamento verticale dell'onda,
- A è un parametro legato all'ampiezza dell'onda,
- k_H è il numero d'onda orizzontale definito come $k_H^2 = k_x^2 + k_y^2$,

- f_i è la frequenza intrinseca dell'onda definita come $f_i = f - k_x U - k_y V$
- $J = k_x x + k_y y + k_z z - ft$

Inoltre, deve essere soddisfatta la relazione seguente:

$$\frac{f_i^2}{N_{BV}^2} = \frac{k_H^2}{k_H^2 + k_z^2} \qquad [8.204b]$$

Tutte queste relazioni mostrano come le onde lineari siano deterministiche, a differenza della turbolenza. Inoltre, le onde lineari possono trasportare quantità di moto ed energia cinetica, ma non possono trasportare calore e ciò lo vediamo immediatamente considerando le equazioni per *w*" e θ" che sono sfasate di 90°. Quando il prodotto *w*"θ" viene mediato in un numero intero di periodi, il risultato per definizione è identicamente nullo.

Cenni alle onde non lineari

Le serie storiche delle grandezze meteorologiche possono essere rappresentate non solo come la sovrapposizione di un valor medio e di una fluttuazione turbolenta (come abbiamo fatto finora), ma, per tener conto anche dei movimenti ondosi, anche (Einaudi e Finnigan, 1993) come la somma di tre distinti contributi: un valor medio, una componente ondosa ed una componente turbolenta. A questo punto, tentare di riscrivere le equazioni del moto e della temperatura potenziale tenendo conto di tutto ciò e trarre poi delle conclusioni è un'impresa decisamente ardua che non tenteremo neppure di fare. L'unico aspetto veramente importante da non dimenticare è che le onde non lineari non solo trasportano quantità di moto ed energia cinetica, ma anche calore e scalari.

Cenni sugli spettri

Come abbiamo visto in uno *SBL* moti ondosi e turbolenza coesistono. Per evidenziare in pratica ciò, uno strumento interessante è l'analisi spettrale. Se consideriamo il caso speciale costituito da un'onda eccitata ad un solo numero d'onda (quindi monocromatica), possiamo aspettarci che l'interazione non lineare tra onda e turbolenza rimuova energia dall'onda originaria distribuendola a numeri d'onda sia superiori che inferiori.

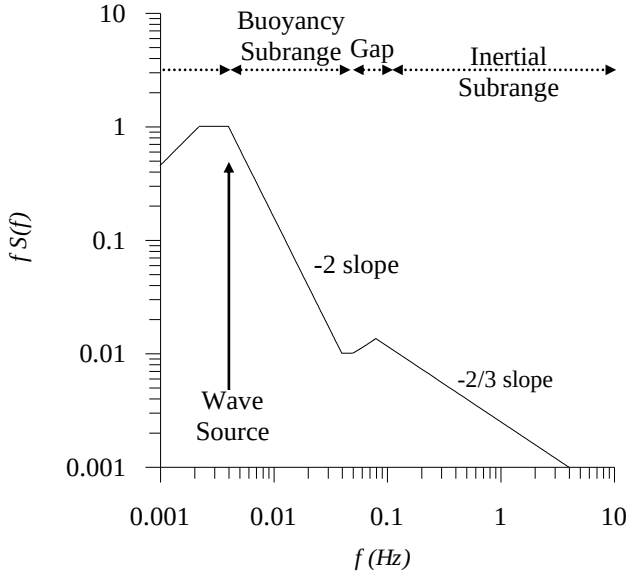


Fig: 8.88: rappresentazione di uno spettro contaminato da onde di gravità.

Lo spettro che ne consegue (Nai-Ping e al. 1983) può allora essere suddiviso in tre distinte regioni come si vede nella **Fig. 8.88**:

- una *zona a bassa frequenza* individuabile nello spettro $f \cdot S(f)$ come una zona piatta;
- una zona a frequenze intermedie in cui sono prevalenti gli effetti di galleggiamento sui vortici ancora di dimensione relativamente grande (*buoyancy subrange*). In questo caso $f \cdot S(f)$ diminuisce come f^{-2}. Questa diminuzione continua fino a raggiungere un valor minimo da cui la densità spettrale ricresce fino a formare un massimo relativo. Questa zona spettrale si colloca attorno a 10^{-2} Hz e la presenza di questo chiaro minimo evidenzia un caratteristico *spectral gap*. Questa situazione è tipica di situazioni in cui sono presenti onde di gravità con una frequenza propria (*wave source*) vicina alla frequenza di inizio di questa zona spettrale;
- una zona inerziale, caratteristica di tutti i vortici di piccole dimensioni ormai simmetrici, del tutto analoga a quella che incontrata in assenza di onde di gravità.

Tra il *buoyancy* e l'*intertial subrange* c'è un evidente *spectral gap*, più evidente nello spettro della temperatura potenziale. Queste considerazioni si riferiscono alla presenza di un'onda monocromatica che interagisce con la turbolenza. Se le onde presenti sono a diversa frequenza, la situazione si fa decisamente più complessa.

8.8.7 I MOTI SUBMESO ED IL MEANDERING

8.8.7.1 Generalità

La turbolenza nello *SBL* è debole e spesso sporadica e per questo emergono prepotentemente altri fenomeni che si insinuano nei *segnali meteorologici* che gli strumenti registrano. Inoltre, la stratificazione termica stabile è l'ambiente ideale in cui si originano, si propagano ed interagiscono fenomeni ondosi (onde di gravità) di vario tipo e di essi abbiamo accennato parlato brevemente. Tuttavia, accanto ad esse si fanno evidenti anche altre forme di moto che in un *PBL* convettivo erano molto meno visibili (anche se probabilmente esistenti). Infatti, ad una turbolenza complessa e spesso atipica, si sovrappongono moti lentamente variabili delle masse d'aria la cui origine non è facilmente spiegabile. Incontriamo, infatti, onde di gravità, microfronti e tante altre strutture ancora più o meno coerenti che, assieme alla turbolenza atmosferica, contribuiscono a far continuamente fluttuare nel tempo attorno al proprio valor medio le principali variabili meteorologiche (le componenti del vento, la temperatura, ecc.). Quindi, osservando un variabile meteorologica in un punto, la vediamo fluttuare attorno al proprio valor medio sia ad alta frequenza (e questo è ciò che ci aspettiamo dalla turbolenza) ma anche a bassa frequenza (e questo è un fenomeno del tutto inatteso). Esiste, quindi un'evidenza sperimentale dell'esistenza di moti delle masse d'aria a scale temporali intermedie tra la mesoscala e la scala tipica della turbolenza e per questo prendono il nome di *moti submeso* (Mahrt e Mills, 2009).

Un'importante frazione dei moti submeso è costituita da oscillazioni orizzontali delle masse d'aria, lentamente variabili e pseudo-armonici, cui viene dato il nome di *meandering* (Etling, 1990; Yadav et al. 1996). Associate a queste oscillazioni orizzontali di velocità sono visibili anche oscillazioni del tutto simili di temperatura, mentre la componente verticale del moto sembra presentare solo le irregolarità tipiche della turbolenza. Di fatto, nelle situazioni in cui la velocità media del vento (stabilita in un intervallo temporale compatibile con lo *spectral gap*) è piuttosto bassa e soprattutto (ma non esclusivamente) nelle situazioni stabili, le masse d'aria oscillano lentamente in orizzontale, ma non in verticale, e ciò comporta che le componenti orizzontali del moto e la temperatura rilevate in un punto fisso del *PBL* mostrino un andamento nel tempo in cui sono visibili oltre le fluttuazioni turbolente ad alta frequenza, anche ondeggiamenti vagamente armonici a bassa frequenza. Un esempio di ciò lo si può vedere nella **Fig. 8.89** da cui si nota immediatamente l'enorme differenza tra le fluttuazioni turbolente ad alta frequenza ed il *meandering*, oltre al fatto che queste lente oscillazioni compaiono solo nel segnale delle due componenti orizzontali del moto e non nella componente verticale.

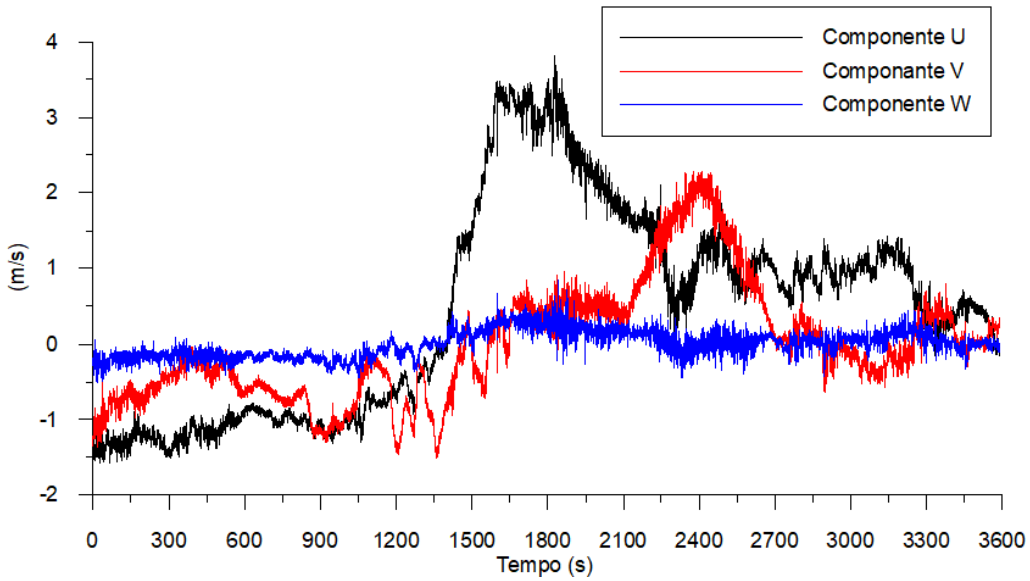


Fig. 8.89: andamento delle tre componenti istantanee del vento in un periodo di osservazione orario (CNR-ISAC Roma-Tor Vergata)

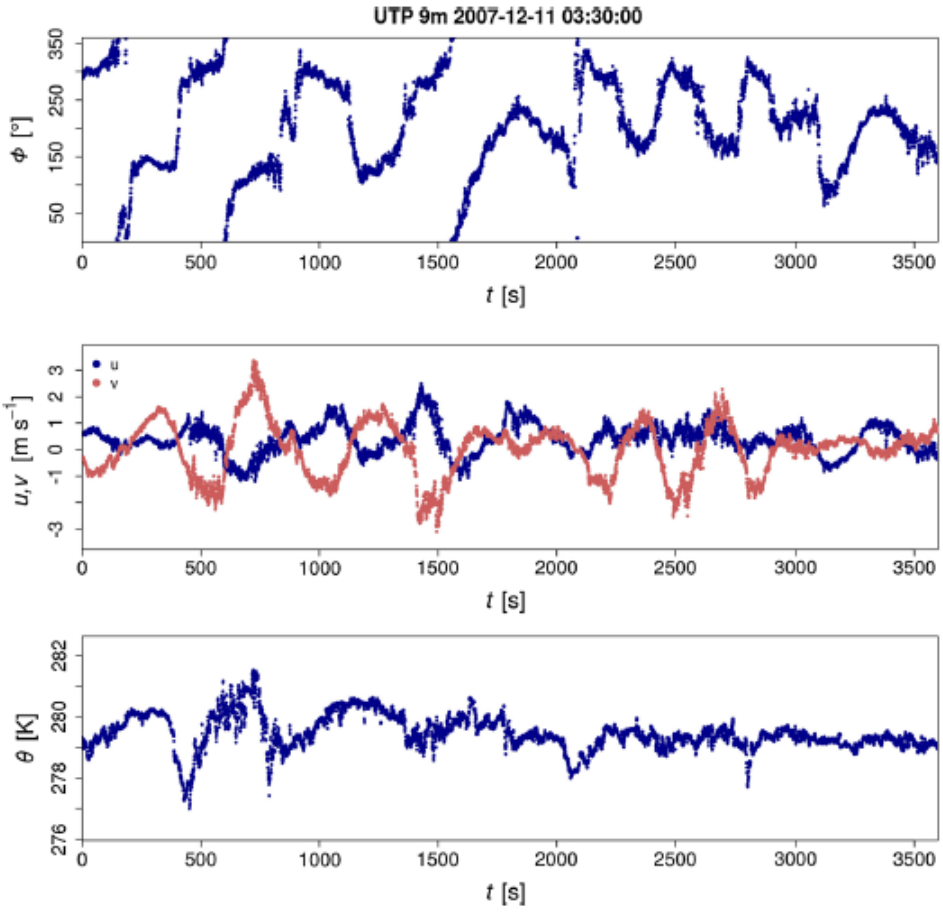


Fig. 8.90: andamento in un'ora della velocità del vento, delle due componenti orizzontali del moto e della temperatura in presenza di meandering (Mortarini e al. 2016)

Le caratteristiche del fenomeno sono ancora più evidenti nella **Fig. 8.90**. In essa sono immediatamente evidenti le oscillazioni quasi armoniche con periodo dell'ordine della decina di minuti sia del moto orizzontale delle masse d'aria (visibile dagli andamenti della direzione Φ del vento e delle due componenti orizzontali *U* e *V*) che della temperatura potenziale dell'aria θ.

Il fenomeno del *meandering* costituisce tuttora oggetto di indagine scientifica come dimostrano i numerosi lavori volti alla sua individuazione e caratterizzazione sperimentale. In particolare, interessanti a questo proposito sono i lavori di Anfossi e al. (2005), Mortarini e al. (2013a, 21013b, 2016) e Mortarini e Anfossi (2015) che hanno evidenziato il fenomeno e che hanno cercato di descriverlo almeno in termini semiempirici. Di ciò parleremo tra poco.

Il *meandering* non è una semplice *curiosità* meteorologica; la sua importanza pratica sta nel fatto che le oscillazioni lente orizzontali delle masse d'aria, aggiuntive alle fluttuazioni turbolente, incrementano notevolmente la dispersione laterale dei *plume* emessi dalle diverse sorgenti presenti in un territorio, cambiando radicalmente il campo di concentrazione al suolo che ne deriva. In pratica, le oscillazioni di *meandering* in qualche modo *gonfiano* la turbolenza. Il non tener conto della presenza del *meandering* comporta l'attuale difficile prevedibilità dei picchi di concentrazione che sono la causa principale della molestia olfattiva.

Vista l'importanza del fenomeno e la difficoltà nel ricostruire in maniera diretta la sua presenza nel campo di vento, parecchio lavoro è stato concentrato nel parametrizzarlo in modo opportuno e nell'introdurre tale fenomeno direttamente in un modello Lagrangiano a particelle. Di tutto ciò tratteremo al Capitolo 22. Ora, cerchiamo, invece, di individuare ragioni fluidodinamiche che giustifichino la presenza del *meandering* nel *PBL*.

8.8.7.2 Alcune considerazioni teoriche

Sperimentalmente evidente, il fenomeno del *meandering* non è facile da giustificare sulla base della fluidodinamica. I lavori teorici di Oettl e al. (2005) e di Goulard e al. (2007) hanno affrontato il problema. Lungi dall'essere meri esercizi accademici, in questi lavori si è cercato di riscrivere le equazioni che governavano il movimento delle masse d'aria (le equazioni di Navier-Stokes) semplificandole nell'ipotesi che gli stress di Reynolds tendessero ad annullarsi.

È una realtà incontrovertibile che i movimenti orizzontali di *meandering* debbano essere descritti inevitabilmente dalle leggi della Fluidodinamica. Partendo da questo presupposto, Oettl e al. (2005) e Goulart e al. (2007) hanno sistematicamente cercato di spiegare la presenza del *meandering* partendo dalle Equazioni di Navier-Stokes per le componenti medie del vento ipotizzando di trattare uno strato di *PBL* abbastanza vicino ad un suolo con spiccate omogeneità orizzontali. In questo caso, la componente verticale media del moto è nulla e ciò comporta che le equazioni si riducano alle sole due equazioni seguenti:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}&=f_C V-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial P}{\partial x}-\left[\frac{\partial \overline{uu}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{uv}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{uw}}{\partial z}\right]\\ \frac{\partial V}{\partial t}+U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}&=-f_C U-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial P}{\partial y}-\left[\frac{\partial \overline{uv}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{vv}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{ww}}{\partial z}\right]\end{aligned} \qquad [8.205a]$$

Esse descrivono l'evoluzione nel tempo delle componenti medie del moto *U* e *V* in funzione dei gradienti orizzontali del moto delle masse d'aria e del gradiente orizzontale della pressione media. Inoltre, nell'evoluzione delle variabili *U* e *V* gioca un ruolo essenziale la divergenza del tensore degli stress di Reynolds. A questo punto gli Autori considerano una situazione molto *particolare* in cui tutti i gradienti orizzontali delle componenti medie del moto e della pressione *P* sono costanti (ma non necessariamente nulli). Una situazione di questo tipo è ben lungi dall'essere eccezionale. In questo caso le relazioni precedenti possono essere riscritte come:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t}&=-a_1U+b_1V+c_1\\ \frac{\partial V}{\partial t}&=-a_2U+b_2V+c_2\end{aligned} \qquad [8.205b]$$

dove le costanti a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 e c_2 sono definite come:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial U}{\partial t} \qquad b_1 = f_C - \frac{\partial U}{\partial y} \qquad c_1 = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial P}{\partial x} - \left[\frac{\partial \overline{uu}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z}\right] \\ a_2 &= \frac{\partial V}{\partial y} \qquad b_2 = -\left(f_C + \frac{\partial V}{\partial x}\right) \qquad c_2 = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial P}{\partial y} - \left[\frac{\partial \overline{vu}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{vv}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z}\right] \end{aligned} \qquad [8.205c]$$

Da queste due equazioni che rappresentano una situazione particolare di stato del *PBL*, con opportune trasformazioni analitiche (per i cui dettagli si rimanda agli Autori) si ottiene la seguente equazione differenziale di secondo grado a coefficienti costanti:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \underbrace{(a_1 + a_2)}_{B}\frac{dU}{dt} + \underbrace{(a_1a_2 - b_1b_2)}_{C} - \underbrace{(a_2c_1 + b_1c_2)}_{D} = 0 \qquad [8.206]$$

che ammette una soluzione analitica. Tale soluzione dipende, però, dal valore assunto dal discriminante dell'equazione omogenea associata che, a sua volta, dipende dal valore dei coefficienti costanti. Gli Autori si sono concentrati sul caso in cui il discriminante $B^2 - 4C < 0$, condizione che garantisce una soluzione generale oscillante. Senza entrare nei dettagli ed operando opportune semplificazioni indotte da ragionamenti di scala (Oettl et al. 2005), quando i gradienti sono piccoli e la turbolenza debole o assente, si giunge ad ottenere la soluzione analitica delle (8.205b) in questo particolare caso bidimensionale (*soluzione di meandering*) espressa come:

$$\begin{aligned} U_m(t) &= \alpha_1 e^{-pt}\cos(qt) \\ V_m(t) &= -\alpha_1 e^{-pt}\sin(qt) \end{aligned} \qquad [8.207a]$$

In esse i parametri p e q sono espressi come:

$$\begin{aligned} p &= \frac{B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) \\ q &= \frac{\sqrt{-B^2 + 4C}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{-\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + 4\left(f_C - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\cdot\left(f_C + \frac{\partial v}{\partial x}\right)} \end{aligned} \qquad [8.207b]$$

cioè dipendono dai gradienti orizzontali delle componenti medie del moto e non dal loro valore assoluto. Inoltre, la costante α_1 risulta espressa come:

$$\alpha_1 = u_0 - \frac{C}{D} = u_0 - \frac{a_1a_2 - b_1b_2}{a_2c_1 + b_1c_2} \qquad [8.207c]$$

dove u_0 è il valore iniziale per la componente U. Le *soluzioni di meandering* U_m e V_m ottenute presentano caratteristiche particolari. Innanzitutto, U_m e V_m sono strettamente accoppiate tra loro ed evolvono nel tempo come armoniche di frequenza q smorzate dalla funzione esponenziale che hanno in comune e che è pilotata dal valore del parametro p. Se p è nullo, cioè se i due gradienti orizzontali sono o di segno opposto o di piccola entità, U_m e V_m sono armoniche pure. Inoltre, la frequenza q dipende oltre che dai gradienti delle componenti del moto (attraverso i coefficienti a_1, a_2, b_1 e b_2), anche dal gradiente di pressione e dalla divergenza degli stress di Reynolds (attraverso i coefficienti c_1 e c_2). Tanto più si è vicini ad un equilibrio geostrofico e tanto minore è la turbolenza meccanica tanto maggiore è la frequenza q. Tutto ciò evidenzia come, nelle situazioni di *meandering* la direzione del vento (ed anche la velocità) oscillino attorno ad un valore di equilibrio in maniera pseudoarmonica. Per ulteriori considerazioni e riflessioni si rimanda ai riferimenti citati.

Per sintetizzare quanto ottenuto, si può asserire che il *meandering* è un fenomeno legato alla struttura stessa delle equazioni di Navier-Stokes. Di fatto, quando sussiste un equilibrio tra le forze di Coriolis e le forze di gradiente di pressione, in concomitanza con piccoli stress di Reynolds, le equazioni di Navier-Stokes prevedono un campo di moto medio bidimensionale e perfettamente oscillatorio. Col crescere della turbolenza e con il venir meno del bilancio geostrofico

le oscillazioni di *meandering* si riducono, si disaccoppiano e decadono nel tempo sino a scomparire.

Per concludere queste considerazioni teoriche che vedono il *meandering* come una possibile soluzione delle equazioni di Navier-Stokes, gli Autori hanno potuto analiticamente dedurre la Funzione Euleriana di Autocorrelazione $R(\tau)$ della velocità del vento in condizioni di *meandering* (τ è il *time-lag*). In particolare, si è ottenuto che:

$$R(\tau) = e^{-p\tau}\cos(q\tau) \qquad [8.208]$$

Come vedremo di seguito, questa forma funzionale della Funzione Euleriana di Autocorrelazione è stata individuata sperimentalmente da Hanna (1983) ed è stata studiata dalla maggior parte dei lavori sperimentali condotti per quantificare il fenomeno del *meandering*.

Per concludere, i lavori citati hanno consentito di ottenere una soluzione analitica al problema che presentava un chiaro andamento oscillante. Inoltre, da questa soluzione semplificata è stato possibile ottenere la funzione di autocorrelazione per le componenti orizzontali del moto che assumeva una forma singolare: essa risultava essere la normale funzione esponenziale decrescente, funzione del Tempo Euleriano di Scala, moltiplicata per una funzione cosinusoidale funzione del tempo, dei gradienti delle componenti orizzontali del moto, dei gradienti di pressione e della divergenza degli stress di Reynolds. In pratica si giungeva alla inaspettata conclusione che il *meandering* è di fatto una proprietà intrinseca alle leggi del moto, normalmente poco evidente, ma che diventa tale quando i flussi di quantità di moto tendono ad annullarsi. Nonostante questa convincente spiegazione, la ricostruzione e soprattutto la previsione del *meandering* con i modelli meteorologici prognostici Euleriani risulta ad oggi estremamente difficile (Belusic e Guttler 2010; Guttler e Belusic 2012; Seaman et al. 2012).

8.8.7.3 Quantificazione sperimentale

Il modo più naturale ed immediato per caratterizzare quantitativamente il *meandering* è quello proposto da Maryon (1998). In pratica, data una serie temporale di misure delle componenti orizzontali della velocità orizzontale del vento acquisite ad elevata frequenza, il metodo prevede di filtrare le fluttuazioni turbolente presenti in questi record di misure impiegando allo scopo un opportuno filtro numerico. L'Autore ha utilizzato una semplice mediazione su 10 minuti, ma nulla vieta di applicare al segnale originale un filtro numerico passa-basso diverso (per esempio un filtro *RC* o una media mobile) caratterizzato da un tempo caratteristico compatibile con lo *spetral-gap* (per es. 10 minuti). Sottraendo ai segnali filtrati il valore medio (per esempio ottenuto impiegando un filtro numerico *RC* con tempo caratteristico dell'ordine dell'ora) ciò che resta sono segnali lentamente variabili che rappresentano le oscillazioni orizzontali della velocità del vento attribuibili al *meandering*. Ipotizzando che nelle situazioni pratiche di interesse modellistico la disponibilità di un valore medio di velocità del vento abbia un periodo T_f (cioè ogni T_f secondi sia disponibile un nuovo valore di velocità media del vento misurato o stimato da un modello numerico), l'Autore suddivide i record sperimentali originali filtrati e privi di media in sotto-record di lunghezza T_f e da essi ottiene la relazione semiempirica seguente che mette in relazione la velocità media U nel periodo di ampiezza T_f con le deviazioni standard σ_{um} e σ_{vm} delle oscillazioni di *meandering*:

$$\sigma_{um}^2 = \sigma_{vm}^2 = 2 \cdot C \cdot U \qquad [8.209]$$

dove la costante C dipende da T_f. In particolare, se T_f assume i valori 6h, 3h, 1h, allora C vale rispettivamente 0.0196, 0.0260 e 0.0332. Flesch e al. (2002) hanno esteso questa tecnica giungendo alla stima del rapporto σ_m/u_*, dove σ_m è la deviazione standard del segnale di velocità orizzontale del vento filtrato dalle fluttuazioni turbolente. Inoltre, analizzando statisticamente il segnale filtrato, sono giunti ad una stima del Tempo Euleriano di Scala T_m caratteristico delle oscillazioni integrando la funzione di autocorrelazione del segnale filtrato fino al primo *zero-crossing*. A fini puramente modellistici essi hanno stimato che se si considerano osservazioni orarie, σ_m/u_* risulterebbe pari a 0.78 e T_m sarebbe pari a 40 minuti.

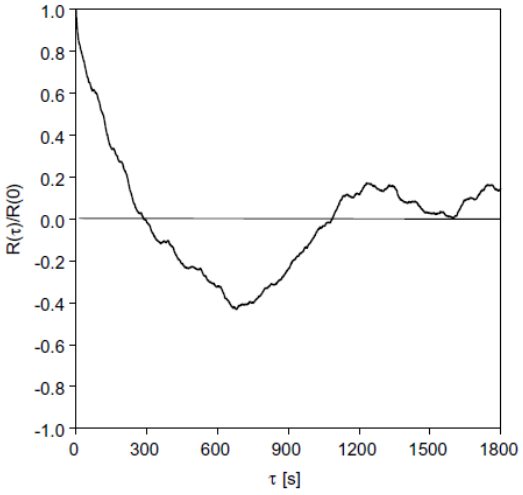


Fig. 8.91: esempio di funzione di autocorrelazione della velocità del vento in presenza di meandering (Anfossi e al. 2005).

Ben diversa è la quantificazione adottata da Anfossi e al. (2005), da Oettl e al. (2005), da Mortarini et al. (2013, 2016, 2019) e da Cava et al. (2017, 2019a,b) sempre basata sulle numerosissime evidenze sperimentali disponibili, ma supportata dalle analisi teoriche di Oettl e al. (2005) e da Goulard e al. (2007). Analizzando le misure ottenute entro il *SL* prevalentemente in situazioni stabili e con velocità media del vento bassa, è emersa incontestabile la tipica fenomenologia del *meandering* la cui manifestazione principale è costituita da una funzione di autocorrelazione per le componenti orizzontali del moto e per la temperatura rapidamente decrescente col *time-lag*, ma con un evidente lobo negativo. Un esempio significativo di ciò è riportato in **Fig. 8.91**. I risultati ottenuti dai lavori citati possono essere brevemente riassunti nei punti seguenti:

- il fenomeno del *meandering* lo si riscontra sia nell'andamento temporale delle componenti orizzontali del vento che nella temperatura;
- in condizioni di vento debole (U < 1.5 ms-1) la Funzione Euleriana di Autocorrelazione (EAF) mostra un andamento decrescente col time-lag derivante dalla sovrapposizione di un'esponenziale decrescente (che è la rappresentazione semplificata della EAF in presenza di sola turbolenza) con un andamento oscillante di tipo co-sinusoidale. Dai lavori è emerso come le EAF ottenute sperimentalmente in condizioni di *meandering* siano ben rappresentate dalla seguente forma funzionale proposta da Frenkiel (1953):

$$R(\tau) = exp\left[\frac{-\tau}{(m^2+1)\cdot T}\right]\cdot \cos\left[\frac{m\cdot\tau}{(m^2+1)\cdot T}\right] \qquad [8.210a]$$

  dove m e T sono due parametri da definire. Questa relazione può essere, per comodità, riscritta anche come:

$$R(\tau) = e^{-pt}\cdot\cos[q\tau] \qquad [8.210b]$$

  e tra la coppia di parametri (m, T) e (p, q) sussiste la relazione:

$$p = \frac{1}{(m^2+1)\cdot T} \qquad p = \frac{m}{(m^2+1)\cdot T} \qquad [8.210c]$$

- il parametro T (o p) è associato al classico Tempo Euleriano di scala della turbolenza T_E, mentre il parametro m (o q) è associato alle caratteristiche del *meandering*;
- il *periodo di meandering* T^*, cioè il periodo delle oscillazioni armoniche equivalenti alle oscillazioni di *meandering* nel segnale delle componenti orizzontali della velocità del

vento e della temperatura è dato da:

$$T^* = \frac{2\pi}{q} = \frac{2\pi \cdot T \cdot (m^2 + 1)}{m} \qquad [8.210d]$$

- viceversa, il Tempo Euleriano di Scala T_E risulta dato dalla relazione seguente e quindi del tutto coincidente col parametro *T*:

$$T_E = \frac{p}{p^2 + q^2} = T \qquad [8.210e]$$

- il rapporto $m = q/p$ (*rapporto di loop*) è cruciale nella quantificazione del *meandering* perché stabilisce l'importanza relativa tra moti a piccola scala (turbolenti) rappresentati da *p* ed i moti a grande scala rappresentati da $q = 2\pi/T^*$. In altre parole, il *meandering* è significativo per piccoli valori di *q* e per grandi valori di *p* e il *meandering* prevale sulla turbolenza tanto più *m* tende a zero.

- la forma funzionale che caratterizza le EAF è tale per cui è presente un più o meno evidente lobo negativo il cui valore massimo lo si ottiene facilmente dalle relazioni precedenti. In particolare, si ha che:

$$R_{min} = -\frac{exp\left\{-[-\tan^{-1}(1/m) + \pi] \cdot \frac{1}{m}\right\}}{\sqrt{1 + m^2}} \cdot m \qquad [8.210f]$$

quindi il valore del minimo della EAF dipende solo dal rapporto di loop *m*.

- il fenomeno del *meandering*, che coinvolge i segnali delle componenti orizzontali del moto e della temperatura, non è presente solo nelle situazioni stabili ma in ogni situazione con vento debole e turbolenza meccanica bassa.

Per poter individuare se si è in presenza o meno di una situazione di *meandering*, seguendo Mortarini e al. (2019), si stimano in modo campionario su un periodo orario le varianze delle tre componenti del moto σ_u^2, σ_v^2 *e* σ_w^2. È molto elevata la probabilità della presenza del *meandering* quando:

$$I_{mean} = \frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} < 0.1 \qquad [8.211]$$

Altri particolari interessanti su questa metodologia per la caratterizzazione del *meandering* possono essere trovati nei riferimenti citati.

8.8.8 MODELLO PROGNOSTICO DI PBL STABILE E CHIUSURA EFB

8.8.8.1 Generalità

Il metodo generale e corretto per studiare un *PBL* (ed anche il relativo *SL*) è impiegare direttamente le leggi di conservazione della Fluidodinamica, applicando ad esse un'opportuna chiusura ed è ciò che si fa normalmente nelle previsioni meteorologiche e nella previsione dello stato della qualità dell'aria. Al di là dell'enorme lavoro fatto sull'argomento nell'ultimo mezzo secolo (Capitolo 7), i modelli meteorologici utilizzati in pratica spesso impiegano una delle versioni e delle estensioni delle celebri chiusure di Mellor-Yamada (1974, 1982) e ciò ha consentito di ottenere ricostruzioni e previsioni realistiche soprattutto nelle situazioni convettive. Nelle situazioni stabili, invece, sono apparsi subito degli evidenti problemi a cui, almeno parzialmente, si è posto rimedio in maniera pragmatica (Yamada 1975). Inoltre, anche se l'argomento ha avuto un'estensione limitata, ci si è posto il problema di come conciliare la visione fluidodinamica prodotta da un modello fluidodinamico di *PBL* dotato di un'opportuna chiusura con ciò che prevedeva il MOST, basato di fatto esclusivamente su considerazioni fenomenologiche e dimensionali. I lavori

di Lobocki (1992, 1993) hanno conciliato il MOST alle chiusure Mellor-Yamada limitatamente alle relazioni di gradiente medio.

L'evidenza della complessità delle situazioni stabili ha una lunga storia, ma solo negli ultimi decenni con la disponibilità di informazioni sperimentali dirette, anche ad elevatissime e persistenti stabilità quali quelle rilevate alle basi di ricerca artiche ed antartiche, tale complessità si è manifestata appieno mettendo in crisi le chiusure finora adottate nei modelli fluidodinamici e facendo ritenere spesso che il MOST in queste situazioni fosse quanto meno questionabile. Sul fronte della messa a punto di chiusure che rappresentassero in maniera adeguata la realtà che emergeva dalle misure sperimentali, molto si è lavorato ed esempi di ciò sono i lavori di Mauritsen et al. (2007), Canuto et al. (2008), L'vov et al. (2008), Sukoriasnsky and Galperin (2008). Ma è soprattutto con la messa a punto della chiusura del secondo ordine *EFB* (*Energy and Flux Budget*) sviluppata pazientemente da Zilitinkevich e collaboratori dal 2007 al 2021 (Zilitinkevich et al. 2007, 2008, 2009, 2013; Kleeorin et al. 2021) che si è giunti ad un livello soddisfacente di descrizione di un *PBL* stabile (*SBL*) anche se ad oggi manca una sua verifica sistematica basata su una base dati affidabile ed omogenea. La chiusura *EFB* dovrebbe tener conto praticamente di tutta la complessa fenomenologia nota di uno *SBL* anche in situazioni di stabilità estrema, come per esempio l'esistenza di un valore minimo per il flusso turbolento verticale di calore sensibile (de Bruin (1994; Mahli, 1995; Mahrt et al., 1998, 2007; Basu et al., 2006, 2008; Wang e Bras 2010; van de Wiel et al. 2011a e b; Luhar e Rayner 2009; Luhar e al. 2009; Casasanta et al. 2021), l'interscambio di energia cinetica turbolenta tra le componenti orizzontali del moto e la componente verticale (Mauritsen e Svensson, 2007), l'interscambio che avviene ai diversi livelli di stabilità tra l'energia cinetica turbolenta e l'energia potenziale turbolenta (Mauritsen e Svensson, 2007), il fatto che il *Flux Richardson* Number Ri_f presenti un valore asintotico mentre il *Gradient Richardson Number Ri* possa crescere senza limite con la stabilità (Mauritsen e Svensson, 2007; Zilitinkevich et al. 2010) e altro ancora. Qui di seguito verrà presentato sinteticamente il modello prognostico di un *PBL stabile* (*SBL*) con chiusura EFB ed una serie di riflessioni che da esso derivano direttamente.

8.8.8.2 Modello Prognostico con chiusura EFB

Il modello prognostico considerato da Zilitinkevich e al (2013), e ben documentato in Kleeorin e al. 2021, è un normale modello fluidodinamico dedicato alla previsione dell'evoluzione nello spazio e nel tempo delle variabili medie dello *SBL*. In pratica è costituito dalle equazioni differenziali alle derivate parziali che descrivono i campi medi delle tre componenti del moto (*U, V, W*) e della temperatura potenziale Θ. Per semplicità, tutte le equazioni sono state formulate impiegando normali coordinate cartesiane ortogonali (e evitando quindi la complicazione formale costituita dalle coordinate *terrain-following* per tener conto della presenza dell'orografia) e, rispetto alla formulazione generale del problema, si è ipotizzato, come normalmente succede nelle applicazioni pratiche, che lo *SBL* fosse in condizione idrostatica (cioè la divergenza del campo di moto medio fosse nulla) e che fosse valida l'approssimazione di Boussinesq. Per semplicità, invece di considerare direttamente la presenza del vapor d'acqua in aria, se ne considera indirettamente l'influenza attribuendo a Θ il significato di temperatura potenziale virtuale. Inoltre, essendo idrostatico, le uniche componenti medie del moto considerate dal modello sono le componenti orizzontali *U* e *V*, mentre la componente media verticale *W* (la subsidenza) può considerarsi trascurabile.

Naturalmente, tali equazioni differenziali relative ai momenti del primo ordine non sono chiuse, visto che contengono momenti del secondo ordine ed è proprio la chiusura che ne consente l'integrazione. Ma, dato che il modello è idrostatico ed il dominio di calcolo ha dimensioni orizzontali molto maggiori di quella verticale, gli unici momenti del secondo ordine considerati nelle equazioni di campo medio sono le componenti $\overline{u'w'}$ e $\overline{v'w'}$ dello Stress di Reynolds ed il flusso verticale di calore sensibile $\overline{w'\theta'}$. Nello specifico (Zilitinkevich et al. 2013; Kleeorin et al. 2021), la chiusura *EFB* è costituita:

- dalle equazioni prognostiche per campi degli stress di Reynolds $\overline{u'w'}$ e $\overline{v'w'}$ e per il campo del flusso turbolento verticale di calore di calore sensibile $\overline{w'\theta'}$. In queste equazioni sono presenti momenti del terzo ordine e tassi di dissipazione che vengono tutti parametrizzati. In particolare, i momenti del terzo ordine, che sono i flussi verticali dei due stress di Reynolds $\overline{u_i'w'}$, vengono parametrizzati ipotizzando una loro proporzionalità a $\partial\overline{u_i'w'}/\partial z$ e ad un termine del tipo $E_z \cdot \partial U_i/\partial z$, dove E_z è la componente verticale dell'energia cinetica turbolenta E_K. Il momento del terzo ordine presente nell'equazione per $\overline{w'\theta'}$ viene parametrizzato invece dalla somma di un termine proporzionale al gradiente verticale di $\overline{w'\theta'}$ e da un termine legato a E_z e E_p che è l'energia potenziale turbolenta. Seguendo (Kolmogorov 1941, 1942), i tassi di dissipazione presenti in tutte queste equazioni vengono parametrizzati ipotizzando una proporzionalità tra i momenti stessi ed una *turbulent dissipation time scale* t_T in maniera simile a quanto fatto nelle chiusure Mellor-Yamada (1974, 1982). Per esempio, $\varepsilon_{i3} = \overline{u'_i w'}/(C_\tau t_T)$ e $\varepsilon_{w\theta} = \overline{w'\theta'}/(C_F t_T)$ dove C_τ e C_F sono opportune costanti numeriche da determinarsi sperimentalmente;

- dall'equazione per il campo di Energia Cinetica Turbolenta $E_K = 1/2 \cdot (\sigma_u^2 + \sigma_v^2 + \sigma_w^2)$ che può essere vista come la somma di tre componenti E_x, E_y, E_z ($E_j = 1/2\,\overline{u_j^2}$), ciascuna riferita ad una delle direzioni cardinali. La generazione di E_K è controllata quasi interamente dai gradienti $\partial U/\partial z$ e $\partial V/\partial z$ ed in essa sono presenti termini di ordine superiore ed un termine dissipativo. Il termine di produzione turbolenta da *shear* tiene conto del fatto che lo *shear* del vento genera prioritariamente energia cinetica turbolenta nella direzione del moto medio, cioè alimenta direttamente E_x, che a sua volta trasferisce energia all'altra componente E_y ed infine l'energia giunge alla componente E_z. Tradizionalmente questa ridistribuzione di energia turbolenta tra le diverse componenti E_j veniva parametrizzata nei diversi modelli impiegando l'ipotesi di *return-to-isotropy* (Rotta, 1951), meccanismo che simula il trasferimento di energia turbolenta dalla componente più ricca di energia alle componenti più povere, favorendo alla fine l'isotropia della turbolenza. Le evidenze sperimentali note mostrano come la filosofia su cui si basa questa ipotesi sembrerebbe fallire alle elevate stabilità. In effetti, quando la stabilità diventa estrema, la turbolenza sembra tendere ad essere isotropa in orizzontale e molto ridotta in verticale, quindi sostanzialmente bidimensionale. Sulla base di ciò, Zilitinkevich et al. 2007 hanno rivisto profondamente l'ipotesi di *return-to-isotropy* adeguandola alle evidenze sperimentali note per le situazioni stabili e questa è una peculiarità notevolmente importante della chiusura *EFB*. Il tasso di dissipazione anche in questo caso risulta proporzionale a E_K e pari a $\varepsilon_k = E_K/t_T$;

- dell'equazione prognostica per l'Energia Potenziale Turbolenta $E_p = 0.5 \cdot \beta \cdot \sigma_\theta^2/(\partial\Theta/\partial z)$ (Schumann et Gerz, 1995) dove $\beta = g/\Theta_0$. In questa equazione è presente un momento del terzo ordine la cui parametrizzazione ipotizza una sua proporzionalità col gradiente verticale di E_p ed in cui compare anche un tasso di dissipazione anch'esso ritenuto proporzionale a t_T e pari a: $\varepsilon_p = E_p/C_p t_T$ dove C_p è una costante da determinarsi sperimentalmente;

- della relazione prognostica per la *turbulent dissipation time scale* t_T, *di fatto una relaxation equation* che dipende dal valore locale di E_K, dal rapporto E_z/E_K e dal rapporto E_p/E_K.

- il modello è completato da una serie di relazioni diagnostiche dedotte dalla versione *steady-state* del modello in condizioni orizzontalmente omogenee che descrivono la fenomenologia predominante nello *SBL* e di esso tratteremo nel punto successivo. In particolare, descrivono l'interscambio tra le diverse componenti di E_K e tra E_K e E_p a seconda del livello di turbolenza presente. In esse compaiono le costanti numeriche C_r, C_0, C_1 e C_2.

- il valore numerico delle costanti presenti nelle equazioni del modello è stato determinato soprattutto da simulazioni DNS realizzate ad hoc. In particolare (Zilitinkevich et al. 2013; Li et al. 2016; Kleeorin et al. 2021) si ha che $C_0 = 0.125$, $C_1 = 0.5$, $C_2 = 0.72$, $C_F = 0.125$, $C_p = 0.417$, $C_r = 1.5$, C_τ=0.1. Va rilevato, come sottolineato dagli Autori, che tali valori vanno considerati di primo tentativo e molto lavoro sperimentale dovrà essere fatto per giungere ad una loro determinazione più realistica.

La *Energy and Flux Budget (EFB) turbulent Closure* allo stato attuale sembra rappresentare la metodologia più completa per inserire in un modello di *SBL* la complessa fisica nota per le condizioni di stabilità sia moderata che elevatissima. Tutte le equazioni del modello e le relative parametrizzazioni sono presentate in maniera notevolmente chiara in Kleeorin e al. (2021), ma da esse non si riesce ad apprezzare la reale portata del lavoro di modellizzazione che aveva l'ambizione di sintetizzare teoricamente tutte le evidenze sperimentali raccolte negli anni sul *PBL* stabile. Per ottenere un quadro più chiaro è opportuno ridurre il modello originario alla sua versione *steady-state* che è del tutto comparabile con la situazione paradigmatica trattata dal MOST.

8.8.8.3 La versione Steady-state del modello con chiusura EFB

L'applicabilità di questo modello è del tutto generale in ogni condizione di stabilità e quindi anche quando lo si applica ad una *SL* stabile caratterizzata da una completa omogeneità orizzontale e da una completa stazionarietà, cioè quando lo si applica ad una situazione paradigmatica. In questo caso gli assi cartesiani sono orientati in modo che l'unica componente media non nulla del moto medio sia *U*, diretta secondo l'asse *x*, e che l'unica componente non nulla dello stress di Reynolds sia $\overline{u'w'}$. In questo caso si annullano tutte le derivate parziali rispetto alle coordinate *x* e *y* e si annulla soprattutto la derivata parziale temporale nelle equazioni del moto medio e la derivata temporale totale nelle altre equazioni. Inoltre, si ipotizza che nella situazione paradigmatica, siano nulli tutti i momenti del terzo ordine. Pertanto, quando lo si applica ad una condizione paradigmatica *steady-state* con completa omogeneità orizzontale, il modello prognostico si riduce ad una serie di relazioni diagnostiche che costituiscono il punto di riferimento per la discussione che segue. Facendo riferimento a Kleeorin e al. (2021), le equazioni che costituiscono la versione *steady-state* del modello sono quelle relative ai budget di E_K, di E_θ, del flusso verticale normalizzato di calore sensibile, del flusso normalizzato di momento e della componente verticale di E_K date rispettivamente dalle equazioni seguenti:

$$0 = -\tau \frac{\partial U}{\partial z} + \beta F_z - \frac{E_K}{t_T} \qquad [8.212a]$$

$$0 = -F_z \tau \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{E_\theta}{C_p t_T} \qquad [8.212b]$$

$$0 = -2E_z \frac{\partial \Theta}{\partial z} + 2C_\theta \beta E_\theta - \frac{F_z}{C_F t_T} \qquad [8.212c]$$

$$0 = -2E_z \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\tau}{C_\tau t_T} \qquad [8.212d]$$

$$0 = \beta F_z + \frac{1}{2} Q_{zz} - \frac{E_K}{3t_T} \qquad [8.212e]$$

dove $\tau = \overline{u'w'} = -u_*^2$, $F_z = \overline{w'\theta'}$ e Q_{zz} è il termine di interscambio tra le varie componenti di E_K in senso verticale dato da (Kleeorin et al. 2021):

$$Q_{zz} = -\frac{2(1 + C_r)}{3t_T}(3E_z - 3E_K + 2E_{int}) \qquad [8.212f]$$

dove:

$$E_{int} = E_K + \frac{Ri_f}{R_\infty}\left(\frac{C_r}{1+C_r}\right)[C_0 E_K - (1+C_0)E_z] \qquad [8.212g]$$

La costante numerica C_θ è legata alle altre costanti numeriche presenti nella chiusura *EFB* dalla relazione (Zilitinkevich et al. 2013):

$$C_\theta = \frac{C_r(1-2C_0)\cdot(1-R_\infty) - 3R_\infty}{[1+(C_p-1)R_\infty][3+C_r(1-2C_0)]} \qquad [8.212h]$$

Il modello *steady-state* considerato conduce a dipendenze universali tra il *Flux Richardson Number* Ri_f, il numero di *Prandtl turbolento* Pr_T, il rapporto E_k/E_p ed il flusso verticale normalizzato di quantità di moto e di calore ed il *Gradient Richardson Number Ri*, ma questo solo se si considera la situazione paradigmatica sopra descritta e l'assenza totale di onde e di altri fenomeni a meso-scala e submeso (Kleeorin et al. 2019, 2021; Zilitinkevich et al. 2009). Se sono presenti questi moti non turbolenti, l'universalità delle relazioni inevitabilmente viene meno. Ora, almeno sinteticamente, conviene presentare le relazioni universali che derivano dal modello *steady-state* e le caratteristiche che le contraddistinguono.

Per aiutare la comprensione di ciò che segue e per sottolineare la portata teorica della chiusura *EFB* applicata ad una situazione paradigmatica, conviene premettere alcune considerazioni importanti. La prima è che R_f, a differenza di *Ri* e del parametro di stabilità ζ, presenta un valore critico e questo è probabilmente l'elemento più importante che caratterizza la stabilità dello *SBL*. In secondo luogo, dal modello *steady-state* emergono Relazioni Universali, tutte dipendenti da ζ, delle quali, a differenza delle Funzioni Universali del MOST, la teoria *EFB* riesce a definire la struttura analitica. Da ultimo, è possibile esprimere tutte le Funzioni Universali del MOST come opportune combinazioni delle Funzioni Universali *EFB* e ciò consente definire un *link fluidodinamico* chiaro e univoco tra la Fluidodinamica e il MOST.

8.8.8.4 Il Flux Richardson Number e la Funzione Universale di Gradiente del vento

Dal budget di E_k in condizioni *steady-state* (Zilitinchevich et al. 2010, 2013) si giunge immediatamente alla conclusione che, in condizioni paradigmatiche, Ri_f non cresce indefinitamente, ma con l'aumentare della stabilità tende ad un valore asintotico R_∞ che è stato stimato pari a 0.2 in Zilitinchevich e al. (2019) e 0.25 in Zilitinchevich et al. (2013). Nella **Fig.8.92** viene mostrato come le simulazioni DNS e le evidenze sperimentali supportino ciò.

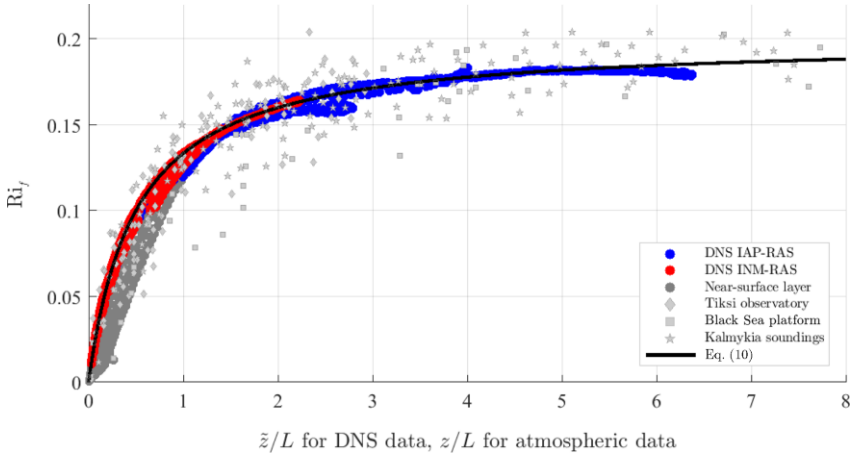


Fig. 8.92: relazione tra Rif e ζ (Zilitinkevich et al. 2019)

Dall'esistenza di un valore asintotico R_∞ e da considerazioni legate al budget di E_K in condizioni paradigmatiche (Zilitinkevich et al., 2010, 2013, 2019) si può asserire con certezza che all'adiabaticità il rapporto $kz/u_* \cdot \partial U/\partial z$ tende a 1, mentre quando $Ri_f \to R_\infty$, cioè $\zeta \to \infty$, tale

rapporto deve variare linearmente come $R_\infty^{-1}\zeta$. Sulla base di queste considerazioni gli Autori considerano del tutto ragionevole ipotizzare che per il gradiente della velocità media del vento valga la relazione lineare seguente che rappresenta un'interpolazione tra i due stati estremi di stabilità:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{u_*}{kz} \cdot (1 + R_\infty^{-1}\zeta) \qquad [8.213a]$$

Quindi, il gradiente della velocità media del vento (che è la forzante meccanica esterna del sistema) dipende direttamente dalla forzante meccanica interna u_* e cresce con il grado di stabilità (con ζ) ad un tasso univocamente stabilito da R_∞, quindi ad un tasso dettato dall'unica proprietà universale che caratterizza lo stato di turbolenza meccanica del *PBL*. Qui si vede immediatamente come R_∞ costituisca un parametro fondamentale che in qualche modo condiziona il comportamento turbolento del *SL* e ne determina le proprietà asintotiche (alle stabilità estreme). Questa scelta condiziona tutte le considerazioni che seguiranno, ma non deriva direttamente dal modello *steady-state*. Vale la pena sottolineare come tale scelta non è detto che sia l'unica possibile. Infatti, è sempre possibile individuare una forma analitica per una funzione che per $\zeta = 0$ sia pari a 1 e che tenda ad un andamento lineare del tipo sopra previsto.

Come è immediato constatare, la (8.213a) è identica formalmente alla relazione di gradiente del MOST se la Funzione Universale di gradiente è pari a:

$$\Phi_m(\zeta) = 1 + \beta \cdot \zeta \qquad [8.213b]$$

dove $\beta = R_\infty^{-1}$. Con R_∞=0.2, β = 5, esattamente come nel caso della formulazione di Businger-Dyer (Businger et al. 1971; Dyer, 1974) che però è stata ricavata da misure sperimentali condotte in situazioni di stabilità debole o media. La deduzione dal budget di E_K fatta dal modello *steady-state* estende la validità di questa relazione fino a stabilità estreme. Quindi, il primo risultato utile conseguito è che il modello *steady-state* richiede che il gradiente della velocità media del vento sia dato da una relazione di gradiente identica a quella prevista dal MOST con una Funzione Universale Φ_m dipendente solo dal parametro di stabilità ζ la cui forma funzionale (lineare) non deriva dal *best-fitting* di dati sperimentali, ma da solide considerazioni energetiche. Inoltre, è importante sottolineare come tutto ciò sia la conseguenza diretta solo del fatto che Ri_f presenta un valore asintotico R_∞ per ζ tendente a infinito. Vista la sua importanza che sarà ancora più chiara nel seguito, R_∞ è una sorta di *master constant* derivabile, tra l'altro, dalle caratteristiche spettrali della turbolenza nell'*Inertial Subrange* (Katul et al., 2014). Da ultimo, va sottolineato come la forma funzionale (8.213b) per $\Phi_m(\zeta)$ comporti che il flusso turbolento di calore sensibile e T_* presentino uno ed un solo minimo nell'intervallo di stabilità $0 \div \infty$ e che entrambi si annullino agli estremi dell'intervallo (Casasanta et al. 2021).

La completa conoscenza della Funzione Universale $\Phi_m(\zeta)$ la si ha se si conosce R_∞ e ciò lo si può fare solo per via sperimentale. A tale scopo, impiegando ancora una volta il budget di E_K in condizioni *steady-state*, la definizione di Ri_f e le relazioni (8.213) si giunge facilmente ad una relazione analitica tra Ri_f e ζ che risulta data da:

$$Ri_f = \Im_{Rf}(\zeta) = \frac{\zeta}{1 + R_\infty^{-1}\zeta} \qquad [8.214a]$$

da cui:

$$\zeta = R_\infty \frac{Ri_f}{R_\infty - Ri_f} \qquad [8.214b]$$

8.8.8.5 Il Gradient Richardson Number, la relazione di Gradiente della temperatura potenziale media e il Numero di Prandtl turbolento

L'eventuale esistenza di una relazione funzionale tra *Ri* ed il parametro di stabilità ζ può essere dedotta e confermata in via del tutto sperimentale, anche se a priori non è detto che in questa relazione non intervengano altre variabili rilevanti. Il modello *steady-state*, invece, su basi

totalmente fisiche, giunge a concludere che esiste una relazione biunivoca universale del tipo:

$$Ri = \Im_{Ri}(\zeta) \qquad [8.215a]$$

quindi che *Ri* dipende solo da ζ. Inoltre, il modello è in grado, sulla base delle relazioni fluidodinamiche, di determinare per un *SL* stabile e paradigmatico la forma analitica della funzione Universale $\Im_{Ri}(\zeta)$ che risulta pari a:

$$Ri = \Im_{Ri}(\zeta) = \frac{C_\tau \zeta}{C_F(1 + R_\infty^{-1}\zeta)}\left[1 + \frac{\alpha_1\zeta + \alpha_2\zeta^2}{1 + \alpha_3\zeta}\right] \qquad [8.215b]$$

A differenza della relazione (8.213a) che derivava solo dal budget di E_k *steady-state*, per giungere a questa relazione il modello impiega praticamente tutte le relazioni che costituiscono la chiusura *EFB* e che cercano di tener conto di tutta la complessa fenomenologia che caratterizza uno *SBL*. In particolare, lo scambio di energia cinetica turbolenta tra de diverse componenti del moto e lo scambio tra E_k e E_p ai diversi livelli di stabilità. Quindi questa relazione può essere considerata come una rappresentazione sintetica ma completa di tutta la fisica di uno *SL* stabile, qualunque sia il suo livello di stabilità. È immediato constatare come *Ri* cresca linearmente con ζ ed entrambi non abbiano valori asintotici. Di fatto ciò sta a significare che *Ri* dipende solo dal moto medio ed il suo aumentare non è limitato dallo stato di turbolenza interna (cioè dalla capacità della turbolenza di trasportare calore e momento).

Le diverse costanti presenti nella (8.215b) derivano da ben precise considerazioni fisiche. La prima osservazione evidente è la presenza anche in questo caso di R_∞ che è probabilmente una delle principali caratteristiche fisiche dello SBL. Le costanti primarie C_τ e C_F sono la diretta conseguenza della parametrizzazione dei tassi medi di dissipazione degli stress di Reynolds e del flusso verticale di calore sensibile. In particolare, una volta nota la *dissipation time scale* t_T (a cui il modello dedica un'intera relazione prognostica), il tasso medio di dissipazione di una delle due componenti orizzontali dello stress di Reynolds α è pari a $\varepsilon_\alpha = \alpha/(C_\tau t_T)$. Nel caso del flusso turbolento di calore sensibile, il suo tasso medio di dissipazione viene parametrizzato sempre impiegando t_T come: $\varepsilon_{w\theta} = \overline{w'\theta'}/(C_F t_T)$. Le costanti numeriche α_1, α_2, α_3 derivano dall'interscambio di energia cinetica turbolenta tra le diverse componenti del moto di cui la chiusura fornisce opportune relazioni analitiche.

Secondo il MOST, deve valere la relazione di Similarità per il gradiente verticale della temperatura potenziale media:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{T_*}{kz} \cdot \Phi_h(\zeta) \qquad [8.216a]$$

e, impiegando le relazioni di gradiente per la velocità media del vento e per la temperatura potenziale, il MOST prevede che:

$$Ri = \Im_{Ri}(\zeta) = \zeta \frac{\Phi_h(\zeta)}{\left(\Phi_m(\zeta)\right)^2} \qquad [8.216b]$$

Quindi è immediato vedere come:

$$\Phi_h(\zeta) = \Im_{Ri}(\zeta) \cdot \frac{\left(\Phi_m(\zeta)\right)^2}{\zeta} \qquad [8.216c]$$

cioè:

$$\Phi_h(\zeta) = \frac{C_\tau}{C_F} \cdot (1 + R_\infty^{-1}\zeta) \cdot \left[1 + \frac{\alpha_1\zeta + \alpha_2\zeta^2}{1 + \alpha_3\zeta}\right] \qquad [8.216d]$$

Alla relazione di gradiente per la temperatura potenziale media ed alla formulazione analitica della relativa Funzione Universale il modello *steady-state* è giunto direttamente senza invocare esplicitamente il MOST.

A questo punto conviene riassumere quanto fin qui ottenuto. La conoscenza di come Ri_f varia con ζ consente di stimarne il valore asintotico R_∞, cioè il rapporto massimo possibile tra la forzante convettiva (di distruzione della turbolenza) e la forzante meccanica (di produzione locale

di E_K). Da ciò consegue la conoscenza completa della relazione di Gradiente per la velocità media del vento e la relativa funzione universale $\Phi_m(\zeta)$. La conoscenza di come varia *Ri* con ζ consente poi di individuare come conseguenza diretta la conoscenza completa della relazione di gradiente per la temperatura potenziale media e conseguentemente la relativa Funzione Universale $\Phi_h(\zeta)$. Le Funzioni Universali di gradiente così ottenute per costruzione sono valide a qualsiasi livello di stabilità e sono totalmente congruenti tra loro e congruenti con la fisica che caratterizza un *SL* paradigmatico stabile. Tra l'altro esse danno conto dell'esistenza di un valore minimo per il flusso turbolento di calore sensibile e per la temperatura di scala T_*, oltre che di un valore asintotico finito per Ri_f e di una crescita illimitata, ma lineare, di *Ri* con ζ. Infine, perché il MOST possa produrre corretti profili verticali di gradiente di *U* e di Θ è necessario che le Funzioni Universali di Gradiente $\Phi_m(\zeta)$ e $\Phi_h(\zeta)$ rispettino la relazione (8.216b). In pratica, se questa relazione di vincolo è rispettata, allora questi profili risultano fluidodinamicamente congruenti tra loro e compatibili con la fisica nota per uno *SBL*. Questo è sicuramente il primo contributo che la chiusura *EFB* dà al MOST.

I *Prandtl turbulent number* Pr_T è definito come il rapporto tra il coefficiente di diffusività turbolenta di quantità di moto e quello di calore, cioè come:

$$Pr_T = \frac{-\overline{u'w'}/\partial U/\partial z}{-\overline{w'\theta'}/\partial\Theta/\partial z} \qquad [8.217a]$$

Il modello *steady-state* giunge all'individuazione di una relazione universale tra il *Prandtl turbulent number* Pr_T ed il parametro di stabilità ζ che espressa dalla relazione seguente:

$$Pr_T(\zeta) = \frac{C_\tau}{C_F} \cdot \left[1 + \frac{\alpha_1\zeta + \alpha_2\zeta^2}{1 + \alpha_3\zeta}\right] \qquad [8.217b]$$

Alla costante C_F, legata al tasso di dissipazione turbolento medio di E_p è stato attribuito il valore 0.125 (Kleeorin et al. 2021), mentre i parametri numeri α_1, α_2 e α_3 sono gli stessi presenti nella relazione (8.215b).

8.8.8.6 Gli interscambi direzionali di Energia Cinetica Turbolenta

Lo *SBL* possiede per le fluttuazioni turbolente delle componenti del moto che lo caratterizzano un'energia cinetica turbolenta E_K e, per le fluttuazioni turbolente della temperatura potenziale virtuale, un'energia potenziale turbolenta E_p; possiede quindi un'energia turbolenta totale pari a:

$$E = E_K + E_p = \frac{1}{2} \cdot \left[(\sigma_u^2 + \sigma_v^2 + \sigma_w^2) + \frac{\sigma_\theta^2}{\partial\Theta/\partial z}\right] \qquad [8.218]$$

Quindi il contenuto energetico dell'aria dovuta alla turbolenza è completamente definito dalla varianza delle tre componenti del moto, dalla varianza della temperatura potenziale e dal gradiente medio di temperatura potenziale.

Nello *SBL* si assiste ad uno scambio di E_K tra le diverse componenti. Tradizionalmente ciò veniva modellizzato in base all'ipotesi di Rotta (1951) di *return-of isotropy* secondo cui con l'aumentare della stabilità le tre componenti di E_K tendono all'isotropia. Le evidenze sperimentali disponibili per le situazioni ad elevata stabilità sembrano essere in netto disaccordo con questa ipotesi e la chiusura *EFB* muta drasticamente i termini del problema. Infatti, la nuova ipotesi introdotta dalla chiusura *EFB* asserisce che, con l'aumentare della stratificazione stabile, le due componenti orizzontali di E_K tendono ad un'isotropia orizzontale a spese della componente verticale che diminuisce drasticamente, senza però annullarsi. Inoltre, si assiste anche ad uno scambio di energia tra E_K e E_p che garantisce la sopravvivenza della turbolenza anche ad elevate stabilità come discusso da Mauritsen e al. (2007) e Kleeorin e al. (2021). E' proprio questo continuo interscambio di energia turbolenta nelle sue due forme che caratterizza la complessità dello *SBL* ed anche di una *SL* paradigmatica.

Il modello *steady-state* consente poi di valutare gli *share* tra le diverse componenti di E_K

($A_x = E_x/E_K$, $A_y = E_y/E_K$, $A_z = E_z/E_K$), predisponendo delle relazioni analitiche tra gli *share* ed il parametro di stabilità ζ . Tali relazioni evidenziando come lo share A_z, che rappresenta le regole che determinano ai vari livelli di stabilità la ripartizione tra E_K e la sua componente verticale E_z, sia lo *share* principale che influenza A_x e A_y. In una situazione paradigmatica, quando ζ tende a zero (quindi in situazioni neutre), A_x è maggiore di A_y che è maggiore di A_z. Quando, invece, la stabilità è estrema (Ri_f tende R_∞ e quindi ζ tende a infinito) $A_x \approx A_y = 0.485$ e $A_z = 0.03$, quindi alle stabilità estreme la maggior parte di E_K si viene a trovare nelle due componenti orizzontali praticamente in egual misura, mentre la porzione di E_K associata con la componente verticale è decisamente bassa, ma non nulla.

Di notevole importanza per il seguito è la Relazione Universale ottenuta dal modello per A_z in funzione di ζ che risulta pari a:

$$A_z(\zeta) = \frac{R_\infty C_r + \zeta \cdot \left[C_r(1-2C_0) - \frac{3R_\infty(R_\infty+\zeta)}{R_\infty + (1-R_\infty)\cdot\zeta}\right]}{3R_\infty(1+C_r) + \zeta\cdot[3 + C_r(1-2C_0)]} \qquad [8.219a]$$

dove ancora una volta è presente come parametro fondamentale R_∞ che porta con sé l'informazione relativa al fatto che la turbolenza sopravvive anche a stabilità estreme. Gli altri parametri numerici presenti sono C_r (legato alla parametrizzazione dell'interscambio di E_K tra le diverse componenti che supera l'ipotesi di Rotta del *return-of-isotropy*) e C_0 (anch'esso legato alla parametrizzazione dell'interscambio di E_K tra sue varie componenti. In condizioni adiabatiche ($Ri_f = \zeta = 0$) la relazione precedente si semplifica drasticamente riducendosi a:

$$A_z^{(0)} = \frac{C_r}{3\cdot(1+C_r)} \qquad [8.219b]$$

Quindi $A_z^{(0)}$ è completamente nota una volta nota la costante C_r (e vice-versa). Senza entrare nei particolari, A_x e A_y sono legati a A_z dalle relazioni:

$$A_x(Ri_f) = \frac{1}{(1+C_r)(1-Ri_f)} + \left(1 - C_1 - C_2\frac{Ri_f}{R_\infty}\right)\cdot A_z^{(0)} \cdot \left[1 + \frac{Ri_f}{R_\infty}[C_o - (1+C_0)\cdot A_z(\zeta)]\right] \qquad [8.219c]$$

$$A_y(Ri_f) = \left(1 + C_1 + C_2\frac{Ri_f}{R_\infty}\right)\cdot A_z^{(0)} \cdot \left[1 + \frac{Ri_f}{R_\infty}[C_o - (1+C_0)\cdot A_z(\zeta)]\right] \qquad [8.219d]$$

Il risultato ottenuto è che gli *share* A_x, A_y e A_z sono espressi da Relazioni Universali dipendenti solo dal parametro di stabilità ζ e di cui la chiusura *EFB* fornisce i dettagli analitici.

8.8.8.7 I flussi verticali normalizzati

In una situazione paradigmatica, i flussi turbolenti di quantità di moto e di calore sensibile non nulli sono solo quelli verticali e sono i responsabili del livello di turbolenza posseduto dal *SL*. Il modello *steady-state* è in grado di descrivere in modo del tutto generale questi flussi, consentendo di individuare due parametri adimensionali che ne descrivono l'evoluzione con la stabilità ed in particolare col parametro ζ.

Per il flusso verticale di quantità di moto, si giunge ad una Relazione Universale che esprime il *flusso normalizzato di quantità di moto* in funzione di Ri_f e di ζ data da:

$$\left(\frac{\tau}{E_K}\right)^2 = \frac{2C_\tau\cdot A_z(\zeta)}{\left(1 - Ri_f(\zeta)\right)} = 2C_\tau\cdot A_z(\zeta)\cdot\frac{1 + R_\infty^{-1}\zeta}{1 + (R_\infty^{-1} - 1)\cdot\zeta} = \Im_\tau(\zeta) \qquad [8.220a]$$

dove $\tau = u_*^2$. Quindi si ha che il *flusso normalizzato di quantità di moto* è una Funzione Universale del parametro di stabilità la cui struttura analitica risulta totalmente nota.

Per quanto riguarda, invece, il *flusso normalizzato di calore sensibile*, il modello anche in questo caso giunge ad una relazione universale del solo parametro di stabilità ζ dato da:

$$\frac{\overline{w'\theta'^2}}{E_K E_\theta} = \frac{2C_\tau}{C_p} \cdot \frac{A_z(\zeta)}{Pr_T(\zeta)} = \frac{2C_\tau}{C_p \cdot Pr_T(\zeta)} = \Im_{w\theta}(\zeta) \qquad [8.220b]$$

dove E_θ è la semi-varianza della temperatura potenziale ($E_\theta=1/2\sigma_\theta^2$) e Pr_T è il Numero di Prandtl turbolento per cui è nota la Funzionale Universale di ζ già mostrata in precedenza.

Quindi, il modello *steady-state* ha permesso di individuare due ulteriori Funzioni Universali del parametro di stabilità ζ, $\Im_\tau(\zeta)$ e $\Im_{w\theta}(\zeta)$, che si affiancano alla Funzione Universale $\Im_{Rf}(\zeta), \Im_{Ri}(\zeta), Pr_T(\zeta)$ ed alle Funzioni universali $\Phi_m(\zeta)$ e $\Phi_h(\zeta)$.

8.8.8.8 L'Energy Richardson Number e la Chiusura EFB

Recentemente Zilitinkevich e al. (2019) hanno introdotto come ulteriore ed interessante parametro di stabilità l'*Energy Richardson Number* Ri_E. Indicando con E_K l'energia cinetica turbolenta e con E_p l'energia potenziale turbolenta, entrambe definite precedentemente, tale parametro di stabilità risulta formalmente definito come:

$$Ri_E = \frac{E_p}{E_K} \qquad [8.221a]$$

che, in base alla definizione di E_p e E_k, si trasforma nella relazione seguente:

$$Ri_E = \frac{\beta^2}{\frac{\partial \Theta}{\partial z}} \cdot \frac{\sigma_\theta^2}{(\sigma_u^2 + \sigma_v^2 + \sigma_w^2)} \qquad [8.221b]$$

Questo è l'unico tra i parametri di stabilità in grado di sintetizzare lo scambio di energia turbolenta tra le fluttuazioni delle componenti del moto e le fluttuazioni di temperatura potenziale virtuale in presenza di una stratificazione termica stabile, in pratica il processo di auto-mantenimento della turbolenza alle elevate stabilità come discusso da Kleeorin et al. (2021). Teoricamente (Zilitinkevich et al., 2013) e sperimentalmente (Zilitinkevich et al., 2019) è stato mostrato come nelle situazioni paradigmatiche Ri_E raggiunga un valore critico di circa 0.155 (Zilitinkevich et al., 2019).

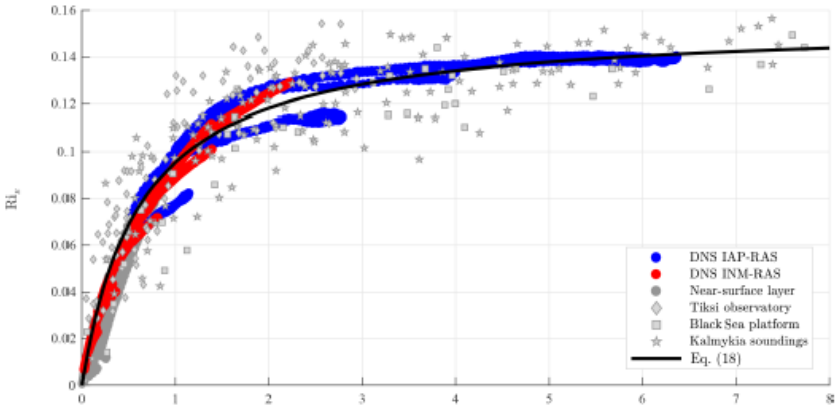


Fig. 8.93: variazione con ζ dell'energy Richardson Number (Zilitinkevich et al. 2019)

Il rapporto tra l'energia turbolenta potenziale E_p ed E_K, cioè Ri_E, è estremamente importante e dipende dal livello di stabilità. Il modello *steady-state* per un *SL* stabile paradigmatico consente di giungere ad una relazione che lega tra loro Ri_E e ζ così espressa:

$$Ri_E = \frac{E_p}{E_K} = C_p \frac{\zeta}{1 + (R_\infty^{-1} - 1)\zeta} = \Im_{RE}(\zeta) \qquad [8.222a]$$

in cui compare come parametro principale ancora una volta R_∞ oltre alla costante numerica C_p che quantifica la differenza tra la *dissipation rate* di E_K e quella di E_P. È facile mostrare come Ri_E tenda ad un valore asintotico $R_{E\infty}$ quando ζ tende all'infinito dato da (Zilitinkevich et al. 2019):

$$R_{E\infty} = \frac{C_p}{R_\infty^{-1} - 1} \qquad [8.222b]$$

Se, come in Zilitinchvich e al. 2019 si pone $R_\infty = 0.2$ e $C_p = 0.62$, $R_{E\infty}$=0.155 (**Fig. 8.93**).

8.8.8.9 Osservazioni conclusive

La complessa fenomenologia di un *SL* stabile è la base logica su cui si fonda la struttura fluidodinamica della chiusura *EFB* e dalle relazioni *steady-state* che la descrivono emergono delle Funzioni Universali che mettono in relazione alcuni importanti parametri descrittori del *SL* con il parametro di stabilità ζ. In particolare, dalla chiusura *EFB* sono state ottenute le Funzioni Universali $\Im_{Rf}(\zeta)$, $\Im_{Ri}(\zeta)$, $Pr_T(\zeta)$, $A_x(\zeta)$, $A_y(\zeta)$, $A_z(\zeta)$, $\Im_\tau(\zeta)$, $\Im_{w\theta}(\zeta)$, $\Im_{RE}(\zeta)$, oltre alle Funzioni Universali di Gradiente $\Phi_m(\zeta)$ e $\Phi_h(\zeta)$ e per tutte queste Funzioni Universali la teoria su cui si basa la chiusura *EFB* fornice la forma analitica completa in cui solo compaiono alcune costanti numeriche da determinarsi sulla base delle evidenze sperimentali. Di fatto, l'insieme di tutte queste Funzioni Universali è del tutto equivalente alla descrizione fluidodinamica di un *SL* stazionario ed in esse è completamente sintetizzata la fisica del problema e le interrelazioni tra le diverse grandezze descrittrici del *SL*.

Il MOST, viceversa, fornisce le relazioni di Similarità che descrivono la variazione col parametro di stabilità ζ delle principali grandezze descrittive del *SL*. Tali relazioni vengono dedotte solamente da un'analisi dimensionale e dipendono dalla conoscenza delle Funzioni Universali $\Phi_m(\zeta)$, $\Phi_h(\zeta)$, $\Phi_{uu}(\zeta)$, $\Phi_{vv}(\zeta)$, $\Phi_{ww}(\zeta)$, $\Phi_{\theta\theta}(\zeta)$, $\Phi_{CV2}(\zeta)$,$\Phi_{CT2}(\zeta)$, $\Phi_{\varepsilon K}(\zeta)$, $\Phi_{\varepsilon\theta}(\zeta)$ di cui il MOST postula l'esistenza e la cui conoscenza deve essere ottenuta solo sulla base delle evidenze sperimentali particolarmente sensibili al problema della *self-correlation*. Il MOST non è quindi in grado di tener conto delle interrelazioni tra variabili, ben descritte dalle equazioni di bilancio, e quindi della loro *congruenza fluidodinamica*, ed ipotizza implicitamente che tale interrelazione emerga *naturalmente* dalle misure in atmosfera che, inevitabilmente, dovrebbero essere perfette, cosa piuttosto lontana dalla realtà.

Dato che sia il modello *steady-state* con chiusura *EFB* che il MOST descrivono il medesimo sistema fisico (uno *SL* stabile e paradigmatico), è relativamente facile dedurre dagli elementi riportati nei punti precedenti e dai riferimenti citati individuare le relazioni che esistono tra le Funzioni Universali *EFB* e le Funzioni Universali MOST. In pratica, tutte queste relazioni consentono, per un *SL* stabile e stazionario, di far sì che le Funzioni Universali del MOST siano tutte espresse da una combinazione di Funzioni Universali *EFB* di nota struttura analitica e garantiscono la *congruenza fluidodinamica* delle Funzioni Universali MOST. Inoltre, tali relazioni consentono di individuare strategie di stima dalle misure sperimentali delle diverse Funzioni Universali MOST capaci di minimizzare e possibilmente eliminare i pericoli legati alla *self-correlation*.

PROBLEMI

P08.01 Dimostrare con l'Analisi Dimensionale che alla *free convention* la Funzione Universale di similarità di Monin-Obukhov $\Phi_h(\zeta)$ è data dalla relazione (8.22a).

P08.02 Individuare con l'Analisi Dimensionale quali relazioni valgono nella situazione *z-less scaling* per *Ri* e *Rf*.

P08.03 Se $u_* = 0.3$ m/s, $H_0 = 200$ W/m^2 e $T = 300$ K, stimare il profilo verticale di dU/dz, dΘ/dz, *Ri* e *Rf* tra $z_0 = 0.1$ m e $z = 50$ m.

P08.04 Se $u_* = 0.2$ m/s, $H_0 = -20$ W/m^2 e $T = 290$ K, stimare il profilo verticale di dU/dz, dΘ/dz, *Ri*, *Rf* , K_m e K_h tra $z_0 = 0.1$ m e z = 50 m.

P08.05 Dimostrare che, sulla base della situazione paradigmatica considerata per la Teoria della Similarità, entro il SL il flusso turbolento di calore sensibile è circa costante.

P08.06 Si usi l'Analisi Dimensionale per esprimere la lunghezza di Monin Obukhov *L* assumendo che essa dipenda dalle grandezze $\overline{w'\theta'}$, u_* e β.

P08.07 Si usi l'Analisi Dimensionale per esprimere il coefficiente di diffusività turbolenta K_m assumendo che dipenda da una lunghezza di rimescolamento *l* e dall'energia cinetica turbolenta *E*.

P08.08 Si usi l'Analisi Dimensionale per esprimere il tasso di dissipazione dell'energia turbolenta ε assumendo che dipenda da una lunghezza di rimescolamento *l* e dall'energia cinetica turbolenta E.

P08.09 Si ipotizzi di disporre delle osservazioni seguenti per la velocità media del vento nel *SL* a varie quote:

z (m)	*vel* (m/s)
1.6	6.34
0.4	4.46

Assumendo una situazione adiabatica, calcolare u_*, z_0 ed il coefficiente di diffusività turbolenta per la quantità di moto K_m.

P08.10 Supponiamo di misurare in una notte caratterizzata da condizioni mediamente stabili la rugosità superficiale $z_0 = 0.067$ m, $u_* = 0.2$ m/s e $L = 30$ m. Calcolare il profilo verticale della velocità media del vento fino a 50 m.

P08.11 Stimare z_0 e u_* dato il seguente profilo verticale del vento misurato in condizioni adiabatiche:

z (m)	*vel* (m/s)
1	4.6
3	6.0
10	7.6
30	9.0

P08.12 Si consideri un sito in cui, nelle situazioni adiabatiche, la velocità del vento misurata a $z = 10$ m e la friction velocity assumono i valori seguenti.

Velocità del Vento (m/s)	*Friction Velocity* (m/s)
2.76	0.30
0.92	0.11
3.7	0.39

Quanto vale il valor medio della rugosità superficiale caratteristica del sito di misura ed il relativo errore standard?

P08.13 Nel medesimo sito, ma nel pomeriggio si misuri $\overline{w'\theta_v'} = -0.01$ K m/s e g/T = 0.0333 m s^{-2}K^{-1}. Se u_* = 0.3 m/s, calcolare il profilo verticale della velocità media del vento fino a 50 m.

P08.14 Derivare un'espressione per $\overline{w'\theta_v'}$ in termini di Funzione Universale Φ_m e Φ_H. Fatto ciò, dato un *wind shear* di 0.02 s^{-1} ed un gradiente verticale di temperatura potenziale di -0.012 K/m ad una quota di 20 m sopra il suolo, calcolare il valore del flusso turbolento di calore sensibile usando la relazione di Businger e assumendo che la temperatura media sia pari a 21°C.

P08.15 Il bulk transfer coefficient C_d è definito come:

$$u_*^2 = C_D(u_r - u_0)$$

dove u_r è il valore di velocità media del vento ad una quota di riferimento entro il *SL* e u_0 è il relativo valore al suolo (qual è questo valore?). Trovare l'espressione di C_D nelle situazioni adiabatiche e nelle situazioni non adiabatiche.

P08.16 Il bulk transfer coefficient C_H è definito come:

$$\overline{w'\theta} = C_H(\theta_r - \theta_0)$$

dove θ_r è il valore di temperatura potenziale ad una quota di riferimento entro il *SL* e θ_0 è il relativo valore al suolo. Trovare l'espressione di C_H nelle situazioni adiabatiche e nelle situazioni non adiabatiche.

P08.17 Individuare per il Flux Richardson Number e per il Gradient Richardson Number una relazione di Similarità basata su Φ_m e Φ_H.

P08.18 La Funzione di Struttura per la temperatura è definita come:

$$C_T^2 = \frac{D_T^2(r)}{r^{2/3}}$$

dove r è la distanza che separa due punti lungo la direzione media del vento e

$$D_T^2(r) = \overline{[\theta(x) - \theta(x+r)]^2}$$

Trovare una funzione P costituita da prodotti o rapporti di z, u_*, $\overline{w'\theta'} = u_* T_*$ e $\beta = g/T$ tale da rendere adimensionale il rapporto C^2_T/P.

P08.19 Alla quota di 4 m la velocità media del vento è pari a 3 m/s. Se la rugosità superficiale è z_0 = 0.01 m, trovare u_*

- in una situazione convettiva con Ri = -0.5
- in una situazione stabile con Ri = 0.5.

P08.20 Si consideri la deviazione standard della componente verticale del moto. Dimostrare applicando il Teorema di Buckingham che in condizioni di free-convection, quando $\zeta = z/L$ tende a -∞, σ_w/u_* risulta proporzionale a $\zeta^{1/3}$

P08.21 Si consideri la deviazione standard della componente verticale del moto. Dimostrare applicando il Teorema di Buckingham che in condizioni di elevata stabilità quando $\zeta = z/L$ tende a +∞, σ_w/u_* tende ad una costante.

P08.22 Se u_* = 0.3 m/s e la lunghezza di rugosità per la quantità di moto z_0 è pari a 0.1 m, quanto vale z_{0h} e z_{0q}?

P08.23 In un sito desertico è operativo un palo meteo in cui si misura la velocità del vento e la temperatura potenziale alla quota di 4 metri e 8 metri. Si adotti per le funzioni di Similarità del profilo verticale medio di velocità del vento e di temperatura potenziale le espressioni seguenti, valide in condizioni di convettività:

$$\Psi_M(\zeta) = (1 - 16 \cdot \zeta)^{1/4} - 1 \qquad \Psi_H(\zeta) = 2\,ln\left[\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 16 \cdot \zeta}\right)\right]$$

A fronte delle misure seguenti:

quota = 4 m $\rightarrow$ $u_4 = 1.217$ m/s, $\theta_4 = 284.6$ K
quota = 8 m $\rightarrow$ $u_8 = 1.376$ m/s, $\theta_8 = 284.3$ K

stimare le grandezze seguenti, ipotizzando che la temperatura media del *SL* sia pari a 300 K:

- rugosità superficiale per la quantità di moto,
- friction velocity e flusso turbolento di calore sensibile.

P08.24 Si considerino due siti distinti, il primo arido e quasi desertico ed il secondo in cui è presente una foresta. Per entrambi i siti la radiazione netta sia pari a 700 W/m^2, il flusso di calore nel suolo sia pari a 60 W/m^2 e la temperatura media di entrambi sia di 305 K. Calcolare il flusso turbolento di calore sensibile e latente per i due siti.

P08.25 Si consideri una situazione per cui nelle ore convettive il flusso turbolento di calore sensibile sia quello riportato nella tabella seguente.

ora	H_0 (w/m^2)	*ora*	H_0 (w/m$_2$)
8	20	14	300
9	66	15	250
10	105	16	190
11	195	17	130
12	280	18	60
13	295	19	10

Calcolare l'evoluzione col tempo dell'altezza di rimescolamento nell'ipotesi in cui si consideri sia il flusso di calore al suolo che all'entrainment, che $\gamma = 0.005$ K/m e che la temperatura di riferimento sia pari a 300K.

P08.26 Stimare l'altezza del *PBL* stabile quando $u_* = 0.5$ m/s

P08.27 Quanto vale la frequenza di Brunt-Vaisala se il gradiente di temperatura potenziale nel *PBL* è stimabile in 0.5 K/m.

9. CENNI AL PBL IN CONDIZIONI SUPERFICIALI NON PARADIGMATICHE

Il paradigma che abbiamo rigorosamente seguito fin qui è che le masse d'aria della parte bassa della Troposfera (il *PBL* insomma) scorressero sopra una superficie perfettamente piana ed omogenea e, spesso, per semplificare ulteriormente le cose, abbiamo anche supposto che la variazione naturale dello stato di questa parte dell'atmosfera fosse piuttosto lenta, com'è lento il trasferimento di energia solare al suolo durante una tipica giornata estiva soleggiata alle medie latitudini. Ciò ci ha consentito spesso di ipotizzare situazioni stazionarie o quasi stazionarie. Come già abbiamo avuto occasione di affermare, questo paradigma non è totalmente astratto, ma rappresenta bene certe situazioni reali come le grandi praterie statunitensi, la Pampa sudamericana, l'entroterra australiano e le distese ghiacciate dell'Artide e dell'Antartide. Ma ci sono tante altre situazioni reali in cui questo paradigma non è completamente appropriato. Le zone in cui è presente un'orografia rilevante sono un esempio evidente di violazione di questo paradigma, ma un altro esempio è costituito dalle zone costiere in cui vengono a contatto due tipi diversi di suolo: uno sostanzialmente piatto, ma in movimento (orizzontale per le correnti marine e verticale per le formazioni ondose), l'altro costituito dalla terraferma, in generale non pianeggiante e con caratteristiche superficiali ben diverse tra loro. Ma anche se la superficie terrestre è pianeggiante, spesso ci sono situazioni che violano apertamente il nostro paradigma di assoluta omogeneità orizzontale. Una grande distesa pianeggiante che confina con una foresta sempre di dimensioni rilevanti è un esempio in cui due situazioni quasi-paradigmatiche si accostano, violando complessivamente il paradigma di omogeneità. E queste sono situazioni *naturali*. Ci sono però anche situazioni che derivano direttamente dalla presenza dell'uomo e dalle sue attività. Ci riferiamo agli agglomerati urbani di grandi dimensioni (pensiamo a Città del Messico, a Calcutta ed alle altre mega-città sparse in tutto il mondo) che presentano una *vita micrometeorologica propria* dovuta a come sono costruite e a come sono abitate.

Affrontare queste situazioni non è certo semplice, ma uno strumento operativo c'è ed è costituito dal modello fluidodinamico operativo del *PBL* che è stato costruito sulla base delle leggi di conservazione della Fisica Classica e della Termodinamica. In pratica:

- nella forma che abbiamo mostrato, il modello differenziale operativo del *PBL* è del tutto generale e non richiede che ci sia né un'omogeneità orizzontale né tantomeno richiede che la superficie inferiore del dominio di indagine (il suolo, insomma) sia piana;

- per tener conto della presenza di orografia, il modello operativo del *PBL* non fa nulla di strano, salvo individuare il miglior sistema di coordinate da utilizzare in modo da rendere semplice il tener conto della geometria del suolo. In particolare, come abbiamo visto, ciò si riduce a dover definire un opportuno sistema di coordinate *terrain-following* in cui le coordinate orizzontali x e y sono le consuete coordinate cartesiane, mentre la coordinata cartesiana z viene sostituita da una coordinata σ definita in modo tale da *interiorizzare* la geometria del confine inferiore del dominio di interesse. Concettualmente tutto ciò è molto semplice;

- per tener conto delle differenze di rugosità e della presenza della vegetazione si agisce sulla parametrizzazione delle condizioni iniziali ed al contorno da attribuire al dominio di calcolo. Anche se piuttosto complicato, i risultati che si ottengono sono decisamente accurati;

- il dover tener conto di una città di dimensioni più o meno grandi pone, però, un problema logico da risolvere. Se il dominio di interesse e di calcolo è ad area limitata e la risoluzione desiderata è dell'ordine del chilometro, allora la città può essere considerata semplicemente come una porzione di suolo con una rugosità molto diversa da quella della zona circostante (suburbana) che, per esempio, potrebbe essere con copertura vegetale naturale. Ma se lo scopo è proprio e principalmente quello di descrivere il *PBL* in cui si inserisce la città e si desidera una risoluzione comparabile con la dimensione tipica delle strutture urbane, cioè dei palazzi, allora la geometria e la capacità termica delle diverse strutture edilizie presenti devono essere tratte esplicitamente e ciò non è semplice.

Alla fine, però, almeno concettualmente, tutte le situazioni non paradigmatiche possono essere sempre e comunque affrontate impiegando direttamente il modello operativo del *PBL*. Questo è un modo di fare piuttosto *energico* che, però, frequentemente ci impedisce di apprezzare dal punto di vista fenomenologico gli effetti prodotti sullo stato e sul moto dell'aria del *PBL* in presenza di queste disomogeneità.

Per questa ragione in questo Capitolo verrà affrontata ognuna di queste cause di disomogeneità superficiale, semplificando al massimo ma cercando di evidenziare la fenomenologia del fenomeno. Otterremo anche *modelli semplificati* che saranno sostanzialmente semi-quantitativi e con essi potremo definire almeno l'ordine di grandezza del fenomeno, rimandando ad un'applicazione diretta del modello operativo del *PBL* la quantificazione dei dettagli. Inizieremo trattando sinteticamente il *PBL* sul mare e sugli oceani. Apparentemente la situazione sarebbe paradigmatica visto che le superfici oceaniche sono piane ed omogenee, ma la loro mobilità orizzontale e soprattutto verticale e le caratteristiche termiche dell'acqua marina fanno sì che il *PBL* marino abbia caratteristiche particolari. Proseguiremo, poi, trattando il problema legato alle discontinuità superficiali. Un tipico esempio di ciò è costituito da due superfici (per esempio naturali) caratterizzate da rugosità superficiale differenti, ma anche da differenti flussi turbolenti di calore sensibile e latente. Ci affacceremo, poi, al mondo vegetale, cercando d'introdurre nel modo più semplice possibile la fenomenologia dell'interazione tra la vegetazione e l'aria del *PBL*. Infine, accenneremo a due problematiche di estrema difficoltà: l'orografia e la presenza di città. Non potremo presentare tutte queste problematiche nel dettaglio e neppure potremo fornire una bibliografia esaustiva per ciascun argomento. Ci limiteremo, invece, ad una presentazione elementare di ciascuna problematica cercando di coglierne di volta in volta le relative peculiarità fenomenologiche.

9.1 IL PBL MARINO

Circa due terzi del pianeta è occupato da laghi, mari ed oceani ed è quindi importante studiare le possibili interazioni tra queste superfici liquide e l'aria sovrastante. In realtà, dato che, analizzando lo sviluppo del *PBL* sul suolo, ci siamo resi conto che è proprio il suolo l'elemento essenziale nel determinare l'ammontare e le modalità di trasferimento all'aria dell'energia ricevuta dal sole, ci possiamo aspettare che le differenze siano profonde visto che le proprietà dell'acqua sono ben diverse da quelle dei materiali che costituiscono i substrati solidi.

Per prima cosa cercheremo di analizzare gli aspetti energetici del problema e successivamente lo stato dell'atmosfera al di sopra della superficie marina. Per fare ciò ci riferiremo prevalentemente a testi di Arya (1987), Garratt (1992) ed Oke (1987). La materia è estremamente vasta e per questo qui ci limiteremo ad illustrare solo gli aspetti più interessanti nella forma più semplice possibile. Va inoltre rilevato che la difficoltà ancora attuale di realizzare campagne sperimentali di tipo micrometeorologico in ambiente marino non consente di avere una conoscenza sufficientemente approfondita dell'interazione atmosfera-mare. È però evidente il fatto che la chiara differenza di comportamento delle superfici marine rispetto al comportamento della superficie terrestre è la causa principale delle condizioni climatiche che si riscontrano nelle varie parti del globo.

9.1.1 IL BILANCIO RADIATIVO SUPERFICIALE

Anche per il *PBL* marino, cioè per la parte di troposfera direttamente a contatto con la superficie marina, l'elemento principale che ne determina lo stato e l'evoluzione nello spazio e nel tempo è la radiazione solare ad onda corta $K\downarrow$ (cioè la radiazione solare globale R_g) che giunge all'interfaccia aria-mare con le medesime attenuazioni atmosferiche già viste al Capitolo 6. La prima vera differenza tra quanto succede sulla terraferma e quanto capita sul mare deriva dalla trasparenza dell'acqua marina alla luce, la cui attenuazione con la profondità è anche in questo caso descritta dalla Legge di *Beer:*

$$(K_\downarrow)_d = K_\downarrow \cdot exp(-ad) \qquad [9.1a]$$

dove *a* è il *coefficiente di estinzione* e *d* è la profondità del mare considerata. Il coefficiente di estinzione può essere molto variabile e dipende dalla natura dell'acqua, in particolare dalla presenza di plankton e dalla sua torbidità (materiale sospeso). Se nella maggior parte degli specchi marini la profondità raggiunta dalla radiazione solare è dell'ordine della decina di metri, in certi mari tropicali essa raggiunge anche alcune centinaia di metri.

Una porzione di radiazione solare globale che giunge alla superficie del mare viene riflessa verso l'alto e costituisce l'albedo K↑ definito come sempre dalla relazione:

$$K_\uparrow = -\alpha K_\downarrow \qquad [9.1b]$$

dove, come consueto, α indica il *coefficiente di albedo* che, a differenza di quanto accade per le superfici solide, non è costante, ma varia enormemente col variare dell'angolo di elevazione solare, come mostrato nella **Fig. 9.1**, e la sua variazione è molto bizzarra. All'alba e al tramonto, quando l'angolo di elevazione solare è basso, il comportamento ottico della superficie marina è simile a quella di uno specchio, mentre quando il sole è alto sull'orizzonte la superficie marina si comporta come un assorbitore energetico molto efficiente con α tra 0.03 e 0.1. Quando poi il cielo è nuvoloso e $K\downarrow$ è prevalentemente costituita da radiazione diffusa, allora il coefficiente d'albedo si mantiene prossimo a 0.1 indipendentemente dall'angolo di elevazione solare.

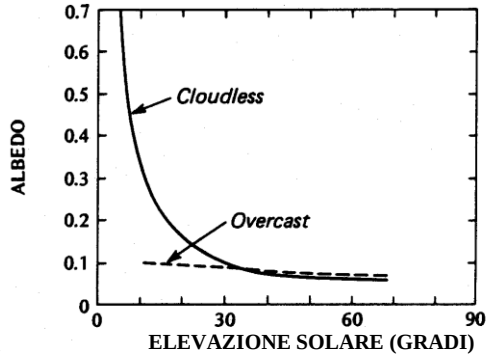


Fig.9.1: coefficiente d'albedo in ambiente marino (Oke, 1987).

La presenza di radiazione ad onda corta di origine solare innesca il *consueto bilancio radiativo superficiale*: un esempio di un tale bilancio radiativo è riportato in **Fig. 9.2,** dove con K_{ex} è stata indicata la radiazione solare all'esterno dell'atmosfera e con *D* la frazione diffusa di $K\downarrow$. In questa figura si può notare come la radiazione ad onda corta riflessa $K\uparrow$ risulti sempre di piccola entità visto che il coefficiente di albedo è elevato quando $K\downarrow$ è bassa e basso quando $K\downarrow$ è elevata. In pratica è facile verificare che il valore medio giornaliero caratteristico del coefficiente di albedo è pari a circa 0.07. Analizzando ora la radiazione ad onda lunga di origine atmosferica $L\downarrow$, non notiamo particolari differenze rispetto al solito, mentre la radiazione $L\uparrow$ generata dalla superficie marina non presenta le variazioni temporali notate sulla terraferma. In pratica, entrambe le componenti ad onda lunga permangono approssimativamente costanti nell'arco dell'intera

giornata e la loro somma algebrica è *negativa*. Comunque, il bilancio della radiazione complessiva all'interfaccia mare-aria, cioè la Radiazione Netta (indicata nella Figura col simbolo Q^*), presenta ancora il tipico ciclo giornaliero con elevatissimi valori diurni.

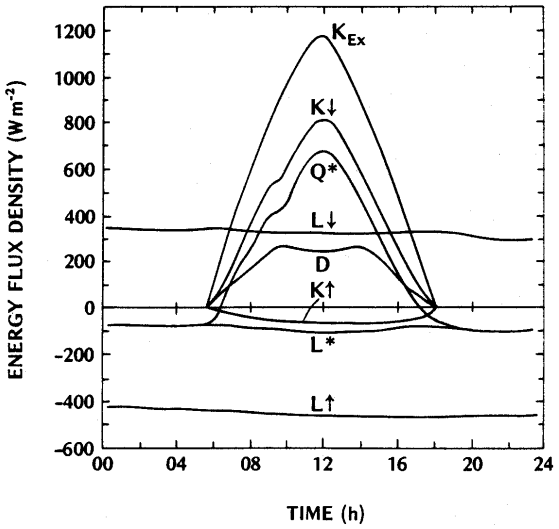


Fig. 9.2: bilancio radiativo superficiale in ambiente marino (Oke, 1987).

9.1.2 IL BILANCIO DI ENERGIA

La domanda che ci si pone è come venga ripartita l'energia disponibile all'interfaccia aria-mare e per rispondere a ciò è indispensabile studiare il bilancio energetico che, per la trasparenza dell'acqua marina, non può limitarsi a considerare solo l'interfaccia mare-atmosfera, ma, al contrario, deve prendere in considerazione anche tutto il corpo liquido fino ad una profondità al di sotto della quale non hanno più luogo significativi trasferimenti verticali di calore. Considerando la **Fig. 9.3** notiamo come l'energia disponibile Q^* (cioè la Radiazione Netta) venga ancora ripartita nel flusso turbolento di calore sensibile (qui indicato col simbolo Q_H) e nel flusso turbolento di calore latente (qui indicato Q_E), tuttavia lo *storage* termico caratteristico dell'ambiente marino (ΔQ_S) è rilevante e non può essere trascurato. In pratica il bilancio energetico all'interfaccia aria-mare risulta essere pari a:

$$Q* = Q_H + Q_E + \Delta Q_S + \Delta Q_A \qquad [9.2]$$

in cui compare anche il termine ΔQ_A che è il trasporto orizzontale di calore dovuto alle correnti marine, che non è certamente trascurabile (si pensi, per esempio, alla Corrente del Golfo).

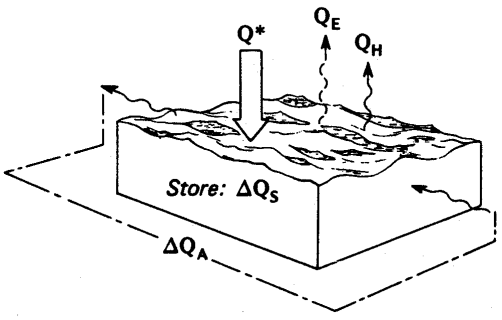


Fig. 9.3: il volume di riferimento per il bilancio energetico in ambiente marino (Oke, 1987)

La caratteristica principale dell'ambiente marino e soprattutto oceanico è il fatto che all'interfaccia mare-aria la maggior parte dell'energia disponibile non viene dedicata alla

produzione di turbolenza, ma all'evaporazione dell'acqua e ciò comporta che il *rapporto di Bowen* (Q_H/Q_E) sia dell'ordine di 0.1. Questo è vero normalmente, anche se si possono incontrare situazioni oceaniche particolari in cui dell'aria fredda scorre sopra la superficie marina più calda. Questa situazione determina un forte gradiente termico tra superficie marina ed aria con un conseguente incremento di Q_H. Per studiare in maggior dettaglio il bilancio radiativo, consideriamo due casi differenti.

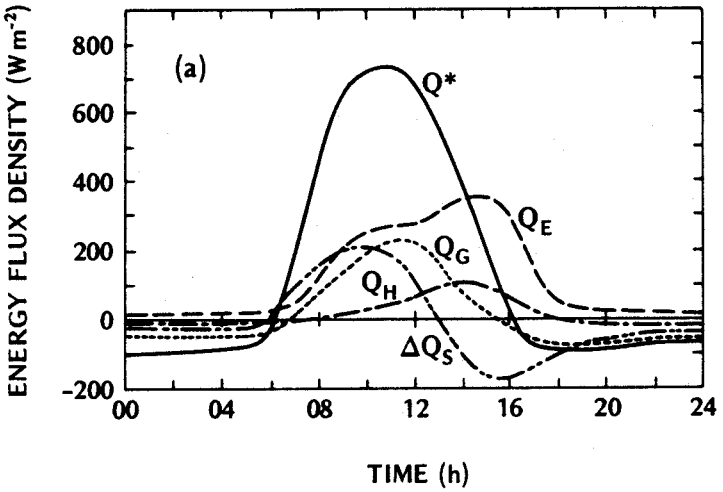


Fig. 9.4: bilancio energetico per un mare con basso fondale (Oke, 1987).

Il primo caso è rappresentato da un *mare poco profondo*, vicino alla costa. In questo caso, nel bilancio energetico possiamo trascurare ΔQ_A, che però dobbiamo sostituire con il flusso di calore G_C tra il mare ed il suolo sottostante. Nella **Fig. 9.4** possiamo vedere l'evoluzione giornaliera dei vari termini che, in questo caso, compongono il bilancio energetico. La prima cosa interessante che notiamo è che il calore trasmesso o ricevuto (a seconda delle ore) dal fondo del mare è rilevante, cosa che sta ad indicare il forte accoppiamento del mare con lo stato del suo basso fondale. Inoltre, si nota immediatamente come lo *storage* termico ΔQ_S presenti un interessante andamento ciclico limitato esclusivamente alle ore diurne. Per questo mare basso il rapporto di *Bowen* (prossimo a 0.2) è un poco più elevato rispetto al valore oceanico, anche se è sempre predominante il flusso turbolento latente rispetto al flusso sensibile che presenta però curiosamente il valore massimo non in corrispondenza del massimo di radiazione netta, ma alcune ore dopo, quando la temperatura superficiale del mare ha raggiunto il valore massimo e le condizioni all'interfaccia mare-aria sono prossime alla saturazione.

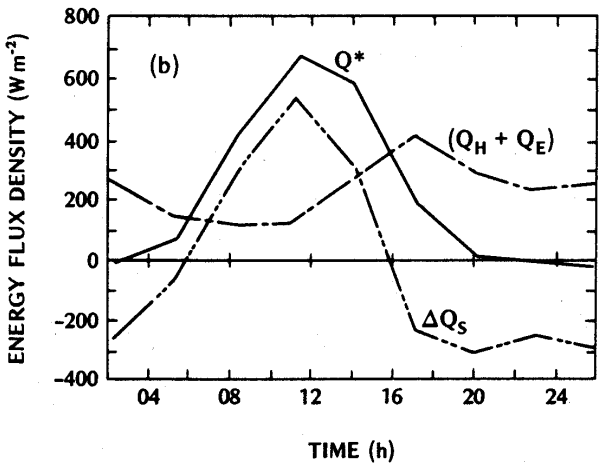


Fig.9.5: bilancio energetico per l'oceano (Oke, 1987).

Il secondo caso (**Fig. 9.5**) rappresenta una *situazione oceanica*. Data la difficoltà di misura, non sono state separate Q_H e Q_E, anche se in questo caso il rapporto di *Bowen* è pari a circa 0.1. Quello che si nota immediatamente è che la maggior parte dell'energia disponibile (cioè la Radiazione Netta) viene in qualche modo modulata dallo *storage* ΔQ_S. Questa prevalenza del termine ΔQ_S potrebbe far pensare a grosse variazioni della temperatura superficiale del mare, cosa ben lontana dalla realtà nelle acque oceaniche. Si pensi che la massima escursione annuale della temperatura della superficie marina è di circa 8°C a latitudini di 40° e solo di circa 2°C all'equatore e ciò dà l'idea di come la temperatura della superficie marina sia quasi costante. In effetti, se consideriamo la **Fig. 9.6** in cui è presentato il profilo della temperatura del mare a varie ore del giorno, vediamo distintamente un ciclo diurno (di limitata entità rispetto a quanto si riscontra sulla terraferma) che però si esaurisce alla profondità di una decina di metri. Al di sotto, la temperatura cresce fino ad una certa profondità (questa zona è detta *termoclino*) quindi diminuisce rapidamente a profondità superiori.

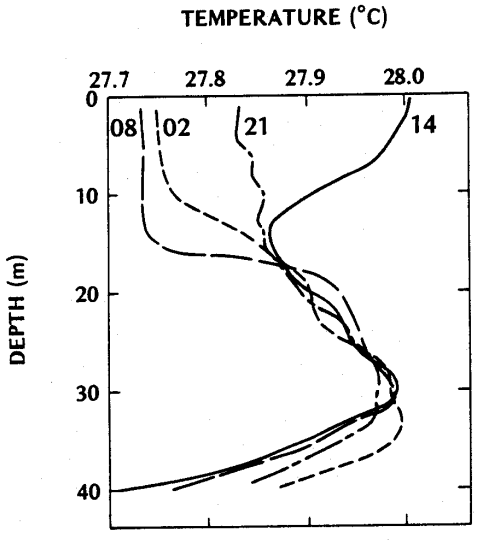


Fig.9.6: gradiente di temperatura entro l'oceano (Oke, 1987).

Parrebbe di essere di fronte ad un paradosso: l'acqua del mare assorbe un'enorme quantità di calore, ma la sua temperatura praticamente non varia. Le ragioni di ciò sono le seguenti:

- la trasparenza dell'acqua marina diffonde la radiazione ad onda corta su un grande volume di acqua;
- il moto delle correnti marine ed il loro movimento superficiale determinano un rapido e vasto rimescolamento complessivo;
- la forte evaporazione dalla superficie marina richiede un'enorme quantità di energia e quindi la produzione di vapor d'acqua è un efficiente consumatore di Radiazione Netta;
- la capacità termica dell'acqua è eccezionalmente alta.

Quindi, dall'analisi energetica dell'interazione mare-aria si ha che la temperatura marina superficiale presenta oscillazioni giornaliere molto contenute e l'evaporazione dell'acqua è un processo sempre attivo giorno e notte ed è il più grande consumatore di energia presente nel sistema, mentre il flusso turbolento di calore sensibile risulta molto limitato.

9.1.3 TRASFERIMENTO DI QUANTITÀ DI MOTO

Studiamo ora brevemente il trasferimento di quantità di moto tra l'aria e la superficie marina sottostante. Il risultato evidente di questo trasferimento è che in uno strato di atmosfera di ridotte dimensioni e prossimo al suolo, che è poi il *SL* oceanico, il profilo verticale della velocità media del vento presenta normalmente un tipico profilo logaritmico, previsto dalla teoria della Similarità di Monin-Obukhov nelle situazioni adiabatiche che sono le più comuni in questo ambiente naturale. Nel caso oceanico, la relazione di profilo risulta così espressa:

$$U - U_s = \frac{u_*}{k}\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \qquad [9.3]$$

dove z è la quota di misura e con U_s è stata indicata la velocità delle correnti marine superficiali (*drift velocity*), la cui stima risulta pari a circa $0.55u_*$.

In questa relazione di Similarità che descrive il profilo verticale della velocità media del vento è presente il parametro di rugosità superficiale z_0. La prima domanda che ci si pone è quale sia la rugosità superficiale del mare. Non è facile rispondere a questo interrogativo visto che la superficie marina è una superficie in continuo movimento a causa del moto ondoso, a sua volta influenzato proprio dal trasferimento di quantità di moto. Questa constatazione ci fa supporre che la lunghezza di rugosità z_0 non potrà essere una caratteristica assoluta del mare, ma dovrà in qualche modo mostrare una *controreazione* o meglio un'interazione dinamica con lo stato dell'atmosfera sovrastante. Questa supposizione è stata verificata dai dati sperimentali disponibili che confermano la celebre relazione di Charnock (1955):

$$z_0 = \alpha_c \frac{u_*^2}{g} \qquad [9.4a]$$

dove il coefficiente α_c risulta pari a circa 0.018. La relazione di Charnock sottolinea il fatto che la rugosità superficiale esercitata dalla superficie marina è dipendente dal flusso di quantità di moto (che a sua volta è dipendente dalla rugosità e quindi dallo *stress* superficiale, originando la controreazione che avevamo ipotizzato). La relazione di Charnock, che di fatto è ancora la più utilizzata nelle applicazioni pratiche, non rispecchia completamente le misure ottenute durante le più recenti campagne sperimentali oceaniche. Grachev e Fairall (1997) hanno mostrato come sia più realistica la relazione in cui al termine previsto da Charnock si viene ad aggiungere un termine direttamente dipendente dalla viscosità dell'aria:

$$z_0 = \frac{0.011u_*^2}{g} + 0.11\frac{\nu}{u_*} \qquad [9.4b]$$

dove ν è la viscosità cinematica dell'aria.

Ritorniamo ora al profilo logaritmico della velocità media del vento e vediamo cosa succede se inseriamo in esso la relazione di Charnock per z_0. È immediato constatare che, a differenza di quanto succede sulla terraferma dove il profilo verticale del vento dipende sia da una caratteristica interna (la rugosità superficiale) che da una caratteristica esterna (la *friction velocity*), nel caso oceanico il profilo del vento, in ultima analisi, ignorando la *drift velocity*, risulta espresso come:

$$U = \frac{u_*}{k}\ln\left(\frac{gz}{\alpha_c u_*^2}\right) \qquad [9.5]$$

cioè è totalmente dipendente dalla sola caratteristica esterna. Quindi tra U ed u_* non c'è un evidente intermediario, cosa che invece era per la terraferma dove z_0 era un elemento condizionante. Questa circostanza può essere sfruttata per determinare sperimentalmente u_* da una sola misura di velocità media del vento ad una quota z, come si fa con le boe strumentate. In effetti è immediato constatare che u_* è l'unica incognita presente nella relazione (9.5) e quindi può essere ottenuta risolvendo (numericamente) questa equazione.

Esercizio 9.1

Se una boa strumentata misura a 5 metri rispetto al livello medio del mare una velocità U = 5 ms^{-1}, individuare il valore della friction velocity u_* e della rugosità superficiale della superficie marina z_0.
Lo strumento da utilizzare per risolvere il problema è la relazione (9.5) che, riscritta evidenziando u_*, diventa:

$$u_* = \frac{kU}{ln\left(\frac{gz}{\alpha_c u_*^2}\right)}$$

che è una relazione implicita nell'unica incognita u_*. Per ottenere il risultato è necessario impiegare un metodo iterativo. Un metodo possibile è il seguente:

1. si ipotizzi un valore di primo tentativo per u_*. Una possibilità concreta è ipotizzare che $u_* = 0.1U$;
2. col valore di primo tentativo per u_*, effettuare una nuova stima di u_* impiegando la relazione precedente;
3. ripetere il passo precedente finché la stima di u_* resta stabile.

Applicando in concreto questa metodologia otteniamo quanto riportato nella Tabella seguente.

Iterazione	***u_* (m/s)***
0	0.5
1	0.51
2	0.43
3	0.42
4	0.41
5	0.41

Come si vede, in 4 iterazioni si raggiunge un valore stabile per la stima della *friction velocity*. Dalla relazione di Charnock (9.4a) si ottiene immediatamente il valore della rugosità z_0 pari a $0.31 \cdot 10^{-3}$ m.

Spesso nella pratica modellistica viene utilizzato il *coefficiente di drag (in condizioni adiabatiche)* C_{DN}, definito come $C_{DN} = (u_*/U)^2$. Impiegando il coefficiente di *drag*, la (9.5) si può riscrivere nella forma:

$$ln(C_{DN}) + k \cdot C_{DN}^{-1/2} = \ln\left(\frac{gz}{\alpha_c U^2}\right) \qquad [9.6a]$$

relazione implicita che mette in relazione C_{DN} con U. Un'approssimazione della (9.6a) proposta in Garratt (1992) è la seguente:

$$C_{DN} = (0.75 + 0.067U_{10}) \cdot 10^{-3} \qquad [9.6b]$$

in cui U_{10} è la velocità del vento misurata 10 metri sopra la superficie marina. In pratica per le superfici oceaniche il *coefficiente di drag* assume valori prossimi a $1.2 \cdot 10^{-3}$. È immediato rendersi conto che anche C_{DN} può essere determinato con una sola misura di velocità del vento.

Anche se la condizione adiabatica è prevalente nell'ambiente marino, comunque spesso si è in presenza di situazioni stabili e convettive non estreme. In tutti questi casi, il profilo verticale della velocità media del vento entro il *SL* lo si ottiene con la normale relazione di profilo prevista dalla Similarità di Monin-Obukhov in cui compare la lunghezza di Monin-Obukhov come parametro di stabilità. Va poi notato che normalmente invece di considerare la consueta velocità media del vento U, si preferisce sostituirla in tutte le relazioni precedenti con un'altra grandezza S che tiene conto di una *componente di raffica* U_g. In pratica si ha che:

$$S = \sqrt{U^2 + U_g^2} \qquad [9.6c]$$

dove:

$$U_g = \begin{cases} 0.2\ \mathrm{m/s} & \text{nelle condizioni stabili} \\ 1.2\mathrm{w}_* = 1.2u_* \left(\frac{-z_i}{kL}\right) & \text{nelle situazioni convettive} \end{cases} \quad [9.6d]$$

in cui z_i è l'estensione verticale del *PBL* marino nelle situazioni convettive.

9.1.4 PARAMETRIZZAZIONE DEGLI SCAMBI ARIA-MARE

Consideriamo ora situazioni non necessariamente adiabatiche. Il nostro interesse è rivolto alla determinazione della velocità di frizione u_*, del flusso turbolento di calore sensibile H_0, del flusso turbolento di calore latente H_E e dell'evaporazione di acqua dalla superficie marina, quantità facilmente parametrizzabili in termini di opportuni coefficienti di *drag*. In particolare, si ha che:

$$\begin{gathered} u_* = C_D^{1/2} U \\ H_0 = \rho C_p C_H U \cdot (\Theta_0 - \Theta) \\ H_E = L_e E \\ E = \rho C_w U \cdot (Q_0 - Q) \end{gathered} \quad [9.7a]$$

dove C_H è il coefficiente di *drag* (non adiabatico) per il trasferimento di calore sensibile, C_W è il coefficiente di *drag* per l'evaporazione, Q, Θ e U sono rispettivamente il valor medio dell'umidità specifica, della temperatura potenziale e della velocità del vento misurata ad un quota z entro il *SL* e Q_0 e Θ_0 sono l'umidità specifica e la temperatura potenziale alla superficie del mare. Per l'impiego pratico di queste relazioni è necessario fare alcune considerazioni:

- la temperatura della superficie marina è costantemente monitorata dai satelliti e quindi la sua disponibilità non rappresenta un problema pratico rilevante;
- anche la disponibilità del valor medio della temperatura e della velocità del vento entro il *SL* non è un grosso problema, visto che esistono numerose boe strumentate che forniscono questi valori;
- l'umidità all'interfaccia aria-mare spesso è prossima alla saturazione e sono disponibili sufficienti misure o previsioni di umidità entro il *SL*. In pratica, se e_{swat} è la tensione di vapore alla saturazione relativa alla temperatura superficiale del mare e P è la pressione atmosferica, Q_0, tenendo conto anche della salinità dell'ambiente marino, può essere stimata come:

$$Q_0 = 0.622 \frac{0.98 e_{swat}}{P - 0.378(0.98 \cdot e_{swat})} \quad [9.7b]$$

Il profilo verticale (entro il *SL*) della temperatura potenziale e dell'umidità specifica media può essere ottenuto impiegando le normali relazioni previste dalla Similarità di Monin-Obukhov, purché siano noti i valori della rugosità superficiale z_{0h} e z_{0q} relativi al trasferimento di calore e di vapor d'acqua. Sulla base delle risultanze sperimentali (Wong e al., 2016) si ha che i due parametri di rugosità possono ancora una volta essere ritenuti uguali e pari a:

$$z_{0h} = z_{0q} = MIN\{1.15 \cdot 10^{-4}; 5.5 \cdot 10^{-5} R_r^{-0.61}\} \quad [9.7c]$$

dove:

$$R_r = \frac{u_* z_0}{\nu} \quad [9.7d]$$

A questo punto bisogna determinare il valore appropriato per i coefficienti di *drag*. Innanzitutto, va rilevato che allo stato attuale delle conoscenze si può asserire che $C_{DN} = C_{HN} = C_{WN}$, cioè all'adiabaticità tutti i coefficienti di *drag* sono uguali e pari a circa $1.2 \cdot 10^{-3}$. Con i dati disponibili non è difficile determinare il *Bulk Richardson Number* definito come:

$$Ri_B = gz\frac{\Theta - \Theta_0}{\Theta_0 U^2} \qquad [9.8]$$

ed una buona approssimazione per il parametro di stabilità *z/L* è dato dalle relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} z/L &= kC_{DN}^{-1/2} Ri_B && se \quad Ri_B < 0 \\ z/L &= kC_{DN}^{-1/2} Ri_B(1 - 5Ri_B)^{-1} && se \quad Ri_B \geq 0 \end{aligned} \qquad [9.9]$$

A questo punto si ha che:

$$\begin{aligned} C_D/C_{DN} &= \left[1 - k^{-1}C_{DN}^{1/2} \cdot \Psi_M(z/L)\right]^{-2} \\ C_H/C_{HN} &= \left[1 - k^{-1}C_{DN}^{1/2} \cdot \Psi_M(z/L)\right]^{-1} \cdot \left[1 - k^{-1}C_{DN}^{1/2} \cdot \Psi_H(z/L)\right]^{-1} \end{aligned} \qquad [9.10]$$

dove Ψ_M e Ψ_H sono le Funzioni Universali di Similarità di Monin-Obukhov per il profilo verticale del vento e della temperatura potenziale riportate al Capitolo 8. Accanto ai metodi di stima basati sui coefficienti di *drag* sono stati proposti anche metodi basati sulle normali Relazioni di Similarità, come mostrato in Lo (1993).

9.1.5 PROFILI VERTICALI DELLE VARIABILI METEOROLOGICHE E TURBOLENZA NEL PBL MARINO

La misura dei profili medi delle principali variabili meteorologiche è estremamente difficoltosa nell'ambiente marino e ad oggi i dati sperimentali disponibili sono veramente poco numerosi. Tuttavia, sulla base delle conoscenze attuali, è possibile affermare che è comunque individuabile nel *PBL* marino uno strato di ridotte dimensioni prossimo alla superficie del mare in cui sono applicabili le relazioni di Similarità di Monin-Obukhov. L'unica avvertenza è ricordare che il flusso latente di calore è un elemento essenziale ed onnipresente nell'atmosfera marina e quindi nella definizione della lunghezza di Monin-Obukhov è indispensabile impiegare sempre la covarianza tra la componente verticale del vento e la temperatura potenziale virtuale. I profili che comunque si instaurano nel *SL* sono, nella maggior parte dei casi, relativi a situazioni prossime all'adiabaticità, visto che nell'ambiente marino in generale il flusso turbolento di calore sensibile è estremamente ridotto. Una delle eccezioni è costituita dalle situazioni in cui dell'aria fredda di provenienza continentale scorre sopra aria marina più calda. Questo è uno dei casi in cui si instaura una differenza di temperatura aria-mare elevata e quindi proporzionalmente si viene a creare un flusso sensibile di calore rilevante.

Le poche misure di temperatura e di umidità fatte entro tutto il *PBL* in ambiente marino hanno evidenziato alcuni fatti importanti:

- è molto frequente nell'ambiente marino che la sommità del *PBL* sia segnata dalla presenza di nuvole di vario genere (normalmente cumuli e stratocumuli) indicatori evidenti della forte evaporazione che ha luogo alla superficie marina;
- l'attività nello strato di *entrainment* è estremamente vivace, vista proprio la presenza delle formazioni nuvolose;
- normalmente il *PBL* che ne risulta è quello tipico di situazioni solo leggermente convettive, con un *entrainment* non molto evidente, come appare nei profili di temperatura potenziale θ, di temperatura potenziale virtuale θ_v e di umidità specifica *Q* mostrati nella ***Fig. 9.7***;
- ci sono anche casi di forte convettività (legati ad avvezione di aria fredda su superfici marine calde), in cui invece si ha un *PBL* molto simile a quello riscontrato in situazioni viste sulla terraferma, come ben si vede nella **Fig. 9.8** in cui è evidente un chiaro *entrainment.*

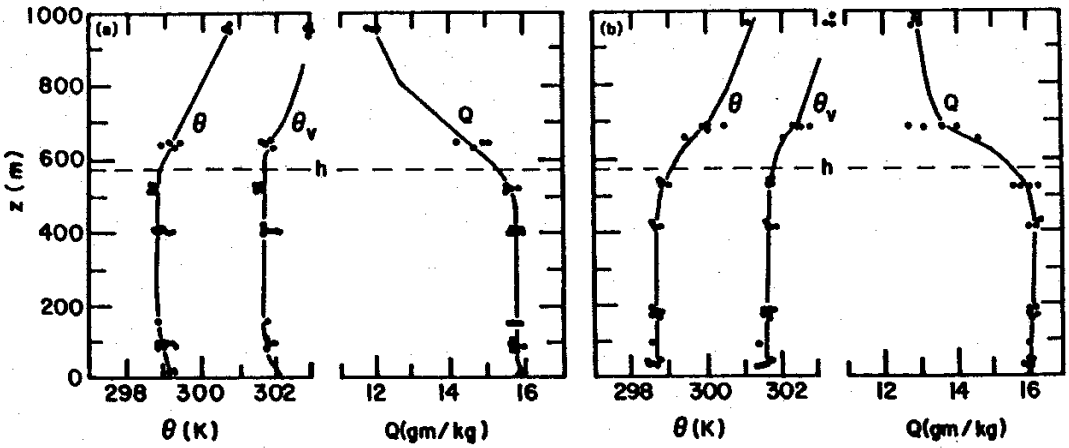


Fig.9.7: Profilo verticale di temperatura potenziale, temperatura potenziale virtuale ed umidità in due situazioni poco convettive in ambiente marino (Nicholls e LeMone, 1980).

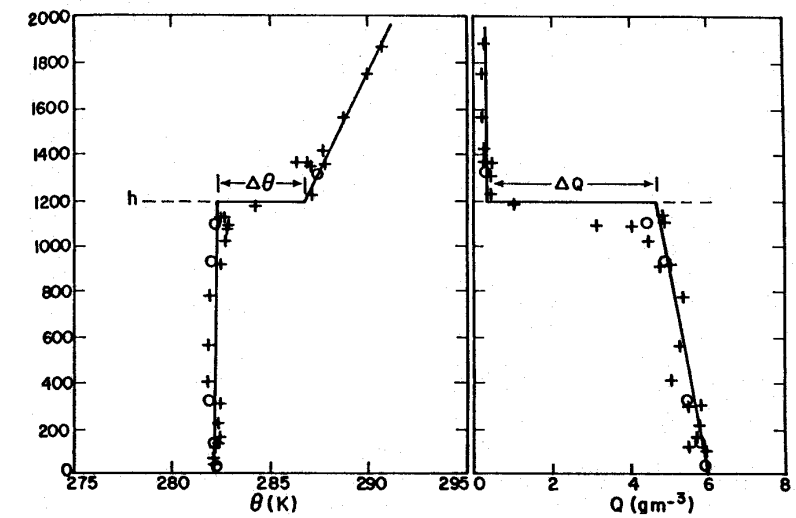


Fig. 9.8: profilo verticale di temperatura potenziale e di umidità (in condizioni di forte convettività) in ambiente marino (Wyngaard e al., 1978).

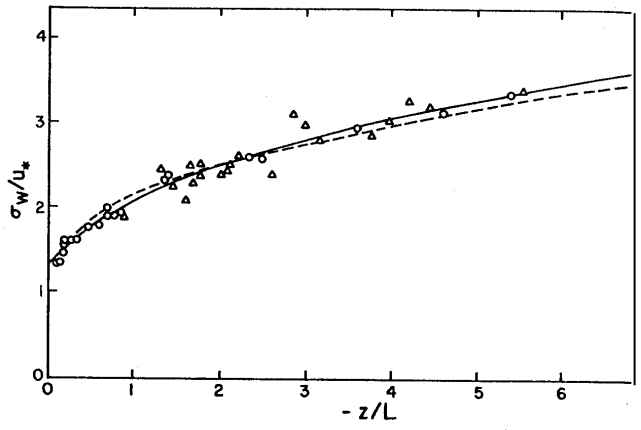


Fig. 9.9: relazione di Similarità per la deviazione standard della componente verticale del vento (Arya, 1987).

Per quanto riguarda i profili delle altre variabili di interesse micrometeorologico (come, per esempio, le deviazioni standard delle componenti del vento e della temperatura) si dispone di un numero estremamente esiguo di evidenze sperimentali, che però di fatto confermano le Relazioni di Similarità ottenute sulla terraferma. Dettagli al riguardo li possiamo trovare nei lavori di Nicholls e LeMone (1980) e Wyngaard e al. (1978). In particolare, se si considera la σ_w, i dati disponibili confermano la ben nota Relazione di Similarità nel *SL*, ottenuta sulla terraferma, come ben si vede dalla **Fig. 9.9**.

9.1.7 BREZZA DI MARE E BREZZA DI TERRA

Una delle differenze più evidenti tra l'acqua del mare e la superficie terrestre è la differenza della capacità termica dei due ambienti. Mentre la capacità termica del mare è così alta da impedire di fatto un significativo ciclo diurno della propria temperatura superficiale nonostante l'apporto energetico solare, la capacità termica della terraferma è decisamente minore e ciò consente questo ciclo termico giornaliero. È evidente che là dove i due ambienti vengono a contatto, come è il caso delle zone costiere, dovranno sorgere fenomeni evidenti causati proprio dalle loro contrastanti proprietà termiche. Ma questi fenomeni termici, che necessariamente devono aver luogo, inevitabilmente si andranno a sommare ad altri fenomeni di natura diversa come, per esempio, le circolazioni a grande e media scala in atto, mostrandoci alla fine uno scenario complesso e difficile da interpretare.

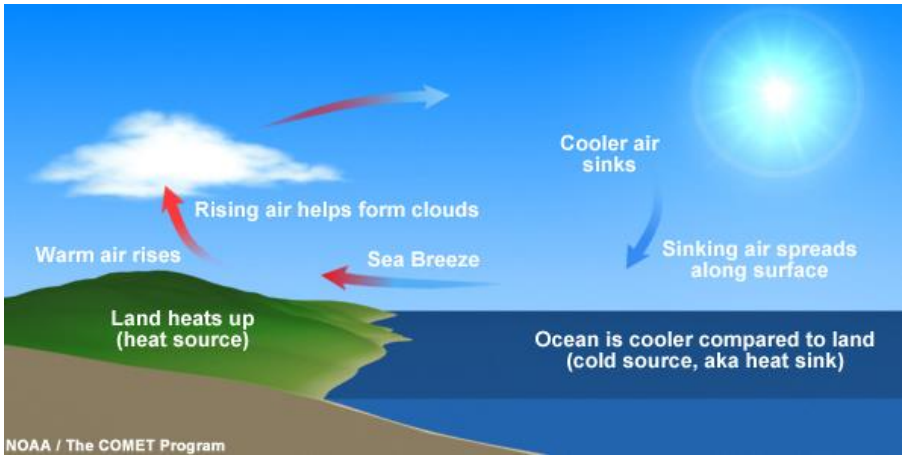


Fig. 9.10: fenomenologia della brezza di mare (www.weatherworksinc.com)

Consideriamo una tipica situazione anticiclonica con gradienti orizzontali di pressione estremamente limitati. Nella seconda parte della mattinata, dopo che è stata completamente erosa l'inversione notturna, in una zona costiera l'aria sopra la terraferma, che è ad una temperatura maggiore di quella del mare, inizia a sollevarsi richiamando così aria più fredda dal mare. Questo esteso fenomeno avvettivo è ben noto e prende il nome di *brezza di mare*, fenomeno presente in tutte le zone marine costiere ed anche in tutte le sponde dei grandi laghi. Quindi nelle ore diurne e nelle zone costiere si assiste al fenomeno avvettivo della brezza di mare che si estende nell'entroterra per distanze dell'ordine di alcuni chilometri (anche decine di chilometri). La sua massima estensione nella terraferma viene chiamata *fronte di brezza* e la zona del fronte di brezza è caratterizzata da una marcata diminuzione di temperatura, da un aumento dell'umidità, da moti convettivi verticali (con velocità ascensionali di circa 0.5 a 2.5 $m \cdot s^{-1}$) e, a volte, dalla presenza di nubi cumuliformi. Naturalmente, per soddisfare la legge di continuità, sopra la brezza di mare (che è un'avvezione di aria fredda dal mare a contatto col suolo e che possiede uno spessore variabile di 100÷500 m), si viene a generare un'avvezione di aria più calda che dalla terra va verso il mare (la *contro-brezza*), abbastanza lenta (1÷2 ms^{-1}), di maggior spessore (500÷2000 m) e che si esaurisce

al largo, dove l'aria inizia la discesa verso la superficie marina. Questa complessa circolazione di masse d'aria è schematizzata nella **Fig. 9.10**. In assenza di un moto sinottico di *background* (cioè quando i gradienti orizzontali di pressione sono di lieve entità), il fronte di brezza si muove verso l'interno perpendicolarmente alla costa ad una velocità di $1 \div 5$ m·s^{-1}.

Se il moto di *background* ha la stessa direzione della brezza (cioè perpendicolare alla costa e diretta verso la terraferma) e non ci sono barriere al moto, in questo caso il fronte di brezza può penetrare ancora più a fondo nell'entroterra giungendo fino a distanze dell'ordine del centinaio di chilometri e la velocità dell'avvezione è approssimativamente la somma della velocità *naturale* dell'avvezione e del moto di *background*. Se, invece, la direzione del moto di *background* è opposta a quella della brezza, allora la penetrazione del fronte di brezza è limitata all'immediato entroterra o, in certe condizioni, la brezza può addirittura scomparire. Se poi il moto di *background* risulta parallelo alla costa, la circolazione di brezza risulta più *sfumata.*

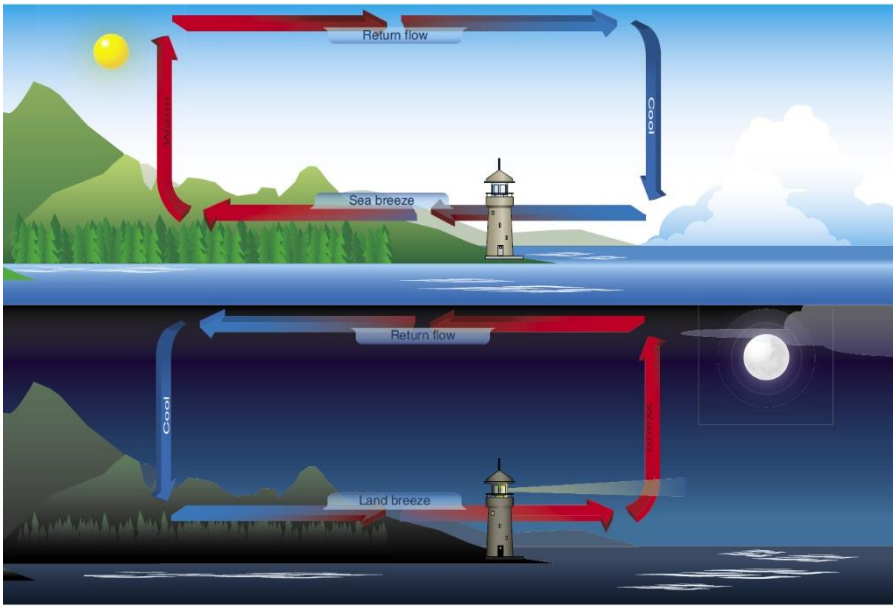


Fig. 9.11: la circolazione della brezza di mare (figura in alto) e della brezza di terra (figura in basso) (www.climatesnack.com)

Nelle ore notturne il processo si inverte. Infatti, normalmente la terraferma si raffredda più velocemente della superficie marina (che mantiene una temperatura praticamente costante in tutte le ore del giorno). Quindi, al largo dell'aria calda si innalza risucchiando aria dalla terra e generando quindi la *brezza di terra* che si mantiene alle quote basse, mentre al di sopra anche in questo caso si viene a generare una contro-brezza diretta verso la terraferma chiudendo la circolazione. Nella **Fig. 9.11** viene schematicamente messo a confronto la circolazione della brezza di mare (figura in alto) con la circolazione della brezza di terra (figura in basso) e da queste due rappresentazioni schematiche è immediato individuare le analogie e le differenze dei due tipi di circolazione.

Il fenomeno della brezza di mare e della brezza di terra ha accompagnato da sempre la vita delle popolazioni costiere che l'hanno sfruttata con perizia per consentire l'attività della pesca, soprattutto ai tempi della navigazione a vela. Pur essendo da sempre parte integrante dalla vita delle popolazioni costiere, osservazioni sistematiche e complete del fenomeno non sono frequenti negli studi riportati in Letteratura. Qui val la pena citare per la loro completezza solo il lavoro di Soler e al. (2011) relativo alla zona costiera Catalana della Spagna e quelli relativi alla località costiera Kwinana sita nella parte sudoccidentale dell'Australia (Sawford e al., 1998; Luhar e al., 1998; Hurley e Luhar, 2000), mentre Ito (1997) ha indagato su come queste problematiche si ripercuotono su un'isola di piccole dimensioni. Da ultimo, Chiba (1997) ha studiato

sistematicamente con l'aiuto di sistemi *remote sensing* (SODAR) la variabilità della brezza e del suo fronte.

Naturalmente le brezze di mare e di terra sono state affrontate anche dal punto di vista modellistico. Rotunno (1983) ha affrontato il problema utilizzando i modelli in termini analitici ed altri sforzi in questo senso sono riportati in Atkinson (1981): da questi lavori si può verificare come questo metodo d'indagine sia di limitata utilità, visto che la necessità di sviluppare soluzioni puramente analitiche imponeva drastiche ed inaccettabili semplificazioni alle equazioni del modello. Ovviamente queste limitazioni sono rimosse quando si perseguono soluzioni numeriche al problema e questa è la strada principale con cui vengono studiate la brezza di mare e la brezza di terra. I lavori di questo tipo sono numerosissimi e ad una loro sintesi è dedicato il lavoro di Crosman e Horel (2010).

9.2 LE DISCONTINUITÀ SUPERFICALI

Una delle tipiche violazioni del paradigma di omogeneità orizzontale è il cambiamento graduale o improvviso delle caratteristiche della superficie terrestre anche se, dal punto di vista geometrico, essa continua ad essere piatta. Il parametro superficiale che muta può essere la semplice rugosità superficiale (rappresentata globalmente da z_0 e d), ma possono essere anche i flussi turbolenti di calore sensibile e latente a mutare. Le masse d'aria che si muovono in equilibrio su una ben precisa superficie improvvisamente abbandonano questa superficie e iniziano a scorrere sulla nuova con caratteristiche superficiali differenti. Il risultato è che le masse d'aria, originariamente in equilibrio con la superficie sottostante, non raggiungono immediatamente un nuovo stato di equilibrio con la nuova superficie ma ci arrivano solo progressivamente. È come se le *informazioni* relative alla nuova superficie venissero propagate verso l'alto e si *diffondessero* progressivamente come si diffonde una sostanza passiva emessa al suolo e l'adeguamento alle nuove condizioni superficiali occuperà uno strato verticale d'atmosfera proporzionale alla distanza dalla discontinuità percorsa dalle masse d'aria che indicheremo genericamente col termine di *fetch*.

9.2.1 DISCONTINUITÀ NELLA RUGOSITÀ SUPERFICIALE

Una situazione che frequentemente si incontra nel mondo reale è il succedersi continuo di superfici con caratteristiche morfologiche diverse. Si pensi per esempio ad una situazione di una grande prateria confinante con una zona urbanizzata costituita da case sparse, strade ed altri edifici di piccola dimensione e piante sparse ad alto fusto. Evidentemente le due zone presentano distinte rugosità superficiali (z_0 e d) e le masse d'aria che scorrono sopra una delle due zone, passando sull'altra incontreranno una *discontinuità* e si adegueranno gradualmente alla nuova situazione. Si verrà quindi formando uno strato (*Internal Boundary Layer*, **IBL**) che partirà dalla linea di discontinuità e si svilupperà sottovento ad essa.

Per semplificare al massimo il problema, possiamo ipotizzare che esistano due semi-superfici perfettamente piatte che differiscono solo per le caratteristiche superficiali e che siano separate tra loro da una linea retta. Se, poi, la direzione del vento medio è perpendicolare alla linea di separazione tra le due superfici, allora il problema originariamente tridimensionale si riduce ad un problema bidimensionale di più facile descrizione. In pratica (Garratt, 1990) questa situazione bidimensionale può essere completamente descritta dall'equazione del moto relativa alla componente media U (l'unica componente orizzontale che sopravvive in questo problema bidimensionale) e dall'equazione di continuità. Dunque, se ipotizziamo una situazione stazionaria ed adiabatica, se trascuriamo l'effetto della rotazione terrestre e dei gradienti orizzontali di pressione, detto τ lo *stress* di Reynolds, il modello differenziale di questa situazione semplificata si riduce alle due relazioni seguenti:

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + W\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial z} \qquad [9.11a]$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \qquad [9.11b]$$

Questo sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali può essere risolto numericamente una volta definita un'opportuna relazione di chiusura e stabilite le idonee condizioni iniziali ed al contorno. Esempi significativi di tutto ciò sono i lavori di Shir (1972) e Rao e al. (1974) che hanno rappresentato i primi approcci quantitativi al problema.

Parallelamente sono state realizzate campagne sperimentali ed esperimenti in laboratorio per evidenziare lo sviluppo e le caratteristiche dell'*IBL*; un esempio interessante è rappresentato dal lavoro di Bradley (1968) e di Sempreviva e al. (1990). Nella rassegna realizzata da Garratt (1990) vengono forniti ulteriori dettagli in merito. In pratica, considerando sia le simulazioni modellistiche che le risultanze sperimentali, il quadro che si delinea è quello rappresentato schematicamente nella **Fig. 9.12**.

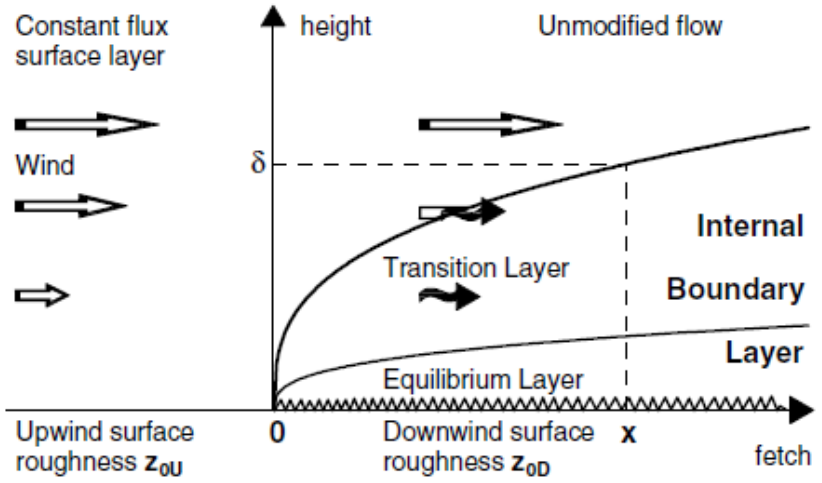


Fig. 9.12: sviluppo di un Internal Boundary Layer (Savelyev e Taylor 2005)

Da tutto ciò emerge che:

- stiamo considerando dell'aria che inizialmente si muove in equilibrio su una superficie caratterizzata da una rugosità superficiale z_{0U} in una situazione adiabatica in cui la turbolenza meccanica risulta completamente descritta dalla *friction velocity upwind* u_{*u}. In questo caso, nel *SL* il profilo medio della velocità del vento è logaritmico e pari a:

$$U_\infty(z) = \frac{u_{*U}}{k}\ln\left(\frac{z}{z_{0U}}\right) \qquad [9.12a]$$

  In corrispondenza della linea di discontinuità ($x = 0$) le masse d'aria incontrano una superficie con una differente rugosità superficiale z_{0D}. L'adeguamento a queste nuove caratteristiche superficiali non è immediato, ma solo graduale ed interessa uno strato d'aria a diretto contatto col suolo la cui estensione verticale cresce col *fetch x*;

- dalla linea di discontinuità tra le due superfici semi-infinite a differenti caratteristiche di rugosità superficiale (z_{0U} sopravento alla discontinuità e z_{0D} sottovento alla stessa) si viene a creare uno strato d'aria a spessore verticale crescente col *fetch x* (alla linea di discontinuità, $x = 0$) e a diretto contatto col suolo in cui l'aria risente delle nuove caratteristiche superficiali (completamente descritte dalla nuova rugosità z_{0D}) e le propaga verso l'alto. Questo è nel complesso l'*IBL* ed il suo limite superiore lo possiamo definire in vari modi.

Se, per semplicità, immaginiamo una sorta di *slab-model* secondo cui l'aria al di sopra dell'*IBL* mantiene le caratteristiche proprie dell'aria sopravento (rugosità z_{0U} e *friction velocity* u_{*U}) mentre l'aria entro l'*IBL* è in perfetto equilibrio con le nuove condizioni superficiali (z_{0D} e u_{*D}), allora risulta naturale definire l'estensione verticale dell'*IBL* come quella quota δ, funzione di *x*, in corrispondenza della quale la differenza tra la velocità del vento sulla verticale ad un *fetch x* e quella alla stessa quota ma relativa al profilo sopravento alla discontinuità risulta inferiore ad un valore prestabilito. In pratica, ipotizzando nell'ambito dello *slab-model*, un profilo logaritmico anche per la velocità del vento entro l'*IBL* del tipo:

$$U(z) = \frac{u_{*D}}{k} \ln\left(\frac{z}{z_{0D}}\right) \qquad [9.12b]$$

deve valere la relazione:

$$\left|\frac{u_{*U}}{k} ln\left(\frac{\delta(x)}{z_{0U}}\right) - \frac{u_{*D}}{k} ln\left(\frac{\delta(x)}{z_{0D}}\right)\right| \leq \varepsilon \qquad [9.12c]$$

dove ε è una quantità prefissata, piccola a piacere.

- nella realtà, né le misure (in laboratorio ed in campo) né le simulazioni numeriche supportano veramente uno *slab-model*. Ciò che si vede invece è che nelle immediate vicinanze del suolo si sviluppa uno strato di limitata estensione verticale (dell'ordine di 0.1δ) in cui effettivamente l'aria è in equilibrio con la nuova superficie e ciò comporta che solo in questo strato, detto *inner layer* (o anche *equilibrium layer*), il moto dell'aria è logaritmico e segue la relazione (9.12b) con z_{0D} e u_{*D}. La porzione superiore dell'*IBL* in realtà è una *zona di transizione* in cui la distribuzione della velocità media del vento gradualmente cambia da quella logaritmica di equilibrio espressa dalla (9.12b) a quella indisturbata sopravento espressa dalla (9.12a). Questo graduale adattamento può essere molto complicato da descrivere, ma almeno in prima approssimazione può essere semplicemente un cambiamento lineare tra le due situazioni. Tutto ciò è ben rappresentato nella **Fig. 9.13** dove è riportata (*a*) una situazione di transizione da una superficie liscia ad una rugosa (*smooth-to-rough*) e (*b*) una situazione di transizione da una superficie rugosa ad una liscia (*rough-to-smooth*). Nel primo caso, entro l'*IBL* si nota che il profilo del vento subisce una decelerazione, mentre nell'altro caso un'accelerazione

- a valori elevati del *fetch*, lo *stress* superficiale è quello tipico di una superficie uniforme.

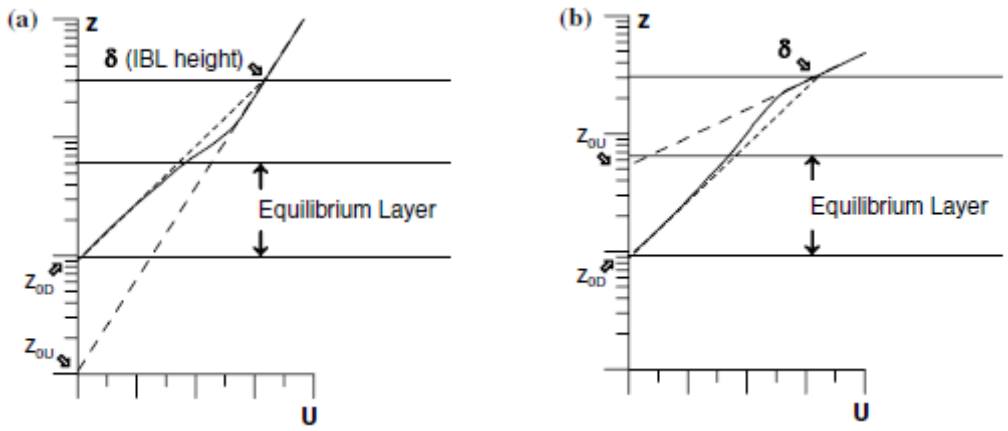


Fig. 9.13: profilo verticale idealizzato della velocità del vento entro l'IBL (a) nelle condizioni smooth-to-rough e (b) nelle condizioni rough-to smooth (Savelyev e Taylor 2005)

9.2.1.1 Modelli per la stima dell'estensione verticale dell'IBL

Garratt (1990) ha riassunto in un celebre lavoro di rassegna le conoscenze fenomenologiche e modellistiche maturate sulla stima dell'estensione verticale δ dell'*IBL* e della sua variazione col *fetch x*, cioè con la distanza sottovento alla linea di discontinuità, quadro completato da Kaimal e Finnigan (1994) e da Savelyev e Taylor (2001, 2005). Sulla base di tutto ciò, possiamo affermare che l'impiego diretto del modello fluidodinamico del *PBL* è naturalmente in grado di descrivere dettagliatamente il fenomeno sia nello spazio che nel tempo, tuttavia questa metodologia non sempre può essere adottata nella pratica e a tal fine sono stati sviluppati modelli semplici in grado di determinare δ in funzione della distanza *x*, per valori non molto elevati, in maniera tale che lo spessore δ risulti inferiore all'estensione verticale del *SL* nelle condizioni superficiali sottovento.

Una prima famiglia di modelli di questo tipo di fatto usa l'Analisi Dimensionale come strumento fondamentale ed ipotizza che:

$$\frac{\delta}{z_1} = f\left(\frac{z_{0D}}{z_{0U}}\right) \cdot \left(\frac{x}{z_2}\right)^{\alpha} \qquad [9.13a]$$

dove z_1 e z_2 sono due opportune scale spaziali, α è un esponente numerico e *f*(..) è una funzione di Similarità da determinare empiricamente. A questa famiglia appartiene il celebre modello semiempirico di Elliott (1958) che è stato il primo modello di questo tipo ad essere proposto. Esso è espresso dalla relazione:

$$\frac{\delta}{z_{0D}} = A\left(\frac{x}{z_{0D}}\right)^{0.8} \qquad [9.13b]$$

dove:

$$A = 0.75 + 0.03 \cdot \ln\left(\frac{z_{0U}}{z_{0D}}\right) \qquad [9.13c]$$

Questo modello diagnostico, espresso da una relazione algebrica esplicita e quindi di uso molto semplice, è sostanzialmente supportato dai dati sperimentali presentati da Bradley (1968), anche se con parecchie eccezioni.

Una seconda importante famiglia di modelli diagnostici approssimati per la stima dell'estensione verticale dell'*IBL* prende le mosse da un'osservazione qualitativa e fenomenologica fatta in precedenza. Secondo questa idea modellistica, un eccesso o un deficit di una quantità turbolenta che deriva da una variazione a piccola scala nelle condizioni superficiali si *diffonde* (in orizzontale, ma soprattutto in verticale) *analogamente* alla concentrazione di una sostanza scalare passiva. Considerazioni di questo genere portano ad ipotizzare che lo spessore verticale δ dell'*IBL* entro cui si propagano gli effetti turbolenti delle discontinuità sia l'analogo del *bordo superiore* di un *plume* emesso al suolo da una sorgente di una sostanza inquinante. Se consideriamo una particella d'aria presa al bordo superiore di questa zona di propagazione e la seguiamo nel tempo, notiamo che essa presenta uno spostamento verticale proporzionale al valore locale (in teoria Lagrangiano) della varianza della componente verticale del moto. Se, per semplicità, non consideriamo la differenza tra la varianza Lagrangiana del moto verticale della particella e la varianza verticale Euleriana del campo di moto σ_w^2, allora la relazione Lagrangiana per questa particella può essere espressa come:

$$\frac{d\delta}{dt} = A\sigma_w \qquad [9.14a]$$

dove la costante *A*, sperimentalmente, assume un valore prossimo a 1. Per proseguire, inizialmente consideriamo solo situazioni adiabatiche o circa tali. In questo caso sappiamo dalla Teoria della Similarità di Monin-Obukhov che:

$$\sigma_w = Cu_* \qquad [9.14b]$$

dove la costante *C* assume un valore prossimo a 1.25. Abbandonando la logica Lagrangiana e cercando di riscrivere la (9.14a) in termini Euleriani, ricordando la definizione di derivata sostanziale ed ipotizzando che la situazione che stiamo considerando sia circa stazionaria e che l'unica componente del moto media orizzontale sia la componente orizzontale *U*, si giunge senza

problemi alla relazione differenziale seguente:

$$U(\delta)\frac{\partial \delta}{\partial x} = A \cdot C \cdot u_* = Bu_* \qquad [9.14c]$$

con la costante *B* pari a 1.25, mentre la variabile *x* è il *fetch*, nulla in corrispondenza della frontiera tra le due superfici a differente rugosità. In corrispondenza della frontiera tra le due superfici l'estensione verticale dell'*IBL* sarà pari a δ_0 (per esempio z_{0D}), mentre alla generica distanza *x* essa sarà pari a δ. In condizioni adiabatiche ed ipotizzando che il valore della velocità del vento alla quota δ possa essere espressa dalla ben nota relazione logaritmica di Similarità caratteristica della superficie a rugosità z_{0D}, la (9.14c) può essere integrata giungendo alla relazione finale:

$$\frac{\delta}{z_{0D}}\left[\ln\left(\frac{\delta}{z_{0D}}\right) - 1\right] - \frac{\delta_0}{z_{0D}}\left[\ln\left(\frac{\delta_0}{z_{0D}}\right) - 1\right] = kB\frac{x}{z_{0D}} \qquad [9.14d]$$

Se, come sembrerebbe logico, ipotizziamo che $\delta_0 = z_{0D}$, allora la relazione precedente si riduce alla forma:

$$\frac{\delta}{z_{0D}}\left[\ln\left(\frac{\delta}{z_{0D}}\right) - 1\right] + 1 = kB\frac{x}{z_{0D}}u_* \qquad [9.14e]$$

Questo è il ben noto Modello di Miyake ed i dettagli della sua deduzione sono riportati nell'*Esempio 9.2*. Come si vede, il modello è espresso da un'equazione diagnostica in forma implicita e per ottenere in pratica una sua soluzione è inevitabile applicare un metodo numerico di tipo iterativo.

Esercizio 9.2

Dimostrare la relazione finale che stima l'estensione verticale dell'*IBL* secondo il modello di Miyake.

La relazione cui giunge il modello di Miyake è la relazione differenziale (9.14c) che mette in relazione il tasso di variazione dell'altezza dell'*IBL*, la velocità del vento a questa quota e la friction velocity al suolo:

$$U(\delta)\frac{d\delta}{dx} = A \cdot C \cdot u_* = Bu_*$$

Per prima cosa dobbiamo esprimere la velocità media del vento alla quota δ e questo lo facciamo impiegando la relazione di Similarità per il profilo verticale della velocità del vento in condizioni adiabatiche. È immediato verificare che introducendo il profilo logaritmico del vento giungiamo alla relazione differenziale seguente:

$$ln\left(\frac{\delta}{z_{0D}}\right) \cdot \frac{d\delta}{dx} = kB$$

Vediamo due cose importanti. In primo luogo, dovendo considerare solo la variazione col *fetch* di δ, è possibile sostituire la derivata parziale con l'analoga derivata totale. In secondo luogo, abbiamo scelto di considerare l'*IBL* nella logica *slab-model* e quindi il valore alla quota δ (che è l'estremo superiore dell'*IBL*) l'otteniamo con un profilo logaritmico completamente in equilibrio con le caratteristiche superficiali sottostanti. Per questo abbiamo utilizzato il parametro di rugosità z_{0D}. Inoltre, *k* è la costante di von Karman. La soluzione dell'equazione differenziale la otteniamo integrando dall'inizio della discontinuità (*x* = 0) quando δ ha un valore iniziale δ_0 (normalmente pari a z_{0D}) alla distanza sottovento *x* cui corrisponde un'estensione verticale dell'*IBL* pari a δ, cioè:

$$\int_{\delta_0/z_{0D}}^{\delta/z_{0D}} ln\, y \cdot dy = \frac{kB}{z_{0D}}\int_0^x dx'$$

Ricordando che:

$$\int_a^b ln\, y \cdot dy = [y \cdot ln\, y - y]_a^b$$

con pochi passaggi algebrici giungiamo facilmente alla relazione (9.14d).

La forma originaria del Modello di Miyake, nonostante sia basata sull'analogia tra la *propagazione* in verticale di una proprietà turbolenta indotta da una discontinuità superficiale e la *diffusione turbolenta* di uno scalare passivo, presenta un comportamento analogo al più semplice modello di Elliot. Sperimentazioni numeriche mostrano come la differenza tra i due modelli sia estremamente contenuta. Tuttavia, la fisica su cui essa si basa lascia molte perplessità.

Savelyev e Taylor (2001 e 2005) hanno apportato sostanziali modifiche a questo modello cercando una base fisica più rigorosa. In particolare, hanno cercato di introdurre l'evidenza per cui alla propagazione verticale di una proprietà turbolenta generata dalla discontinuità superficiale doveva inevitabilmente essere associata anche una variazione nel campo di moto descritta dall'equazione di conservazione che per un moto bidimensionale presenta una forma molto semplice. Rimandando per i dettagli ai riferimenti citati, il nuovo modello risulta ora espresso dall'equazione differenziale:

$$\frac{d\delta}{dx} = Ck \cdot \left[1 + \frac{\delta}{x}\ln\frac{z_{0D}}{z_{0U}}\right] \cdot \left(\ln\frac{\delta}{z_{0U}}\right)^{-1} \qquad [9.15a]$$

che, una volta integrata, diventa l'equazione diagnostica implicita seguente:

$$\delta \cdot \left[\ln\frac{\delta}{z_{0U}} - \left(1 + Ck\ln\frac{z_{0D}}{z_{0U}}\right)\right] = Ck \cdot x \qquad [9.15b]$$

Tutte queste relazioni si riferiscono a rigore solo alle situazioni adiabatiche. Savelyev e Taylor (2005) hanno però esteso la teoria anche alle situazioni convettive e stabili ed hanno ipotizzato che, congruentemente con la Teoria della Similarità di Monin-Obukhov, per il profilo verticale della velocità media del vento valesse sempre un profilo logaritmico *corretto* dalle funzioni Universali di similarità $\Psi_m(z/L)$ di cui si è ampiamente trattato al capitolo precedente. Anche in questo caso, rimandando i dettagli della deduzione al riferimento citato, l'estensione verticale dell'*IBL* è dato in ogni condizione di stabilità dalla relazione differenziale generale:

$$\left[\ln\frac{\delta}{z_{0U}} - \Psi_m\left(\frac{\delta}{L_U}\right)\right] \cdot \frac{d\delta}{dx} = A_1 k\frac{\sigma_{wU}}{u_{*U}} + A_2\frac{\delta}{x}\left[\ln\frac{z_{0D}}{z_{0U}} - \Psi_m\left(\frac{\delta}{L_U}\right) + \left(\frac{\delta}{L_D}\right)\right] \qquad [9.15c]$$

dove alle due costanti numeriche A_1 e A_2 sono stati attribuiti rispettivamente i valori 1 e 0.5. Le grandezze z_{0U}, u_{*U} e L_U sono rispettivamente la rugosità superficiale, la *friction velocity* e la Lunghezza di Monin-Obukhov relativi alla superficie sopravento non perturbata dalla discontinuità, mentre z_{0D}, u_{*D} e L_D sono le analoghe grandezze relative alla superficie sottovento. Infine, σ_{wD} è la deviazione standard della componente verticale del moto che può essere stimata con le relazioni di Similarità appropriate alla stabilità considerate e relativa alla quota δ.

L'adozione del concetto di *slab-model* permette, almeno in prima approssimazione, di stimare il profilo verticale della velocità media del vento nell'intero *IBL*. Per fare ciò basta organizzare opportunamente le conoscenze fin qui acquisite. In particolare, ad un certo valore *x* di *fetch* si avrà che l'estensione verticale dell'*IBL* sarà pari a δ e perciò l'*equilibrium layer* si estenderà dalla quota z_{0D} a 0.1δ. Quindi:

- lo strato di equilibrio per definizione è in equilibrio con le nuove caratteristiche superficiali e quindi per ogni quota *z* tra z_{0D} e 0.1δ il profilo della velocità media del vento è:

$$U(z) = \frac{u_{*D}}{k}\ln\left(\frac{z}{z_{0D}}\right) \qquad [9.16a]$$

- a quote $z > \delta$ l'aria mantiene ancora le caratteristiche possedute sopravento e quindi:

$$U(z) = \frac{u_{*U}}{k}\ln\left(\frac{z}{z_{0U}}\right) \qquad [9.16b]$$

- per ogni quota *z* posta sopra lo strato di equilibrio ma entro l'*IBL* l'aria *gradualmente* avrà caratteristiche intermedie tra i due regimi. Se si ipotizza che questo aggiustamento sia lineare e graduale, possiamo ipotizzare (**Fig. 9.13**) che il profilo verticale della velocità media del vento sia dato da:

$$U(z) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{0.9}\left(\frac{z}{\delta} - 0.1\right) \qquad [9.16c]$$

dove:

$$U_1 = \frac{u_{*D}}{k}\ln\left(\frac{0.1\delta}{z_{0D}}\right) \qquad U_2 = \frac{u_{*U}}{k}\ln\left(\frac{\delta}{z_{0U}}\right) \qquad [9.16d]$$

I modelli che consentono una stima dell'estensione verticale δ dell'*IBL* in funzione del *fetch x* presentano ben precise limitazioni. In primo luogo, essi possono ragionevolmente realizzare questa stima a distanze dalla discontinuità superficiale relativamente limitate e dell'ordine del chilometro o più precisamente finché δ non supera l'estensione verticale del *SL* che si verrebbe a formare sulla superficie sottovento a *x* tendente all'infinito. In questo caso il comportamento dei modelli sopra presentati e di altri apparsi in Letteratura è sostanzialmente buono, come confermato dalle misure sperimentali ed in laboratorio attualmente disponibili. Oltre questo limite questi modelli non possiedono la Fisica necessaria a realizzare questa stima, neppure in prima approssimazione, visto che tutti per *x* tendente all'infinito prevedono che anche δ debba tendere all'infinito, anche se con un tasso di crescita sempre più lento con l'aumentare del *fetch.* D'altro canto, anche sperimentalmente è difficile ottenere una visibilità chiara dell'*IBL* che tende a *dissolversi* nel più generale *PBL* più il *fecth* aumenta. Quanto ciò sia vero lo si può apprezzare nel lavoro di Sempreviva e al. (1990). Possiamo concludere quindi che, se vogliamo una stima a breve distanza dalla discontinuità dell'entità dell'estensione verticale dell'*IBL*, possiamo certamente confidare in questi semplici modelli, ma se vogliamo una stima a media o lunga distanza non possiamo fare altro che impiegare direttamente un modello fluidodinamico di *PBL*.

9.2.1.2 Gli stress superficiali

Considerando ancora una volta le situazioni adiabatiche, sulla superficie sopravento, caratterizzata da una rugosità superficiale z_{0U} ed estesa all'infinito nella direzione sopravento, si viene ad instaurare uno *stress* superficiale u_{*U} ed il profilo verticale della velocità media del vento nel *SL* è ben descritto dalla relazione logaritmica in cui compaiono sia z_{0U} che u_{*U}.

Quando, però, le masse d'aria raggiungono la linea di discontinuità, se ci concentriamo in prossimità del suolo, notiamo che bruscamente la *friction velocity* abbandona il valore u_{*U} per acquistarne uno nuovo, u_{*D}, che varia col *fetch.* Se si mettono a confronto i risultati sperimentali disponibili, ciò che si vede è quanto rappresentato nelle due parti della **Fig. 9.14** dove è riportato il rapporto tra lo *stress* al suolo τ_{01}, sopravvento alla discontinuità e proporzionale a u_{*U}^2, e τ_{02} che è lo *stress* superficiale sottovento alla discontinuità, proporzionale a u_{*D}^2. La parte *(a)* della figura evidenzia l'andamento dello *stress* superficiale con la distanza sottovento alla discontinuità *x* se il vento proviene da una zona meno rugosa e si inoltra in una zona più rugosa (*smooth-to-rough*). Le masse d'aria, incontrando un improvviso aumento di rugosità, subiscono un picco altrettanto improvviso di *stress* superficiale, localizzato nei primi metri a valle della discontinuità e che rappresenta la causa della decelerazione delle masse d'aria in prossimità del suolo. Tuttavia, questa perturbazione si attenua sempre più con l'aumentare del *fectch* fino a raggiungere un valore di sostanziale equilibrio. La parte *(b)* della figura rappresenta il passaggio delle masse d'aria da una superficie più rugosa ad una meno (*rough-to-smooth*) ed il comportamento dello *stress* superficiale è sostanzialmente *speculare.* Infatti, alla discontinuità, lo *stress* superficiale subisce un repentino abbassamento che gradualmente si riduce col *fetch* fino a giungere anche in questo caso ad un valore di equilibrio. Questo comportamento spiega l'accelerazione sperimentata dalle masse d'aria alla discontinuità. Questo comportamento dello *stress* superficiale è stato ben previsto, sia qualitativamente che quantitativamente, da sofisticati modelli numerici (Rao e al., 1974).

I modelli semplificati che abbiamo introdotto sono sostanzialmente incapaci di predire questo comportamento dello *stress*, anche se l'ordine di grandezza del rapporto dei due *stress* all'equilibrio lo si può dedurre con semplici ragionamenti basati sulla Similarità di Monin-Obukhov e sul concetto di *slab-model*. Infatti, poniamo l'attenzione alla quota δ che rappresenta l'estensione verticale dell'*IBL* corrispondente al *fetch x*. A quella quota, cui lo *slab-model* fa corrispondere una netta discontinuità che separa l'aria che scorre sopra l'*IBL* da quella che scorre nel suo interno, la velocità del vento deve essere la stessa sia che essa venga calcolata col profilo logaritmico basato su u_{*U} e z_{0U} caratteristici della superficie sopravento, sia che la si calcoli usando un profilo logaritmico basato sugli analoghi parametri relativi ad una situazione di equilibrio con le nuove caratteristiche superficiali (z_{0D} e u_{*D}). Infatti, poco sopra δ (diciamo alla quota δ+ε, dove ε è piccolo) le masse d'aria ancora ricordano le caratteristiche sopravento, mentre poco sotto (diciamo alla quota δ-ε) le masse d'aria sono in equilibrio con la nuova superficie. Pertanto, bisogna che:

$$\frac{u_{*u}}{k}\ln\left(\frac{\delta}{z_{0U}}\right)=\frac{u_{*D}}{k}\ln\left(\frac{\delta}{z_{0D}}\right) \qquad [9.17a]$$

Posto per semplicità:

$$M=\ln\left(\frac{z_{0U}}{z_{0D}}\right) \qquad [9.17b]$$

si ha che:

$$\frac{u_{*D}}{u_{*U}}=1-\frac{M}{\ln\left(\frac{\delta}{z_{0D}}\right)}=\left(\frac{\tau_{02}}{\tau_{01}}\right)^{1/2} \qquad [9.17c]$$

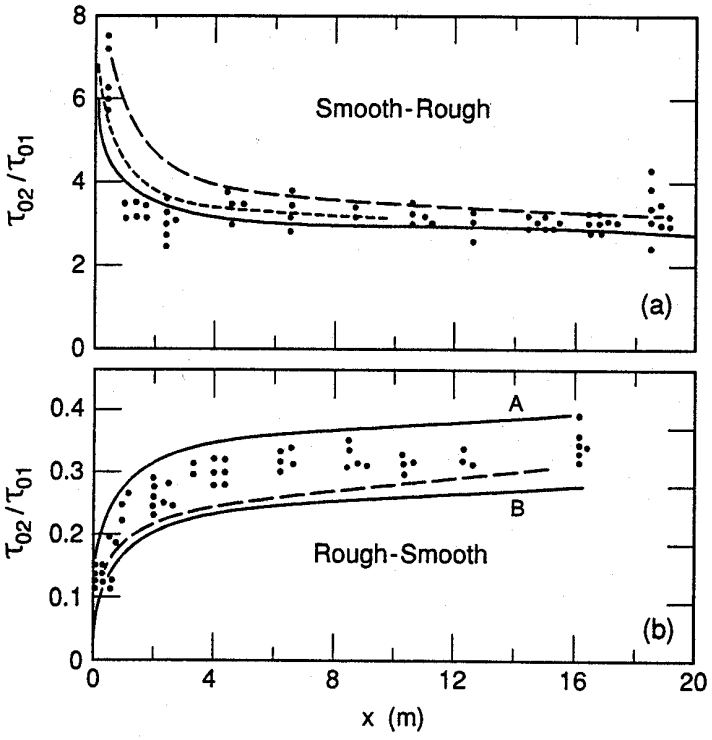


Fig 9.14: Variazione col fetch dello stress superficiale (Kaimal e Finnigan, 1994).

9.2.2 DISCONTINUITÀ NEL FLUSSO DI CALORE SENSIBILE

La linea di costa separa due mezzi (che per i nostri scopi possiamo ritenere superfici semi-infinite) aventi capacità termica profondamente diversa. Infatti, mentre il mare possiede un'elevatissima capacità termica che determina la sostanziale assenza di un ciclo giornaliero nella sua temperatura superficiale, la terraferma al contrario ha minor capacità termica e presenta un evidente ciclo

giornaliero per la propria temperatura superficiale, sostanzialmente sincrono con l'apporto di energia solare. Quindi, nelle ore diurne, mentre sul mare il flusso turbolento di calore sensibile o è assente o è di minima entità, sulla terraferma al contrario H_0 presenta un evidente ciclo giornaliero con valori molto elevati e positivi nelle ore diurne e soleggiate. Quindi la linea di costa determina una discontinuità netta nel flusso turbolento di calore sensibile tra i due ambienti. Abbiamo visto che queste condizioni, se non contrastate dal moto a mesoscala, inducono la *brezza di mare*, cioè un flusso d'aria marina relativamente fredda che, generatosi sul mare, si muove verso la terraferma penetrando nell'entroterra spesso per decine di chilometri. Tutto ciò è schematizzato nella **Fig. 9.15**.

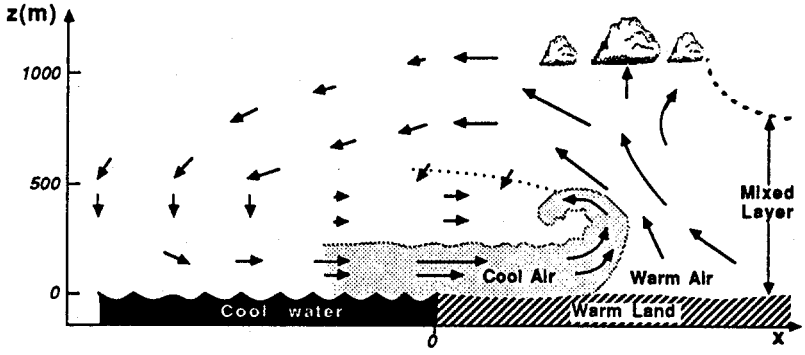


Fig. 8.15: sviluppo di un TIBL e struttura della brezza di mare (Stull, 1988).

Le masse d'aria contenute nella brezza di mare possiedono le caratteristiche del *PBL* marino e quindi sono stabili e spesso con un gradiente verticale di temperatura potenziale positivo e ciò comporta un H_0 o nullo o leggermente negativo. Quando esse raggiungono la linea di costa, subiscono un brusco *input* energetico derivante dal flusso turbolento di calore sensibile emesso dalla terraferma. Quello che succede è anche in questo caso lo sviluppo di un *IBL*, però questa volta di origine termica (quindi di un *TIBL, Thermal Internal Boundary Layer*).

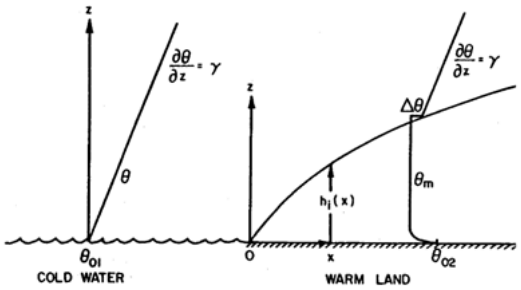


Fig. 9.16: struttura termica del TIBL (Arya, 1987).

Quando si sviluppa il *TIBL*, il profilo di temperatura sopra la superficie marina è quello relativo ad una situazione stabile. Sulla terraferma, invece, vediamo che sopra il *TIBL* la stratificazione termica (ed anche il moto dell'aria) resta sostanzialmente quella che c'era sopra il mare, visto che normalmente le variazioni orizzontali a mesoscala delle variabili meteorologiche hanno scale superiori a quelle che interessano la zona coinvolta nello sviluppo del *TIBL*. Entro il *TIBL*, invece, la stratificazione sarà di tipo convettivo, con l'*entrainment* localizzato alla sua sommità, come si può vedere nella **Fig.9.16**.

Naturalmente la rappresentazione data in questa figura è estremamente semplificata in tanti aspetti. In primo luogo, qui si ipotizza che il profilo verticale della temperatura potenziale virtuale sopra la superficie marina abbia gradiente positivo, ma come abbiamo visto non è raro che la stratificazione sia invece circa adiabatica. Di ciò ci occuperemo tra breve. Inoltre, la figura

ipotizza l'adozione dello *slab-model* come metodologia descrittiva del fenomeno. Anche se questa è una comoda idealizzazione che ci condurrà comunque a stime realistiche del fenomeno, la realtà vera è ben più complessa come viene mostrato in molte attività sperimentali descritte, per esempio, nei lavori di Raynor e al. (1979), Soler e al. (2011) e De Tomasi e al. (2011).

9.2.2.1 Modelli semplificati per la stima del TIBL

Per poter ottenere una stima dell'estensione verticale del *TIBL* è necessario, anche in questo caso, porsi in una geometria semplificata. Si fanno quindi le ipotesi seguenti:

- il tratto di costa che consideriamo è rettilineo ed orientato secondo l'asse *y* di un sistema di assi cartesiani con *z* diretto verso l'alto;
- l'asse *x* è perpendicolare alla linea di costa e la brezza di mare presenta solo un moto lungo *x* dal mare verso l'entroterra;
- sia il mare sia l'entroterra vengono considerate due superfici semi-infinite separate dalla linea di costa, aventi proprietà termiche omogenee;
- trascuriamo qualsiasi variazione nella direzione *y*.

Tutti i modelli di cui tratteremo ora e parte di quelli che tratteremo nel prossimo paragrafo adottano questa semplificazione geometrica che spesso è ben lontana dai casi reali d'interesse.

Lo sviluppo del *TIBL* è stato studiato inizialmente in forma semplificata da Venkatram (1988). La base logica su cui si fonda questo modello è il ritenere che in ogni punto della terraferma sia disponibile un flusso turbolento di calore sensibile H_0 uguale ovunque e che questo input energetico sia la sola forma di energia trasferita alle masse d'aria marina introdottesi sulla terraferma. Sulla base di ciò ed applicando un bilancio energetico locale, dopo non pochi passaggi algebrici si giunge ad un modello esplicito per la stima dell'estensione verticale *h* del *TIBL* che ha la forma (Arya, 1987):

$$h(x) = a \cdot \left[\frac{H_0 x}{\rho C_p \gamma U}\right]^{1/2} \qquad [9.18a]$$

in cui la costante *a* vale 1.5 e γ è il gradiente di temperatura potenziale sopra il *TIBL*. La validità di questa relazione è limitata al caso in cui il profilo verticale della temperatura potenziale dell'aria sopra il mare aperto sia leggermente stabile (un valore tipico è 0.001 $K \cdot m^{-1}$). Sfortunatamente il bilancio radiativo superficiale all'interfaccia mare-aria è estremamente complicato e non presenta necessariamente un ben definito andamento diurno. Inoltre, questa relazione è di tipo diagnostico ed ignora completamente la *storia evolutiva* del *TIBL*.

Al di là dei limiti insiti nella derivazione della (9.18a), la sua applicazione risulta complicata dalla dipendenza piuttosto forte di $h(x)$ da γ (che, come detto, è un parametro difficile da determinare). Proprio per questo sono state prodotte anche relazioni derivate dalla (9.18a) in cui compare al posto di H_0 la differenza tra la temperatura del mare Θ_{01} e quella dell'aria sulla terraferma Θ_{02}, entrambe supposte costanti nello spazio (il che è un'enorme approssimazione in gran parte delle situazioni reali). Una di queste relazioni è quella proposta da Venkatram (1988):

$$h(x) = 1.7 \cdot \left(\frac{u_*}{U}\right)\left[\frac{(\Theta_{02} - \Theta_{01})x}{\gamma}\right]^{1/2} \qquad [9.18b]$$

di ancor più difficile applicazione pratica.

Un altro modello semplificato e verificato con estese sperimentazioni è quello proposto da Kerman e al. (1982) che può essere così sinteticamente descritto. Consideriamo una classica situazione di brezza di mare durante la quale il vento spira dal mare verso la terraferma e consideriamo poi un punto sulla terraferma distante *x* dalla linea di costa (distanza ovviamente misurata

lungo la direzione del vento). Perché sussista una situazione di brezza di mare è necessario che sulla terraferma si instauri una situazione convettiva e nel punto *x* il flusso turbolento di calore sensibile presenti un andamento variabile nel tempo $H_0(t)$ noto. Per comodità, invece di H_0, gli Autori hanno considerato il *Buoyancy Flux* B_0, definito come:

$$B_0 = \frac{g}{T} \cdot \frac{H_0}{\rho C_p} \qquad [9.19a]$$

Visto che $H_0(t)$ presenterà un valore massimo nell'arco delle ore convettive, anche B_0 mostrerà un massimo analogo e sincrono, che indicheremo come $(B_0)_{max}$. Se si utilizza una nuova scala dei tempi in cui *t* è il tempo contato a partire dall'inizio della convettività, al tempo *t* si avrà che:

$$I_B = \int_0^t B_0(t)dt \qquad [9.19b]$$

Questo integrale può anche essere scritto formalmente come:

$$I_B = (B_0)_{max} \qquad [9.19c]$$

da cui:

$$\tau = I_B/(B_0)_{max} \qquad [9.19d]$$

È possibile, a questo punto, definire un'*altezza effettiva* H_e, che avrà il significato di massima estensione verticale della perturbazione termica, nel modo seguente:

$$H_e = \sqrt{\frac{I_B}{N^2}} \qquad [9.19e]$$

dove *N* è la frequenza di Brunt Vaisala caratteristica del profilo termico sopra la superficie marina (che ricordiamo è almeno leggermente stabile). Premesso tutto ciò, il *TIBL* che si verrà a formare sopra la terraferma non potrà estendersi verticalmente all'infinito e a tal proposito gli Autori hanno ottenuto un'espressione per *l'altezza di equilibrio del TIBL* h_e, definita come:

$$h_e = \begin{cases} 1.8H_e\left(\frac{x}{U\tau}\right) & \text{per } \frac{x}{u\tau} < 1 \\ 1.8H_e & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad [9.20]$$

dove *U* è la velocità media del vento. Il primo commento su questa relazione diagnostica è che, a differenza delle relazioni di Venkatram (1988), qui si tiene conto della *storia*. Infatti, il tempo equivalente τ è legato al tempo *t* a cui si riferisce l'osservazione del *TIBL* e quindi alla *storia* di H_0 fino a *t* o meglio all'integrale di energia termica immesso nelle masse d'aria del *TIBL*. Risulta inoltre evidente come h_e dipenda non solo dal livello di convettività raggiunto sulla terraferma, ma anche dalla distanza dalla costa, cosa che si riscontra effettivamente nella realtà sperimentale.

In realtà non è detto che l'estensione verticale reale del *TIBL* raggiunga sempre la sua estensione massima d'equilibrio h_e così individuata. Per ottenerne un'espressione più realistica è opportuno definire una *distanza adimensionale* definita come:

$$\hat{x} = \frac{xw_*}{uh_e} \qquad [9.21a]$$

dove:

$$w_* = \left(\frac{I_B}{\tau}h_e\right) \qquad [9.21b]$$

A questo punto, gli Autori deducono con semplici ragionamenti l'estensione verticale reale del *TIBL* in funzione della distanza dalla linea di costa, ottenendo la relazione seguente:

$$h(x) = \begin{cases} 0.54h_e\hat{x}^{1/2} & \text{per } \hat{x} < 3.5 \\ h_e & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad [9.22]$$

Nel lavoro citato vengono mostrati i dati rilevati in due giornate differenti e da essi si può notare

come il *TIBL* sia stato rilevato fino a 25 km dalla costa, cioè fino al fronte della brezza di mare (che nel caso del luogo considerato dagli Autori è in realtà una brezza di lago).

9.2.2.2 Modelli di media complessità per la stima del TIBL

Ci sono molte (forse troppe) limitazioni nei modelli semplificati per la stima del *TIBL*: il fatto che sono tutti modelli diagnostici in cui è difficile introdurre la *storia* dell'immissione nel *TIBL* di H_0, che tutti dipendono in maniera critica dal gradiente termico verticale γ dell'aria al di sopra del *TIBL* e che tutti ipotizzano che sia il mare che la terraferma abbiano caratteristiche termiche omogenee. Inoltre, tutti ipotizzano che la linea di costa sia una retta perfetta. Quando mai possiamo dire di essere in queste condizioni! Qui di seguito presentiamo una serie di modelli che progressivamente eliminano queste limitazioni, pur non essendo modelli fluidodinamici completi del *PBL*, e che comunque, se ben impiegati, sono sempre in grado di trattare il problema del *TIBL* e delle sue caratteristiche termiche e meccaniche.

Modello 1

Il primo passo in questa direzione è costituito dal modello per la descrizione dell'evoluzione del *TIBL* proposto da Gryning e Batchvarova (1990b), che è un'ovvia estensione del modello *bulk* trattato precedentemente. La situazione considerata è ancora quella della **Fig. 9.15**. Il modello considera quindi una situazione in cui:

- al di sopra del *TIBL* il profilo verticale di temperatura potenziale presenta un gradiente medio pari a γ (comunque maggiore di zero) sostanzialmente coincidente col gradiente di temperatura potenziale che si riscontra al di sopra della superficie marina a quote dell'ordine di qualche centinaio di metri;
- sopra la terraferma il flusso turbolento di calore sensibile medio è pari a H_0 ed il valore medio delle *friction velocity* è pari a u_*. Noti questi valori ed il valore della temperatura media dell'aria sopra la terraferma risulta immediatamente identificabile il valore caratteristico della lunghezza di Monin-Obukhov L.

La teoria che sta alla base di questo modello non è molto differente da quella che ha condotto gli Autori all'individuazione dell'evoluzione temporale della sommità del *PBL* per il terreno omogeneo ed è la classica teoria dello *slab-model* che vede il profilo verticale della temperatura potenziale virtuale e della velocità del vento sostanzialmente costanti entro tutto il *TIBL*. Come tipico in questa teoria, questa volta oltre a tener conto dell'energia termica introdotta nel sistema da H_0, si tiene conto esplicitamente anche dell'energia meccanica introdotta, rappresentata da u_*. Rimandando per i dettagli al riferimento citato, il risultato finale è che l'altezza h del *TIBL* ad una distanza x dalla linea di costa è la soluzione dell'equazione seguente:

$$\frac{(u_h - Ru_*)}{1+2A}\cdot\left\{\frac{h^2}{2}+\frac{2BkL}{1+2A}h+\left(\frac{2BkL}{1+2A}\right)^2\cdot\ln\left(-\frac{1+2A}{2BkL}h+1\right)\right\}+\frac{Bu_*^2u_hT}{C\gamma g(1+A)} \cdot\ln\left(-\frac{1+A}{BkL}h+1\right)=\frac{H_0}{\rho C_p\gamma}x \qquad [9.23a]$$

in cui u_h è la velocità del vento alla quota h e le costanti numeriche A, B, C assumono rispettivamente i valori 0.2, 5, 1.3. Per quanto riguarda la quantità R, essa è data dalla relazione:

$$R=\frac{1-(1-16\,h/L)^{3/4}}{12k(h/L)} \qquad [9.23b]$$

La relazione (9.23a) e (9.23b) insieme producono un'equazione non lineare in h, che può essere risolta impiegando metodi numerici.

Il pregio di questo modello sta nel fatto che nella determinazione dell'estensione verticale

del *TIBL* si tiene conto non solo dei meccanismi convettivi, ma anche di quelli meccanici. Il problema, però, è che dipende in maniera drastica dal gradiente termico γ che deve obbligatoriamente sempre essere positivo. Inoltre, in comune con i modelli precedenti ha l'incapacità a raggiungere un'altezza di equilibrio a grandi distanze dalla linea di costa. Questo problema già l'abbiamo incontrato trattando le problematiche dell'*IBL* e come in quel caso possiamo dire che tutti i modelli presentati ed anche quelli che presenteremo hanno un dominio spaziale di applicabilità limitato. In questo caso è ragionevole supporre che la loro applicabilità cessi a distanze superiori a quelle raggiunte dal fronte della brezza di mare.

Modello 2

Il modello precedente è stato rivisto profondamente dagli Autori cui hanno ridato il carattere prognostico e a cui hanno attribuito la capacità di trattare sia linee di costa irregolari e non rettilinee, sia variazioni spaziali e temporali di H_0 e u_* sulla terraferma. Rimandando ai lavori originali per i dettagli (Gryning e Batchvarova, 1996; Batchvarova e al., 1999), la forma finale del modello prognostico è:

$$\left\{\frac{h^2}{(1+2A)h-2BkL}+\frac{Cu_*^2T}{\gamma g[(1+A)h]-BkL}\right\}\cdot\left(\frac{\partial h}{\partial t}+U\frac{\partial h}{\partial x}+V\frac{\partial h}{\partial y}-w_s\right)=\frac{H_0}{\rho C_p\gamma} \qquad [9.24]$$

dove le costanti *A*, *B* e *C* assumono rispettivamente i valori seguenti: 0.2, 5, 8. Questo modello è finalmente completo ed adatto ad essere impiegato nelle situazioni reali, ma essendo differenziale richiede una soluzione numerica. Gli Autori hanno poi mostrato come le stime dell'estensione verticale del *TIBL*, ottenute integrando numericamente questo modello in una realtà molto complessa in cui conviveva sia il *TIBL* sia la presenza di orografia, fossero sostanzialmente coincidenti con le stime ottenute impiegando direttamente un modello completo di *PBL*. L'unico problema rimasto sta nel fatto che il modello richiede inderogabilmente che γ sia sempre maggiore di zero.

Modello 3

Finalmente anche la problematicità insita nella presenza del gradiente termico γ è stata eliminata grazie al lavoro di Luhar (1998). Rimandando al lavoro citato per i dettagli, il nocciolo dell'idea è stata una nuova parametrizzazione del flusso di calore turbolento all'interfaccia superiore del *TBL*. Il risultato finale che si ottiene può essere presentato in due forme diverse a seconda delle approssimazioni che si intendono introdurre.

Se si ipotizzano situazioni stazionarie, allora l'intero modello, piuttosto complicato e costituito da un certo numero di equazioni differenziali, si riduce alla complessa forma algebrica:

$$\frac{\overline{w\theta}_0\gamma(3+2C_K)}{3C_K\delta}\left[-\frac{\beta}{\alpha^2}(h-h_0)+\frac{\beta^2}{\alpha^3}ln\left(\frac{\alpha h+\beta}{\alpha h_0+\beta}\right)+\frac{1}{2\alpha}\left(h^2-h_0^2\right)\right] + \left[(h+\eta)^{2/3}-\frac{(h_0+\eta)^{\frac{2}{3}+\frac{1}{C_K}}}{(h+\eta)^{1/C_K}}\right]=\left(\frac{3+2C_K}{3C_T}\right)\cdot\left(\frac{g}{T}\overline{w\theta_0}\right)^{1/3}\frac{x}{U} \qquad [9.25a]$$

dove:

$$\alpha=\overline{w\theta}_0(1+2C_K)$$
$$\beta=2C_KC_N^3u_*^3T/g$$
$$\delta=\left(\overline{w\theta}_0\,T/g\right)^{1/3} \qquad [9.25b]$$
$$\eta=C_N^3u_*^3\,T/\left(g\overline{w\theta}_0\right)$$

Alle costanti C_N, C_K e C_T presenti nella relazione è stato attribuito rispettivamente il valore 0.33, 0.18, 0.8, mentre h_0 è lo spessore iniziale del *TIBL*. Questa equazione, a differenza delle precedenti, non richiede la positività di γ.

Martano (2002) ha utilizzato la struttura del modello di Luhar (1998) per renderlo capace

di trattare ogni possibile disomogeneità spaziale ed ogni variabilità temporale. Prendendo anche spunto dal lavoro di Steyn e Oke (1982), il metodo si basa sull'integrazione numerica e diretta dell'equazione base del modello di Luhar (1998):

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} + U\frac{\partial h}{\partial x} + V\frac{\partial h}{\partial y}\right) = \frac{C_K w_m^3}{C_T w_m^2 + gh\,\Delta/T} \qquad [9.26a]$$

assieme alle equazioni ausiliarie:

$$w_m^3 = w_*^3 + C_N u_*^3 \qquad [9.26b]$$

$$\Delta = \frac{\gamma h(C_K h - C_K C_N^3 kL)}{(1+2C_K)h - 2C_K C_N^3 kL} + \Delta_{\gamma=0} \qquad [9.26c]$$

$$\Delta_{\gamma=0} = \frac{3\delta C_K}{(3+2C_K)}\left[-\frac{(h+\eta)^{2/3}}{h} + \frac{(h_0+\eta)^{(2/3)+(1/C_K)}}{h(h+\eta)^{1/C_K}}\right] \qquad [9.26d]$$

In sostanza, consideriamo un dato istante t_i in cui sia nota l'estensione verticale del *TIBL* h_i. Se vogliamo ottenere h_{i+1}, all'istante $t_{i+1} = t_i + \Delta t$, per prima cosa poniamo $h_0 = h_i$, cioè h_i è il valore iniziale per il *time step* che stiamo considerando. Una volta nota la distribuzione nello spazio di H_0 e u_* relativi all'intervallo temporale che stiamo considerando, calcoliamo la distribuzione nello spazio di h impiegando la relazione diagnostica (9.25a). Così facendo abbiamo ottenuto una buona approssimazione per $h(x,y)$ che viene impiegata nelle equazioni (9.26b,c,d). A questo punto è possibile integrare numericamente la relazione differenziale (9.26a) che ci fornisce finalmente la distribuzione spaziale $h(x,y)$ relativa all'istante t_{i+1}.

9.3 SUPERFICI COPERTE DALLA VEGETAZIONE

Gran parte delle terre emerse sono ricoperte dalla vegetazione che si presenta in forme e dimensioni diverse a seconda della latitudine e del grado di urbanizzazione. La vegetazione presente sulla superficie terrestre è la più varia. La foresta dell'Amazzonia è il primo tipo di vegetazione a cui pensiamo vista la sua estensione ed importanza climatica, ma altrettanto estese ed importanti sono le grandi foreste del Nord Europa e del Nord America, la estese piantagioni in varie parti del mondo ed i grandi parchi cittadini. Siamo di fronte sia a vegetazione a sviluppo verticale ridotto, come le coltivazioni di cereali e di erba, sia vegetazione ad alto fusto come le foreste pluviali o le grandi foreste tipiche delle alte latitudini. La presenza della vegetazione è un elemento che può recare perturbazioni profonde al *PBL* sovrastante ed indurre alterazioni climatiche, fondamentali per la vista della Terra.

Il tema è estremamente complesso ed affascinante e di fatto è ciò di cui si occupa un'affascinante branca della Meteorologia nota come Agrometeorologia e non sarà possibile qui trattarlo in maniera sufficientemente estesa. Quindi nei punti che seguono ci limiteremo ad una breve presentazione sull'argomento, ampiamente basata su Oke (1987). Utile riferimento per approfondimenti soprattutto modellistici è il libro di Gross (1993).

9.3.1 CARATTERISTICHE GENERALI

Una superficie con copertura vegetale (erba, piante e vegetazione in genere) rappresenta un sistema molto complesso non solo dal punto di vista geometrico, ma anche per il fatto che gli elementi strutturali presenti sulla superficie terrestre (foglie, fiori, tronchi, ecc.) interagiscono con l'ambiente esterno in maniera decisamente *attiva*. Per studiare *globalmente* un tale sistema è conveniente individuare un volume di controllo costituito superiormente da una superficie che rappresenti l'inviluppo superiore di tutta la vegetazione ed una superficie inferiore posta nel

sottosuolo ad una profondità in cui sia praticamente nullo il flusso verticale di calore. Ciò è rappresentato schematicamente nella **Fig. 9.17**.

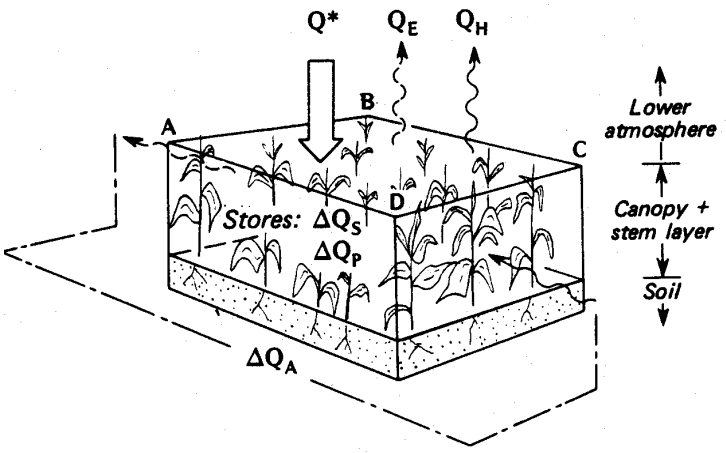


Fig. 9.17: volume di controllo per il bilancio energetico globale di una copertura vegetale.

Il bilancio energetico semplificato di questo sistema (visto nel suo complesso senza dettagliare i singoli componenti della copertura vegetale) è dato da:

$$R_N = H_0 + H_E + \Delta Q_S + \Delta Q_P + \Delta Q_A \qquad [9.27]$$

in cui:

- il termine ΔQ_S è lo *storage fisico di calore*, cioè l'assorbimento o il rilascio di calore dall'aria, dal suolo e dalla biomassa vegetale presente (foglie, rami, fusti, ecc.);
- il termine ΔQ_P rappresenta lo *storage biochimico* e rappresenta il calore necessario per assimilare la CO_2 mediante il processo di *fotosintesi*;
- il termine ΔQ_A, spesso trascurabile, rappresenta il trasporto orizzontale di calore causato dalla geometria e dalla struttura fisica dell'ambiente circostante il volume di riferimento.

Se si trascura il termine avvettivo, il bilancio energetico indicato rappresenta il flusso verticale di calore attraverso la superficie *ABCD* di **Fig. 9.17**.

L'elemento attivo presente in una superficie coperta dalla vegetazione è proprio il comportamento della vegetazione dal punto di vista *biochimico*, comportamento che può essere sintetizzato attraverso il processo di *fotosintesi* in base al quale, almeno in prima approssimazione, la disponibilità di CO_2, di H_2O e di radiazione ad onda corta determina la creazione di carboidrati (CH_2O) e quindi l'accrescimento della pianta, secondo la relazione approssimata:

$$CO_2 + H_2O + luce \rightarrow CH_2O + O_2 \qquad [9.28a]$$

Ipotizziamo che P ($g\cdot(m^2\,h)^{-1}$) sia il tasso di assimilazione di CO_2 causato dalla fotosintesi. Oltre all'assorbimento di CO_2 dovuto alla fotosintesi, c'è anche da tener conto del fenomeno noto come *respirazione*, secondo cui il vegetale consuma (brucia) carboidrati per restituire all'aria CO_2, secondo la relazione approssimata seguente:

$$CH_2O + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O + energia\ di\ combustione \qquad [9.28b]$$

Ipotizziamo che R sia il tasso di perdita di CO_2 dovuto alla respirazione. Quindi il *tasso netto di fotosintesi* è pari a:

$$\Delta P = P - R \qquad [9.28c]$$

ed il calore per unità di tempo coinvolto nel processo fotosintetico è quindi dato da:

$$\Delta Q_P = \Phi \cdot \Delta P \qquad [9.28d]$$

dove Φ è il calore di assimilazione del carbonio, pari a circa 3.2 $W \cdot m^{-2}$ per $g \cdot (m^2 h)^{-1}$ di CO_2.

Durante le ore diurne, P è maggiore di R, cioè $\Delta P > 0$ e quindi la vegetazione rappresenta un *utilizzatore di* CO_2. Come ordine di grandezza, a valori massimi di 2÷5 $g \cdot (m^2 h)^{-1}$ per ΔP, corrisponde un ΔQ_P di 6÷16 $W \cdot m^{-2}$. Durante le ore notturne, invece, ΔP risulta negativo e quindi la vegetazione diventa *una sorgente di* CO_2. L'ordine di grandezza del valore notturno è pari a circa 1 $g \cdot (m^2 h)^{-1}$ e quindi ΔQ_P risulta pari a circa -3 $W \cdot m^{-2}$. Da quanto si è visto il termine ΔQ_P non è molto elevato e spesso lo si può trascurare nel bilancio di energia, anche se la sua influenza risulta fondamentale da altri punti di vista.

Il mezzo impiegato dalla vegetazione per realizzare questo scambio di CO_2 è rappresentato dagli *stomi*, cioè da particolari pori presenti sulle foglie. Nella **Fig. 9.18** viene schematicamente rappresentato tutto ciò, mentre nella **Fig. 9.19** viene mostrato un forte ingrandimento di uno stoma.

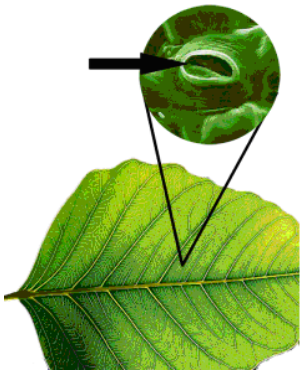


Fig. 9.18: una foglia e gli stomi (www.evolution.berkley.edu)

Fig. 9.19: ingrandimento di due particolari stomi sopra una foglia (oceanacudufucationblog.wordpress.com)

La dimensione longitudinale dei singoli stomi è dell'ordine di 10÷30 μm e quella trasversale, nelle ore diurne quando gli stomi sono aperti, è dell'ordine di 10 μm, mentre di notte, quando restano chiusi, è nulla. La loro densità è pari a 50÷500 $stomi \cdot mm^{-2}$ di foglia e, quando sono aperti, l'area da essi occupata è pari a circa 0.3÷1% dell'intera area fogliare. Per alcuni tipi di piante gli stomi sono presenti su entrambe le superfici delle foglie, mentre per altre lo sono solo sulla superficie inferiore. La loro funzione è quella di *valvole di regolazione* nel processo di trasferimento di H_2O e CO_2 tra la pianta e l'atmosfera. In effetti, all'alba le *cellule di guardia* presenti negli stomi registrano la presenza di radiazione ad onda corta e comandano l'apertura degli stomi. A questo punto gli stomi presentano all'aria la loro superficie interna dove realizzano l'assorbimento

di CO_2 ed il rilascio di H_2O. Pertanto l'evaporazione di acqua (*traspirazione*) è una conseguenza inevitabile della fotosintesi. Il grado di apertura degli stomi dipende dall'intensità luminosa, dalla temperatura ambiente e dalla concentrazione di CO_2. Quando la luce diviene insufficiente oppure quando il contenuto di acqua della pianta è molto basso a causa di un'eccessiva traspirazione della pianta stessa (*stress idrico* della pianta), le cellule di guardia chiudono gli stomi impedendo la fotosintesi e la traspirazione e quindi regolando gli scambi di massa con l'esterno. Questo meccanismo di regolazione fa dell'attività stomatica un potente agente regolatore del clima.

Anche la forma geometrica della vegetazione riveste un ruolo importante negli scambi con l'aria circostante. Le forme possibili sono tantissime. Se consideriamo per esempio prati e colture di cerali, la vegetazione può essere vista come uno strato omogeneo sulla verticale. Viceversa, colture di mais, girasole, patate e molti alberi presentando le foglie prevalentemente nella parte alta delle piante determinano una *canopy layer* cioè uno strato di aria sotto le fronde, con caratteristiche fisiche molto differenti dall'aria sovrastante. Quindi l'atmosfera sopra il suolo si divide in due strati principali, uno sotto le fronde della vegetazione (la *canopy layer*) e la parte sopra le fronde. Nel caso delle foreste tropicali, la struttura della vegetazione è tale da definire diversi *canopy layer* sovrapposti.

Se consideriamo il profilo verticale della velocità del vento sopra la vegetazione in una situazione quasi adiabatica, notiamo che ancora una volta vale la solita legge logaritmica:

$$u_z = \frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{z-d}{z_0}\right) \qquad [9.29]$$

dove *d* è lo *zero plane displcement height* già introdotto al Cap. 8, dell'ordine di 2/3 l'estensione verticale della vegetazione. Un profilo di questo tipo è presentato in **Fig. 9.20**. Da essa si nota come il vento si annullerebbe alla quota $d + z_0$. Questa è un'utile approssimazione ogni volta che non è importante tener conto del dettaglio a piccola scala rappresentato da una *canopy* vegetale. Nella realtà il profilo verticale del vento entro il *canopy* presenterà un andamento ben diverso da quello logaritmico che però si raccorderà gradualmente col profilo logaritmico, innalzandosi sopra la copertura vegetale.

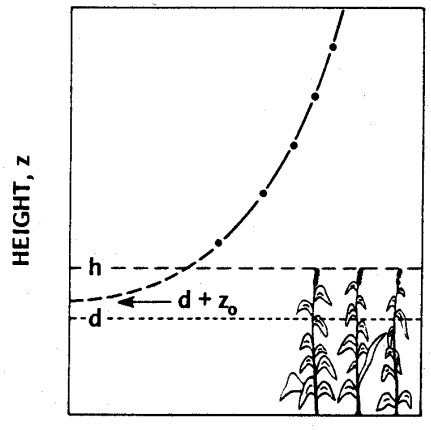


Fig. 9.20: il profilo verticale del vento e lo zero plane displacement height (Oke,1987)

Analogo comportamento presentano anche il profilo di temperatura media, di umidità media e di concentrazione media di CO_2.

9.3.2 LA SPECIFICITÀ DELLE FOGLIE

Per studiare più nel dettaglio la copertura vegetale è necessario studiarne approfonditamente l'elemento base che è la foglia. L'analisi energetica relativa alle foglie prende le mosse dalle loro proprietà ottiche ed in particolare dal coefficiente di riflessione, trasmissione ed assorbimento riportati nella **Fig. 9.21** in funzione della lunghezza d'onda della radiazione incidente. Da questa

figura si vede come si abbia un massimo relativo di assorbimento per una radiazione ad onda corta nell'intervallo spettrale 0.4÷0.7 μm (blu–rosso) ed a questo assorbimento corrisponda l'assorbimento energetico necessario per alimentare il processo di fotosintesi. Per questo la radiazione appartenente a questa finestra spettrale prende il nome di *PAR* (*Photosyntetically Active Radiation*) e rappresenta l'energia che la pianta decide di impiegare a proprio profitto. All'interno di questo intervallo spettrale c'è un picco di riflettività corrispondente al verde, ragione questa della colorazione verde che caratterizza gran parte della vegetazione. Se però consideriamo la parte infrarossa dello spettro, o meglio il *vicino infrarosso* (*NIR*, corrispondente all'intervallo 0.71÷4.0 μm), vediamo che la riflessione è molto elevata e l'assorbimento è basso. Ciò sta a significare che la foglia rifletterà la maggior parte della radiazione *NIR*, lasciando il calore corrispondente all'ambiente e mantenendo nel contempo moderata la propria temperatura superficiale.

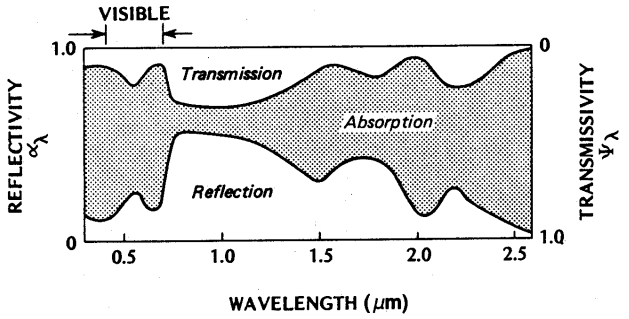


Fig. 9.21: coefficiente di trasmissione, riflessione ed assorbimento di una foglia (Oke,1987).

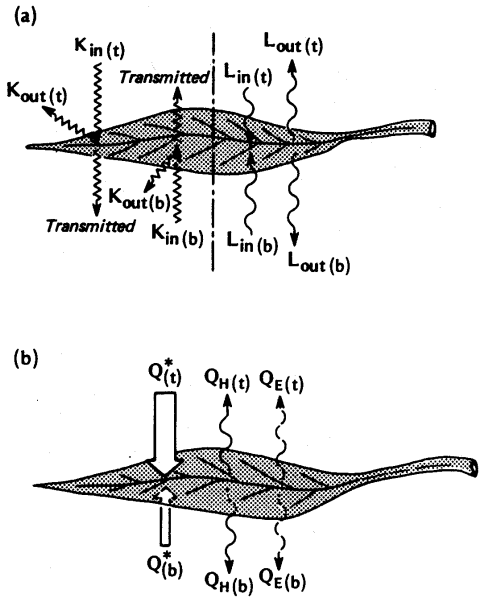


Fig. 9.22: bilancio radiativo ed energetico di una foglia (Oke,1987).

In pratica, facendo riferimento alla **Fig. 9.22**, è ora possibile definire il bilancio radiativo ed energetico. Questi bilanci, che dettagliano gli analoghi bilanci presentati al paragrafo precedente, sono complicati dal fatto che le foglie presentano due superfici attive orientate in direzioni opposte. Nella parte (*a*) della Figura sono evidenziati i vari contributi presenti nel bilancio radiativo ed in particolare il contributo ad onda corta (indicati con la lettera *K* e con il pedice *t* per indicare che il termine si riferisce alla superficie superiore e con il pedice *b* quando si riferisce alla superficie inferiore) ed il contributo ad onda lunga (indicati con la lettera *L* ed i pedici hanno lo stesso significato già indicato). Nella parte (*b*) della **Fig. 9.22**, è presentato invece il bilancio di energia. In tale figura con il simbolo Q_* si è indicata la somma della radiazione ad onda corta

e ad onda lunga, con Q_H i flussi di calore sensibile e con Q_E i flussi di calore latente. Se ignoriamo ora i termini di importanza limitata e se impieghiamo la solita simbologia, il bilancio di energia per una foglia può essere così espresso:

$$(R_N)_{foglia} = (H_0)_{foglia} + (H_E)_{foglia} \qquad [9.30]$$

Spesso è comodo esprimere il flusso di calore sensibile impiegando il concetto di *resistenza alla diffusione del calore* r_b. In questo caso il flusso turbolento di calore sensibile relativo ad una singola foglia può essere espresso come:

$$(H_0)_{foglia} = \rho C_p\,(T_0 - T_a)/r_b \qquad [9.31]$$

dove T_0 è la temperatura superficiale della foglia e T_a è la temperatura dell'aria. Quindi dalle due relazioni precedenti si ha che:

$$T_0 = T_a + \frac{r_b}{\rho C_p}\left((R_n)_{foglia} - (H_E)_{foglia}\right) \qquad [9.32]$$

Questa relazione è estremamente interessante per le ragioni seguenti:

- la temperatura dell'aria è fondamentale nel determinare la temperatura della foglia;
- il fatto che la temperatura della foglia sia inferiore o superiore a quella dell'aria, dipende dalla differenza tra la radiazione netta ed il flusso latente;
- la resistenza alla diffusione del calore è un parametro di controllo importante. Se il suo valore è piccolo, la temperatura della foglia sarà fortemente accoppiata alla temperatura dell'aria.

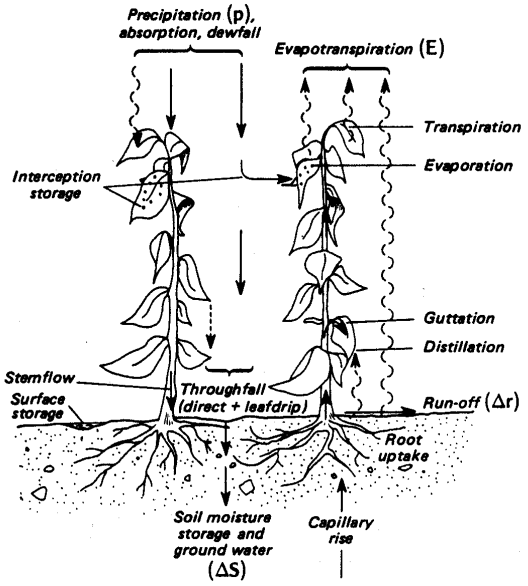


Fig. 9.23: meccanismi di cattura ed immagazzinamento dell'acqua (Oke,1987)

9.3.3 PIANTE, COLTIVAZIONI, FRUTTETI E FORESTE

I meccanismi cui abbiamo accennato parlando delle foglie prese singolarmente sono sicuramente complessi, ma non così complessi come i meccanismi che regolano il bilancio radiativo ed energetico che si ha quando le foglie si compongono in piante, coltivazioni, frutteti e foreste. La difficoltà principale è data dal fatto che in una struttura vegetale complessa le foglie si dispongono in geometrie complicate ed apparentemente casuali, difficili da descrivere.

Per quanto riguarda le coltivazioni e comunque i vegetali con limitato sviluppo superficiale, la prima cosa che stupisce è la complessità con cui la coltivazione cattura l'acqua, elemento vitale per la sua crescita. Rimandando per i dettagli a Oke (1987), vale la pena mostrare la **Fig.9.23** in cui sono indicati i vari meccanismi messi in atto dalla coltivazione per catturare e conservare l'acqua.

Per quanto riguarda, invece, i flussi di CO_2, si può far riferimento alla **Fig. 9.24**, in cui sono presentati i valori orari del flusso di CO_2 nei vari mesi dell'anno che rappresentano altrettanti livelli di crescita di un prato. Come si può vedere dalla figura (in cui il flusso di CO_2 è considerato positivo se passa dall'aria alla pianta), si hanno flussi ascendenti (rilasci di CO_2 da parte della vegetazione) nelle ore notturne, per la respirazione della vegetazione, mentre i flussi sono diretti verso la vegetazione (assorbimento di CO_2 per fotosintesi) durante le ore diurne. Le diversità stagionali sono legate alla disponibilità di acqua nel suolo; se il suolo è povero di acqua e la coltivazione anche (stress idrico) e se la temperatura delle foglie della vegetazione è alta, la fotosintesi viene ridotta e si riduce di conseguenza anche il flusso di CO_2.

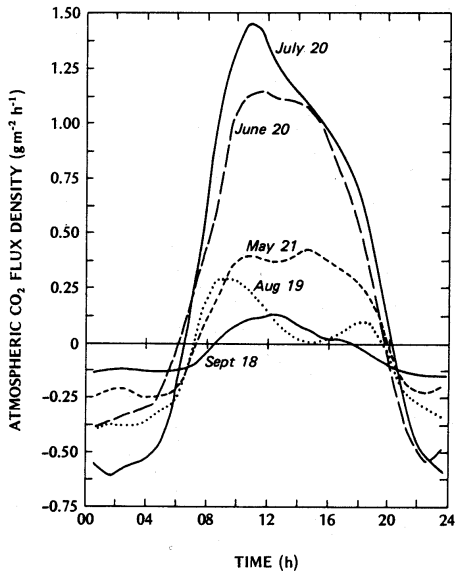


Fig. 9.24: flussi orari di CO_2 nei vari mesi e in diversi stadi di crescita di un prato (Oke, 1987.

Prima di descrivere il bilancio radiativo della vegetazione, è necessario quantificare in qualche modo la sua superficie attiva che è costituita dalle foglie. A tal fine è stata introdotta la *densità areale delle foglie* (*leaf area density*) che rappresenta la densità del fogliame in m^2 di superficie fogliare per m^3 di volume. A causa della struttura tridimensionale della pianta, questo parametro è funzione dello spazio. L'integrale verticale della densità areale fogliare è l'*indice di area fogliare* (*leaf area index* LAI) che rappresenta il rapporto tra l'area totale di tutte le foglie e la proiezione orizzontale della sezione di albero. Per fornire un ordine di grandezza dell'indice *LAI*, nella **Tab. 9.1** vengono presentati alcuni valori tipici.

Tipo di vegetazione	***LAI*** (m^2m^{-2})	
	Moda	*Range*
Foresta pluviale tropicale	8	6-16
Foresta stagionale	5	3-12
Foresta temperata sempreverde	12	5-14
Foresta boreale	12	7-15
Boscaglia secca	4	4-12
Savana	4	1-5
Coltivazioni agricole	4	4-12

Tab. 9.1: Leaf-Area-Index per differenti tipi di vegetazione (da Gross, 1993)

Se consideriamo il bilancio radiativo, va rilevato come la radiazione globale diminuisca con l'abbassarsi entro la vegetazione, seguendo la legge di *Beer*, in cui il fattore di estinzione risulta proporzionale all'integrale di tutta la superficie fogliare presente nel volume di controllo, cioè al *LAI*. Comportamento analogo presenterà anche la Radiazione Netta, (**Fig. 9.25**).

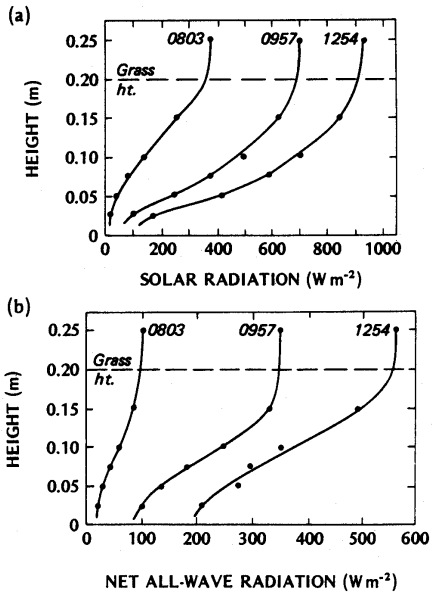


Fig.9.25: variazione della radiazione globale e netta entro la vegetazione

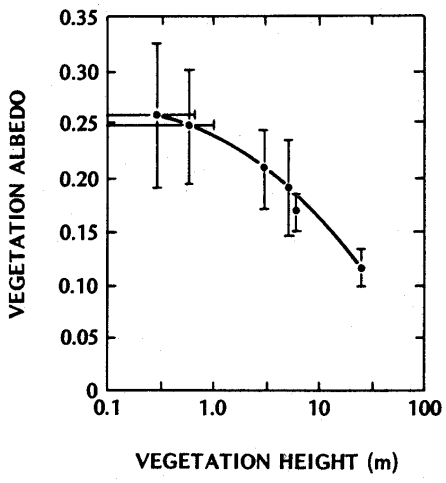


Fig. 9.26: coefficiente di albedo in funzione dell'altezza media della coltivazione (Oke, 1987)

Se complessa è la trasmissione di radiazione globale all'interno della vegetazione, altrettanto complessa è la sua riflessione, quantificata globalmente dal coefficiente di albedo il cui valore globale presenta una diminuzione con l'aumentare dell'altezza della coltura (**Fig. 9.26**), col tipo di coltura e con l'angolo di elevazione solare (**Fig. 9.27**).

Alla luce di quanto fin qui considerato, nella **Fig.9.28** viene presentato un tipico bilancio radiativo (parte *a*) ed un tipico bilancio energetico (parte *b*). Senza entrare nei dettagli, l'elemento che più desta interesse è l'elevato valore del flusso turbolento di calore latente che, a volte nel pomeriggio, risulta addirittura superiore alla Radiazione Netta.

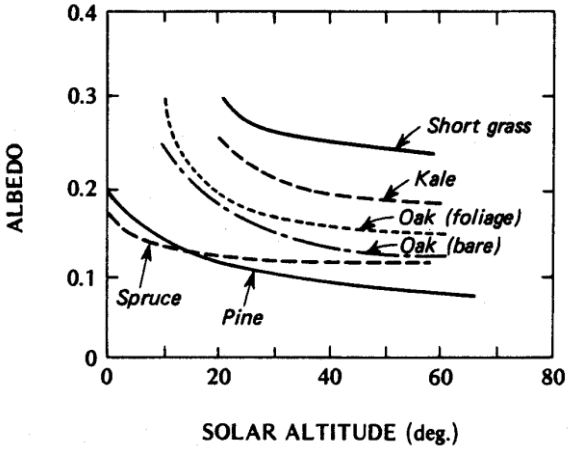


Fig. 9.27: variazione del coefficiente di albedo col tipo di coltivazione e con l'angolo di elevazione solare (Oke, 1987)

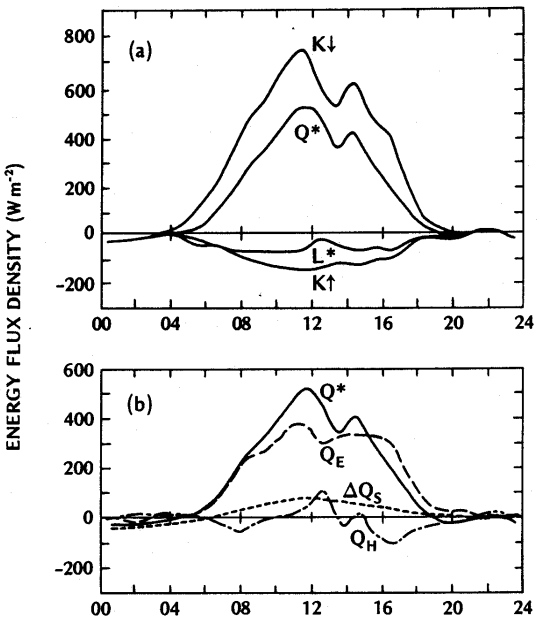


Fig. 9.28: bilancio radiativo ed energetico per una coltivazione (Oke, 1987)

Se ora consideriamo le foreste ed i boschi, notiamo alcune caratteristiche che le distinguono dalle coltivazioni in generale:

- normalmente foreste e boschi presentano chiome vegetali molto dense e vicine tra loro che costituiscono quasi uno strato vegetale aereo continuo, al di sotto del quale si localizza una zona di aria relativamente libera tra i tronchi, disposti in maniera abbastanza regolare;
- la quantità di biomassa presente è notevole e ciò incrementa gli *storage* termici.

Per quanto riguarda gli scambi radiativi, la zona interessata è quella della chioma della foresta, mentre la zona dei tronchi riveste un'importanza minore. Schematicamente, dal punto di vista degli scambi radiativi, un bosco può essere visto come uno strato *aereo* con un ben preciso confine superiore e inferiore come mostrato in **Fig. 9.29**. Questa geometria determina una drastica

riduzione della radiazione ad onda corta che raggiunge il suolo (come si vede in **Fig.9.30)** ed inoltre un intrappolamento di radiazione ad onda lunga emessa dalla base della chioma.

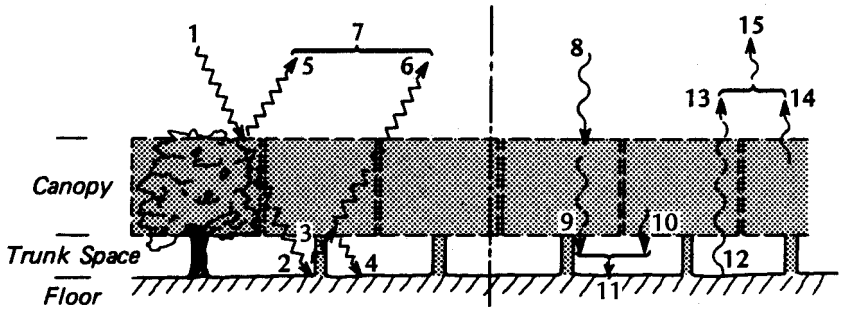


Fig. 9.29: rappresentazione schematica di un bosco (*Oke, 1987*)

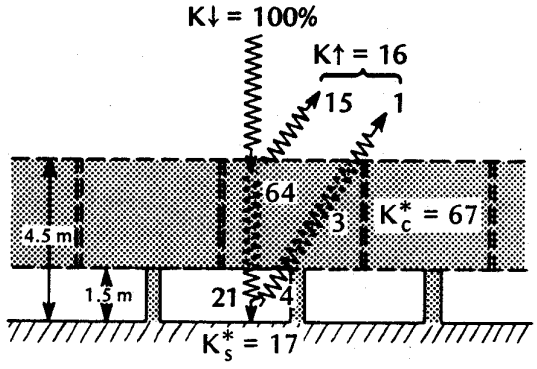


Fig. 9.30: i flussi di radiazione ad onda corta (*Oke,1987*)

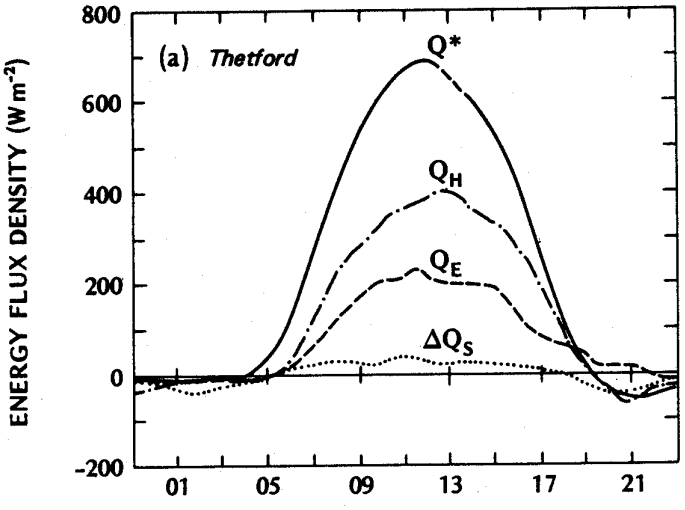


Fig.9.31: tipico bilancio energetico per una foresta (Oke, 1987)

Per quanto riguarda, invece il bilancio energetico, non è facile determinare un andamento generale. L'unica cosa che si può dire è che normalmente il flusso turbolento di calore latente risulta superiore al sensibile, come si può vedere nella **Fig. 9.31**.

9.3.4 *FLUSSI SOPRA LA VEGETAZIONE*

Se consideriamo i profili verticali delle principali variabili meteorologiche medie e degli altri indicatori della turbolenza del *PBL* (come per esempio le varianze), notiamo che, detto h_c l'estensione media verticale della vegetazione, a quote superiori a $2 \div 3h_c$ (quest'ultimo valore è consigliato da Kaimal e Finnigan, 1994) la situazione è quella normalmente incontrata nel *PBL* con un suolo nudo e senza vegetazione e quindi sono del tutto applicabili le relazioni di Similarità di Monin-Obukhov per il *SL*, purché in queste relazioni si sostituisca la quota *z* con la *quota ridotta* (*z*-*d*). Va rilevato che anche in questo caso, nei profili verticali della velocità media del vento, della temperatura potenziale (virtuale) e dell'umidità compariranno rispettivamente le lunghezze di rugosità z_0, z_h e z_q che esprimono la capacità della *canopy vegetale* di assorbire o emettere rispettivamente quantità di moto, calore ed umidità.

È interessante però considerare, almeno qualitativamente, come varia z_0 con la struttura della vegetazione. Se immaginassimo di avere inizialmente un suolo nudo e di inserirvi un numero sempre crescente di alberi con ampia chioma, z_0 aumenterebbe fino al punto in cui le chiome si incominceranno ad unire tra loro, dopo di che questo aumento cesserà perché si instaurerà un *effetto di schermo* che riduce la capacità individuale delle piante di assorbire quantità di moto. Il valore massimo assunto da z_0 sarà prossimo a $h_c/5$.

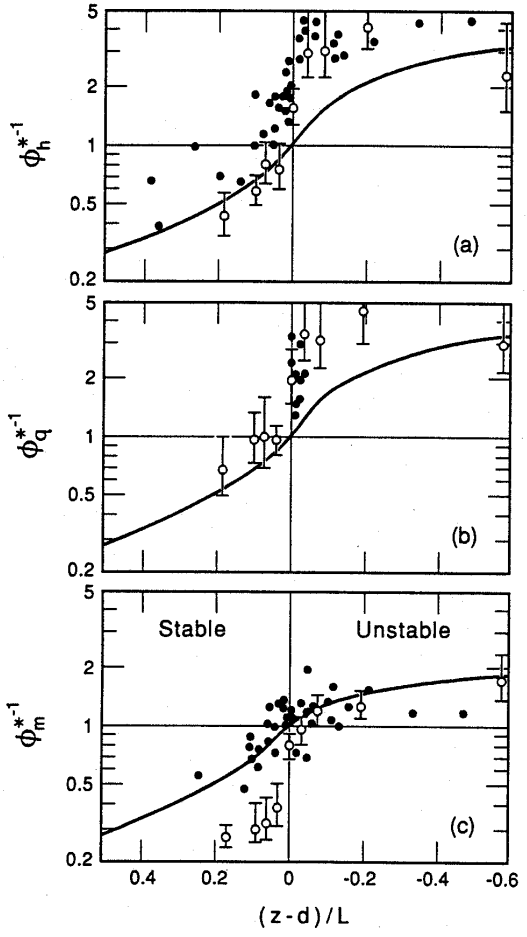


Fig 9.32: Coefficienti di diffusione turbolenta misurati e previsti dalla teoria della Similarità (Shuttleworth, 1989)

Se alle quote superiori a $3h_c$ il profilo verticale delle principali variabili meteorologiche segue le relazioni di Similarità, alle quote tra h_c e $3h_c$ la situazione che si viene a creare è una situazione di *transizione*, nel senso che si nota un lento scostarsi dei profili dal loro comporta-

mento tipico entro il *SL* verso una situazione molto più complessa, tipica dello strato di aria esistente all'interno della vegetazione. Il sintomo più importante che si riscontra è l'aumento dei coefficienti di diffusione turbolenta K_m, K_h e K_q, rispetto ai valori previsti dalla Similarità e pari rispettivamente a $[ku_*(z-d)\cdot\Phi_m^{-1}]$, $[ku_*(z-d)\cdot\Phi_h^{-1}]$ e $[ku_*(z-d)\cdot\Phi_q^{-1}]$, come si può vedere nella **Fig. 9.32** dove sono raccolti i valori misurati in questo strato in alcune campagne sperimentali, messi a confronto con gli andamenti teorici dedotti dalla Similarità.

9.3.5 LA SITUAZIONE ENTRO LA CANOPY VEGETALE

Da quanto appena detto ci si deve aspettare che la situazione entro la *canopy* sia molto diversa da quella prevista dalla Similarità. Dato che la copertura vegetale può essere la più varia, è conveniente considerare la situazione più studiata, rappresentata da foreste abbastanza omogenee con chioma alta, visto che sperimentalmente si è constatato che una tale situazione è abbastanza rappresentativa anche di coltivazioni di mais e di cereali. Prendiamo in considerazione inizialmente il profilo verticale del vento medio, della covarianza $\overline{uw}$ (ovviamente in coordinate *stream-line*) e delle varianze σ_u e σ_w. Prima di analizzare i risultati disponibili è necessario fare alcune considerazioni sopra il concetto di media. Vista la disomogeneità spaziale esistente entro la *canopy* vegetale, la media da adottare più che una media temporale deve essere una media spaziale: in pratica, ad ogni quota *z* entro la *canopy*, si individuerà uno strato sottile di aria parallelo al terreno che si estenderà orizzontalmente in modo da comprendere parecchie piante, come mostrato nella **Fig. 9.33**. Quindi il *volume di mediazione* considerato sarà costituito solo dal volume di aria libera, cioè dal volume totale dello strato cui viene sottratto il volume occupato dai tronchi degli alberi.

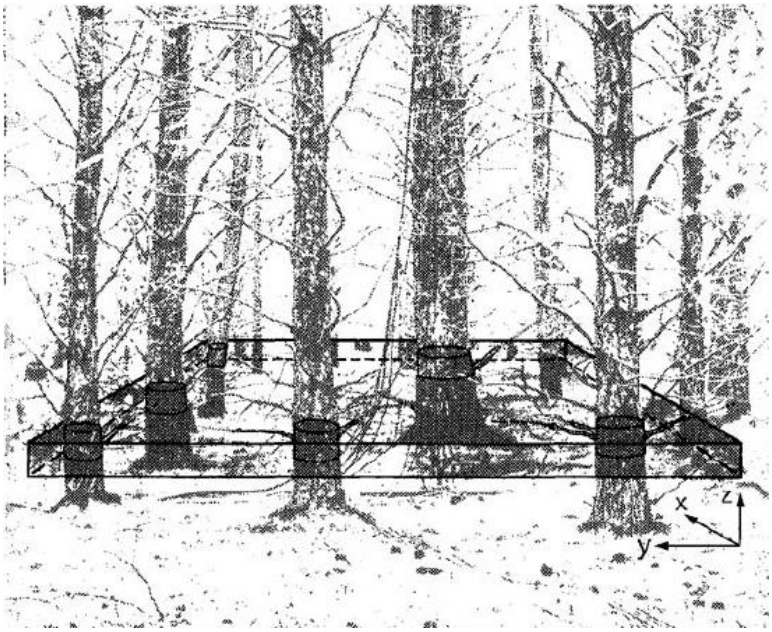


Fig. 9.33: volume di mediazione per le variabili micrometeorologiche entro la canopy vegetale (Kaimal e Finnigan, 1994)

Consideriamo ora la **Fig.9.34**, in cui sono stati organizzati alcuni dei dati ottenuti da diverse campagne sperimentali relativi sia alla velocità media del vento, che alla quantità di moto ed alle deviazioni standard orizzontali e verticali. Nella parte (*a*) della figura viene mostrato il profilo verticale della velocità media del vento normalizzata rispetto all'analoga velocità media al limite superiore della *canopy* $u(h_c)$ in funzione della quota normalizzata z/h_c. Ciò che si nota

immediatamente è che il profilo non è di tipo logaritmico. Entro la *canopy* e al di sopra della quota $z/h_c = 0.5$ tale profilo può essere approssimato dalla relazione:

$$\frac{u}{u(h_c)} = exp[-\nu_e(1 - z/h_c)] \qquad [9.33]$$

dove ν_e è il *coefficiente di estinzione*, proporzionale all'area occupata dalle foglie degli alberi nell'intera *canopy*. Se poi consideriamo la parte (*b*) della figura dove è riportato il profilo verticale della covarianza $\overline{uw}$ normalizzata rispetto al valore assunto ad h_c, notiamo che la quantità di moto è quasi completamente assorbita dalla porzione superiore della copertura vegetale. Al di sotto della quota h_c, la quantità di moto diminuisce molto rapidamente annullandosi nei pressi del suolo e ciò indica quanto la turbolenza entro la *canopy* sia disomogenea. Se ora consideriamo le varianze σ_u e σ_w, notiamo che esse decrescono con l'abbassarsi entro la *canopy*; alla quota h_c esse però non presentano il valore tipico adiabatico previsto dalla Similarità ($2.5u_*$ e $1.25u_*$ rispettivamente) ma valori inferiori che lentamente raggiungono i valori canonici solo al di sopra di $3h_c$.

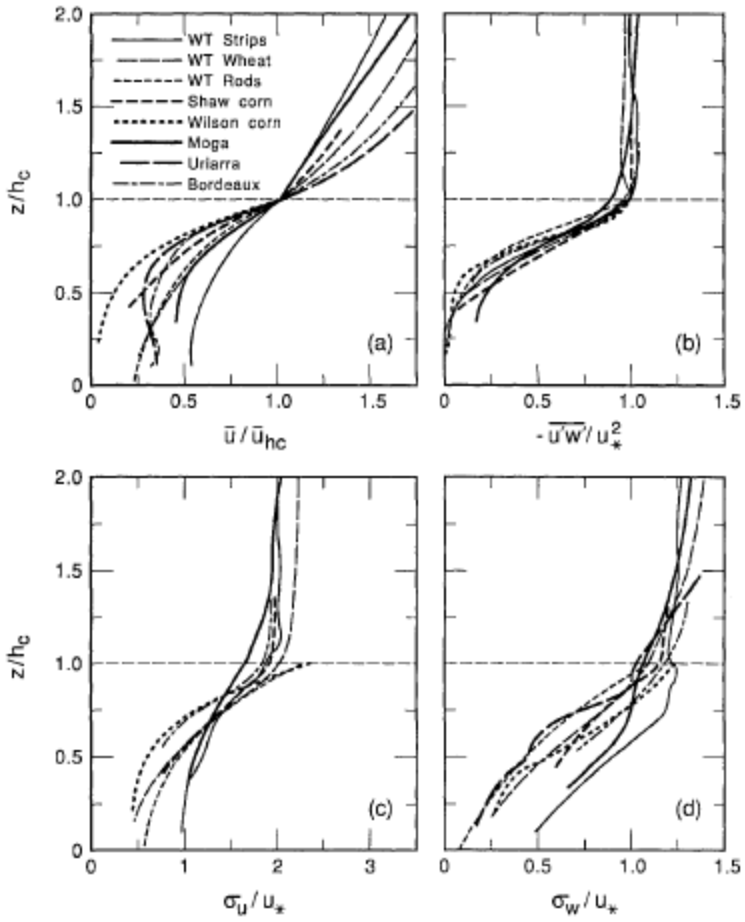


Fig.9.34: valori osservati di velocità media del vento, stress e standard deviation della componente u e v entro la canopy vegetale (Kaimal e Finnigan, 1994)

Il coefficiente di correlazione r_{uw}, definito come:

$$r_{uw} = \frac{\overline{u'w'}}{\sigma_u \sigma_w} \qquad [9.34]$$

è la misura dell'efficienza della turbolenza nel trasportare la quantità di moto. Dai profili mostrati si vede come a $3h_c$ il valore di r_{uw} sia prossimo a –0.3, normalmente riscontrato nel *SL*, valore che cresce con l'avvicinarsi alla quota h_c, dove raggiunge il valore –0.45. Raggiunto questo mas-

simo, il coefficiente diminuisce bruscamente entro la *canopy*, più di quanto diminuiscano singolarmente le due varianze σ_u e σ_w. In altre parole, la turbolenza alla sommità della *canopy* è efficiente nel trasferimento verso il basso della quantità di moto, ma la sua efficienza decade molto più rapidamente delle varianze delle componenti del vento.

Un'altra caratteristica importante della *canopy* vegetale è il suo alto grado di *intermittenza* che emerge dall'analisi della *skewness* della componente *U* e *W* del vento, definite come

$$Sk_u = \overline{u'^3}/(\sigma_u)^3 \qquad Sk_w = \overline{w'^3}/(\sigma_w)^3 \qquad [9.34]$$

Nel *SL* la *skewness* per entrambe le componenti è vicino al valore nullo (tipico di una distribuzione Gaussiana), mentre, come si vede nella **Fig.9.35**, la situazione nella *canopy* è ben differente. Come ci si avvicina alla *canopy* dall'alto, Sk_u aumenta e Sk_w diminuisce fino a che Sk_u raggiunge il valore +1 e Sk_w il valore –0.6 ad una quota entro la *canopy* di circa $0.5h_c$. Questa combinazione di Sk_u fortemente positiva e Sk_w fortemente negativa ci suggerisce che la turbolenza è dominata da *raffiche intermittenti* dirette verso il basso.

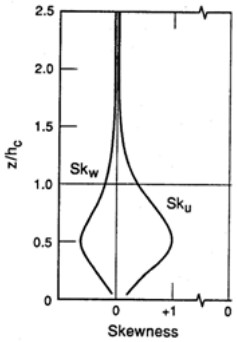


Fig.9.35: Skewness di u e v entro la canopy vegetale (Kaimal e Finnigan, 1994)

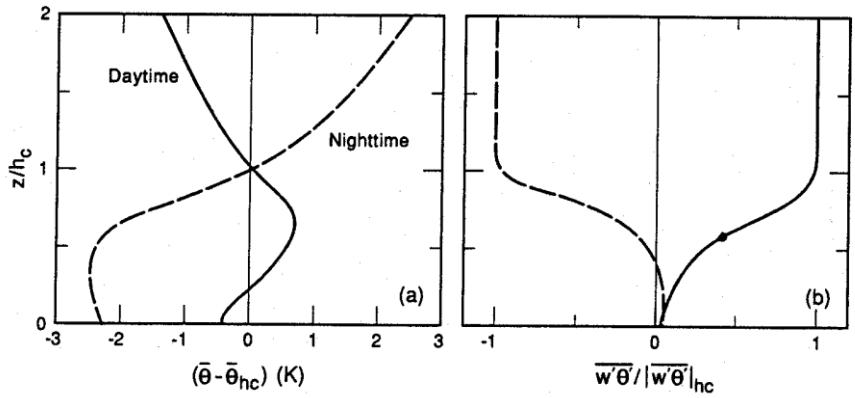


Fig. 9.36: tipici profili verticali di temperatura potenziale e di flusso di calore sensibile (Kaimal e Finnigan, 1994)

Nella **Fig.9.36** è presentato il profilo verticale della temperatura potenziale virtuale media sia nelle ore notturne che in quelle diurne. Considerando il profilo diurno, si nota immediatamente che mentre sopra la *canopy* il gradiente di temperatura potenziale risulta negativo, entro la *canopy* il gradiente (in modulo) si riduce velocemente fino ad annullarsi alla quota $z/h_c = 0.75$. Al di sotto, l'aria presenta gradienti termici positivi. Pertanto, nelle ore diurne, entro la vegetazione si viene ad instaurare uno strato di aria stabile (dello spessore del *dispacement height*). Tuttavia, se si considera la parte destra della figura, si nota come il profilo verticale di $\overline{w\theta}$ (normalizzato rispetto al valore assunto a h_c) sia circa nullo al suolo e cresca costantemente con la quota fino a raggiungere un valore costante sopra la *canopy*. Siamo di fronte ad una situazione molto particolare perché alle quote inferiori a $0.75h_c$ abbiamo un flusso di calore positivo con un gradiente termico

positivo, cosa che richiederebbe un coefficiente di diffusione turbolenta negativo (fisicamente non ammissibile). Siamo quindi di fronte ad un *flusso controgradiente* non spiegabile con una chiusura di tipo *K*, ma spiegabile, come detto precedentemente, dalle raffiche intermittenti discendenti. La situazione notturna è esattamente speculare rispetto a quella diurna: il gradiente termico è positivo per quote superiori a 0.75 h_c e negativa per quote inferiori, cosa che evidenzia uno strato di aria instabile vicino al suolo nelle ore notturne.

Nella **Fig.9.37** viene presentato il profilo di umidità media e di $\overline{wq}$**,** normalizzato rispetto al valore di h_c. Come si può vedere l'umidità è estremamente elevata nei pressi del suolo e decresce rapidamente con la quota, mantenendosi quasi costante per buona parte della *canopy*. Per quanto riguarda il profilo di $\overline{wq}$, si può vedere anche in questo caso la presenza di un flusso *controgradiente* nella parte inferiore della *canopy*. Queste evidenze di *controgradiente* diurno sono ulteriormente rafforzate se si considerano i due numeri di *Richardson*. Nella parte inferiore della *canopy* nelle ore diurne *Ri* assume valori positivi, evidenziando da parte dei gradienti uno stato di stabilità, anche se Ri_f assume evidentemente valori negativi, evidenziando a sua volta uno stato di instabilità. Ciò rappresenterebbe un evidente paradosso che può essere spiegato nel modo seguente. La situazione che si instaura nella parte inferiore della *canopy* è estremamente intermittente: si assiste all'incursione di grandi vortici che determinano flussi di calore positivi (e quindi Ri_f negativi) che però hanno durate limitate e sono intervallati da periodi di quiescenza in cui prevale la stabilità e quindi *Ri* positivi. Nei periodi di quiescenza non è raro individuare lo sviluppo di onde di gravità entro la *canopy*.

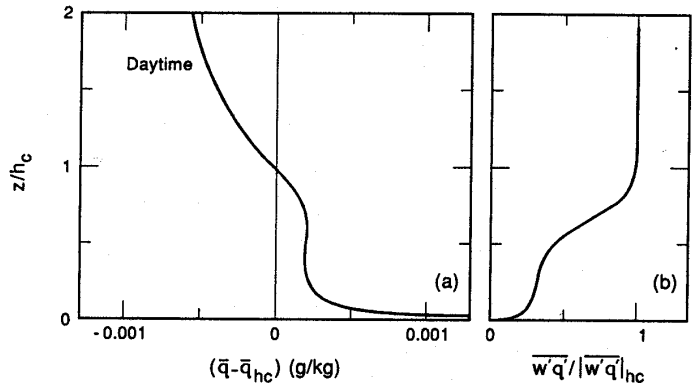


Fig. 9.37: profilo verticale tipico dell'umidità e del flusso latente di calore entro la canopy vegetale (Kaimal e Finnigan, 1994)

Questo comportamento riscontrato entro le foreste non è generale per tutti i tipi di copertura vegetale e non rappresenta la situazione generale nel caso di colture di mais, cereali e prato.

9.4 L'OROGRAFIA

La violazione più eclatante del paradigma su cui si è basata la trattazione del Cap. 8 è la presenza di orografia che possiamo definire come la variazione della quota del terreno rispetto ad una quota di riferimento (per esempio il livello del mare). La porzione di superficie in cui la quota varia significativamente rispetto al valore di riferimento può essere relativamente limitata ed allora possiamo parlare di *collina* (*hill*) se la struttura orografica è tridimensionale e simmetrica rispetto ad un asse verticale o di *dorsale* (*ridge*) se sostanzialmente è una struttura bidimensionale. Nella realtà dei fatti difficilmente troviamo una struttura orografica isolata; al contrario incontriamo zone estese con la presenza di complesse aggregazioni di strutture orografiche bidimensionale e tridimensionali. Se potevamo illuderci di individuare teorie analitiche per trattare le perturbazioni indotte sul *PBL* dalle strutture orografiche isolate e regolari, l'intuizione ci dice che dobbiamo

abbandonare ogni tipo di speranza quando la situazione reale vede presente una orografia significativa.

Anche in questo caso, la regola generale è quella di impiegare un modello fluidodinamico tridimensionale e non stazionario per descrivere numericamente tutto ciò, sia che siamo interessati alla stima dei campi tridimensionali delle variabili meteorologiche medie che dei loro principali momenti (soprattutto i momenti secondi), sia che il nostro scopo sia quello di studiare la dispersione degli inquinanti in un ambiente così complesso. Tuttavia, per poterne comprendere i risultati, conviene qui di seguito riassumere alcune conoscenze teoriche e sperimentali acquisite sulla perturbazione indotta da strutture orografiche isolate di forma regolare. Tutto quanto verrà qui di seguito presentato altro non è che un succinto riassunto della trattazione fatta al riguardo da Kaimal e Finnigan (1994).

9.4.1 ALCUNE DEFINIZIONI UTILI

Abbandonata l'idea di descrivere l'interazione di una struttura orografica significativa col *PBL*, ci limitiamo qui a considerare solo strutture di limitata estensione verticale (con altezza massima *h* dell'ordine delle centinaia di metri) che possono essere o bidimensionali o tridimensionali.

Se consideriamo una tipica struttura bidimensionale (*ridge*), ipotizziamo di studiare per semplicità il caso in cui la direzione media del vento sia diretta perpendicolarmente alla dorsale montuosa. Se poi consideriamo la sua sezione rispetto ad un piano perpendicolare alla dorsale, ipotizziamo che il profilo della dorsale sia particolarmente semplice, regolare e simmetrico. In pratica, riferendoci alla **Fig. 9.38**, possiamo rilevare alcuni elementi caratteristici.

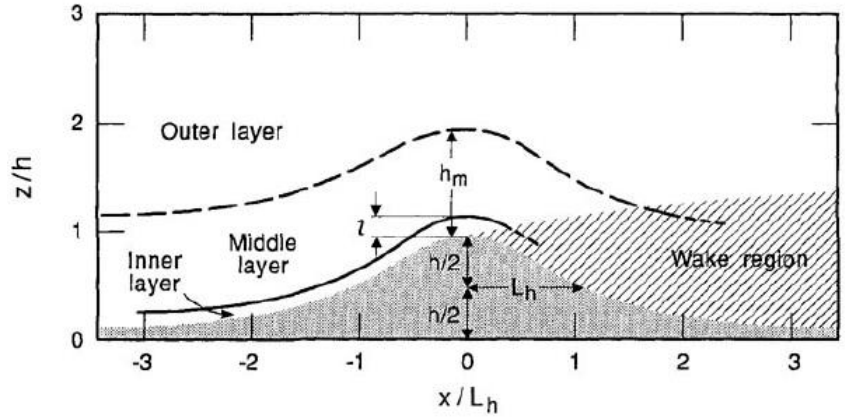


Fig. 9.38: alcune definizioni per una struttura orografica complessa (Kaimal e Finnigan, 1994)

Per prima cosa, la quota massima della dorsale (invariante rispetto alla direzione trasversale alla dorsale) è pari ad *h* e la semi-larghezza a metà altezza di questa struttura è L_h. In secondo luogo, qualora fosse necessario disporre di una formulazione analitica per descrivere la forma della sezione longitudinale della dorsale, normalmente si adotta la semplice relazione:

$$z = h\left[1 + \left(\frac{x}{L_h}\right)^2\right]^{-1} \qquad [9.36a]$$

Se la struttura orografica è tridimensionale, allora si ipotizza che essa sia il risultato della rotazione del profilo precedente rispetto ad un asse verticale posizionato nel punto $x = 0$.

La descrizione di una situazione in cui è presente una struttura orografica isolata richiede la scelta e la definizione di un opportuno sistema di coordinate, cosa tutt'altro che semplice. Questo argomento è complesso e qui faremo solo alcuni brevi cenni in proposito. In primo luogo, l'intuizione assicura che c'è una direzione privilegiata in questo complesso sistema geometrico ed è, in un dato punto della superficie, la direzione del vento medio locale che non è orizzontale, ma è parallela alla superficie dell'orografia. Dato che questa direzione, che però può variare nei

vari punti della superficie sovrastante l'orografia, possiede una forte connotazione fisica, la possiamo adottare come asse *x*. L'asse *z* sarà localmente diretta perpendicolarmente alla superficie e l'asse *y* completerà la terna di assi cartesiani che è locale, ortogonale e curvilinea. In sostanza, tutto ciò può essere visualizzato nella **Fig. 9.39**.

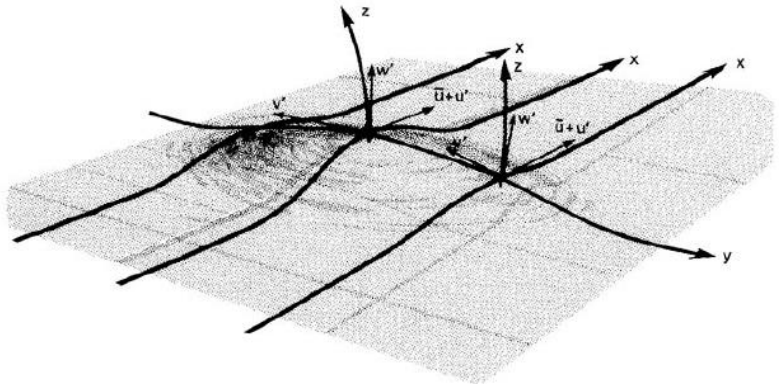


Fig. 9.39: sistema di coordinate per un terreno con orografia (Kaimal e Finnigan, 1994)

Le considerazioni che ci apprestiamo a fare si riferiscono a delle situazioni sostanzialmente adiabatiche. In questo caso, come vediamo dalla **Fig.9.38**, la presenza di una collina o di una dorsale isolata perturba la dinamica del *PBL*. Se ci limitiamo a considerare la porzione di atmosfera attorno alla collina, vediamo che è individuabile un sottile strato d'aria, di spessore *l*, a ridosso della superficie, che possiamo indicare col termine *inner layer* in cui la turbolenza è l'elemento dominante. Senza entrare nei dettagli, nelle situazioni adiabatiche si ha che:

$$\frac{l}{L_h} \cdot \ln\left(\frac{l}{z_0}\right) = 2k^2 \qquad [9.36b]$$

dove z_0 è la rugosità superficiale che caratterizza la struttura orografica e k è la costante di von Karman. Com'era prevedibile, tanto maggiore è la rugosità superficiale tanto più spesso è l'*inner layer* e quindi tanto più si trasmette in verticale l'influenza degli *stress* di Reynolds. Sempre dalla **Fig. 9.38** notiamo come distante dalla superficie si viene ad individuare uno strato d'aria in cui l'influenza degli *stress* di Reynolds superficiali è trascurabile. Questo strato d'aria è detto *outer layer* ed il suo bordo inferiore h_m può essere stimato con la relazione seguente:

$$h_m = L_h \left[\ln\left(\frac{L_h}{z_0}\right)\right]^{-1/2} \qquad [9.36c]$$

Infine, tra l'*inner* e l'*outer layer* si viene a collocare una *zona di transizione* con proprietà intermedie tra l'*inner layer* e l'*outer layer*.

9.4.2 IL MOTO MEDIO

Facciamo sempre riferimento alle situazioni adiabatiche ed immaginiamo di registrare la velocità media dell'aria lungo una linea di flusso che impatta ad angolo retto contro un rilievo bidimensionale come una dorsale isolata. Vicino alla superficie vediamo che il moto decelera leggermente sopravento ai piedi della dorsale prima di accelerare alla sua sommità. Se la dorsale è sufficientemente ripida, questa decelerazione può causare una piccola *zona di separazione* alle sue pendici. La velocità del vento raggiunge il suo valore massimo alla sommità della dorsale, per poi diminuire superata la linea di cresta. Se la dorsale sottovento è sufficientemente ripida, si può formare anche in questo caso una zona di separazione in cui la direzione del moto ai livelli inferiori è opposta a quella ai livelli superiori (**Fig. 9.40**). Che si formi o meno la zona di ricircolo, sottovento la dorsale si sviluppa una *regione di scia* con un marcato *deficit* di velocità che si estende

sottovento per una distanza pari a vari multipli dell'altezza della dorsale. Se seguiamo la linea di flusso superiore, osserviamo un'accelerazione monotona fino alla cresta seguita da una decelerazione sempre monotona.

Se invece di una dorsale bidimensionale consideriamo una collina assialmente simmetrica, vediamo le stesse cose con una sola differenza: la decelerazione sopravento è assente ed è rimpiazzata da una regione di divergenza laterale del moto in cui il fluido si divide in due parti per aggirare la collina. Questa divergenza laterale diminuisce salendo lungo la collina e scompare alla cima. Facendo sempre riferimento ad una dorsale, nella **Fig. 9.41a** vengono presentati tre profili tipici di velocità media del vento: quello sopravvento, quello sulla cresta e quello sottovento e da qui si nota il rilevante aumento della velocità vicino al suolo in corrispondenza della sommità della dorsale ed il *deficit* nella zona di scia. Lo stesso si può vedere nella **Fig. 9.41b** in cui è presentato l'andamento della velocità del vento con la distanza relativa a due linee di flusso, una vicina al suolo *nell'inner layer* e l'altra relativa *all'outer layer*.

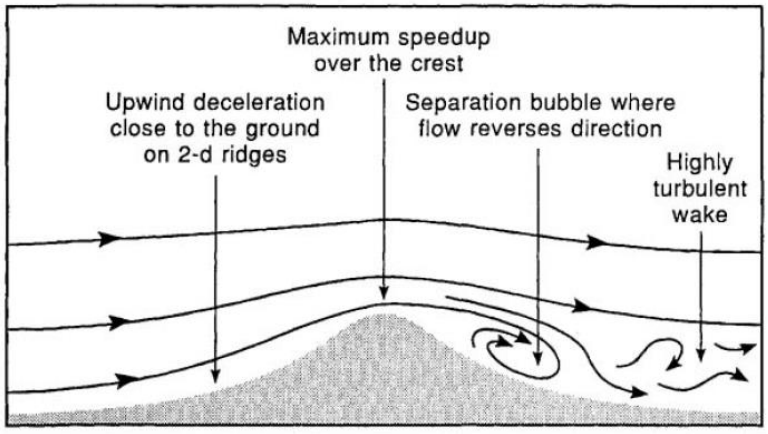


Fig. 9.40: moto dell'aria sopra una struttura orografica bidimensionale (Kaimal e Finnigan, 1994)

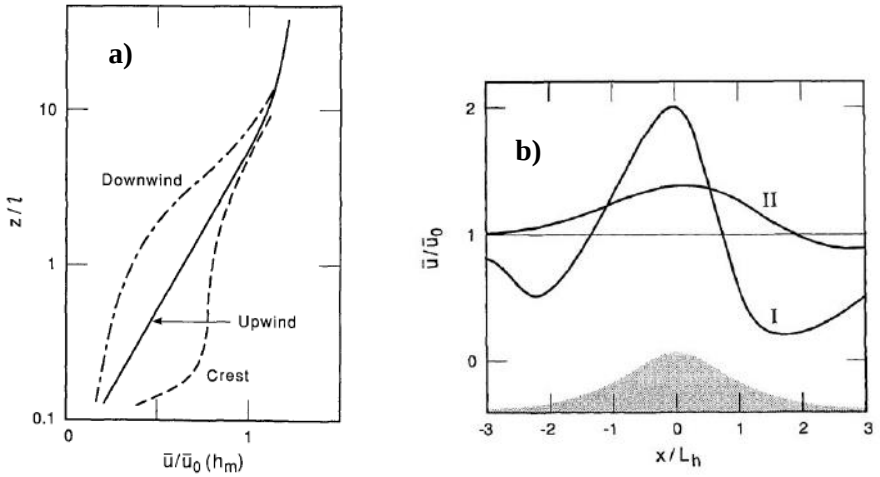


Fig. 9.41: andamento della velocità media del vento con la quota e con la distanza (Kaimal e Finnigan, 1994)

Se indichiamo con $U_0(z)$ il valore della velocità media del vento alla quota z molto sopravento alla dorsale (che riteniamo non perturbato dalla presenza della struttura orografica), allora diventa interessante quantificare l'incremento Δs della velocità media del vento rispetto al profilo imperturbato $U_0(z)$. Questa variazione può essere definita come:

$$\Delta s = \frac{U(x,z) - U_0(z)}{U_0(z)} = \frac{\Delta U(x,z)}{U_0(z)} \qquad [9.37]$$

Nelle condizioni adiabatiche che stiamo considerando, l'incremento della velocità media del vento la si riscontra in corrispondenza del culmine del rilievo. In particolare, si ha che il valore massimo Δs_{max} può essere ottenuto dalla regola seguente:

- per una collina tridimensionale a simmetria assiale: $\Delta s_{max} \cong 1.6\, h/L_h$
- per una dorsale bidimensionale: $\Delta s_{max} \cong 2\, h/L_h$

Come abbiamo accennato in precedenza, se il pendio sopravento della struttura orografica è sufficientemente ripido (circa 18°), allora ai piedi della struttura si viene a formare una zona di separazione, in sostanza un vortice, in cui la velocità media alla base ha direzione opposta a quella alla sommità. La stessa cosa può capitare sottovento alla struttura se il relativo pendio è sufficientemente ripido.

Ma anche in assenza di zone di separazione, la struttura orografica perturba il moto producendo una *scia* (*wake*) più o meno sottovento, con una struttura specifica che muta al variare della forma della collina o della dorsale. Come possibile esempio, nella **Fig. 9.42** viene mostrata la scia sottovento ad una dorsale bidimensionale.

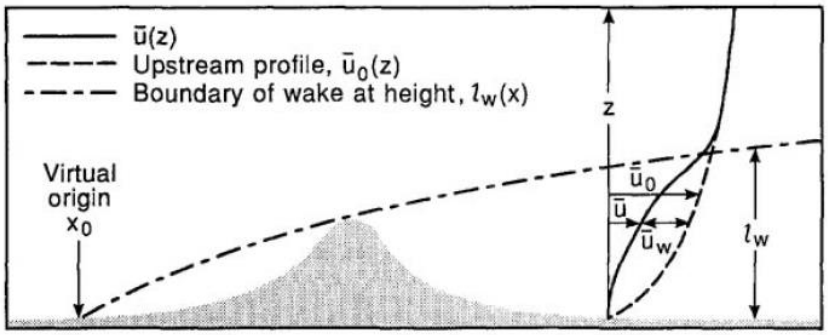


Fig. 9.42: la scia sottovento ad una dorsale bidimensionale (Kaimal e Finnigan, 1994)

Per quantificare la perturbazione indotta dalla scia sul moto medio, ad ogni distanza x da un punto x_0, che è l'origine virtuale della scia e che dipende dalla particolare struttura orografica considerata, definiamo la grandezza l_w come la quota a cui la velocità media del vento, nella zona di influenza della scia, raggiunge un valore pari ad una percentuale data (es. 95%) del valore che si avrebbe nel profilo imperturbato sopravento. A quote inferiori a l_w, ma alla stessa x si avrà un deficit di velocità $U_w(z)$ come si è visto nella figura precedente. La teoria semplificata con cui è stata trattata la scia propone al riguardo le relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} l_w(x - x_0) &= A \cdot (x - x_0)^a \\ U_w(z) &= B \cdot (x - x_0)^b \cdot f(z/l_w) \end{aligned} \qquad [9.38]$$

dove le costanti numeriche A e B e la funzione $f(z/l_w)$ dipendono dalla particolare forma della struttura orografica, mentre gli esponenti a e b valgono rispettivamente 0.5 e -1. U_w diminuisce lentamente con x e ciò comporta che l'effetto della scia lo si possa apprezzare a distanze dell'ordine di parecchie decine di volte l'altezza massima della struttura orografica.

Tutto ciò che abbiamo detto a proposito delle perturbazioni orografiche sul moto medio dell'aria è relativo a situazioni adiabatiche. Quando, viceversa, le situazioni sono stabili o convettive, il tutto si complica notevolmente e si rimanda per i dettagli a Kaimal e Finnigan (1994) ed ai riferimenti bibliografici che essi citano.

9.4.3 LA TURBOLENZA

La presenza di una struttura orografica, semplice o complessa che sia, induce inevitabili variazioni sui profili verticali e sulla distribuzione orizzontale delle varianze delle tre componenti della velocità del vento e delle altre grandezze meteorologiche e micrometeorologiche di interesse. Non è possibile in questa sede affrontare questo problema con un minimo di sistematicità e completezza e pertanto ci limitiamo a presentare alcuni risultati ottenuti.

Per prima cosa consideriamo una struttura orografica bidimensionale ed i profili di alcuni importanti momenti secondi rilevati alla sommità della struttura. Le deviazioni standard σ_u, σ_v e σ_w e la covarianza $\overline{uw}$, normalizzate dal rispettivo valore che tali grandezze assumono nei profili imperturbati molto sopravento alla struttura orografica (indicate dal pedice 0), sono mostrate nei grafici riportati nella **Fig. 9.43**, in funzione della quota *z* normalizzata dallo spessore *l* dell'*inner layer*. Analizzando la figura, notiamo immediatamente come la deviazione standard delle due componenti orizzontali del moto, dopo aver presentato valori elevati al suolo (circa due volte quelli tipici del profilo imperturbato sopravento), decrescono velocemente con la quota, raggiungono il valore imperturbato alla quota di circa *l*/3, per poi continuare la loro diminuzione a quote normalizzate superiori. La deviazione standard verticale σ_w e lo stress di Reynolds $\overline{uw}$ invece, dopo aver assunto valori molto elevati al suolo (più di due volte quelli tipici del profilo imperturbato), diminuiscono molto rapidamente, diventano inferiori al valore imperturbato e raggiungono un marcato valore minimo a quote dell'ordine di *l*. A questo punto aumentano nuovamente e rapidamente giungendo ad un valore di equilibrio che per σ_w è praticamente quello del profilo imperturbato, mentre per $\overline{uw}$ è di poco inferiore.

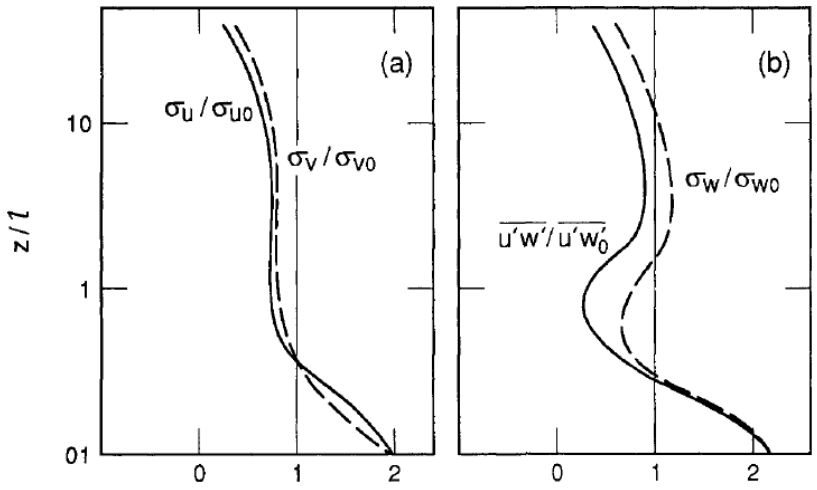


Fig. 9.43: profilo verticale dei principali momenti del secondo ordine alla sommità di una struttura orografica (Kaimal e Finnigan, 1994)

Invece di indagare i profili alla sommità della struttura orografica, consideriamo come varia lungo tre linee di flusso particolari (quelle poste a z/l = 0.05, 0.5 e 3.0, indicate come I, II, III) ciascuna di queste variabili, sempre normalizzate dal loro valore imperturbato tipico a distanze sopravento elevate rispetto alla struttura orografica. Il tutto è riportato nella **Fig. 9.44** e nella **Fig. 9.45**. Come si vede, lungo la linea di flusso inferiore (I) tutti questi momenti del secondo ordine variano rispetto al loro valore imperturbato seguendo praticamente l'elevazione orografica: aumentano quando la quota orografica aumenta e diminuiscono quando diminuisce, con valore massimo in corrispondenza della sommità dell'elevazione e valori minimi (inferiori a quelli imperturbati) a monte ed a valle della struttura orografica. Appena, però, si considerano le due linee di flusso superiori, notiamo che l'andamento riscontrato molto vicino al suolo si *sposta* verso monte (il valore massimo lo troviamo prima della sommità della struttura orografica) e si deforma presentando valori molto elevati a valle della struttura, sostanzialmente nella zona della scia

formata dalla presenza della struttura. Quindi, la presenza di una struttura orografica, al di là delle sue caratteristiche geometriche, genera una scia sottovento la cui caratteristica principale è un aumento della turbolenza rispetto alla situazione imperturbata.

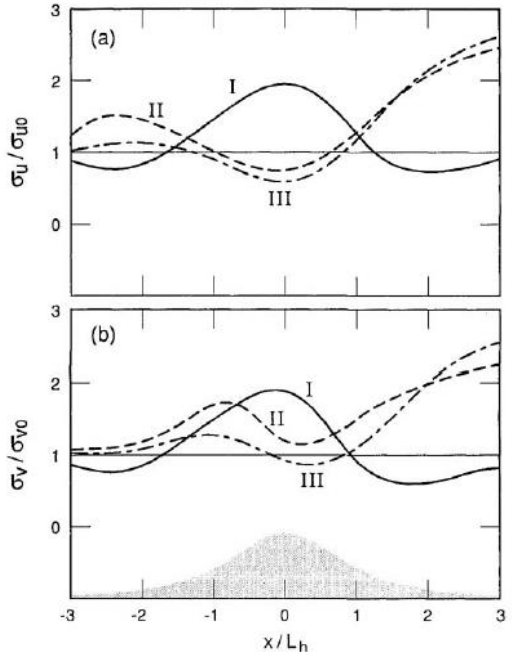


Fig. 9.44: andamento con x/L_h della varianza normalizzata delle componenti orizzontali del moto (Kaimal e Finnigan, 1994)

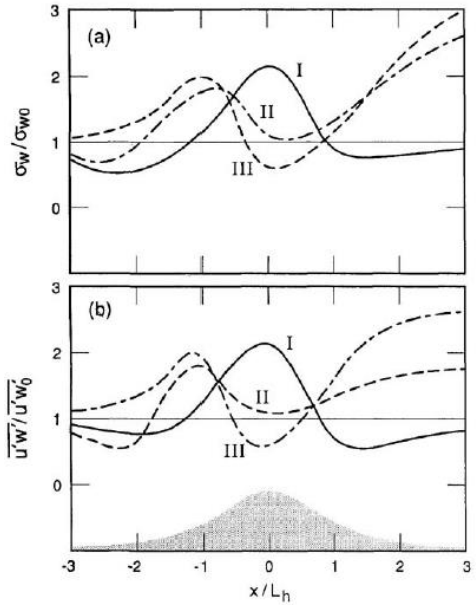


Fig. 9.45: andamento con x/L_h della varianza normalizzata della componente verticale del moto e dello shear stress (Kaimal e Finnigan, 1994)

9.5 L'AMBIENTE URBANO

Il processo continuo di urbanizzazione ha prodotto e continua a produrre radicali cambiamenti nella natura della superficie terrestre e nelle proprietà atmosferiche di una regione, alterando i bilanci di radiazione e di energia ed anche i trasferimenti di massa. Per esempio, l'inquinamento atmosferico, aumentando la torbidità dell'aria, altera i trasferimenti di radiazione, mentre la presenza massiccia di dense costruzioni aumenta la capacità termica del sistema e la sua impermeabilità. Inoltre, la geometria a blocchi, tipica di una città, produce trappole per la radiazione solare e stagnazioni di aria e, oltre a questi effetti, un generale aumento globale della rugosità superficiale. Arnfield (2003) ha prodotto una bella e completa *review* sulle problematiche poste dalle aree urbane, ma solo di recente è stata pubblicata una sintesi approfondita, ordinata ed attuale delle diverse problematiche presentate dalle aree urbane (Oke et al. 2017).

Per rendere meglio l'idea, ipotizziamo di considerare una superficie perfettamente omogenea in senso orizzontale costituita da un suolo nudo: in questo caso troveremmo su di essa un normale *PBL*, convettivo nelle ore diurne e stabile in quelle notturne, che siamo ormai abituati a trattare. Se, per comodità, ci concentriamo sulle ore diurne e soleggiate, la parte inferiore del *PBL*, dello spessore di circa il 10% della sua intera estensione verticale, è costituita dal *SL* in cui i flussi turbolenti (di quantità di moto, di calore e di vapor d'acqua) sono sostanzialmente costanti con la quota e dove valgono le leggi della Teoria della Similarità di Monin-Obukhov. Immaginiamo ora di costruire su questa superficie naturale una nuova città prima non esistente. Così facendo collocheremo numerose strutture edilizie che in prima approssimazione possiamo assimilare a parallelepipedi di diversa area di base ed altezza posti uno vicino all'altro, alcuni affiancati, altri no. Normalmente gli edifici saranno più numerosi e ravvicinati nella parte centrale della città (la zona urbana vera e propria) e più bassi e più sparsi nelle zone periferiche (zone suburbane). Queste strutture edilizie non saranno tutte uguali nelle loro caratteristiche strutturali: avremo edifici tradizionali costruiti in mattoni e intonaco, ma anche strutture in metallo e vetri (come i moderni grattacieli). Le loro coperture potranno essere piatte o a falde spioventi e le loro pareti laterali potranno essere orientate nei modi più disparati. Lo spazio rimasto libero tra i vari edifici potrà essere occupato da piccole porzioni di territorio con vegetazioni e potranno anche esistere zone più vaste prive di edifici in cui sono presenti parchi cittadini con prati, alberi anche a grande sviluppo verticale (a seconda della latitudine cui ci troviamo) ed anche piccoli specchi d'acqua. Tutte queste zone sono zone permeabili all'acqua e da esse è naturale che ci sia della evapotraspirazione. Ma è naturale anche che una parte rilevante dello spazio tra i diversi edifici sia occupata da strutture non permeabili all'acqua come per esempio strade, marciapiedi, parcheggi cementati e parcheggi asfaltati. Avremo poi strutture in cemento come ponti e cavalcavia e strade asfaltate che riempiranno tutti gli spazi rimasti tra gli edifici. E in questa struttura vivranno milioni di persone che si riscalderanno nei mesi invernali e che si muoveranno in continuazione con automobili private e con mezzi pubblici. A questo punto che ne è stato del nostro *PBL* originario dopo aver introdotto questa nuova città ed i suoi abitanti?

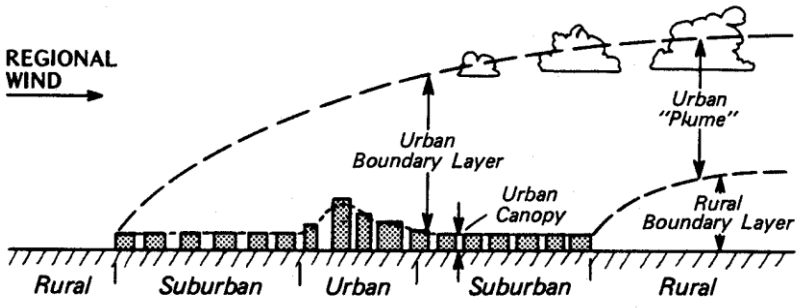


Fig. 9.46: rappresentazione schematica del PBL urbano (Oke, 1987)

Senza entrare nei dettagli, *globalmente* si può dire che la situazione è diventata grosso modo quella illustrata nella **Fig. 9.46**. Le masse d'aria che inizialmente spiravano indisturbate sulla superficie nuda, incontrando la zona suburbana sottovento la città vengono perturbate profondamente e per reazione si viene a formare un *IBL*, cioè uno strato di atmosfera con caratteristiche meccaniche e termiche differenti dall'aria in avvicinamento, che cresce progressivamente sottovento sovrastando ed inglobando l'intera città: questa è l'*Urban Boundary Layer* (*UBL*). La perturbazione è profonda dato che normalmente la dimensione spaziale delle città è dell'ordine delle decine di chilometri. Quando finalmente la città termina nella direzione di propagazione del vento, la perturbazione non cessa all'improvviso, anzi le masse d'aria, ormai sostanzialmente in equilibrio con le strutture urbane, incontrando ora una transizione *rough-to-smooth*, reagiscono generando un nuovo *IBL* questa volta rurale che *eroderà* progressivamente l'*UBL*.

Pur mantenendo una visione globale della città, iniziamo ora ad analizzare un po' meglio l'*UBL*. Per prima cosa vediamo che esiste una superficie irregolare ma continua che *inviluppa* la parte superiore delle strutture edilizie e fa da frontiera tra due mondi distinti: la parte superiore dell'*UBL*, che presenta caratteri sostanzialmente omogenei in orizzontale, ed il volume d'aria che si viene a creare tra questa superficie ed il suolo parzialmente costituito dalle strutture edilizie e parzialmente da piccole porzioni di atmosfera intrappolate tra di esse. Questo volume, dalle caratteristiche estremamente locali, prende il nome di *Urban Canopy Layer* (*UCL*). Il mondo dell'*UCL* è un inferno di micro-realtà diverse, di canyon urbani, di incanalamenti preferenziali delle masse d'aria, dove sono prevalentemente localizzate le emissioni cittadine delle sostanze inquinanti e dove il calore e le sostanze emesse restano intrappolate. Descrivere realisticamente questa realtà è estremamente arduo e ad essa accenneremo nel seguito. Però prima consideriamo l'aria dell'*UBL* sovrastante l'*UCL*.

L'aria presente in questo strato non è più parente dell'aria sopravento la città ed ha acquisito nuove caratteristiche grazie alle perturbazioni meccaniche e termiche che le sono giunte dal suo confine inferiore che è la sommità dell'*UCL*. Lo strato d'aria che sovrasta immediatamente l'*UCL* ha il compito di *catturare*:

- le informazioni relative all'aumento della rugosità superficiale determinata dalla presenza delle strutture edilizie e trasformarle in *stress* turbolenti,
- le informazioni relative al calore acquisito o ceduto dalla città sottostante, dovuto alla combustione nei sistemi di riscaldamento degli edifici e negli autoveicoli, e trasformarlo in flusso di calore turbolento,
- le poche informazioni relative al vapor d'acqua, visto che una struttura cittadina è predisposta per rendere di fatto indisponibile acqua per l'evaporazione.

L'atmosfera ha riacquistato in questo strato maggiore continuità rispetto alla situazione tipica dell'*UCL*, ma la non omogeneità in orizzontale e verticale è ancora la sua caratteristica principale. Più la quota aumenta, più ci si allontana dall'*UCL* e più le disomogeneità diminuiscono gradualmente. Questo strato d'aria che risente profondamente della rugosità cittadina viene indicato col termine *Roughness Layer* (*RL*). Non è facile dire quanto sia l'estensione verticale di questo strato. Operativamente se h è l'altezza caratteristica delle strutture edilizie presenti, il *RL* si estenderà fino a quote di almeno $2h$. Il *RL* è una zona di transizione e come tale non può essere trattata con la Similarità di Monin-Obukhov. Più si sale entro il *RL*, più la disomogeneità diminuisce e più si raggiungono situazioni di stazionarietà e di omogeneità tipiche del *SL*, con flussi turbolenti sostanzialmente costanti con la quota. Questa zona, che è la parte superiore del *SL*, prende anche il nome di *Inertial Sublayer*. In questa zona di atmosfera ora valgono le leggi della Similarità di Monin-Obukhov purché si tenga conto di due elementi che descrivono sinteticamente la presenza della sottostante città: la rugosità superficiale per la quantità di moto z_0, quella per il flusso di calore z_{0T} ed il *dispalcement height d*. Naturalmente, se siamo interessati a caratterizzare globalmente una città o una rilevante porzione di essa, allora sarà nell'*Inertial Sublayer* che dovremo

porci, come mostrato nella **Fig. 9.47**. Infatti, se lì ci poniamo con un apparato per la misura dei flussi turbolenti, ciò che misureremo sarà una sorta di *media* che tiene conto complessivamente delle micro-realtà presenti nell'*UCL*, opportunamente *miscelate* tra loro. Se, poi ci poniamo a quella quota con strumenti radiometrici, l'ampia visuale del radiometro rivolto verso l'*UCL* miscelerà le disomogeneità sottostanti fornendo un valore *efficace* di temperatura, di radiazione riflessa e di radiazione infrarossa emessa.

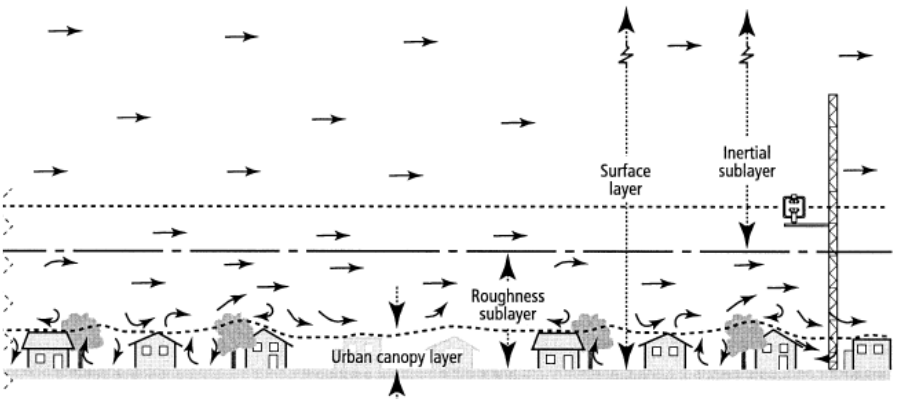


Fig. 9.47: caratteristiche della parte bassa dell'UBL (Grimmond e Oke 2002)

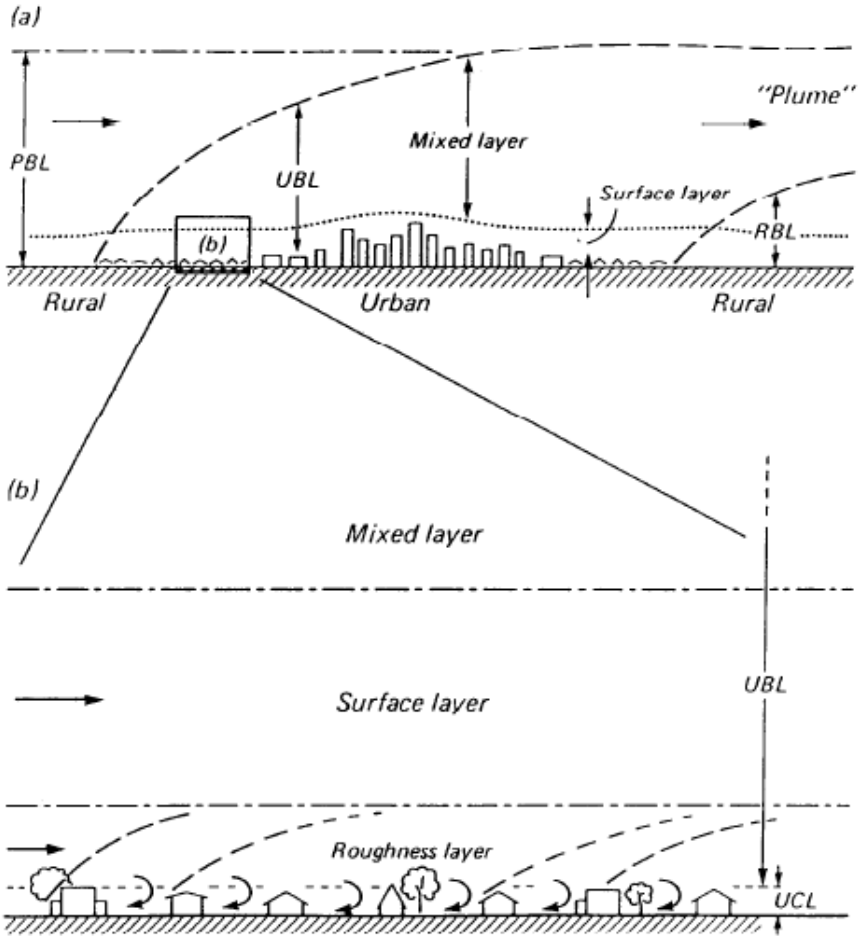


Fig. 9.48: visione complessiva dell'UBL (Schmid e al. 1991)

Per riassumere quanto detto, che comunque rappresenta una notevole approssimazione e semplificazione della realtà, vale la pena analizzare attentamente la **Fig. 9.48**. Essa mostra la città

con un dettaglio crescente e suggerisce che lo studio dell'ambiente urbano, a seconda delle necessità, può essere fatto a grande scala e a microscala. A grande scala, la città di fatto è un'alterazione meccanica e termica della superficie, mentre a micro-scala la città è un insieme di numerosissimi elementi singoli, ciascuno dei quali avente caratteristiche termiche individuali ben precise, ma interagenti l'uno con l'altro.

Le città nel mondo sono molto differenti le une dalle altre per tanti aspetti: l'architettura adottata, i materiali di costruzione utilizzati, la geometria delle arterie viarie, la presenza di vegetazione ed a priori una loro classificazione e generalizzazione sembra ed è un'impresa ardua. Nonostante ciò, Stewart e Oke (2012), sulla base di una paziente raccolta ed organizzazione degli elementi che caratterizzano le principali strutture urbane sparse per il mondo hanno messo a punto una classificazione ingegnosa basata, da un lato, sul tipo di costruzioni (per esempio: costruzioni elevate dense, costruzioni elevate rade, ecc.) e, dall'altro, sulla tipologia del suolo su cui si trovano queste costruzioni (per esempio: alberi densi, prato, suolo nudo, acqua). È stato poi predisposto un opportuno *data base* con cui, per ciascuna combinazione di questi due elementi caratteristici, è possibile avere un valore caratteristico sia di alcune caratteristiche geometriche (frazione di superficie coperta da costruzioni, frazione coperta da superfici impermeabili, altezza media degli edifici) che di alcune caratteristiche termiche e radiative (come per esempio, albedo superficiale, calore emesso dalla attività umane). Questa classificazione non sarà perfetta e le informazioni del data base non saranno esattamente la realtà; tuttavia, dobbiamo vedere tutto ciò come un valido e riuscito tentativo di mettere ordine nel caos.

Nei punti che seguono non pretendiamo di descrivere nei dettagli la complessa realtà delle aree urbane, ma ci limiteremo solo a presentarne alcuni aspetti interessanti. A chi fosse interessato ad una visione dettagliata ed organica di questa interessante realtà si suggerisce di riferirsi al recente libro di Oke e al. (2017).

9.5.1 PROPRIETÀ AERODINAMICHE DELLE AREE URBANE

Se il nostro punto di osservazione si trova entro l'*Inertial Sublayer*, l'intera complessità dell'area urbana viene condensata nei parametri z_0 e d che descrivono le proprietà aerodinamiche della *superficie* su cui scorrono le masse d'aria. Ma come questi due indici di rugosità superficiale si ripartiscono le informazioni delle strutture edilizie presenti nella città? Per averne un'idea conviene immaginare di avere inizialmente una superficie piatta caratterizzata da una rugosità superficiale molto bassa, per esempio del suolo nudo. Tutta la sua rugosità potrà essere condensata come abbiamo visto nel solo parametro z_0 che rappresenta l'altezza media degli elementi di rugosità (arbusti, sassi, ecc. in questo caso), mentre d possiamo considerarlo nullo. Ora cominciamo a porre su questa superficie, una dopo l'altra, delle strutture edilizie ciascuna delle quali sia geometricamente assimilabile ad un parallelepipedo. Nella **Fig. 9.49** abbiamo evidenziato questa struttura ed una serie di elementi che la caratterizzano.

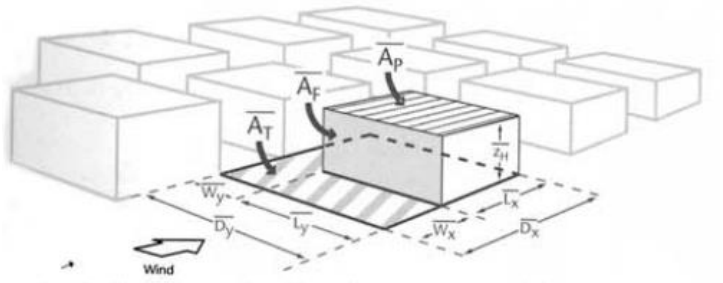


Fig. 9.49: geometria semplificata di una struttura edilizia (Grimmond e Oke, 1999b)

Dato che, come in figura, aggiungiamo un elemento accanto all'altro, il rapporto tra l'area occupa-

ta dalla struttura A_p e l'area complessiva che la struttura occupa con le proprie pertinenze A_T, cioè $\lambda_p=A_p/A_T$, rappresenta bene la densità delle strutture collocate sulla superficie originaria. In questo caso, la rugosità complessiva della superficie originaria viene alterata dalla presenza di questi elementi strutturali tutti uguali e di altezza z_H ed il valore z_0 originario aumenterà, ma aumenterà anche il parametro *d* visto che le linee di flusso verranno sempre più allontanate dal suolo sopra cui comincerà a prendere forma una zona di moto altamente irregolare, sostanzialmente separato dal moto principale, spesso stagnate e con incanalamenti dovuti alla geometria. Aumentiamo ora il rapporto λ_p diminuendo sempre più gli spazi tra le diverse strutture e ciò, di conseguenza, non farà che aumentare sia z_0 sia *d* fino ad un valore massimo di λ_p oltre il quale la resistenza aerodinamica, che continuava ad aumentare, raggiunge il massimo possibile. Oltre questo punto, il moto del fluido abbandona a sé stesso le *sacche* d'aria intrappolate tra gli elementi strutturali e di fatto sente una resistenza aerodinamica sempre minore con l'aumentare di λ_p. Ma *d* continuerà ad aumentare, anche se meno velocemente, indicando come il moto principale si allontani sempre più dal suolo originario. Tutto ciò è un'evidenza sperimentale consolidata ed è efficacemente rappresentata nella **Fig. 9.50** in cui il parametro *d* è stato indicato col simbolo z_d.

Come individuare per una data area urbana reale i due parametri aerodinamici z_0 e *d*? Nel lavoro di Grimmond e Oke (1999a) viene presentato l'argomento in maniera chiara ed esaustiva e qui di seguito presenteremo gli elementi essenziali relativi alle due metodologie possibili per arrivare ad una stima concreta di z_0 e *d*: il *metodo micrometeorologico*, basato su misure di tipo meteorologico e micrometeorologico, ed il *metodo morfometrico*, basato esclusivamente sull'analisi della geometria tridimensionale della città

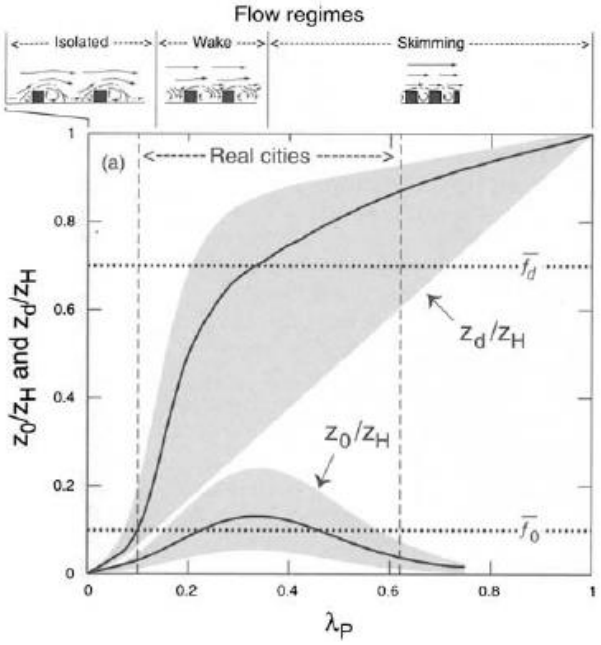


Fig. 9.50: andamento di z_0 e di d (qui indicato come z_d) in funzione del rapporto $\lambda_p = A_p/A_T$ (Grimmond e Oke, 1999b)

9.5.1.1 Il Metodo Micrometeorologico

Di questo metodo tratteremo più dettagliatamente nel seguito, visto che la sua applicazione è del tutto generale e vale anche, per esempio, per determinare i due parametri aerodinamici in presenza di vegetazione (arborea o meno). In sostanza il metodo ipotizza di ottenere la stima dei due parametri di rugosità a partire da misure realizzate all'interno dell'*Inerzial Subrange*, là dove valgono le relazioni di profilo della Teoria della Similarità di Monin-Obukhov. Le possibilità pratiche e teoriche sono tante (Grimmond e al., 1998; Rooney, 2001; Tsuang e al., 2003), ma quella che qui prendiamo in considerazione è la disponibilità di un sensore veloce in grado di misurare le tre

componenti del moto e la temperatura potenziale virtuale e collocato entro l'*Inertial Sublayer* che, come abbiamo visto, è l'unica parte dell'*UBL* in cui valgono le relazioni di Similarità di Monin-Obukhov. Questo sensore, come vedremo, è l'anemometro ultrasonico triassiale.

Essendo state ottenute da un sensore a risposta rapida, le misure istantanee ci consentiranno di stimare la velocità media del vento, ma anche le covarianze tra le componenti orizzontali del moto con la componente verticale, oltre che la deviazione standard della temperatura potenziale virtuale σ_θ. Quindi, alla fine risulta noto sia il flusso turbolento di calore sensibile che la *friction velocity*, la temperatura di scala T_* e la lunghezza di Monin-Obukhov L. Come fare effettivamente ciò lo vedremo al Capitolo 13.

Dato che si è scelto di misurare entro l'*Inertial Subrange*, valgono le reazioni della Similarità di Monin-Obukhov ed in particolare, come abbiamo visto al Capitolo 8, quella secondo cui:

$$\frac{\sigma_\theta}{|T_*|} = \Phi_{\theta\theta}\left(\frac{z-d}{L}\right) \qquad [9.39a]$$

dove $\Phi_{\theta\theta}$ è la Funzione Universale di Similarità per la varianza della temperatura potenziale virtuale. Se ci limitiamo a considerare le situazioni convettive, in cui conviene lavorare, questa relazione, come sappiamo dal Capitolo 8, diventa:

$$\frac{\sigma_\theta}{|T_*|} = a \cdot \left(1 - b\frac{z-d}{L}\right)^{-1/3} \qquad [9.39b]$$

Immaginiamo, quindi, di raccogliere un numero N sufficientemente elevato di triple (T_*, L, σ_θ) ottenute elaborando ora dopo ora i dati grezzi raccolti dal sensore veloce. È immediato ottenere col metodo dei Minimi Quadrati il valore appropriato per l'unico parametro incognito che è d e così uno dei due parametri aerodinamici riceve una stima. Questo è il modo di procedere suggerito da Rotach (1994a). Ora consideriamo le triple (u_*, L, U) sempre ottenute elaborando le misure prodotte dal sensore veloce nelle varie ore di osservazione. Queste grandezze sono l'unico ingrediente presente nella relazione di Similarità di Monin-Obukhov che descrive il profilo verticale del vento medio, oltre naturalmente a z_0 e d. È immediato costruire un problema ai Minimi Quadrati che ci consenta una stima diretta dell'unico parametro ancora incognito che è z_0, visto che d l'abbiamo ottenuto attraverso la relazione di Similarità per la deviazione standard della temperatura potenziale.

Ma cosa abbiamo ottenuto veramente? In realtà siamo riusciti a stimare z_0 e d che le masse d'aria hanno *sentito* sopravvento al punto di misura, non z_0 e d caratteristici della zona urbana sotto il punto di misura. Non è una sottigliezza, è un'osservazione importante vista la grande disomogeneità caratteristica delle aree urbane reali. In effetti, per cogliere almeno in parte le disomogeneità aerodinamiche della città, conviene raggruppare le misure realizzate dall'anemometro ultrasonico per settori angolari corrispondenti alla direzione di provenienza del vento ed ottenere la stima di z_0 e d per ciascun settore angolare, coprendo così, almeno in prima approssimazione, l'intera città.

9.5.1.2 Il Metodo Morfometrico

Un metodo completamente differente è il metodo morfometrico che cerca di stimare z_0 e d a partire dalle caratteristiche geometriche (tridimensionali) degli elementi strutturali presenti sul suolo e tipici della porzione di area urbana che si sta considerando. La **Fig. 9.49** mostra chiaramente le caratteristiche geometriche che vengono prese in considerazione. Quindi, mentre per il metodo micrometeorologico era indispensabile disporre di misure dirette della turbolenza all'interno dell'*Inertial Sublayer*, per il metodo morfometrico al contrario tutto ciò che si deve conoscere è la struttura geometrica della città, approssimata da parallelepipedi regolari la cui altezza media rispetto al suolo è pari a z_H.

Come si è arrivati a mettere a punto questo metodo? È evidente che ben difficilmente sarebbe stato possibile farlo considerando direttamente la realtà delle diverse aree urbane.

Viceversa, è stato possibile giungere a delle correlazioni realistiche realizzando numerosi esperimenti in galleria del vento con modelli in scala delle città. Esempi di ciò possono essere trovati nei lavori di Petersen (1997), Bottema (1997), MacDonald e al. (1998), Kastner-Klein e Rotach (2004) cui si rimanda per i dettagli. Una volta acquisiti, i dati sperimentali sono stati la base per una lunga serie di correlazioni semiempiriche puntigliosamente riportate in Grimmond e Oke (1999b). Come esempio significativo, qui vale la pena riportare solo la correlazione proposta da MacDonald e al. (1998) secondo cui:

$$\frac{d}{z_H} = 1 + \alpha^{-\lambda_p}(\lambda_p - 1) \qquad [9.40a]$$

$$\frac{z_0}{z_H} = \left(1 - \frac{d}{z_H}\right) \cdot exp\left\{-\left[0.5\beta \frac{C_D}{k^2}\left(1 - \frac{d}{z_H}\right)\lambda_F\right]^{-0.5}\right\} \qquad [9.40b]$$

dove le due costanti numeriche α e β valgono rispettivamente 4.43 e 1.0 e λ_F è il rapporto tra l'area dell'edificio frontalmente esposta all'aria in avvicinamento A_F e l'area totale occupata dall'edificio e dalle relative pertinenze A_T, cioè $\lambda_F = A_F/A_T$ come ben si vede nella **Fig. 9.49**.

A questo punto ci sono due osservazioni importanti da fare. In primo luogo, il significato fisico di z_0 e d così ottenuti è ben diverso dai valori ottenuti col metodo micrometeorologico. Questi ultimi si riferiscono alle proprietà aerodinamiche di una porzione di area urbana sopravento il punto di misura, mentre i primi si riferiscono alle proprietà aerodinamiche della porzione di area descritta geometricamente. Evidentemente sarebbe possibile selezionare una porzione di area urbana e calcolare col metodo morfometrico i due parametri aerodinamici e poi collocare in una posizione opportuna il sensore veloce in modo che tale area costituisca il *footprint* dello strumento stesso e quindi giungere anche in questo caso ad una stima per i due parametri. Ovviamente le due stime dovrebbero coincidere! Tuttavia, le difficoltà pratiche insite nel realizzare questa sorta di taratura del metodo morfometrico sono talmente tante da scoraggiare. Grimmond e Oke (1999b) ci hanno tentato ed il risultato è che la correlazione di MacDonalds e al. (1999) sembra comportarsi come sperato.

9.5.2 IL BILANCIO RADIATIVO ED IL BILANCIO ENERGETICO

Qualunque sia la complessità di una zona urbana, l'unica cosa certa è che su di essa giunge nelle ore diurne la radiazione solare globale R_g che dipende esclusivamente da elementi astronomici (angolo di declinazione ed elevazione solare) e dalle caratteristiche assorbenti dell'atmosfera sovrastante la città.

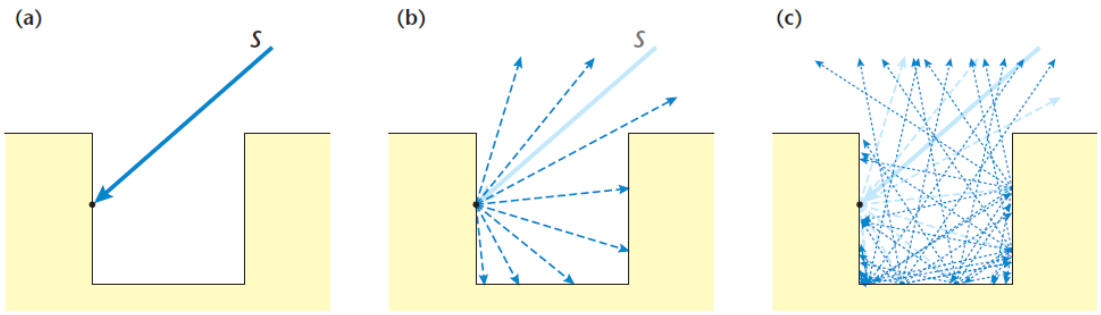


Fig. 9.51: riflessioni multiple della radiazione solare in un canyon urbano (Oke e al., 2017)

Il problema però è che quando la radiazione solare *entra* nella struttura urbana deve fare i conti con la geometria che la caratterizza e con le caratteristiche termiche dei materiali degli edifici e degli altri elementi strutturali presenti. Essa viene riflessa dalle pareti verticali dei diversi edifici in varie direzioni e tutte le superfici con cui viene in contatto presentano coefficiente di

albedo ed emissività differenti, oltre che orientamenti orizzontali e verticali differenti. Il risultato è che inevitabilmente esistono nel tessuto urbano zone in cui preferenzialmente la radiazione solare viene *catturata* e perciò la temperatura delle varie superfici esposte varia da punto a punto facendo sì che la radiazione all'infrarosso emessa verso l'atmosfera vari di conseguenza. Per chiarire tutto ciò si faccia riferimento alla **Fig. 9.51** che mostra un raggio di radiazione ad onda corta che penetra in un canyon urbano (parte *a* della figura) e viene riflesso una prima volta (parte *b* della figura) da una delle due pareti del canyon in molte direzioni differenti a causa della disomogeneità geometrica ed ottica della parete. Da queste prime riflessioni se ne generano moltissime altre che coinvolgono l'altra parete del canyon e che rimbalzano nel canyon generando uno stato di *riflessioni multiple.* Cercare di tener conto di tutta questa complessità geometrica è impresa ardua come mostrano per esempio i lavori di Sakakibara (1996), Kusaka e al. (2001) e Soux e al. (2004).

Un modo meno complesso è quello di abbandonare la visione locale del problema ed adottare una visione maggiormente globale. Immaginiamo di considerare una porzione più o meno grande dell'area urbana (a seconda delle finalità che ci si prefigge) e stendiamo su di essa una sorta di superficie che inviluppa la parte superiore dell'intera area considerata. A questo punto si ipotizzi di porre della strumentazione radiometrica (piranometri, pirgeometri e net-radiometri) ad una quota tale da *vedere* tutta questa superficie e naturalmente la radiazione ad onda lunga e corta proveniente dall'alto (Offerle e al., 2003). Così facendo è possibile realizzare il consueto bilancio radiativo che è espresso come:

$$R_N = K_\downarrow - K_\uparrow + L_\downarrow - L_\uparrow \qquad [9.41]$$

Il termine $K\downarrow$ è la consueta radiazione solare globale che è la vera variabile esterna del sistema. Essa è perturbata dalla presenza della città solo per il fatto che normalmente nelle aree urbane la presenza di sostanze inquinanti nell'aria è maggiore che nelle aree rurali, cosa che influenza anche il termine $L\downarrow$, cioè la radiazione infrarossa atmosferica, altrimenti non modificata dalla presenza dell'area urbana.

La prima vera complicazione l'abbiamo considerando il termine radiativo ad onda corta $K\uparrow$, cioè l'albedo. Quello che vede questo ipotetico radiometro posto sopra l'area urbana è il *risultato finale* proveniente da un *mix* di differenti materiali (alberi, prati, strade, parcheggi in cemento, parcheggi asfaltati, marciapiedi, pareti verticali degli edifici variamente orientate e di materiale più o meno riflettente, tetti di varia inclinazione e realizzati con materiali differenti) aventi tutti proprietà ottiche differenti oltre che da riflessioni complesse generate dalla geometria delle strutture edilizie (Sailor e Fan, 2002). Questo sensore misurerebbe una radiazione ad onda corta $K\uparrow$ *media* dell'intera zona e quindi un coefficiente di albedo effettivo α che mediamente presenta il valore tipico di 0.15. Chiaramente con il variare dell'angolo di elevazione solare, varieranno le riflessioni all'interno delle strutture edilizie e quindi anche il coefficiente di albedo. Si è visto (Offerle e al., 2003) che si può ragionevolmente individuare la relazione seguente tra il coefficiente di albedo α l'angolo di elevazione solare ψ:

$$\alpha(\psi) = \alpha_0 + (1 - \alpha_0)\, exp[-0.2\psi - (1 - \alpha_0)/2] \qquad [9.42]$$

dove α_0 è il coefficiente d'albedo corrispondente al massimo angolo di elevazione solare.

L'ultimo termine del bilancio radiativo è costituito dalla radiazione infrarossa emessa dalla città che è il risultato del riscaldamento differenziale che hanno le diverse strutture presenti nell'area urbana e della diversa emissività propria dei vari materiali di cui sono fatte. Offerle e al. (2003) presentano una trattazione fenomenologica del problema, mostrandone l'enorme complessità, ma giungendo anche ad una parametrizzazione relativamente semplice di $L\uparrow$ basata sulla conoscenza di una emissività efficace ε_0 e di una temperatura efficace dell'aria T_a, sostanzialmente la temperatura caratteristica della superficie d'inviluppo dell'area urbana. Questa parametrizzazione è rappresentata dalla relazione seguente:

$$L_\uparrow = \varepsilon_0 \sigma T_a^4 + 0.08K_\downarrow(1 - \alpha) + (1 - \varepsilon_0)L_\downarrow \qquad [9.43]$$

dove σ è la costante di Stefan-Boltzmann.

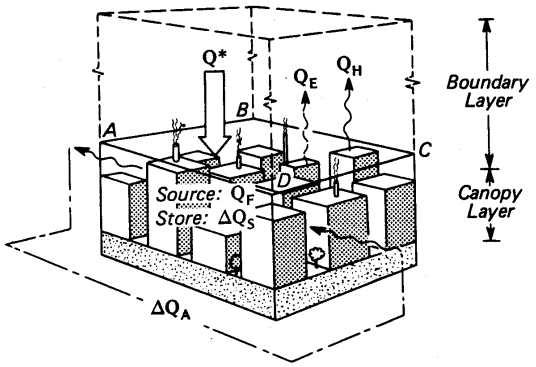


Fig. 9.52: volume di controllo per il bilancio energetico dell'ambiente urbano (Oke, 1987).

Per realizzare un bilancio energetico in un ambiente urbano è necessario selezionare un opportuno volume di studio che deve essere costituito dalla città e dal sovrastante strato limite, come illustrato nella **Fig.9.52**. Come abbiamo visto, la struttura urbana è di norma estremamente eterogenea e ciò comporta che la scelta e le dimensioni del volume di controllo determinino il risultato finale del bilancio energetico. Infatti, se il volume di controllo abbraccia l'intera città, il risultato è un bilancio globale cittadino e come tale dovrà essere considerato. Se invece si suddivide la città in porzioni di dimensioni limitate seguendo specifici criteri, per esempio l'omogeneità della porzione di città considerata, si avrà un bilancio energetico per ciascuna di queste porzioni e questi bilanci potranno essere tra loro molto differenti. Comunque, una volta selezionato un volume di controllo, il *bilancio energetico* relativo a tale volume è dato da:

$$R_N + Q_F = H_0 + H_E + \Delta Q_S + \Delta Q_A \qquad [9.44]$$

In sostanza questo bilancio asserisce che l'energia di cui dispone il volume di controllo, costituita dalla radiazione netta R_N e dal calore ivi prodotto dalle attività umane Q_F, viene trasformata in flusso turbolento di calore sensibile H_0 e latente H_E. Oltre a ciò, la struttura della città (edifici, strade, manufatti vari, ecc.) immagazzina/rilascia calore ΔQ_S che è un termine importante del bilancio energetico a differenza di quanto accade per l'ambiente rurale. Chiude poi il bilancio il termine ΔQ_A che rappresenta il calore trasportato per avvezione. La specificità dell'ambiente urbano è tale da richiedere un attento studio dei vari termini del bilancio e a tal fine facciamo riferimento ai lavori di Oke e McCaughey(1983), Grimmon e Oke (2002), Masson e al. (2002).

La prima cosa interessante del bilancio energetico urbano è la presenza del calore derivante dalle attività umane Q_F che rappresenta un ulteriore termine di sorgente, oltre a quello derivante dal bilancio radiativo. Questo termine rappresenta il calore prodotto dalle diverse attività umane presenti nel volume di controllo considerato, in particolare dalla combustione nei motori degli autoveicoli che transitano nella zona e dalla combustione dedicata al riscaldamento degli edifici durante il periodo invernale. Normalmente questo termine non è trascurabile e dipende dalla popolazione residente e dal traffico degli autoveicoli nelle strade.

Un primo e normale utilizzo dell'energia disponibile nel volume di controllo è la sua conversione in flusso turbolento di calore sensibile e latente, quindi in movimento turbolento locale delle masse d'aria ed in evapotraspirazione. Innanzitutto va sottolineato che i due flussi turbolenti sono fortemente legati alle strutture edilizie presenti nel volume di controllo. Infatti, la presenza di un parco di medie-grandi dimensioni fa sì che H_0 e H_E presentino un andamento giornaliero molto simile a quello tipico delle zone rurali, mentre se nel volume di controllo sono presenti in prevalenza edifici di vario genere e di varie forme e superfici *impermeabili non edificate* come parcheggi, strade, marciapiedi, ecc. la situazione dovrebbe essere molto diversa. In effetti così è! Nei casi in cui è preponderante la presenza di superfici edificate e di superfici impermeabili il flusso turbolento di calore latente è molto ridotto vista la pratica assenza di acqua da evaporare, mentre il flusso turbolento di calore sensibile presenta almeno due aspetti curiosi.

In primo luogo si nota immediatamente che molto frequentemente i suoi valori notturni sono positivi o al massimo prossimi allo zero e ciò deriva dal fatto che durante le ore diurne la struttura urbana edificata immagazzina notevoli quantità di calore che rilascia nelle ore notturne. Inoltre, sempre per l'inerzia derivante dalla presenza di queste masse edificate, pur in presenza di un andamento diurno simmetrico di R_N, H_0 normalmente non presenta un corrispondente andamento simmetrico, ma presenta valori maggiori nelle ore pomeridiane (Ciardini e al. 2019; Sozzi e al. 2020).

Il termine più interessante è il termine di *storage termico* e rappresenta l'assorbimento o il rilascio di energia per unità di area derivante dalla grande capacità termica delle strutture edilizie urbane. Se consideriamo la **Fig. 9.53** in cui è presentato l'andamento di ΔQ_S con la radiazione netta (che nella figura è indicata col simbolo Q^*) nella zona urbana di Vancouver, possiamo fare due considerazioni di estremo interesse.

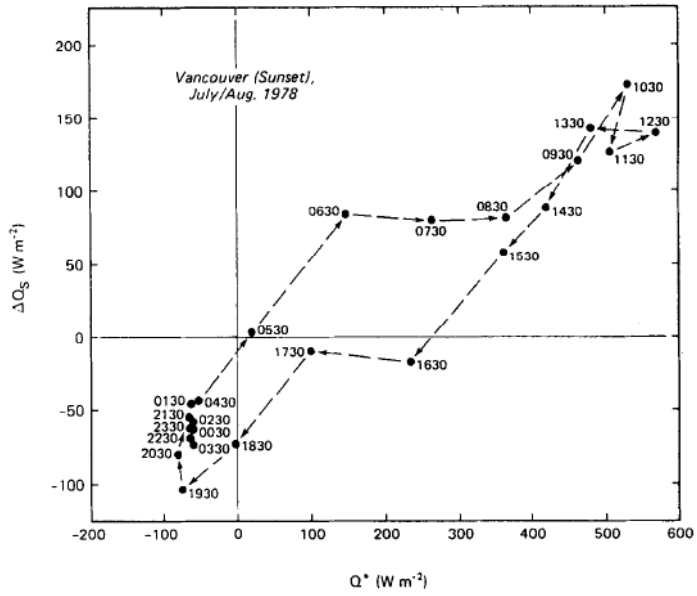


Fig. 9.53: lo storage termico ΔQ_S in funzione della radiazione netta Q nella zona urbana di Vancouver (Oke e Cleugh, 1987)*

In primo luogo l'entità di questo termine non è per nulla trascurabile e rappresenta una frazione significativa della radiazione netta. In secondo luogo, la relazione tra *storage* termico e radiazione netta presenta un'evidente *isteresi*. Questo termine, vista la sua importanza è stato molto studiato (Oke e Cleugh, 1987; Grimmond e Oke 1999a) e si è giunti alla formulazione di un modello soddisfacente che lo mette in relazione alla radiazione netta. Questo modello, per tener conto dell'isteresi evidente, ipotizza che ΔQ_S sia costituito da tre termini distinti: un primo termine tiene conto della dipendenza diretta dello *storage* dalla radiazione netta, un secondo termine lo mette in relazione con la variazione col tempo di R_N ed un terzo termine tiene conto dello sfasamento temporale tra ΔQ_S e R_N. Ma questa è solo la struttura logica del modello. Infatti, lo *storage* termico deriva dagli elementi strutturali presenti sulla superficie del volume di controllo che possono essere i più vari (alberi, prati parchi, edifici variamente orientati, parcheggi cementati e asfaltati, marciapiedi, ecc.) e differire profondamente in zone diverse della città. In realtà ognuno di questi elementi strutturali presenta proprie caratteristiche di *storage* termico. Se consideriamo N elementi strutturali tipo ed indichiamo con f_i la frazione di area occupata da questo elemento strutturale nel volume di controllo considerato (cioè nella porzione di area urbana studiata), lo *storage* termico presentato complessivamente dal volume di controllo risulterà pari a:

$$\Delta Q_S = \sum_{i=1}^{N}[f_i a_{1i} R_N] + \sum_{i=1}^{N}\left[f_i a_{2i}\frac{\partial R_N}{\partial t}\right] + \sum_{i=1}^{N}[f_i a_{3i}] \qquad [9.45]$$

I coefficienti numerici a_1, a_2 e a_3 differiscono da elemento strutturale ad elemento strutturale e, sulla base delle misure disponibili a_1 varia da 0.29 a 074, a_2 varia da 0.07 a 0.70 e a_3 (Wm^{-2}) varia da -28 a -57. In Masson e al. (2002) e in Grimmond e Oke (2002) sono raccolti i valori dei tre coefficienti numerici relativi ai principali elementi strutturali presenti nelle aree urbane.

L'ultimo termine del bilancio ΔQ_A rappresenta l'avvezione di calore. Questo termine è di difficile determinazione e di peso variabile e non sorprende la sua presenza visto che una delle caratteristiche principali di un'area urbana è la sua disomogeneità. Se vediamo un'estesa area urbana come un insieme di porzioni affiancate di territorio, singolarmente abbastanza omogenee, è intuitivo che a seconda del movimento delle masse d'aria in prossimità del suolo si verranno a creare tanti *IBL* o *TIBL* con relativi fenomeni avvettivi locali.

La misura dei vari termini del bilancio energetico è resa problematica dal fatto che misure troppo locali rappresentano dettagli troppo locali della realtà urbana, rendendo difficile realizzare una visione d'insieme. Anche se le misure di H_0 e H_E possono essere realizzate direttamente mettendo particolari cautele nello scegliere punti e quote di misura tali da avere un *footprint* sufficientemente vasto, forse è consigliabile adottare una modifica del metodo di Priestley-Taylor (si veda il paragrafo 8.6.1) secondo cui:

$$H_0 = \frac{(1-\beta)+(\gamma/s)}{1+}(\gamma/s)\cdot(R_N - \Delta Q_S) - \beta \qquad [9.46a]$$

$$H_E = \frac{\alpha}{1+(\gamma/s)}\cdot(R_N - \Delta Q_S) + \beta \qquad [9.46b]$$

Per i dettagli si rilegga il paragrafo 8.6.1 e si ricordi che valori tipici dei parametri numerici α e β sono rispettivamente 0.5 e 20. Questo metodo è totalmente basato sulla conoscenza della radiazione netta e del suo andamento col tempo. Infatti, una volta misurata o stimata convenientemente, da essa si può ottenere il termine di *storage* termico e con ciò si hanno tutti gli elementi per stimare i due flussi turbolenti.

9.5.3 ISOLA DI CALORE URBANA

La struttura della città, costituita da edifici, strade, superfici impermeabili, possiede una capacità termica notevolmente elevata, soprattutto se la si paragona all'analoga relativa alle aree rurali. Questa capacità termica è ulteriormente incrementata dalla presenza dei vari *canyon*, più o meno sviluppati, che non costituiscono solo una trappola (parziale o totale) per gli inquinanti, ma anche per la radiazione e l'energia. In effetti siamo di fronte a geometrie complesse costituite da superfici orizzontali, verticali ed oblique (variamente orientate) che riflettono (spesso con coefficienti di albedo molto differenti) la radiazione solare diretta. Di fatto sulle differenti superfici si potrà instaurare un differente bilancio radiativo e un differente bilancio energetico e il risultato finale sarà quasi sempre il fatto che la struttura a canyon risulta anche una *trappola di calore*. L'aria entro i vari canyon, e quindi l'aria della *canopy* urbana che ne è l'inviluppo, sarà mediamente più calda dell'aria presente al medesimo tempo nelle aree rurali. Questo fenomeno di maggior riscaldamento delle aree urbane rispetto alle rurali è noto col nome di *isola di calore urbana* (*Urban Heat Island, UHI*). Questo fenomeno, decisamente più evidente nelle grandi città a tutte le latitudini, è stato ampiamente studiato e come esempio tipico e storico di ciò è opportuno citare il lavoro di Jauregui (1997) a Città del Messico. Accanto allo studio sperimentale dell'isola di calore, sono stati prodotti vari lavori dedicati alla sua ricostruzione e previsione modellistica (esempi in questo senso sono i lavori di Vukovich e al. (1976), Borghi e al. (2000), Bonacquisti e al. (2006). L'evidenza di questo fenomeno la si ha sia dalle misure convenzionali di temperatura realizzate contemporaneamente nelle aree urbane e nelle zone suburbane e rurali che, con

maggiori dettagli, dalle misure realizzate da satellite (Nichol, 1996). Il parametro quantitativo usato per definire la portata di questo fenomeno è *l'intensità dell'isola di calore*, definito come:

$$\Delta T_{u-r} = T_{urbano} - T_{rurale} \qquad [9.47a]$$

Anche se questo parametro richiede una definizione più precisa se si vuole definire con un elevato grado di dettaglio spaziale l'isola di calore urbana, comunque è sufficiente per mostrarne le caratteristiche più significative. Un esempio è riportato nella **Fig. 9.54** in cui si mostra come può cambiare la temperatura dalle zone urbane al centro della città. Da questa figura si vede come normalmente ci sia un picco di ΔT_{u-r} nei pressi del centro della città, probabilmente in corrispondenza dei canyon più profondi e più stretti. Nelle zone meno densamente edificate l'intensità dell'isola di calore diminuisce ed è interessante notare come la presenza di un parco entro la città determini l'instaurarsi entro l'isola di calore urbano di un'*isola fredda.*

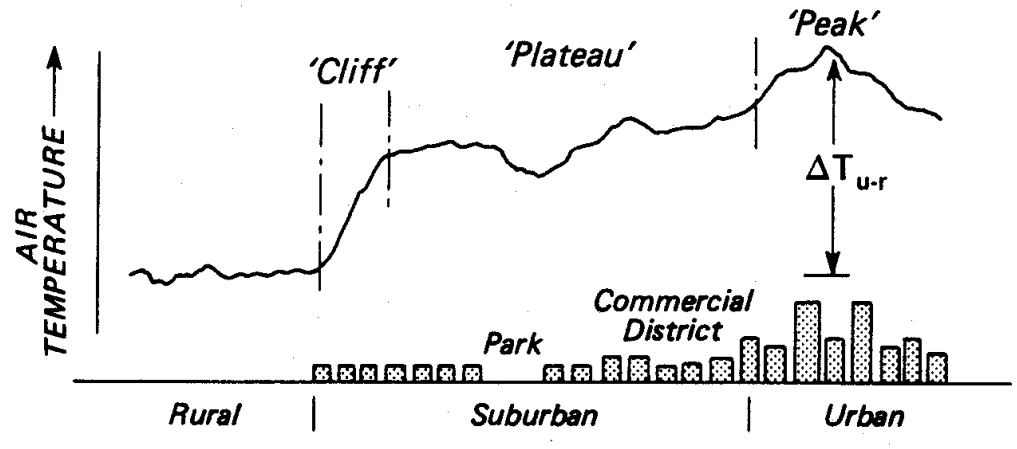


Fig. 9.54: l'isola di calore urbana (Oke, 1976)

La relazione (9.47a) dal punto di vista pratico è piuttosto *debole* visto che dipende *totalmente* dalla scelta fatta nell'individuare la postazione di misura di temperatura urbana e rurale. Nella complessa realtà delle grandi megalopoli tale scelta non è né chiara né scontata. Un metodo decisamente più oggettivo è stato introdotto recentemente da Schatz e al. (2014). Essi hanno impiegato le misure satellitari per quantificare la distribuzione spaziale delle superfici impermeabili (*impervious*). In pratica, una volta selezionata un'area, l'immagine satellitare relativa a quest'area sarà costituita da un insieme discreto di pixel contigui e per ognuno di essi viene individuata la percentuale di superficie impermeabile rispetto alla superficie totale, cioè l'indice *IMP* il cui valore può andare da 0 (nessuna superficie impermeabile) a 100 (tutta la superficie cui corrisponde il pixel è impermeabile). Ipotizziamo, poi, che nell'area considerata siano funzionanti delle stazioni meteorologiche che producono la misura della temperatura dell'aria. Ciascuna di queste postazioni di misura sarà caratterizzata da un ben preciso valore di *IMP*. Sperimentalmente si è visto che ad un generico istante *t* le coppie (indice IMP del luogo sede della postazione, temperatura misurata dalla postazione al tempo *t*) suggeriscono una relazione lineare del tipo:

$$T = b + a \cdot IMP \qquad [9.47b]$$

ed i parametri *a* e *b* della relazione possono essere stimati facilmente con un *best-fitting lineare.* Sulla base di tutto ciò l'intensità dell'isola di calore urbana viene definita (al tempo *t*) come:

$$\Delta T_{u-r} = T(IMP = 100) - T(IMP = 0) = 100 \cdot a \qquad [9.47c]$$

Questa definizione non presuppone la scelta di una coppia di postazioni di misura di temperatura ma tiene conto di tutte le misure disponibili nel territorio occupato dalla città e dai suoi dintorni.

L'intensità dell'isola di calore, a seconda della latitudine a cui si trova la città, può variare stagionalmente in maniera più o meno evidente (Schatz e Kucharik (2014). Ma, quando l'isola di

calore è sviluppata, ciò che le misure evidenziano è una spiccata variazione giornaliera con valori maggiori nelle ore notturne e valori minori nelle ore diurne, soprattutto in quelle pomeridiane. Oltre a ciò, è stato verificato che tale parametro dipende ovviamente dalla dimensione della città, dalla sua popolazione, dal tipo di struttura edilizia e di materiali di costruzione e dal tipo di viabilità cittadina prevalente. Inoltre, l'intensità dell'isola di calore presenta una notevole dipendenza dalla velocità del vento, decrescendo con l'aumentare di quest'ultima.

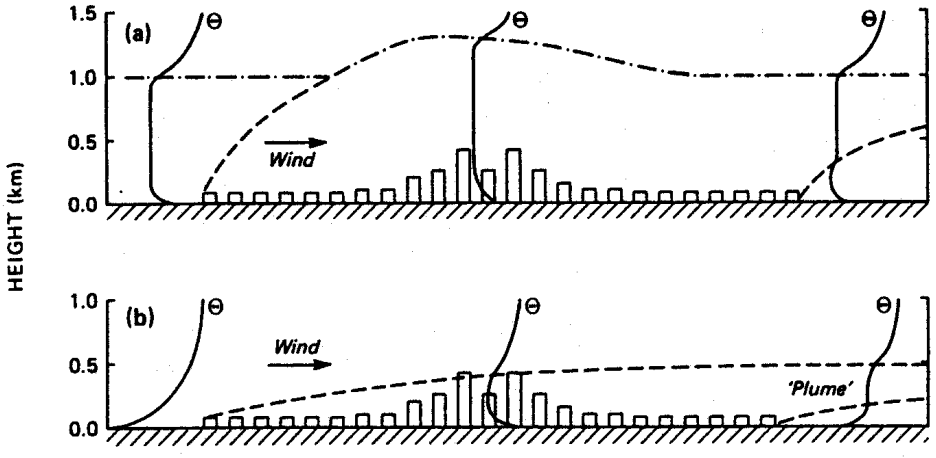


Fig. 9.55: profili verticali di temperatura potenziale in ambiente urbano (Oke, 1987)

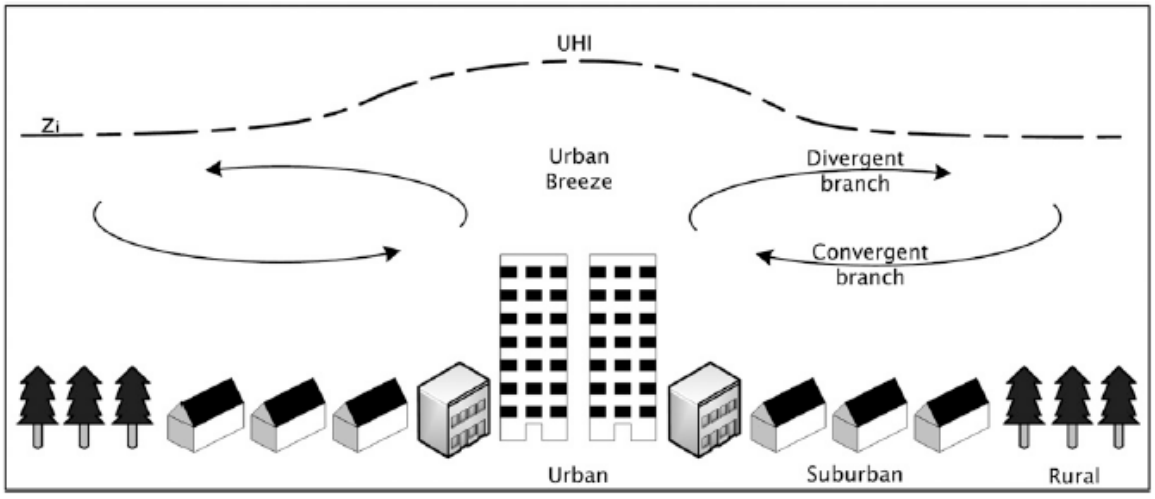


Fig. 9.56: la circolazione di brezza urbana (Hidalgo e al. 2010)

Per quanto abbiamo visto, l'elemento più evidente in una struttura urbana è la sua capacità di immagazzinare calore e la manifestazione dell'isola di calore ne è una dimostrazione immediata. Tuttavia, ancora più interessante è analizzare il profilo verticale della temperatura potenziale, come mostrato nella **Fig. 9.55**. Nella parte (*a*) sono mostrati i profili diurni. È immediatamente evidente come il tipico profilo verticale di temperatura potenziale riscontrato nella zona urbana sopravvento alla città venga modificato dalla presenza dell'isola di calore sia entro la città che nelle zone rurali immediatamente sottovento la città. La modificazione più profonda di tale profilo sta nel fatto che lo strato di *entrainment* si pone costantemente in corrispondenza della massima estensione verticale del *TIBL*. Molto più interessante è considerare la parte (*b*) dove sono rappresentati i profili notturni. Come si nota immediatamente, mentre nelle zone rurali soprav-

vento il profilo termico è tipicamente notturno, entro *l'Urban Boundary Layer* il profilo è sostanzialmente convettivo, e questa convettività deriva dal rilascio notturno di calore accumulato nelle ore diurne entro le strutture edilizie della città. La cosa ancor più interessante è la situazione nella zona rurale sottovento. Entro l*'Internal Boundary Layer* che si sviluppa immediatamente a valle delle città il profilo è tipicamente notturno. Nello strato tra la sommità di questo strato limite interno e il *TIBL* prodotto dalla città (il *pennacchio urbano*) il profilo è convettivo, mentre sopra il *TIBL* il profilo ritorna gradualmente ad essere stabile. L'evidenza o meno del *pennacchio urbano* e la sua direzione saranno dominati dalla velocità e dalla direzione del vento medio.

La presenza dell'isola di calore introduce perturbazioni anche sul movimento delle masse d'aria sopra la città, inducendo spesso una *circolazione di brezza urbana* (Hidalgo e al., 2010) che è la risposta a mesoscala dell'atmosfera alla variazione orizzontale della temperatura. La presenza dell'isola di calore determina gradienti orizzontali di pressione, moti convergenti a bassa quota verso il centro della città e moti divergenti che si vengono a formare sopra di essa. Come risultato l'aria più calda sale in quota sopra la città dando inizio ad una circolazione locale che richiama aria più fredda dalle aree rurali. Tutto ciò è chiaramente illustrato nella **Fig. 9.56** ed è evidenziato anche dalle simulazioni modellistiche realizzate impiegando sofisticati modelli fluidodinamici (Vukovich e al., 1976).

9.5.4 LA TURBOLENZA NELLA CANOPY URBANA

La complessità geometrica dell'*UBL* ci fa immaginare che la descrizione delle principali variabili che definiscono il moto dell'aria in questa porzione di *PBL* sia un'impresa difficile ed in effetti lo è, anche perché non è facile realizzare misure in campo che abbiano un chiaro significato e che siano ragionevolmente generalizzabili. Il lavoro di Roth (2000) fornisce un quadro sintetico dello stato dell'arte sulla conoscenza della turbolenza nelle aree urbane.

Ci sono due modi per cercare di descrivere il moto turbolento dell'aria entro l'*UBL*. Il primo prende in considerazione tutti i dettagli geometrici che caratterizzano l'area urbana che stiamo considerando e la tratta impiegando le *normali* relazioni fluidodinamiche. In questo caso non c'è alcun bisogno di generalizzare: per una data area urbana il modello fluidodinamico determina in ogni punto non occupato da una struttura (un edificio, un altro manufatto, alberi, ecc.) il valore dei valori medi e dei principali momenti delle variabili d'interesse. Questo metodo fa paura al solo nominarlo e può essere impiegato solo per simulazioni (comunque molto complesse) relative a porzioni limitate di territorio urbano e per intervalli temporali molto brevi. La seconda strada che si può perseguire è quella di ignorare totalmente i dettagli geometrici della città e trattare l'area urbana come una superficie estremamente rugosa caratterizzata dai parametri aerodinamici z_0 e d. In questo caso, come abbiamo già detto, dal suolo ($z = 0$) ad una certa quota z_* (che definiremo con maggior precisione tra poco) si estende una zona di atmosfera occupata parzialmente da aria e parzialmente da strutture solide (edifici) o porose (vegetazione) che abbiamo chiamato *Roughness Layer* (*RL*). Questo strato occupa solo la porzione inferiore del *SL* propriamente detto, mentre la sua porzione superiore è costituita dall'*Inertial Sublayer* dove la situazione è omogenea e i flussi sono circa costanti; quindi, valgono le relazioni della Similarità di Monin-Obukhov che già ben conosciamo (trattate al Capitolo 8). In particolare, nell'*Inertial Sublayer* il profilo del vento e della temperatura potenziale media sono logaritmici. Quindi, ciò che dobbiamo fare a questo punto è studiare la turbolenza entro il *RL* cercando, se possibile, di individuare delle relazioni di profilo che ci consentano, per esempio, di studiare e ricostruire fenomeni come la dispersione degli inquinanti in ambiente urbano. Quanto di seguito esposto fa riferimento ai lavori di Roth (2000) e di Rotach (1993a, 1993b, 2001).

Prima, però, di studiare la turbolenza entro il *RL*, è necessario tentare di quantificarne l'estensione verticale z_* che è inevitabilmente un parametro fondamentale. Dagli esperimenti in laboratorio e dalle misure in campo si è giunti alla conclusione che z_* è intimamente legato all'altezza media delle strutture urbane z_H presenti nell'area urbana considerata. In particolare si è visto che z_* è pari a 2÷3 volte z_H. Un altro modo interessante di definire z_*, che ha dato risultati molto

buoni, è quello di legarlo sia a z_H sia alla deviazione standard dell'altezza delle strutture urbane Δz_H rilevata nell'area considerata e più precisamente si è visto che:

$$z_* = z_H + \Delta z_H \qquad [9.48a]$$

La quota z_* rappresenta il limite superiore per il *RL*, ma anche il limite inferiore per l'*IS* dove valgono le relazioni della Similarità di Monin-Obukhov. Dato che l'*IS* è la parte del *SL* urbano in cui i flussi (di quantità di moto, di calore e di umidità) sono circa costanti, lo *stress* di Reynolds, una volta orientati gli assi cartesiani in modo da annullare la covarianza tra la componente trasversale del moto e la relativa componente verticale, è completamente definito da:

$$\tau = -\rho \cdot \overline{uw}^{IS} \qquad [9.48b]$$

circa costante in tutto l'*IS*. Quindi è possibile definire una *friction velocity* u_*^{IS} come:

$$u_*^{IS} = \sqrt{-\overline{uw}^{IS}} \qquad [9.48c]$$

che rappresenta una velocità di scala importante per la descrizione della turbolenza nel *RL*.

9.5.4.1 Il profilo della velocità media del vento e dello stress di Reynolds

Iniziamo il breve studio della turbolenza nel *RL* considerando il profilo verticale dello *stress* di Reynolds che risulta proporzionale a $-\overline{uw}$. Sulla base delle conoscenze acquisite nelle campagne sperimentali in ambiente urbano emerge un quadro sostanzialmente insolito rappresentato sinteticamente nella **Fig. 9.57**. Nell'*IS* (cioè per $z > z_*$) lo stress è circa costante come ci si aspettava valendo la Similarità di Monin-Obukhov, mentre nella parte superiore del *UBL* decresce linearmente con la quota secondo la relazione:

$$-\overline{uw} = (u_*^{IS})^2 \left(1 - \frac{z}{z_i}\right) \qquad [9.49]$$

dove con z_i si è indicata l'estensione verticale dell'*UBL*.

Il problema sta in ciò che avviene sotto di z_*. Infatti, lo stress diminuisce sempre più rapidamente fino ad annullarsi a $z = d$. Questo comportamento deriva dal fatto che il *RL* presenta forti analogie fluidodinamiche col *viscous sublayer* che abbiamo incontrato per una superficie non urbana. In questo strato, infatti, il moto del fluido più ci si avvicina alla superficie più diventa laminare e di conseguenza lo *stress* turbolento diminuisce con la quota. Ciò, come si è visto, avviene anche nel *RL*. Questa diminuzione con *z* dello stress è stata modellizzata sulla base delle misure ottenute nelle poche campagne sperimentali disponibili giungendo alle due relazioni seguenti, la prima riportata da Rotach (1993a):

$$\frac{u_*(z)}{u_*^{IS}} = C_1[1 - exp(-C_2 z')]^{1/3} \qquad [9.50a]$$

dove $C_1 = 1.19$ e $C_2 = 0.025$ e $z' = (z - d)$, mentre la seconda da Rotach (2001) risulta data da:

$$\left(\frac{u_*^l(z)}{u_*^{IS}}\right)^b = sin\left(\frac{\pi}{2}Z\right)^a \qquad [9.50b]$$

dove $u_*^l(z) = \sqrt{-\overline{uw}(z)}$, $Z = (z\text{-}d)/(z_*\text{-}d)$ e a e b valgono rispettivamente 1.28 e 3.0. Queste due relazioni riproducono molto bene le misure disponibili, come si può vedere nella **Fig. 9.58**.

A questo punto passiamo a considerare il profilo verticale della velocità del vento entro il *RL*. Le misure hanno evidenziato che esiste un legame *locale* tra la velocità media del vento $U(z)$ e lo stress $\overline{uw}(z)$ e questo legame rispetta una *versione locale* della relazione di Similarità di Monin-Obukhov. In pratica:

$$u_*^l(z') = \frac{dU}{dz} \cdot \frac{kz'}{\Phi_m(z'/L)} \qquad [9.51]$$

dove $z' = z - d$ e Φ_m è la Funzione Universale della Similarità di Monin-Obukhov per il gradiente della velocità media del vento. Quest'ultima presenta in argomento la lunghezza di Monin-Obukhov *L* che però in questo caso ha un significato locale: infatti per la sua definizione devono essere impiegati sia la *friction velocity* locale u_*^l sia il flusso turbolento di calore locale $\overline{w\theta}(z)$. Nella pratica possiamo trascurare la stratificazione termica del *RL* e quindi porre $\Phi_m = 1$.

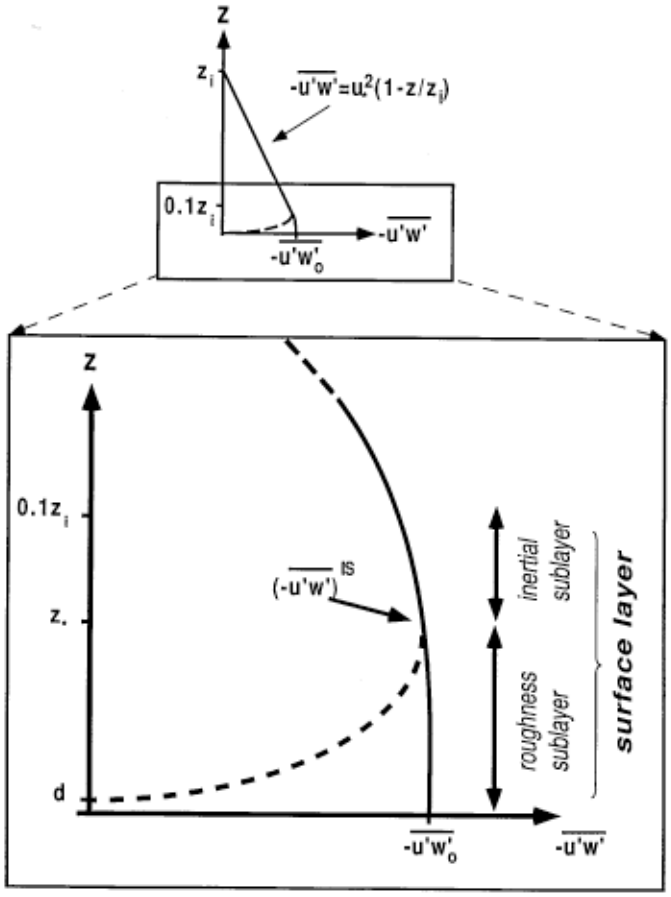


Fig. 9.57: profilo verticale dello stress di Reynolds in ambiente urbano (Rotach 2001)

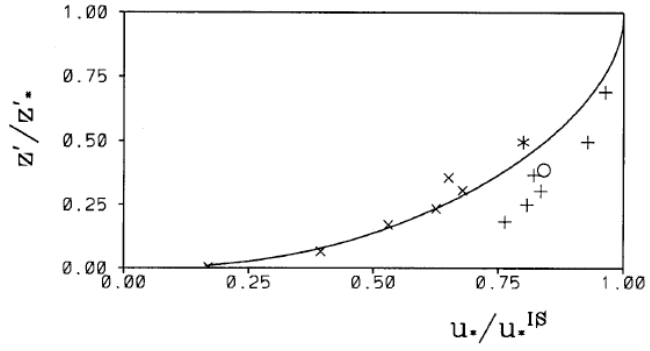


Fig. 9.58: andamento con la quota dello stress di Reynolds (Rotach 2001)

Sulla base di ciò (Rotach, 2001) è immediato ottenere il profilo verticale della velocità media del vento entro il *RL*. Infatti per ogni quota *z*' conosciamo il valore locale della covarianza tra la componente orizzontale e verticale del moto. A questo punto il profilo della velocità media del vento la si ottiene integrando la (9.51) da $z = d$ a $z = z_*$. Nella **Fig. 9.59** viene mostrata una visione complessiva del profilo verticale della velocità media del vento nella parte superficiale

dell'*UBL* ottenuta da MacDonald (2000).

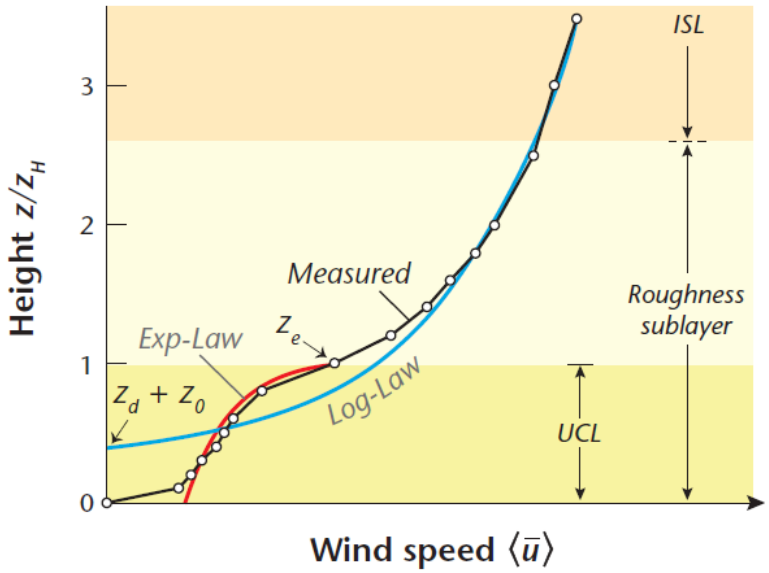


Fig. 9.59: il profilo verticale cella velocità media del vento nel Surface Layer Urbano (MacDonald 2000; Oke e al., 2017)

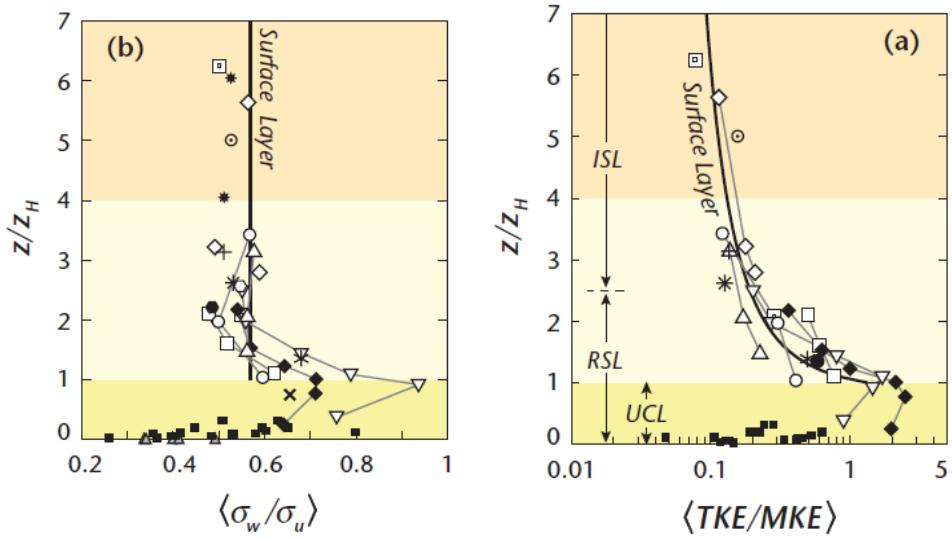


Fig. 9.60: rapporto di anisotropia nel SL urbano (a sinistra) e rapporto tra energia cinetica turbolenta ed energia cinetica media (a destra) (Oke e al. 2017)

9.5.4.2 Le varianze delle componenti del moto e degli scalari

Le misure disponibili, soprattutto quelle entro il *RL*, sono veramente limitate ed i ragionamenti che faremo non possono essere considerati conclusivi.

Se consideriamo la parte dell'*UBL* sopra il *RL*, il profilo verticale delle varianze delle componenti del moto e degli scalari nelle varie situazioni di stabilità sembrano essere ben descritte dalle relazioni di profilo valide per un normale *PBL* nelle medesime condizioni di stabilità. Queste affermazioni sono supportate dalle misure realizzate a Pechino con una torre alta 325 m (Al-Jiboori e al. 2002; Al-Jiboori, 2008, Fortuniak e al., 2013).

Per quanto riguarda il *RL*, Rotach (1993b) e Roth e Oke (1995) sostanzialmente affermano che anche in questo caso possono essere impiegate le normali relazioni di Similarità, purché sia la friction velocity che il flusso turbolento presenti nella definizione della lunghezza di Monin-Obukhov *L* siano quelli *locali*. Il fatto di dover considerare il valore locale per il flusso turbolento di calore sensibile sarebbe un problema pratico se non fosse che il *RL* a tutti gli effetti può essere considerato sostanzialmente adiabatico.

Oke e al. (2017), organizzando i risultati ottenuti in numerose campagne sperimentali, mostrano (**Fig. 9.60**, a sinistra) come varia il rapporto tra σ_w/σ_u, che rappresenta l'anisotropia della turbolenza con la quota. È interessante notare come questo rapporto raggiunga un valore massimo quando $z = z_h$ e rapidamente si riduca al valore tipico di un normale *SL* in condizioni adiabatiche pari a circa 0.6. Un'altra informazione interessante è costituita dal profilo verticale entro il *SL* urbano del rapporto tra l'energia cinetica turbolenta *TKE* (cioè la semi-somma della varianza delle tre componenti del moto) e la *MKE* cioè la semi-somma del quadrato del valor medio delle tre componenti del moto (**Fig. 9.60**, a destra). Anche in questo caso il rapporto raggiunge un valore massimo quando $z = z_h$, per poi ridursi progressivamente alle quote superiori.

9.5.4.3 L'estensione verticale dell'UBL

L'*UBL* di fatto è un *TIBL* generato dalla enorme rugosità presentata dall'area urbana al passaggio delle masse d'aria e dall'isola di calore da essa prodotta. Quindi parrebbe logico determinare l'estensione verticale dell'*UBL* esattamente con gli stessi modelli proposti per il *TIBL*. In effetti il tema è stato trattato estesamente e sistematicamente dal COST-715 Action (Working Group 2) e nel Rapporto Finale di questa attività di ricerca europea viene fatto il punto della situazione (Piringer e Joffre, 2005). Sulla base di tutto ciò ed anche sulla base delle evidenze sperimentali (Pal e al. 2012) si può affermare con ragionevole certezza che i modelli utilizzati per stimare il *TIBL* possono essere utilizzati anche per la stima dell'*UBL*.

9.5.5 ALCUNE CARATTERISTICHE DELLA CANOPY URBANA

Fin qui non abbiamo considerato esplicitamente la struttura geometrica della *Canopy Urbana* ed abbiamo trattato l'area urbana come una particolare superficie molto rugosa e già così la complessità era rilevante. Molto più complesso è analizzare nel dettaglio la sua struttura geometrica e morfologica interna.

Per prima cosa l'interno di una città può essere visto come l'insieme variamente organizzato di edifici, schematizzabili come parallelepipedi regolari di varie dimensioni. Per avere un'idea preliminare delle perturbazioni a microscala prodotte dalle strutture edilizie conviene iniziare considerando un edificio isolato e cercando di individuare le caratteristiche delle perturbazioni indotte sul movimento delle masse d'aria che lo raggiungono. Per fare ciò è indispensabile realizzare accurate simulazioni fisiche in galleria del vento e complesse e laboriose ricostruzioni modellistiche. In pratica, ciò che si ottiene è rappresentato nella **Fig. 9.61** tratta da Oke e al. (2017)**.** Come si nota, la presenza dell'edificio fa sì che il flusso d'aria che lo raggiunge per prima cosa devii verso l'alto e verso i lati dividendosi in tre flussi secondari che si ricongiungono una volta superato e aggirato l'ostacolo. Ma tutto ciò induce inevitabilmente una serie di effetti secondari. Il primo è la presenza di *una zona di stagnazione sopravvento* e la seconda è la presenza di un *vortice sottovento*. Inoltre, il ricongiungimento dei tre flussi d'aria che superano l'ostacolo lo si ha effettivamente piuttosto a valle dello stesso a causa della presenza di una scia turbolenta che si genera subito a valle del vortice sottovento. Dato che non è semplice immaginarsi effettivamente tutti questi flussi d'aria, per completare la visione fornita dalla **Fig. 9.61** conviene considerare anche la **Fig. 9.62** dove vengono riprodotte le stesse informazioni, ma in modo tridimensionale.

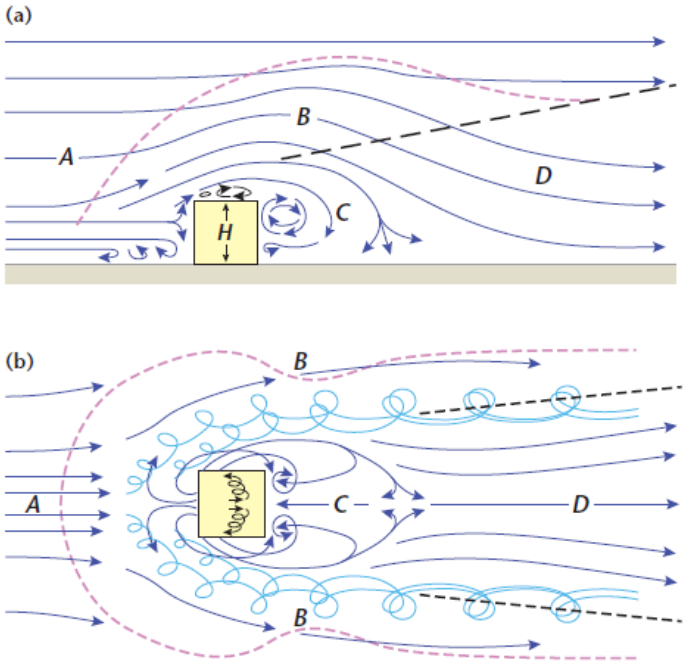


Fig. 9.61: perturbazioni fluidodinamiche indotte dalla presenza di un singolo ostacolo. Visione 2D (Oke e al. 2017)

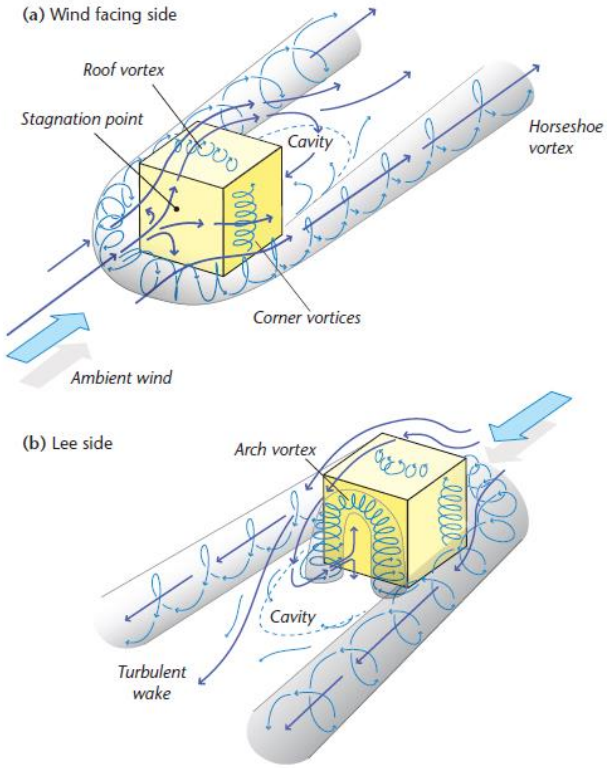


Fig. 9.62: perturbazioni fluidodinamiche indotte dalla presenza di un singolo ostacolo. Visione 3D (Oke e al. 2017)

Se consideriamo il profilo verticale della velocità media del vento, esso sarà imperturbato e circa logaritmico a monte dell'edificio e subirà una serie di profonde perturbazioni quando le masse d'aria lo superano e l'abbandonano. Ciò che effettivamente avviene è mostrato nella **Fig. 9.63**.

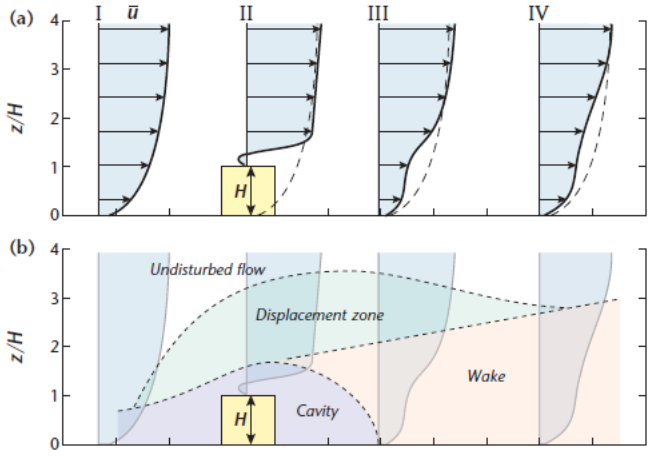


Fig. 9.63: variazione del profilo verticale della velocità media del vento in presenza dell'edificio (parte a). Per riferimento, nella parte (b) vengono mostrate le varie zone in cui l'edificio perturba il moto dell'aria (Oke e al. 2017)

Come si vede, una volta superato l'edificio, il profilo verticale della velocità media del vento rimane perturbato finché resta nella sua scia e ritorna logaritmico solo a notevoli distanze sottovento quando la scia dell'edificio si è esaurita.

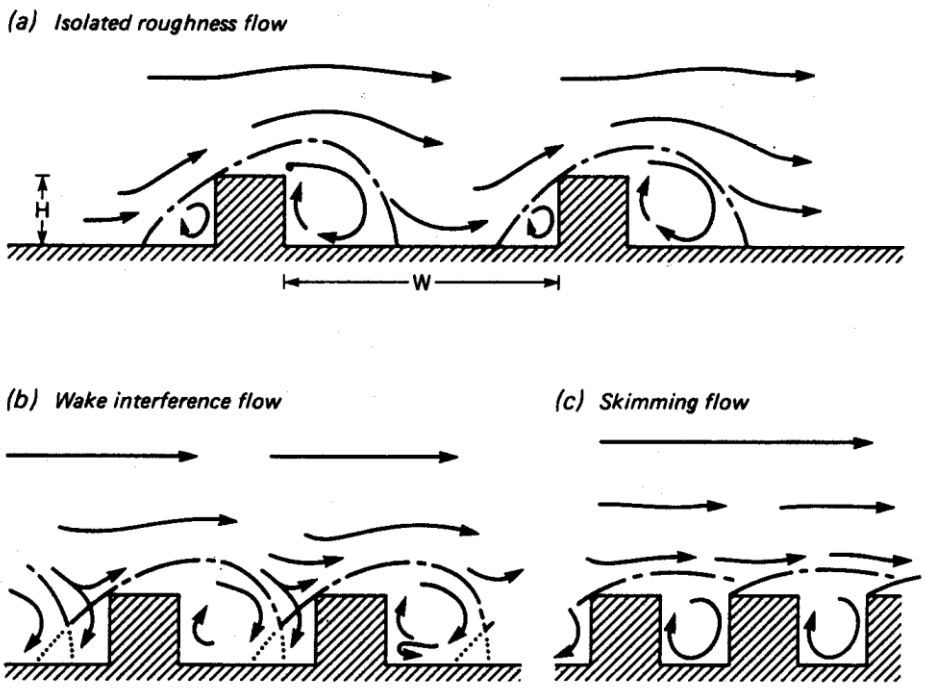


Fig. 9.64: canyon urbano (Oke, 1987)

Sfortunatamente in una città gli edifici sono molti e ravvicinati e spesso creano dei veri e propri *canyon* entro i quali sono collocate le strade, che costituiscono le principali sorgenti di

inquinamento cittadino. Se il *canyon* è molto largo, come nella parte (*a*) di **Fig. 9.64**, quello che si nota è il normale *vortice sottovento* ad un edificio isolato e ciò ha luogo quando, detto *H* l'altezza dell'edificio e *W* la sua dimensione orizzontale lungo la direzione del vento, *H/W*<0.4. Le cose si complicano quando *H/W* aumenta fino a 0.7, perché, come si vede nella parte (*b*) della figura gli edifici incominciano ad interferire gli uni con gli altri, dando luogo ad un debole disaccoppiamento tra l'aria che scorre al di sopra degli edifici e l'aria che sta tra di essi. Se si supera il valore di 0.7 per *H/W*, si viene a creare un vero e proprio *canyon urbano*, cioè una porzione di aria confinata tra due file di edifici quasi completamente disaccoppiata dall'aria sovrastante, in cui si instaurano uno o due vortici, a volte permanenti ed a volte intermittenti, che scambiano aria con l'atmosfera sovrastante mediante un debole effetto di *entrainment*. Questa situazione è la classica situazione che si riscontra nella maggior parte del centro cittadino delle più popolate città del mondo. Gli inquinanti emessi dagli autoveicoli entro il canyon vengono di fatto intrappolati in questa struttura producendo elevati livelli di inquinamento dell'aria. La situazione è quindi quella descritta nella **Fig. 8.65**, in cui è mostrato anche il meccanismo con cui emissioni prodotte alla sommità di edifici elevati viene *risucchiata* dal canyon che si è instaurato nelle loro vicinanze.

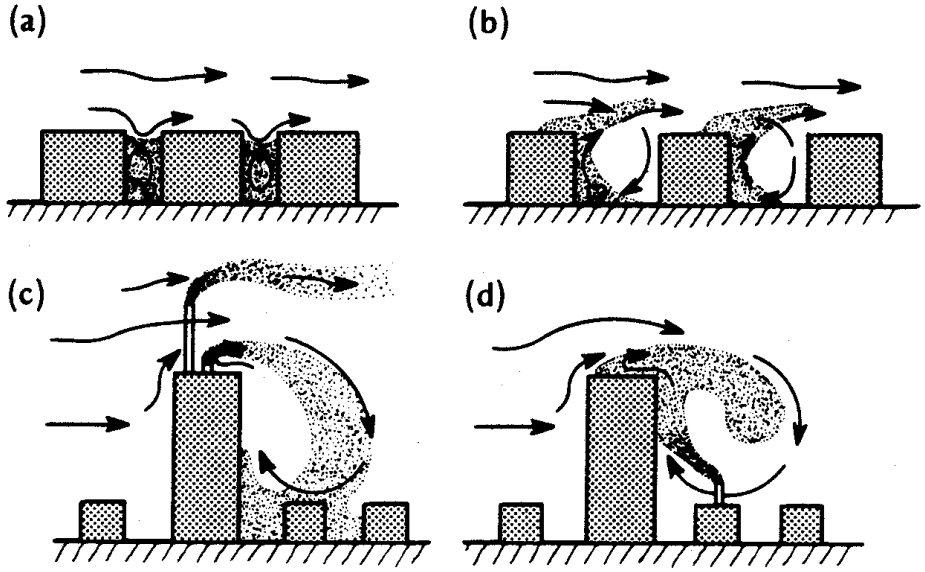


Fig. 8.65: problemi di inquinamento in un canyon urbano (Oke, 1987)

La presenza o meno di vortici entro un *canyon urbano* dipende da molti fattori. Riassumendo quanto riportato da Yamartino e Wiegard (1986), Lee e Park (1994) e Baik e Kim (1999), si ha che:

- la presenza o meno di vortici in un *canyon urbano* dipende principalmente dall'angolo θ tra la direzione del vento sopra la città e la direzione dell'asse del canyon. Solo venti con $\theta < 20°$ non danno luogo a vortici entro il canyon;
- la combinazione tra il *coefficiente di forma* del canyon (*H/W*) e la velocità media del vento al di sopra dello stesso determina il numero di vortici che si vengono a generare. Per un coefficiente di forma pari a 1.5, una velocità media del vento sopra gli edifici di 1.2 $m \cdot s^{-1}$ già è in grado di produrre un vortice ed una di 3.7 $m \cdot s^{-1}$ di produrne due. Tali soglie si abbassano con l'aumentare del coefficiente di forma del canyon;
- nel caso della presenza nel *canyon* di un solo vortice, la componente *u* e *w* del vento rispettivamente trasversale e verticale rispetto all'asse del canyon possono essere ottenuti dal semplice modello di Hotchkiss e Harlow (1973). Se si utilizza il sistema di riferimento riportato in **Fig. 9.66**, si ha che:

$$u = \frac{u_0}{1-\beta} \cdot \left\{ \gamma(1+ky) - \beta \cdot \frac{(1-ky)}{\gamma} \right\} \cdot sin(kx) \qquad [9.52a]$$

$$w = -u_0 ky \cdot \frac{(\gamma - \beta/\gamma)}{1-\beta} \cdot cos(kx) \qquad [9.52b]$$

In queste relazioni u_0 è la velocità media del vento al di sopra del *canyon* (quindi nella posizione $x = W/2$ e $z = H$), $k = \pi/W$, $\beta = \exp(-2kH)$, $\gamma = \exp(ky)$ e $y = z - H$.

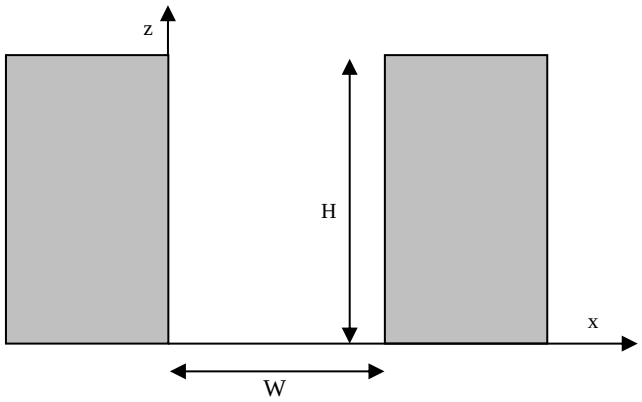


Fig. 9.66: geometria di un canyon urbano.

- la componente del vento lungo l'asse del *canyon* può essere posta, in prima approssimazione pari a:

$$v(z) = v_r \cdot ln\left(\frac{z+z_0}{z_0}\right) \Big/ ln\left(\frac{z_r+z_0}{z_0}\right) \qquad [9.52c]$$

La velocità v_r è il valore di riferimento della velocità lungo l'asse del *canyon*, calcolata a $x = W/2$ e $z = H$ e data da:

$$v_r = u_0\, cos(\theta) \qquad [9.52d]$$

dove con θ si è indicato l'angolo tra la direzione di provenienza del vento sopra il canyon e l'asse dello stesso

Tutte queste caratteristiche dei *canyon* urbani sono state individuate o da esperimenti in galleria del vento (Kastner-Klein e al., 2001) o da ingegnose e complesse campagne sperimentali (per esempio: Longley e al., 2004; Idczak e al., 2007; Nelson e al, 2007a e 2007b; Pol e al., 2008) e sono state poi riprodotte in numerose e complicate simulazioni numeriche tra le quali val la pena citare i lavori di Lee e Park (1994), Baik e Kim (1999, 2001), Louka e al. (2000) e Jeong e Andrews (2002).

Ma una struttura urbana tipica vede la presenza di canyon che si intersecano tra loro e con ciò la complicazione aumenta a dismisura. Qui di seguito vale la pena solo presentare alcune illustrazioni che riassumono i risultati ottenuti da complessi esperimenti modellistici e da complesse simulazioni fisiche in laboratorio che tentano di far luce su tutto ciò. Nella **Fig. 9.67** vengono mostrate quattro rappresentazioni 2D del campo di moto medio in due canyon urbani che si intersecano a seconda della direzione di provenienza del vento sopra l'*UCL*. Come si nota la situazione che emerge è di una complessità eccezionale in cui sempre, in corrispondenza dell'intersezione, è presente almeno un vortice che alla fine determina sostanzialmente una zona di stagnazione. Se si considera, poi, la **Fig. 9.68** che è una visione 3D del moto dell'aria in corrispondenza dell'incrocio di due canyon con una direzione del vento diagonale rispetto all'asse di entrambi, notiamo come la presenza di queste strutture non produca un semplice incanalamento delle masse d'aria, ma attribuisca ad esse anche un curioso movimento elicoidale.

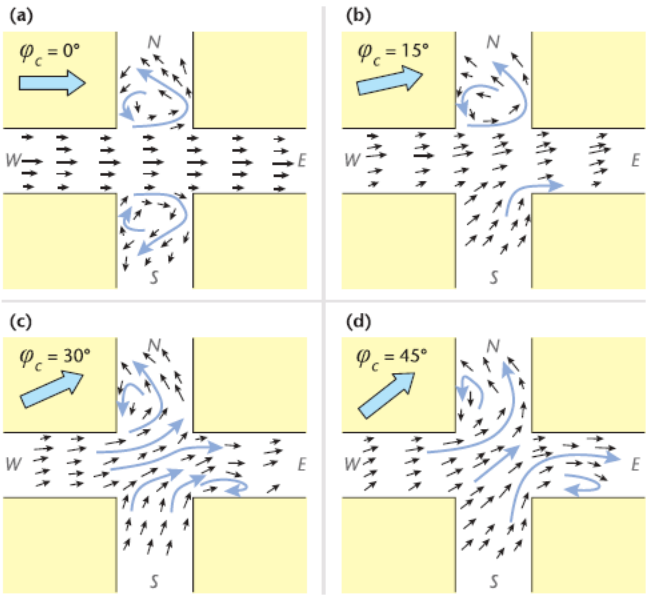


Fig. 9.67: campo 2D (orizzontale) del vento in corrispondenza dell'incrocio di due canyon urbani al variare della direzione di provenienza del vento alla sommità dell'UCL

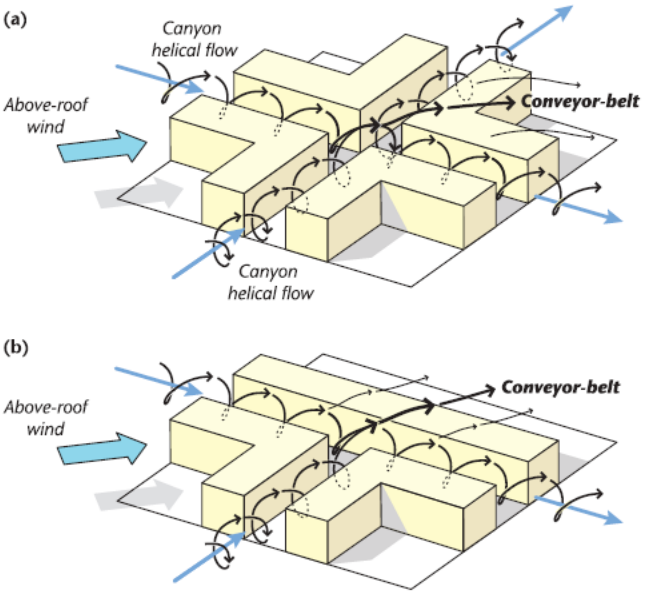


Fig. 9.68: visione 3D del campo di moto medio delle masse d'aria entro due canyon urbani che si incrociano.

PROBLEMI

P09.01 Si consideri una misura di friction velocity realizzata da una nave oceanografica e sia $u_* = 0.5$ m/s il valore misurato. Valutare la differenza tra la rugosità superficiale ottenuta impiegando l'equazione di Charnock e quella che si ottiene con la relazione di Grachev e Fairall.

P09.02 Si consideri un ambiente marino in condizioni adiabatiche e si misuri una velocità media del vento di 5 m/s ad una quota di 3 m. Quanto vale u_*?

P09.03 Si consideri un ambiente marino in condizioni adiabatiche e si misuri una velocità media del vento di 3 m/s ad una quota di 3 m. Determinare il coefficiente di drag C_{DN} con la relazione (9.6a).

P09.04 Si consideri un ambiente marino in condizioni leggermente convettive in cui la velocità media del vento è pari a $U = 3.0$ m/s ed il flusso turbolento di calore sensibile è $H_0 = 70$ W/m^2. Con questi elementi si determini dalla relazione (9.10) il coefficiente di drag in condizioni adiabatiche C_{DN} ed il coefficiente di drag effettivo C_D.

P09.05 Si considerino due piantagioni affiancate. Le masse d'aria prima transitano su una delle due caratterizzata da $z_{01} = 0.05$ m e poi sull'altra caratterizzata da $z_{02} = 0.3$ m. Calcolare l'andamento con la distanza dall'interfaccia che separa le due piantagioni dello spessore δ del IBL da $x = 0$ a $x =$ 1500 metri utilizzando il modello di Elliott (9.13).

.

P09.06 Si considerino due piantagioni affiancate. Le masse d'aria prima transitano su una delle due caratterizzata da $z_{01} = 0.05$ m e poi sull'altra caratterizzata da $z_{02} = 0.3$ m. Calcolare l'andamento con la distanza dall'interfaccia che separa le due piantagioni dello spessore δ del IBL da $x = 0$ a $x =$ 1500 metri utilizzando il modello di Miyake (9.14).

P09.07 Calcolare l'andamento con la distanza dalla costa verso l'entroterra dello spessore verticale del TIBL quando sull'entroterra si stabilisce un $H_0 = 300$ W/m^2 e la velocità del vento è pari a 1 m/s. (Si consideri $\gamma = 0.001$ K/m) impiegando la formula di Arya (9.18a).

P09.08 Si consideri un ambiente urbano in cui l'altezza media delle strutture edilizie è di $z_H = 12$ m con una variabilità $\Delta z_H = 11$ m e lo zero-plane displacement height è $d = 5$ m. Determinare l'estensione verticale del Roughness Sublayer (RS) z_* e, utilizzando la (9.50b), il profilo verticale del rapporto tra la friction velocity ad una generica quota z ($d<z<z_*$) e la friction velocity di riferimento alla sommità del Roughness Sublayer, cioè alla quota z_*.

P09.09 Si consideri un canyon urbano avente altezza H e larghezza W pari rispettivamente a 30 e 20 metri. Si ipotizzi, poi, che al di sopra del canyon la velocità media del vento u_0 sia pari a 2.5 m/s. Impiegando le relazioni proposte da Hotchkiss e Harlow (9.52a, b) si calcoli il profilo verticale della componente longitudinale e verticale del vento nel canyon urbano.

INDICE ANALITICO – Volume 1

A

absorbance. *Vedi* capacità di assorbimento
accumulation mode; 365
acqua precipitabile; 408
adiabatic lapse rate *Vedi* Gradiente adiabatico dell'aria secca
AERMOD; 530
aerosol atmosferico; 364
aerosol primari; 364
aerosol secondari; 364
afelio; 393
agrometeorologia; 765
Aitken mode. *Vedi* Nuceation mode
alba; 397
albedo; 344; 415; 421
aliasing; 160
ambiente urbano; 786
analisi; 495; 497
analisi dimensionale; 544
analisi di similarità; 539
analisi spettrale; 647
analisi spettrale Euleriana; 200
analisi spettrale Lagrangiana; 203; 668
angolo di elevazione solare; 396
angolo di azimut; 330; 381; 396; 398
angolo di declinazione Solare; 394
angolo di elevazione solare; 332; 396; 400
angolo di zenit; 330; 381
angolo orario solare; 396
angolo solare di zenit; 397
angolo solido; 329
angolo solido differenziale; 331
anomalia media; 393
antitrasformata di Fourier; 150; 648
antitrasformata spaziale di Fourier; 159
approssimazione di Boussinesq; 223
approssimazione backward derivata prima; 474
approssimazione backward derivata seconda; 475
approssimazione forward derivata prima; 474
approssimazione sopravvento (*upwind*); 480
aria secca; 10
aria secca
  calore Specifico; 12
  composizione chimica; 10
  conducibilità termica; 12
  densità dell'aria secca; 11
  peso molecolare; 11
  legge di stato dell'aria secca; 11
aria umida; 16
aria umida
  calore specifico; 18
  densità; 18
  equazione di stato; 18
  l'umidità assoluta; 17
  peso molecolare; 18
  rapporto di mescolanza; 18
  tensione di vapore; 17
  umidità relativa; 17
  umidità specifica; 18
argilla; 444
armonica spaziale. *Vedi* Modo di Fourier
assorbimento della radiazione; 335; 346; 351
assorbimento e scattering di radiazione da aerosol; 364
assorbimento monocromatico; 343
atmosfera; 1
atmospheric window; 362; 386; 425
Atmospheric Boundary Layer. *Vedi* Planetary Boundary Layer
attenuazione. *Vedi* estinzione
attrattori; 92

B

banda dell'infrarosso; 328
baroclinicità; 540
barotropicità; 540
bias; 110
bilancio alla sommità dell'atmosfera (TOA); 385
bilancio alla superficie terrestre; 386
bilancio dell'atmosfera; 387
bilancio energetico superficiale; 454; 504
bilancio energetico all'interfaccia aria-mare; 742
bilancio energetico urbano; 794
bilancio radiativo globale; 383
bilancio radiativo superficiale; 440; 504
bilancio superficiale radiazione onda corta; 416
black carbon; 364
bosoni; 338
Boundary Layer. *Vedi:* Strato Limite
boundary layer capovolto; 564
brezza di mare; 750; 760
brezza di terra; 751
brezza urbana; 799
broadband emissivity; 432; 433
broadband transmissivity; 432
broken cloud; 415; 440
Bulk Richardson Number; 507
buoyancy; 559
burst-downward; 544

C

Calcolo delle Variazioni; 512
calore latente di condensazione; 16
calore specifico del suolo; 446
cambio di variabili; 108
campi isotropi; 129
campi Lagrangiani; 67
campi stocastici; 125
campionamenti ideali; 100
campionamento; 100
campionamento discreto; 124
campo delle fluttuazioni; 126
campo di accelerazione; 199
campo di varianze-covarianze *one-point/one-time*; 127
campo di vento iniziale o first guess; 512
campo di moto medio; 126
campo di moto solenoidale; 130
campo lontano; 170
campo stocastico omogeneo; 128
campo stocastico statisticamente stazionario; 128
campo vicino; 170
canopy layer; 625; 768
canyon urbano; 805
canopy vegetale; 503
capacità di assorbimento; 336
capacità di trasmissione radiativa; 336
capacità termica volumetrica; 446
cascata energetica; 171, 247; 251; 302; 647
categoria di stabilità atmosferica; 531
cavity zone; 526
chiusura; 230; 256
chiusura del primo ordine; 256; 259
chiusura del secondo ordine; 257
chiusura di Livello 2; 287
chiusura di Livello 2.5; 281
chiusura di Livello 3; 279
chiusura di Livello 4; 278
chiusura di ordine un mezzo; 259
chiusura di ordine uno e mezzo e due; 276
chiusura di ordine zero; 259
chiusura locale; 257
chiusura tipo K. *Vedi* Chiusura primo ordine
chiusura E-ε; 291
chiusura del secondo ordine *EFB* (*Energy and Flux Budget*); 726
chiusure di Mellor e Yamada; 276
chiusure locali di ordine superiore; 292
chiusure non locali; 257; 293
chiusura non locale di Stull; 306
circolazione di brezza urbana; 799
cloud fraction; 438
cloud streets; 680
coarse-particle mode; 365
coefficiente di correlazione; 114
coefficienti diffusione turbolenta; 230; 260; 263
coefficienti di *drag*; 506
coefficiente di Diffusività Turbolenta per il calore; 567
coefficiente di Diffusività Turbolenta per la quantità di moto; 567
coefficienti di correlazione lineare; 607
coefficienti turbolenti per il calore; 231
coefficiente di trasmissione; 344
coefficiente volumetrico di assorbimento; 336
coefficiente volumetrico di estinzione; 335
coefficiente volumetrico di scattering; 336
coerenza; 156
concentration number; 336; 364
concentrazione di una sostanza in aria; 13
concentrazione di una sostanza in aria
  concentrazione di massa; 13
  densità molecolare; 15
  rapporto di mescolanza; 14
conditional sampling; 678
condizione "*flow-through*; 517
condizione "*no-flow-through*; 516
condizione di Courant; 480
condizioni al contorno; 478; 490
condizioni di Dirichlet; 490
condizioni di von Neumann; 490
condizioni iniziali; 479; 492
coordinata terrain-following; 467
coordinate terrain-following; 515
conducibilità termica del suolo; 446
conduttività termica apparente; 446
congettura di Corrsin; 167
contenuto di acqua liquida; 367
contro-brezza; 750
controgradiente; 243; 269; 270
convergenza; 51
convezione non penetrativa; 636
convezione penetrativa; 636
coordinate terrain-following; 313, 314; 739
copertura vegetale; 765
corpi grigi; 343
corpo bianco; 341; 343
corpo grigio; 341
corpo nero; 337
corpo opaco; 343
correlazione longitudinale; 130
correlazione trasversale; 130
correlazione *two-point/one-time*; 127
cross-covarianza. *Vedi* funzione di covarianza
coerenza; 651
co-spettro; 156; 650
cospettri nel PBL; 668
cospettri nel SL; 664
cross-spettro; 650
costante di Planck; 327
costante di Rydberg; 353
costante solare; 384; 391; 399; 400
costante di Kolmogorov; 654

costante di von Karman; 556; 566; 586
costituenti permanenti; 346
costituenti variabili; 346
crepuscolo; 397
covarianza.; 114
critical dividing streamline; 522
cross section. *Vedi* sezione d'urto
cross-spettri; 155, 156

D

damping depth; 448
Data Assimilation; 495
delta di Dirac; 104
densità areale delle foglie; 771
densità di probabilità congiunta; 112
densità di probabilità cumulata; 112
densità di probabilità Lagrangiane; 163
densità spettrale; 136
densità spettrale Lagrangiana two-sided; 166
densità spettrale one-sided; 151; 152
densità spettrale two-sided; 150
densità spettrale tridimensionale dell'energia cinetica; 652
densità del suolo; 446
density scale depth; 72; 224
derivata materiale; 66
descrizione Euleriana; 6
descrizione Lagrangiana; 6
determinante Jacobiano; 468
deviazione standard; 105
diffrazione; 334
diffusività termica molecolare; 81
diffusività o viscosità turbolenta; 259
diffusività orizzontale; 271
diffusione top-down e bottom-up; 692
diffusività turbolenta per uno scalare; 260
disequazione di Cauchy-Schwartz; 114
displacement height; 625
dissociazione fotochimica; 359
distribuzione
  esponenziale; 107
  Gamma modificata; 367
  Gaussiana. *Vedi* distribuzione normale
  Gaussiana multivariata; 115
  lognormale; 108; 365
  Lorentz; 360
  normale; 107
  uniforme; 107
disturbo. *vedi* vortice
divergenza; 51
divergenza orizzontale; 684
dominio di calcolo; 470
dominio di indagine; 5
DNS (Direct Numerical Simulation); 162; 256
downdraft; 47; 243; 679
drift velocity; 745
dynamic Sublayer; 562; 572; 623
dynamic-Convective Sublayer; 562; 572

E

eclittica; 394
eddy. *Vedi* vortici
*e*ddy diffusion coefficients. *Vedi* Coefficienti di diffusività turbolenta
effetto oasi; 454
effetto serra; 388
efficienza di assorbimento di singola particella; 370
efficienza di scattering di singola particella; 370
ejection; 677
emissività atmosferica efficace; 436
emissività monocromatica; 341; 343
encroachment; 687
energia ad onda lunga; 429
energia rotazionale; 356
energia traslazionale; 355
energia vibrazionale; 357
energia Cinetica turbolenta; 140
energy cascade. *Vedi* cascata energetica
energy spectrum; 159, 188, 189
ENIAC; 508
entrainment. *Vedi* Inglobamento
equazione di conduzione calore nel suolo; 446
equazioni di Eulero-Lagrange; 514
equazione di Poisson; 515
equazione di Schwarzchild; 379; 429
equazione di stato dei gas perfetti; 9
equazione di von Karman–Howarth; 186
equazione idrostatica; 19
equilibrio radiativo planetario; 383
equilibrio termodinamico locale; 338
equilibrium layer; 754
error function; 108
esperimento ideale; 10
estensione verticale del PBL stabile; 707
estinzione; 335
European Centre for Medium-Range Weather Forecast (*Ecmwf*); 492
evaporazione potenziale; 671
evapotraspirazione; 144
expectation. *Vedi* valore atteso

F

farfalla di Lorenz; 92
fattore di rallentamento; 166,
fattore di rallentamento di Corrsin; 203, 204
fenomenologica della situazione paradigmatica; 540
fetch; 628; 752
first-order jump model; 685
first-Order Model; 690

fluidi Newtoniani; 29
fluido viscoso; 28
flussi cinematici; 141
flusso controgradiente; 779
flusso di calore nel terreno; 444
flusso irradianza monocromatica; 331
flusso di Couette; 29
flusso di galleggiamento; 144
flussi turbolenti; 141; 241
flussi Turbolento di quantità di moto; 145
flusso Turbolento di calore latente; 144, 146
flusso Turbolento di Calore Sensibile; 144; 146
fluttuazione; 105
Flux Richardson Number; 532
footprint; 627
forte stabilità; 544
forzante convettiva della turbolenza; 559
forzante meccanica della turbolenza; 559
fotoionizzazione; 359
fotoni; 327
fotosfera; 391
fotosintesi; 766
Free Convection Sublayer; 562; 572
frequenza; 649
frequenza adimensionale; 654
frequenza angolare; 150: 327; 648; 649
frequenza campionaria; 102
frequenza di Brunt-Vaisala; 522
frequenza di oscillazione; 327
friction velocity; 145; 146
frontal zone; 526
fronte di brezza; 750
frontiera riflettente; 492
frontiera trasmissiva; 491
fumigazion; 54
funzioni di auto-correlazione; 119
funzioni di autocovarianza; 119
funzione di autocorrelazione Lagrangiana; 166
funzione di covarianza; 119
funzione di cross-correlazione; 119
funzione di cross-correlazione normalizzata; 120
funzione di energia spettrale; 159
funzione Lagrangiana autocorrelazione normalizzata; 169
funzione di struttura; 124, 128
funzione di struttura Lagrangiana; 196
funzioni di struttura Euleriana; 181
funzione di struttura secondo ordine; 132; 153, 181,182
funzione di struttura longitudinale; 132
funzione di struttura trasversale; 132
funzione Zeta di Rienmann; 342

G

gas serra; 362; 388
geopotenziale; 20
giorno Giuliano; 393
giorno siderale; 68
gradient-based similarity; 634; 705
gradiente adiabatico dell'aria secca; 22
griglia di calcolo; 471
gruppi adimensionali; 255; 545

H

hill; 779

I

idrometeore; 364; 366
indice complesso di rifrazione; 369
*i*ndice di area fogliare; 771
indice di rifrazione; 333
infrarosso atmosferico; 502
infrarosso terrestr*e*; 502
inglobamento; 44; 542; 676
inquinamento atmosferico; 404
ipotesi di Reynolds; 134, 135
ipotesi di Taylor; 137
inertial subrange; 178; 179; 603
inertial sublayer; 787; 799
inner layer; 557; 781
integral Timescale. *Vedi* tempo caratteristico euleriano di scala
integrale di Rienmann,; 103
integrale di Rienmann-Stieltjes; 104
Integrale Stocastico di Fourier-Stieltjes; 157
intensità dell'isola di calore; 797
intensità della turbolenza; 106
interfaccia aria-suolo; 440
interfacial sublayer; 624
intermittenza; 695
Internal Boundary Layer; 752
inversione termica con base al suolo; 706
inward interaction; 678
ionizzazione; 359
ipotesi di Kolmogorov:
  prima ipotesi; 175, 176
  seconda Ipotesi; 178
  per il campo di temperatura; 194
  per la turbolenza Lagrangiana; 196
ipotesi di Taylor; 604; 654
irradianza attinica; 332
irradianza totale; 332
irradianza totale da corpo nero; 342
ISC3; 531
isola di calore urbana; 796
isola fredda; 797
isotropia; 161
isotropia locale; 174, 189
isteresi; 795

L

latitudine; 394; 466
leaf area density. *Vedi* densità areale delle foglie
leaf area index. *Vedi* Indice di area fogliare
legge di
  Beer-Bouguer-Lambert; 335; 345; 378; 406; 741
  Fourier per il flusso di calore nel suolo; 446
  dei due terzi; 183
  dei meno cinque terzi; 190
  Kirchhoff; 338; 343
  Planck; 339
  Rayleigh e Jeans; 339
  seno; 400
  Snell; 334
  Stefan-Boltzmann; 300; 342
  Wien; 341
LES; 162; 258; 464; 509; 539; 636
likelihood. *Vedi* Verosimiglianza
limo; 444
linearizzazione delle equazioni fluidodinamiche; 717
line width; 360
local free convection; 569
Local Similarity; 697
local z-less scaling; 569
longitudine; 394; 466
longwave radiation. *Vedi:* radiazione ad onda lunga
looping; 293
low level jet; 53; 544; 563; 695; 707; 712
LOWTRAN; 405
lunghezza Euleriana di scala; 116, 155
lunghezza d'onda; 651
lunghezza di Dougherty-Ozmidov; 622
lunghezza di Kolmogorov; 176
lunghezza di Monin–Obukhov; 147; 255; 560; 561
lunghezze di rugosità aerodinamica; 553; 558; 624

M

mappa discreta; 89
matrice di Covarianza-Covarianza; 116; 230
matrice di transizione; 296
meandering; 563; 565; 590; 696
media di insieme; 105
mesopausa.; 2
mesosfera; 1
metodo alle Differenze Finite per il bilancio di massa; 487
metodo alle Differenze Finite per il termine di sorgente; 487
metodo alle Differenze Finite per l'avvezione; 477
metodo alle Differenze Finite per la diffusione; 486
metodo alle Differenze Finite per la Diffusione; 486
metodo di Cressman; 495
metodo Force–Restore; 505
metodo multigrid; 521
metodo variazionale; 500
microscala di Taylor; 184; 185
microscala temporale Lagrangiana; 169
misura ideale; 100
mixed Layer. *Vedi* Strato Rimescolato
mixing length theory. *Vedi* Teoria della lunghezza di rimescolamento
modello ad area limitata; 466
modelli *DNS*; 539
modello di encroachment; 690
modello di Gryning Batchvarova; 690
modello di Penman-Monteith; 671
modello di Priestley-Taylor; 674
modello istantaneo PBL
  conservazione dell'umidità; 82
  conservazione della quantità di moto; 73
  conservazione di entalpia; 81
  conservazione di una specie chimica; 83
  conservazione della massa; 69
  equazioni di Navier-Stokes; 75, 78
  equazione di stato dei gas; 79
  forma anelastica equazione di continuità; 72
  forma incomprimibile dell'equazione di continuità; 72
  non linearità delle equazioni; 87
  sensibilità alle condizioni iniziali; 89
  sistema di riferimento; 76
modello operativo del PBL:
  conservazione della massa; 295
  energia cinetica media; 248
  energia cinetica turbolenta media; 244
  equazione di continuità; 219
  equazione di stato dei gas; 218
  equazione energia cinetica turbolenta; 244
  equazioni di Navier-Stokes; 220
  equazione stress di Reynolds; 230; 241; 246
  equazione temperatura potenziale virtuale; 227
  equazioni per l'umidità; 228
  equazione varianza componenti del moto; 236
  equazione varianza temperatura; 239; 240
  modello idrostatico; 225
  modello non idrostatico elastico; 225
  return-to-isotropy term. *Vedi* ridistribuzione della pressione
  ridistribuzione della pressione; 237; 241
modello statistico del PBL; 94, 96
modelli a divergenza nulla; 512
modelli diagnostici; 462
modelli integrali; 464

modelli mass-consistent. *Vedi* modelli a divergenza nulla
modelli prognostici; 462; 465
modelli spettrali per lo strato superficiale; 659
modello di suolo; 503
modello diagnostico di PBL; 510
modello globale; 466
modello prognostico; 463
modello termodinamico; 685
modo di Fourier; 158
MODTRAN; 405
moduli di precisione di Gauss; 513; 521
momenti centrali di ordine n; 105
momenti lagrangiani; 164
momenti; 113
momento centrale del terzo ordine; 106
momento del primo ordine; *Ved*i media di insieme
moto di un fluido
  moto di Couette; 77
  moto laminare; 29, 37
  moto di Poiseuille; 77
  moto turbolento; 37
moti submeso; 695; 696

N

natura duale flusso turbolento calore sensibile; 703
nocturnal Low-Level jet; 712
nodi fantasma; 478; 490
no-slip condition; 28; 275; 487; 516; 553; 579
numero
  di Courant; 480
  di Froude; 522
  di Knudsen; 5
  di Peclet; 187, 192
  di Prandt; 194; 568; 587
  di Prandt turbolento; 264; 622; 732
  di Reynolds; 38, 79
  di Reynolds di rugosità; 624
  di Reynolds dei vortici; 172
  di Richardson Bulk; 254
  di Richardson Critico; 698
  di Richardson di entrainment; 691
  di Richardson Flusso; 569
  di Richardson Gradiente; 569
  di Rossby; 79
  di Rossby superficiale; 553
  di Strouhal; 522
numero d'onda; 158; 651

O

observational innovation; 498
onde
  di Kelvin-Helmholtz; 541; 676; 717
  di gravita; 52; 590; 695; 715
  lineari; 717
  non-lineari; 717
  orografiche; 52
Optimal Interpolation; 497
orografia; 779
outer layer; 557; 781
outward interaction; 677
overrelaxation parameter; 520

P

PAR (Photosyntetically Active Radiation); 769
parametro di Coriolis; 76
parametro di rugosità superficiale; 275
parametro di rugosità per il calore; 623
parametro di rugosità per l'umidità; 624
parametro di rugosità per la quantità di moto; 623
parametri di rugosità urbana; 747
  metodo Micrometeorologico; 790
  metodo Morfometrico; 791
particella lagrangiana; 67, 162
PBL Convettivo; 44
PBL marino; 740
  bilancio di energia; 742
  bilancio radiativo superficiale; 741
  Bulk Richardson Number; 747
  coefficiente di albedo; 741
  coefficiente di estinzione; 741
  parametri di rugosità per calore e umidità; 747
  parametrizzazione degli scambi aria-mare; 747
  relazione di Charnock; 745
PBL Stabile; 52
PBL termoclino del mare; 744
pennacchio urbano; 799
periodo inerziale; 715
perturbazioni a mesoscala; 71
piume termiche; 676
Planetary Boundary Layer; 2
plume
  coning; 54
  lofting; 54
  looping; 46
  meandering; 53
Poor man's Navier-Stokes equation; 89
predictability; 510
pressione; 8
prima legge della termodinamica; 80
primo principio della Termodinamica; 21
principio di Congruenza Dimensionale; 545
principio di Le Chatelier; 310
probabilità di un evento; 101
processi stocastici stazionari; 119
processi stocastici stazionari ergodici; 121
processo di rinnovamento; 677
processo statisticamente stazionario.; 119

processo stocastico; 117
funzione di densità di probabilità; 118
funzioni di covarianza; 118

R

rapporto di Bowen; 669; 743
rapporto psicrometrico; 670
rappresentazione spettrale teoria di Taylor; 172
realizzazione; 100
regime di forte stabilità; 564
regime di stabilità debole; 563
regime di transizione; 565
regime *z-less*; 631
regione di scia; 781
regola di Leibniz; 706
relazione di Eulero; 65, 151
relazioni di Wiener-Khinchine; 150; 155; 159; 188; 200
residual Layer; 50; 54; 706
resistenza aerodinamica; 588
resistenza al trasferimento; 670
respirazione; 766
ridge; 779
roughness layer; 787; 799
roughness sublayer; 553; 579
rough-to-smooth transition; 754

S

sabbia; 444
saturated-adiabatic lapse; 24
scala esterna. *Vedi* scala fondamentale
scala fondamentale; 172
scattering; 334; 335; 346; 347
scattering di Lorenz-Mie; 348
scattering di Rayleigh; 406
scattering di Rayleigh; 348
schema di Blackadar; 298
schema di Crank-Nicholson; 298
schema di Pleim e Chang; 301
schema di Pleim e Chang ACM; 301
Schema di Pleim e Chang ACM2; 303
schema di Stull; 306
schemi numerici alle differenze finite; 472
approssimazione della derivata seconda; 476
avanti nel tempo (forward-in-time, FT); 477
centrale di approssimazione della derivata parziale prima; 476
Crank-Nicolson; 482
Crank-Nicholson per la diffusione; 486
della cavallina (*leap-frog*); 477
diffusività numerica; 480
donor-cell; 481
Lax; 480
operazione di splitting; 487
schema esplicito; 478
schema forward per approssimare la derivata parziale seconda; 474
schema FTCS; 478
schemi approssimati per la derivata seconda; 474
schemi *forward* e *backward* delle derivate spaziali; 473
schemi numerici impliciti per avvezione; 482
semi-Lagrangiani; 484
screen level; 436
seconda Legge di Keplero; 393
segnale; 117
self-correlation; 562; 597; 619; 696
sezione d'urto; 336
sforzo di taglio; 29, 145
shearing stress. *Vedi* sforzo di taglio
shear del vento; 695
shortwave radiation. *Vedi* radiazione ad onda corta
similarità dinamica; 545
sistema caotico; 40, 93
sistema di Coordinate di Riferimento; 7
sistema di riferimento meteorologico. Vedi Sistema di coordinate di riferimento
sistema di riferimento non inerziale; 68
sistema di coordinate sferiche; 330
situazioni barotropica; 273
situazione di background; 494
situazione paradigmatica; 538
size parameter; 347; 370
skewness; 106
slab model; 49; 464; 681; 754
smooth-to-rough transition; 754
SODAR; 293
soil texture; 444
spazio campionario; 100
spazio delle fasi; 111
spectral gap; 136
spessore ottico; 336
spessore ottico monocromatico; 379
spessore ottico normale; 381
spessore ottico totale; 376
spettri della temperatura potenzialenel PBL; 667
spettri delle componenti del vento nel PBL; 666
spettri di potenza; 153
spettri e cospettri temporali; 648
spettri monodimensionali; 160
spettri spaziali; 651
spettro componente verticale vento nel SL; 659
spettro componenti orizzontali vento nel SL; 661
spettro della velocità; 159
spettro di quadratura; 156; 650
spettro elettromagnetico; 327
spettro temperatura potenziale nel SL; 663
spettro streamline; 155
spettro terrestre426
spin down; 246
spin up; 245

spirale di Ekman; 273; 274
spray marino; 364
stabilità statica; 24
stabilità debole; 543
staggered grid; 295
statistica di Bose-Einstein; 338
statistica lagrangiana; 163
statistiche N-point; 127
statistiche one-point; 126
statistiche two-point ed isotropia; 184
stato di riferimento per l'atmosfera; 223
stazionarietà, omogeneità e isotropia; 128
steradiante; 329
stima campionaria;109, 123
stimatore consistente; 111
stimatore non distorto; 110; 114
stomi; 767
strato di Entrainment; 45 t; 540
strato di Ekman; 707
strato di inversione termica; 695; 706
strato Limite; 37
strato Limite Planetario. *Ved*i Planetary Boundary Layer
strato Rimescolato; 45; 540
strato superficiale; 540; 555
stratopausa; 2
stratosfera; 2
stress idrico della pianta; 768
stress di Reynolds; 145, 159
struttura capovolta; 544
strutture a rulli; 680
strutture coerenti; 676
subgrid parameterization; 258; 464
subsidenza; 51; 688
successive overrelaxation; 519
surface Layer. *Vedi* Strato Superficiale
sviluppo in serie di Taylor; 63
sweep; 677

T

tasso dissipazione TKE; 245; 609
tasso di dissipazione viscosa; 236
tasso dissipazione varianza di temperatura; 239; 615
tasso netto di fotosintesi; 766
temperatura
  temperatura di rugiada; 18
  temperatura virtuale; 18
temperatura dell'aria; 8
temperatura potenziale; 21; 22
temperatura di scala; 146
tempo integrale Euleriano di scala; 121, 123, 150, 152, 154; 650
tempo integrale Lagrangiano di scala; 165
tensore degli stress viscosi; 30
teorema
  della *Chain Rule*; 316
  della Correlazione; 649
  della Covarianza
  di Buckingham; 544; 630
  di Fourier; 479; 648
  di Parseval; 649
  di Wiener-Khinchin; 649
  del Limite Centrale; 114
  di Taylor; 169; 473
teoria della lunghezza di rimescolamento; 261
teoria Lagrangiana di Taylor; 168
teoria lineare delle onde; 717
Teoria della Similarità per l'intero PB; 628
  profilo verticale momento terzo e quarto della componente verticale del vento; 646
  profilo verticale del vento; 639
  profilo verticale dissipazione di energia cinetica turbolenta; 645
  profilo verticale della temperatura potenziale media; 641
  profilo verticale varianza della temperatura potenziale; 644
  profilo verticale varianza delle componenti del vento; 642
  profilo verticale dello stress di Reynolds; 646
Teoria della Similarità Locale; 628
  in condizioni stabili; 629
  in PBL convettivo; 636; 646
Teoria della Similarità Monin-Obukhov; 559
  coefficienti di drag e resistenze aerodinamiche; 588
  deviazione standard componente verticale del vento; 592
  gradiente temperatura potenziale e scalare; 567
  gradiente velocità vento; 566
  profilo verticale della velocità media del vento; 579
  Parametro di Struttura C^2_Q; 606
  Parametro di Struttura C^2_T; 605
  Parametro di Struttura C^2_V; 604
  deviazione standard della temperatura potenziale; 598; 602
  deviazione standard dell'umidità; 603
teoria della Similarità di Rossby; 552; 554
teoria statistica delle diffusione turbolenta; 168
teoria del caos; 89
termosfera; 1
thermals; 44; 243; 246; 251; 293; 540; 676
Thermal Internal Boundary Layer; 760
time-lag; 119; 648
TOA; 325; 362; 383; 391
traiettoria; 68, 162
tramonto; 397
transilient Matrix; 295; 298; 306; 308
transizioni elettroniche; 359
transmittance. *Vedi* capacità di trasmisisone radiativa

trasferimento radiativo ascendete; 405
trasferimento radiativo discendente; 405
trasformata di Fourier; 150; 648
trasformata di Fourier Spaziale; 159
trasformate di Fourier Finite; 157
trasformazione di coordinate; 467
trasmissione energia onda lunga in atmosfera; 428
trasmissività monocromatica; 378
trasparenza; 344
traspirazion; 768
tropopausa; 2
troposfera; 2
turbolenza completamente sviluppata; 170
turbolenza convettiva; 251
turbolenza inattiva; 593; 597; 601
turbolenza isotropa; 136
turbolenza localmente isotropa; 173
turbolenza meccanica; 252
turbolenza omogenea; 136
turbolenza stazionaria; 135
turbolenza Lagrangiana; 162

U

umidità di scala; 147
universal Equilibrium Range; 177; 179
updraft; 46, 243; 678
upside-down. *Vedi* boundary layer capovolto
Urban Canopy Layer; 787
u_*-less scaling; 576

V

valor medio statistico; 104
valore atteso; 104, 118
variabile standardizzata; 106
variabili incorrelate; 114
variabili statisticamente indipendenti; 113
variabili stocastiche congiunte; 111
varianza; 105
vegetazione; 765
velocità di entrainment; 51
velocità propagazione onda elettromagnetica; 327
velocità convettiva di scala; 147; 542; 642
velocità di entrainment; 684
velocità Lagrangiana; 162
vento; 7
  ageostrofico; 554
  direzione del vento; 8
  geostrofico; 226; 273; 275; 553
  logaritmico; 274
  velocità del vento; 7
vera anomalia; 393
verosimiglianza; 101
very stable regime; 697
vettore numero d'onda; 158; 651
vicino infrarosso (*NIR*; 769
viscosità cinematica; 30
viscosità dinamica; 29
volume di Controllo; 5
volume average refractive index mixing rule; 376
vortice sottovento; 803
vortici; 43, 148
vorticità; 34

W

wake zone; 526
weakly stable regime; 697

Z

zero-order jump model; 681
zero-Order Model; 687
zero plane displcement height; 768
zona di stagnazione sopravvento; 80

ARPALAZIO

AGENZIA REGIONALE PROTEZIONE AMBIENTALE DEL LAZIO

ISBN 979-12-81184-31-2